1.2 Материалы для управляемой самостоятельной работы студентов учебно-методического комплекса по дисциплине специализации «Оптимизация линейных статических моделей»

1.2 Задачи о диете, раскрое, смесях

1.2.1 Задача о диете (рационе)

связана с проблемой экономного питания людей (или животных), но при условии потребления питательных веществ (витаминов, калорий, минеральных веществ, белков и др.) в количествах, не менее тех, которые необходимы для нормального жизнеобеспечения.

Пусть в течение заданного временного периода пища приготавливается из n продуктов P_j, $j=\overline{1,n}$ и должна содержать m питательных веществ V_i, $i=\overline{1,m}$. Известно, что в течение этого периода необходимо потреблять не менее b_i, $i=\overline{1,m}$ питательного вещества V_i, $i=\overline{1,m}$. Кроме того, известно, что в каждой единице продукта P_j, $j=\overline{1,n}$ содержится a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ питательного вещества V_i, $i=\overline{1,m}$. Заданы также цены c_j, $j=\overline{1,n}$ продуктов. Требуется из данных продуктов составить наиболее дешевую диету (рацион) на данный период.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j, $j=\overline{1,n}$ количество единиц j-го продукта, закупаемого на рассматриваемый период. Очевидно, $x_j \geq 0$, $j=\overline{1,n}$ (j-й продукт можно покупать или не покупать). В x_j единицах продукта P_j содержится $a_{ij}x_j$ питательного вещества V_i. Тогда во всех продуктах содержание вещества V_i равно $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Это содержание не может быть меньше b_i, т.е. получаем ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{1.23}$$

Матрицу

$$A=\left(\begin{array}{c} a_{ij}, \quad j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m} \end{array}\right)$$

называют *матрицей питательности*. Стоимость продукта P_j равна c_jx_j, а всех продуктов — $\sum_{j=1}^n c_jx_j$, ее необходимо минимизировать. Таким образом, математическая модель задачи о диете имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=\overline{1,m}; \quad x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{1.24}$$

или в векторно-матричной форме

$$c'x \to \min, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0. \tag{1.25}$$

Полученную задачу называют *стандартной задачей ЛП с односторонними прямыми ограничениями.*

1.2.2 Задача о раскрое

В мастерскую по изготовлению некоторых изделий поступает материал в рулонах, в каждом из которых α *м*^{2} материала. Для изготовления каждого изделия требуются заготовки m видов по γ_i *м*^{2} каждая, $i=\overline{1,m}$. На каждое изделие требуется β_i $(i=\overline{1,m})$ заготовок i-го вида. Известны n способов раскроя одного рулона на заготовки. Каждый j-й способ характеризуется количеством a_{ij} заготовок i-го вида $(i=\overline{1,m})$, которое получается при j-ом раскрое $(j=\overline{1,n})$. Необходимо определить, какое количество рулонов материала следует раскроить каждым из указанных способов для изготовления N изделий, чтобы отходы были минимальными.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество рулонов материала, которое необходимо раскроить j-м способом $(j=\overline{1,n})$. Ясно, что $x_j \geq 0$, $j=\overline{1,n}$ (рулоны j-м способом можно кроить или не кроить). Количество заготовок i-го вида, полученное в результате раскроя x_j рулонов по j-му способу, равно $a_{ij}x_j$, а количество заготовок i-го вида, полученное в результате раскроя всех рулонов (всеми способами) — $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(i=\overline{1,m})$. Поскольку на изготовление одного изделия идет β_i заготовок i-го вида, то для N изделий необходимо $b_i = N\beta_i$ заготовок $(i=\overline{1,m})$. Полученное количество заготовок i-го вида не может быть меньше этой величины:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=\overline{1,m}.$$

Найдем величину отходов. Сначала отходами будем считать куски материала, которые не являются заготовками. Площадь заготовок i-го вида при j-ом раскрое одного рулона равна $a_{ij}\gamma_i$, а площадь заготовок всех видов — $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\gamma_i$, площадь рулона равна α. Следовательно, отходы при раскрое одного рулона по j-му способу равны

$$c_j = \alpha - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\gamma_i, \quad j=\overline{1,n}, \tag{1.26}$$

отходы при раскрое x_j рулонов по j-му способу — c_jx_j, суммарные отходы от раскроя всех рулонов (всеми способами) — $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$. Эту сумму необходимо минимизировать. Таким образом, математическая модель задачи о раскрое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i=\overline{1,m}; \quad x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n}$$

или в векторно-матричной форме

$$c'x \to \min, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0.$$

Далее отходами будем считать также и заготовки, которые не используются для изготовления N изделий, т.е. лишние заготовки. Как было подсчитано выше, заготовок i-го вида будет получено $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, а для изготовления N изделий их требуется лишь b_i. Следовательно, количество лишних заготовок i-го вида равно $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ $(i = \overline{1,m})$, их площадь равна

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) \cdot \gamma_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

а площадь всех лишних заготовок —

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) \gamma_i.$$

Таким образом, в этом случае целевая функция задачи ЛП будет иметь следующий вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) \gamma_i \to \min.$$

1.2.3 Задача о сплавах (смесях)

Для производства некоторого сплава используют n различных шихтовых материалов A_j, $j = \overline{1,n}$. Химический состав сплава определяется содержанием в нем химических элементов (или соединений) B_i, $i = \overline{1,m}$. Известна доля a_{ij} химического элемента B_i в единице шихтового материала A_j. Очевидно, эти параметры в постановке задачи должны удовлетворять неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \leq 1, \quad j = \overline{1,n},$$

т.к. в шихтовом материале A_j могут содержаться и другие химические элементы, кроме указанных. Готовый сплав должен иметь строго определенный состав, который задается долями β_i химических элементов B_i, $i = \overline{1,m}$. Ясно, что эти параметры задачи должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1.$$

При заданной стоимости c_j единицы шихтовых материалов A_j, $j = \overline{1,n}$, найти количество каждого из них, обеспечивающее получение заданного количества сплава в объеме α при минимальной общей стоимости используемых шихтовых материалов.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество шихтового материала A_j, используемого для получения заданного количества сплава ($j = \overline{1,n}$). Ясно, что $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ (каждый из шихтовых материалов может использоваться или не использоваться). Количество химического элемента B_i в указанном количестве шихтового материала A_j равно $a_{ij}x_j$, а суммарное количество химического элемента B_i во всех шихтовых материалах — $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Это количество должно быть равно величине $b_i = \alpha\beta_i$, которая представляет собой количество химического элемента B_i во всем сплаве объема α:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Стоимость шихтового материала A_j равна c_jx_j, стоимость всех шихтовых материалов — $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$. Ее необходимо минимизировать. Таким образом, математическая модель задачи о сплавах имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

или в векторно-матричной форме

$$c'x \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Рассмотрим некоторые изменения в постановке задачи. Во-первых, будем считать, что количество сплава, которое необходимо произвести, должно быть не меньше объема α_* и не больше α^*. Величина α_* может характеризовать суммарный заказ от потребителей, а величина α^* — прогнозируемый сбыт производимого сплава ($\alpha^* \geq \alpha_*$). Тогда получим следующие ограничения

$$b_{*i} \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i^*, \quad i = \overline{1,m},$$

где $b_{*i} = \alpha_*\beta_i$, $b_i^* = \alpha^*\beta_i$, $i = \overline{1,m}$.

Во-вторых, предположим, что шихтовый материал A_j можно закупать в количестве, не превышающем величину d_j^*, $j = \overline{1,n}$. И, кроме того, у самого предприятия имеется каждый шихтовый материал в количестве d_{*j}, $j = \overline{1,n}$, которое необходимо полностью израсходовать. Тогда получим ограничения

$$d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, \quad j = \overline{1,n}.$$

В-третьих, пусть вместо стоимости шихтовых материалов задана прибыль c_j на единицу используемого шихтового материала A_j. И задача состоит в максимизации суммарной прибыли:

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max.$$

1.2.4 Управление металлургическим процессом

Некоторые металлургические процессы состоят из двух основных операций: составление сырьевой смеси (шихты) и плавки. Как правило, вторую операцию считают фиксированной по затратам и выпуску. Тогда проблема планирования металлургического процесса сводится к задаче составления шихты с наименьшими затратами.

Допустим, что для составления шихты используется n различных видов сырьевых материалов. Через x_j, $j = \overline{1,n}$ обозначим используемое количество сырья j-го вида. Предполагается заданным следующее: покомпонентный состав каждого вида сырья, т.е. величины α_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, которые равны доле i-й компоненты (химического элемента или соединения) в единице j-го вида сырья; требуемый для плавки состав шихты в виде долевых коэффициентов γ_i, $i = \overline{1,m}$ этих компонент. В связи с этим должны выполняться условия материального баланса для каждой компоненты:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \gamma_i \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad i = \overline{1,m} \tag{1.27}$$

(здесь $\gamma_i \sum_{j=1}^{n} x_j$ — количество i-й компоненты в сплаве, $\alpha_{ij} x_j$ — количество i-й компоненты в j-ом сырье ($i = \overline{1,m}$), а, следовательно, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$ — количество i-й компоненты во всех видах сырья). Перепишем (1.27) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} - \gamma_i) x_j = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Поскольку операция плавки фиксирована, то фиксированы и затраты шихты b, которые равны объему приготавливаемой шихты:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b.$$

Пусть R — фиксированный доход от продуктов плавки за вычетом фиксированных расходов, c_j, $j = \overline{1,n}$ — цены на сырьевые материалы. Тогда прибыль от результатов металлургического процесса будет равна

$$R - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Поскольку R — фиксированное число, то максимизация прибыли равносильна минимизации затрат на сырье. Введем обозначения:

$$a_{ij} = \alpha_{ij} - \gamma_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

В результате математическая модель задачи управления металлургическим процессом принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = b; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

1.3 Задачи сельскохозяйственного производства

1.3.1 Задача о посевах

Эффективность возделывания n культур A_j, $j = \overline{1,n}$ (в расчете на один гектар посевной площади) характеризуется пятью показателями: урожайностью α_j *ц/га*, затратами механизированного a_{1j} *маш.-ч/га* и ручного труда a_{2j} *чел.-дн./га*, применением органических a_{3j} *т/га* и неорганических удобрений a_{4j} *т/га* ($j = \overline{1,n}$). Имеются и другие показатели, которые не будем учитывать. Известно, что количество пашни равно b_0 *га*, а ресурсы механизированного и ручного труда составляют соответственно b_1 *маш.-ч* и b_2 *чел.-дн.*, органических и неорганических удобрений — соответственно b_3 и b_4 *т*. Известна также прибыль p_j от реализации одного центнера культуры A_j, $j = \overline{1,n}$. Требуется найти оптимальное сочетание посевов всех культур, обеспечивающее максимальную прибыль от реализации произведенной продукции (предполагается, что вся произведенная продукция реализуется).

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество пашни (*га*), занятое под культуру A_j, $j = \overline{1,n}$. Ясно, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = b_0; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

(все посевные площади должны быть использованы, при этом каждая культура может либо возделываться, либо нет). Для остальных показателей имеем очевидные неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,4} \tag{1.28}$$

(ресурсы не могут быть превышены). При указанной урожайности α_j культуры A_j и величине p_j прибыли от реализации одного центнера этой культуры величина $c_j = \alpha_j p_j$ означает прибыль от одно гектара пашни, если она будет использована под культуру A_j, $j = \overline{1,n}$. Тогда суммарная прибыль равна $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, и ее следует максимизировать. Таким образом, получим математическую модель задачи о посевах:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = b_0; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,4}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Изменим постановку задачи. Пусть сельскохозяйственное предприятие, производящее продукцию, имеет обязательный госзаказ на некоторые виды культур в размере γ_{*j}, $j \in J_1 \subset J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, известно прогнозируемое количество γ_j^* культуры A_j, $j \in J_2 \subset J$, которое предприятие сможет реализовать. Полагая $\gamma_{*j} = 0$, $j \in J \setminus J_1$; $\gamma_j^* = 0$, $j \in (J \setminus J_2) \setminus J_1 = J \setminus (J_1 \cup J_2)$; $\gamma_j^* = \gamma_{*j}$, $j \in J_1 \setminus J_2$, вместо неравенств $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ придем к неравенствам

$$d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, \quad j = \overline{1,n},$$

где

$$d_{*j} = \gamma_{*j}/\alpha_j; \quad d_j^* = \gamma_j^*/\alpha_j, \quad j = \overline{1,n},$$

которое следует из неравенств

$$\gamma_{*j} \leq \alpha_j x_j \leq \gamma_j^*, \quad j = \overline{1,n}$$

(здесь $\alpha_j x_j$ — объем произведенной культуры A_j при урожайности α_j и площади x_j занимаемой культурой A_j пашни).

Далее, если исключить безработицу и беспричинный простой сельскохозяйственной техники, точнее, учесть полное израсходование трудовых ресурсов, то в ограничениях (1.28) первые два неравенства следует заменить на равенства.

1.3.2 Задачи животноводства

Одной из проблем животноводства является **задача выбора рациона откорма скота.** Эта задача относится к типам задач о диете, о смесях. Они были уже рассмотрены выше. Однако здесь появляются некоторые особенности, которые влекут за собой дополнительные ограничения.

Пусть хозяйство располагает n видами кормов, запасы которых на планируемый период составляют d_j^* единиц ($j = \overline{1,n}$).

Известны следующие характеристики:

a_{0j} — количество кормовых единиц в единице корма j-го вида ($j = \overline{1,n}$);

a_{ij} — количество единиц i-го питательного вещества (белки, витамины, кальций и т.д.) в единице корма j-го вида ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$);

b_0 — минимальная питательная норма на стадо;

b_i — минимальное количество i-го питательного вещества на стадо ($i = \overline{1,m}$);

c_j — себестоимость единицы корма j-го вида ($j = \overline{1,n}$).

Чтобы разнообразить рацион, представляется целесообразным иметь корма j-го вида не менее d_{*j} единиц ($j = \overline{1,n}$). Согласно зоотехническим нормам, сочные и грубые корма должны быть в соответствующей пропорции. Предположим, что количество сочных кормов должно быть в α раз больше грубых.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество кормов j-го вида, необходимое для заготовки на планируемый период

$(j=\overline{1,n})$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ — количества сочных кормов, $x_{n_1+1}, \ldots, x_n$ — количества грубых кормов. Исходя из постановки задачи, получаем модель:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=\overline{0,m};$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_j = \alpha \sum_{j=n_1+1}^{n} x_j; \quad d_{*j} \leq x_j \leq d_j^*, \quad j=\overline{1,n}$$

(здесь $c_j x_j$ — себестоимость j-го корма, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ — себестоимость всех кормов, ее нужно минимизировать; $a_{0j} x_j$ — количество кормовых единиц в j-ом корме, $\sum_{j=1}^{n} a_{0j} x_j$ — количество кормовых единиц во всех кормах, оно не может быть меньше указанной нормы в b_0 единиц; $a_{ij} x_j$ — количество i-го питательного вещества в j-ом корме, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ — количество i-го питательного вещества во всех кормах, эта величина не может быть меньше указанного минимального количества b_i, $i=\overline{1,m}$; $\sum_{j=1}^{n_1} x_j$ — количество сочных кормов, оно должно быть в α раз больше количества $\sum_{j=n_1+1}^{n} x_j$ грубых кормов).

Еще одной задачей животноводства является **задача о специализации животноводства**, или **задача о рациональной структуре животноводства.**

Пусть задан рациональный ассортимент животноводческой продукции, т.е. требуемое соотношение между различными типами продукции (мясо, молоко, шерсть и т.д.), и известны возможности кормовой базы. Требуется определить структуру отраслей животноводства (т.е. численность каждого вида скота) исходя из максимизации продукции.

Предполагается, что экономный рацион откорма разных видов скота уже определен, например, в соответствии с задачей о рационе, рассмотренной выше.

Известны следующие величины:

a_{ij} — норма потребления корма i-го сорта в расчете на одну единицу скота j-го вида $(j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m_1})$;

b_i — запасы корма i-го сорта $(i=\overline{1,m_1})$;

α_{sj} — объем продукции животноводства s-го типа от одной головы скота j-го вида $(j=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m_2})$;

$\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_{m_2}$ — заданный ассортимент различных типов продукции.

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j $(j=\overline{1,n})$ количество голов скота j-го вида, x_{n+1} — суммарный объем всей продукции животноводства, который следует максимизировать. Тогда $\lambda_s x_{n+1}$ — количество продукции s-го типа, планируемое к производству. С другой стороны, исходя из данных задачи, ее количество равно $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj} x_j$, т.е.

имеем ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj} x_j = \lambda_s x_{n+1}, \quad s = \overline{1, m_2}.$$

Остальные ограничения очевидны:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

(потребление корма каждого сорта не может превысить имеющихся запасов; скот каждого вида можно разводить или нет). Таким образом, получаем математическую модель задачи о рациональной структуре животноводства:

$$x_{n+1} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1};$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj} x_j - \lambda_s x_{n+1} = 0, \quad s = \overline{1, m_2}; \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

1.4 Задачи выбора технологических процессов

1.4.1 Оптимальное использование различных технологий

В некоторых случаях можно указать несколько технологических способов (технологических процессов), которые по-разному используют производственные факторы (ресурсы) для выпуска однородной продукции. Пусть для изготовления однородной продукции используется m факторов производства. Технологический способ можно представить как «рецепт», указывающий пропорции, в которых различные продукты требуются при данном способе производства. Таким образом, под *технологическим способом (процессом) производства* иногда понимается набор из $m+1$ числа, которые определяют затраты m факторов и выпуск продукции при единичной интенсивности этого технологического способа. В качестве *интенсивности технологического процесса* чаще всего рассматривают время. В этом случае каждый технологический способ определяется m числами, характеризующими затраты факторов в единицу времени, и количеством продукции, выпускаемой за этот же период.

Предположим, что предприятие имеет возможность использовать n технологических способов для производства однородной продукции, при этом затрачиваются m факторов. Обозначим через a_{ij} количество i-го фактора, затрачиваемого при работе по j-му технологическому способу за единицу времени ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), q_j ($j = \overline{1, n}$) — производительность при работе по j-му технологическому способу (объем продукции, производимой по j-му способу за единицу времени). Пусть b_i — объем ресурсов i-го производственного фактора, которым располагает предприятие ($i = \overline{1,m}$). Требуется найти время, в течение которого используется каждый технологический способ для производства максимального количества продукции. При этом время работы по j-му способу ограничено величиной d_j ($j = \overline{1,n}$).

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_j ($j = \overline{1,n}$) интенсивность j-го технологического способа (время работы). Тогда $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор интенсивностей всего производства. Введем в рассмотрение матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{ij}, \quad j = \overline{1,n} \\ i = \overline{1,m} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей затрат*, и вектор $z = Ax$ — *вектор затрат*. Обозначим через $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *вектор производительностей*. Тогда $q'x$ — объем выпуска продукции предприятием. Его следует максимизировать. Из постановки задачи следует, что $z \le b$, $0 \le x \le d$, где $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи принимает вид

$$q'x \to \max, \quad Ax \le b, \quad 0 \le x \le d.$$

В этой задаче под интенсивностью x_j j-го процесса можно было бы понимать объем выпуска продукции этим процессом. Тогда a_{ij} — затраты i-го фактора на единицу продукции, выпускаемого j-м способом. В этом случае $q_j = 1$, $j = \overline{1,n}$.

Приведем другую интерпретацию задачи оптимального использования технологий, которая рассматривает не один выпускаемый продукт, а несколько. В каждом технологическом способе одни из этих продуктов могут производиться, другие затрачиваться. Пусть таких продуктов будет m, а технологических способов — n. Тогда под *j-м технологическим способом (процессом)* понимается набор $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ из m чисел, причем если $a_{ij} > 0$, то i-й товар в этом процессе производится, если $a_{ij} < 0$ — потребляется. Матрица A в этом случае называется *матрицей производительности.*

Интенсивностью (или *уровнем*) *j-го технологического процесса* называется такая величина x_j, что $a_{ij}x_j$ — количество затрачиваемого или выпускаемого i-го продукта j-м технологическим способом. Таким образом, величина a_{ij} означает, как и выше, количество произведенного или потребленного i-го продукта при единичной интенсивности j-го способа.

Как видно из последних определений технологических способов и интенсивностей, в них величины x_j конкретно не определены и могут означать разные понятия. Для каждой конкретной задачи эти понятия уточняются. При этом всегда интенсивность каждого технологического способа является неотрицательной величиной: $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Из этих же определений следует, что при заданных интенсивностях x_j $(j = \overline{1, n})$ технологических способов общий объем произведенного предприятием i-го продукта равен $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. Если эта величина отрицательна, то i-й продукт потребляется, а не производится.

1.4.2 Производство продукции с минимальными затратами при заданном спросе

Пусть имеется возможность выпуска m товаров и при этом используется n разных технологических способов, как потребляющих, так и затрачивающих эти товары. Предположим, что спрос на i-й товар равен b_i, а стоимость работ по производству товаров j-м технологическим способом при единичной интенсивности равна c_j. Требуется найти план производства, обеспечивающий удовлетворение спроса с минимальными затратами.

Сохраняя обозначения предыдущего пункта для интенсивностей и затрат, введем *вектор трудовых затрат* $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ на все технологические способы при их единичной интенсивности и *вектор спроса на товары* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Тогда при выбранном векторе интенсивностей x общие затраты составят величину $c'x$, которую следует минимизировать, а поскольку спрос, по крайней мере, следует удовлетворить, то $Ax \geq b$. Таким образом, математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид

$$c'x \to \min, \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0.$$

1.4.3 Выпуск продукции цементного завода

Пусть имеется возможность производства n различных видов и марок цемента. Весь процесс состоит из трех основных операций: 1) изготовление полуфабриката, называемого *шламом*, в сырьевой мельнице (для этого требуется сырье: известь, глина, вода); 2) обжиг шлама во вращающейся цементной мельнице и получение в результате другого полуфабриката *клинкера*; 3) помол клинкера в третьей мельнице с добавлением *гипса* и *граншлака* для получения цемента определенной марки. Каждая из мельниц при производстве цемента расходует электроэнергию.

Для упрощения модели считаем, что первые две операции фиксированы, т.е. фиксированы затраты сырья и выпуск продукции первых двух мельниц. Будем характеризовать их двумя параметрами: предельным объемом r_1^* (*тыс.т*) выпуска клинкера и затратами p_1 (*тыс.р. на тонну клинкера*).

Третий участок состоит из однотипных мельниц, которые могут выполнять n различных операций (по количеству марок цемента).

При таком упрощенном описании задачу планирования выпуска цемента различных марок можно рассматривать как задачу выбора интенсивностей n технологических способов, определяющих выпуск цемента n марок, причем за интенсивность каждого способа принимают время работы мельниц на каждой из n возможных операций.

Обозначим через z_j, $j = \overline{1,n}$ указанные интенсивности (*тыс.час*).

Для описания каждой операции используются нормативные данные:

α_j $(j = \overline{1,n})$ — выпуск цемента j-й марки при единичной интенсивности (количество тыс. тонн цемента j-й марки, выпускаемого за тыс. часов работы мельницы);

γ_{1j} $(j = \overline{1,n})$ — доля (по весу) клинкера,

γ_{2j} $(j = \overline{1,n})$ — доля гипса,

γ_{3j} $(j = \overline{1,n})$ — доля граншлака в цементе j-й марки (все величины берутся из рецептуры цемента j-й марки);

a_{1j} $(j = \overline{1,n})$ — затраты клинкера при единичной интенсивности j-го способа,

a_{2j} $(j = \overline{1,n})$ — затраты гипса,

a_{3j} $(j = \overline{1,n})$ — затраты граншлака (величины рассчитываются по α_j и γ_{ij} по формулам $a_{ij} = \alpha_j \gamma_{ij}$);

a_{4j} $(j = \overline{1,n})$ — суммарные нормативные затраты (в стоимостном выражении) электроэнергии и мелющих тел;

T — ресурс времени мельниц.

Кроме того, заданы: отпускные цены цементов d_j, $j = \overline{1,n}$; затраты на используемое сырье p_i, $i = \overline{1,4}$ (клинкер, гипс, граншлак, электроэнергия); ограничения снизу по выпуску q_{*j}, $j = \overline{1,n}$; предельный объем выпуска клинкера r_1^*.

Введем следующие переменные: q_j — объем выпуска цемента j-й марки, $j = \overline{1,n}$; r_i — затраты соответственно гипса, граншлака и электроэнергии, $i = \overline{2,4}$.

Ставится задача максимизации дохода цементного завода. Под доходом в данном случае понимается разность между объемом выпуска в стоимостном выражении и издержками на сырье. С учетом введенных обозначений математическая модель этой задачи имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} d_j q_j - \sum_{i=2}^{4} p_i r_i - p_1 r_1^* \to \max, \quad q_j = \alpha_j z_j \geq q_{*j}, \quad j = \overline{1,n}; \tag{1.29}$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j, \quad i = \overline{1,4}; \quad r_1 \leq r_1^*; \quad \sum_{j=1}^{n} z_j \leq T.$$

Исключим из задачи (1.29) переменные q_j, $j=\overline{1,n}$, и r_i, $i=\overline{2,4}$. Для этого воспользуемся выражениями для этих переменных через переменные z_j, $j=\overline{1,n}$ из этой задачи, а также введем обозначение $c_j = d_j\alpha_j - \sum_{i=2}^{4} p_i a_{ij}$, $j=\overline{1,n}$. Величина c_j означает доход, получаемый от j-го технологического способа при его единичной интенсивности (без учета затрат на изготовление клинкера). Поскольку величина $p_1 r_1^*$ фиксирована, то ее можно опустить и учесть в итоговом результате после решения задачи. Таким образом, задача (1.29) эквивалентна следующей экстремальной задаче:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{1j} z_j \le r_1^*; \tag{1.30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \le T; \quad z_j \ge \frac{q_{*j}}{\alpha_j}, \quad j=\overline{1,n}.$$

2.4.3 Замена опоры. Правило длинного шага

В предыдущем пункте опора заменялась в момент, когда появлялся первый нуль σ^1 у неопорных компонент коплана $\overline{\delta}_j$, $j \in J_н$. Это свойство и дало название правилу короткого шага.

Здесь с целью повышения эффективности метода рассматривается возможность дальнейшего движения вдоль t до полной релаксации двойственной целевой функции. Для этого предварительно выясним характер поведения функции $\varphi(\overline{\lambda})$, $\sigma \geq 0$, при дальнейшем движении вдоль t.

Предположим сначала, что $\{x, J_{on}\}$ — двойственно невырожденный опорный план, и в точке $\sigma = \sigma^1$ в нуль обращается лишь одна компонента вектора $\overline{\delta}_н$: $\overline{\delta}_{j_1} = 0$; $\overline{\delta}_j \neq 0$, $j \in J_н \setminus j_1$. Тогда в двойственной целевой функции

$$\varphi(\overline{\lambda}) = b^{'}\overline{y} - d_*^{'}\overline{v} + d^{*'}\overline{w}$$

при преходе через точку $\sigma = \sigma^1 = \sigma_{j_1}$ нарушается линейный закон поведения только у одного выражения

$$\xi_{j_1}(\sigma) = -d_{*j_1}\overline{v}_{j_1} + d^*_{j_1}\overline{w}_{j_1}. \tag{2.76}$$

Исследуем эту функцию. Учитывая (2.40), видим, что (2.76) — это непрерывная кусочно-линейная функция, ее график имеет излом в точке $\sigma = \sigma^1$, которому соответствует скачок скорости изменения $\xi_{j_1}(\sigma)$, равный

$$\Delta\alpha^{\xi}_{j_1} = \begin{cases} (d^*_{j_1} - d_{*j_1})t_{j_1} > 0 \ \text{ при } \ \delta_{j_1} = \Delta_{j_1} < 0, \ t_{j_1} > 0; \\ (d_{*j_1} - d^*_{j_1})t_{j_1} > 0 \ \text{ при } \ \delta_{j_1} = \Delta_{j_1} > 0, \ t_{j_1} < 0. \end{cases}$$

Таким образом, при переходе через $\sigma = \sigma^1$ скорость изменения функции (2.76) получает положительной приращение

$$\Delta\alpha^{\xi}_{j_1} = (d^*_{j_1} - d_{*j_1})|t_{j_1}|.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда на двойственно невырожденном опорном плане $\{x, J_{on}\}$ в точке $\sigma = \sigma^1$ обращается в нуль одновременно несколько компонет вектора $\overline{\delta}_н$, $\sigma \geq 0$. Обозначим через

$$J_1 = \{j \in J_н\colon \ \overline{\delta}_j = 0 \ \text{ при } \ \sigma = \sigma^1\}.$$

Теперь в точке $\sigma = \sigma^1$ изменяется закон поведения у всех функций

$$\xi_j(\sigma) = -d_{*j}\overline{v}_j + d^*_j\overline{w}_j, \quad j \in J_1, \quad \sigma \geq 0.$$

В двойственную целевую функцию указанные функции входят аддитивно и аналогично функции (2.76). Поэтому скачок $\Delta\alpha^1$, который испытывает в точке $\sigma = \sigma^1$ скорость изменения функции $\varphi(\overline{\lambda})$ складывается из скачков скоростей функций $\xi_j(\sigma)$, $j \in J_1$, т.е.

$$\Delta\alpha^1 = \sum_{j \in J_1} \Delta\alpha_j^{\xi} = \sum_{j \in J_1} (d_j^* - d_{*j})|t_j|.$$

Двойственная целевая функция $\varphi(\overline{\lambda})$, $\sigma \geq 0$, после точки $\sigma = \sigma^1$ ведет себя вдоль t линейно относительно σ и изменяется со скоростью

$$\alpha^1 = \alpha^0 + \Delta\alpha^1,$$

где α^0 — подсчитанная по формуле (2.70) скорость изменения двойственной целевой функции на участке $0 \leq \sigma < \sigma^1$. Этот закон сохраняется до появления следующего нуля σ^2 у функций $\overline{\delta}_j$, $j \in J_н$.

Пусть σ^{k-1}, σ^k; $0 < \sigma^{k-1} < \sigma^k$, — два произвольных соседних нуля у функций $\overline{\delta}_j$, $j \in J_н$; α^{k-1} — скорость изменения двойственной целевой функции на участке $\sigma^{k-1} \leq \sigma < \sigma^k$, $J_k = \{j \in J_н\colon\ \overline{\delta}_j = 0$ при $\sigma = \sigma^k\}$. В точке $\sigma = \sigma^k$ скорость изменения двойственной целевой функции получает положительное приращение

$$\Delta\alpha^k = \sum_{j \in J_k} (d_j^* - d_{*j})|t_j|$$

и на отрезке $\sigma^k \leq \sigma < \sigma^{k+1}$ становится равной

$$\alpha^k = \alpha^{k-1} + \Delta\alpha^k.$$

Теперь приступим к построению новой реализации схемы (2.62). Как показано в п.2.3, при релаксации двойственной целевой функции уменьшается мера неоптимальности соответствующей опоры. Поэтому найдем такую точку, в которой функция $\varphi(\overline{\lambda})$ достигает минимума при движении вдоль t. Функция $\varphi(\overline{\lambda})$ достигает минимума в точке $\sigma = \sigma^{k_0}$, где k_0 — такое число, что

$$\alpha^{k_0-1} < 0, \quad \alpha^{k_0} \geq 0 \tag{2.77}$$

(число k_0 всегда существует, т.к. $\inf \varphi(\overline{\lambda}) > -\infty$).

По построению,

$$\varphi(\overline{\lambda}) = \varphi(\lambda) + \sum_{k=0}^{k_0-1} \alpha^k(\sigma^{k+1} - \sigma^k), \quad \sigma^0 = 0. \tag{2.78}$$

Осталось построить опору: $\overline{J}_{on} = (J_{on} \setminus j_0) \cup j_*$. Могут реализоваться две возможности: 1) $|J_{k_0}| = 1$, 2) $|J_{k_0}| > 1$.

В первом случае множество J_{k_0} состоит из одного элемента, который и возьмем в качестве j_*.

В случае 2) элементы множества J_{k_0} упорядочим произвольным образом (например, по их возрастанию):

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_q;\quad \bigcup_{i=1}^{q} s_i = J_{k_0};\quad s_1 < s_2 < \cdots < s_q, \tag{2.79}$$

т.е. считаем, что в точке $\sigma = \sigma^{k_0}$ компонента $\overline{\delta}_{s_1}$ достигает нуля первой, $\overline{\delta}_{s_2}$ — второй и т.д. Перебирая индексы из J_{k_0} в порядке (2.79), найдем индекс s_p, для которого

$$\alpha_{s_{p-1}} = \alpha^{k_0-1} + \sum_{i=1}^{p-1}(d^*_{s_i} - d_{*s_i})|t_{s_i}| < 0;$$
$$\alpha_{s_p} = \alpha_{s_{p-1}} + (d^*_{s_p} - d_{*s_p})|t_{s_p}| \geq 0.$$

Из (2.77) следует, что индекс s_p всегда существует. Положим $j_* = s_p$. Как и в п.2.4.2 показывается, что $\overline{J}_{on}$ — опора, $\overline{\lambda}$ — сопровождающий ее двойственный план. Схема (2.62) полностью реализована.

Описанную в данном пункте процедуру замены опоры назовем правилом длинного шага. Она при $k_0 = 1$ переходит в правило короткого шага.

Заменой $J_{on} \to \overline{J}_{on}$ заканчивается вторая часть итерации $\{x, J_{on}\} \to \{\overline{x}, \overline{J}_{on}\}$ адаптивного метода с длинным шагом.

Согласно (2.78), оценка субоптимальности

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_{on}) = (1-\theta^0)\beta(x, J_{on}) + \sum_{k=0}^{k_0-1}\alpha^k(\sigma^{k+1} - \sigma^k),\quad \sigma^0 = 0.$$

Если $\beta(\overline{x}, \overline{J}_{on}) \leq \varepsilon$, то процесс решения завершается на ε-оптимальном плане $\overline{x}$. При $\beta(\overline{x}, \overline{J}_{on}) > \varepsilon$ переходим к новой итерации с новым опорным планом $\{\overline{x}, \overline{J}_{on}\}$.

Пусть теперь $\{x, J_{on}\}$ — двойственно вырожденный опорный план. При построении сопровождающего псевдоплана множество $\{j \in J_н\colon\ \delta_j = 0\}$ разбивалось на две части (одна часть индексов включалась в $J^+_н$, другая — в $J^-_н$). Каждый "переход через нуль": $\delta_j = 0$, $t_j < 0$, $j \in J^+_н$, или $\delta_j = 0$, $t_j > 0$, $j \in J^-_н$, вызывает скачок скорости изменения двойственной целевой функции уже в точке $\sigma = \sigma^1 = \sigma^0 = 0$:

$$\Delta\alpha^1 = \Delta\alpha^0 = \sum_{j \in J_1 = J_0}(d^*_j - d_{*j})|t_j| \geq 0,$$

где $J_0 = \{j \in J^+_н\colon\ \delta_j = 0,\ t_j < 0\} \cup \{j \in J^-_н\colon\ \delta_j = 0,\ t_j > 0\}$.

Поэтому в случае двойственной вырожденности "начальная" скорость изменения двойственной целевой функции (т.е. скорость на "начальном" участке $0 = \sigma^0 = \sigma^1 \leq \sigma < \sigma^2$) равна

$$\alpha^1 = -|æ_{j_0} - \overline{x}_{j_0}| + \sum_{j \in J_0}(d^*_j - d_{*j})|t_j|.$$

Если $J_0 \neq \emptyset$, то может оказаться, что $\alpha^1 \geq 0$, т.е. $\sigma^* = \sigma^1 = \sigma^0 = 0$.

2.4.4 Обсуждение

Изложенный выше алгоритм называется адаптивным из-за его свойства использовать всю начальную и текущую информацию для эффективного построения субоптимальных планов. Этот метод принадлежит к тому же классу, что и прямой симплекс-метод. Однако универсальный симплекс-метод обладает рядом недостатков.

1). Он использует на своих итерациях весьма специфические базисные планы, у которых все неопорные (небазисные) компоненты критические (граничные). И поэтому симплекс-метод не может использовать хорошую начальную информацию, которую могут дать специалисты-эксперты в данной практической области. Трудно ожидать, что начальный план экспертов, который довольно часто оказывается близким к оптимальному, будет иметь такой специфический вид.

2). Специфичность базисного плана в классическом симплекс-методе не позволяет оценить его на близость к оптимальному по значению целевой функции. И поэтому для останова процесса решения используется только критерий оптимальности, т.е. процесс решения продолжается до получения оптимального плана. На практике же часто достаточно при заданной гарантированной оценке качества ε получить ε-оптимальный план. В этом случае могут существенно уменьшиться затраты на решение задачи. Тем более, что в большом количестве задач основной прирост значения целевой функции приходится на первые итерации. Последующие итерации лишь выбирают малый процент этого значения. В результате кроме увеличения продолжительности процесса решения возможно получение из-за накопления ошибок округления вместо оптимального плана некоторого вектора, вообще весьма далекого от плана задачи.

3). Из-за своей специфичности симплекс-метод трудно приспособить к задачам оптимального управления.

Анализ классического симплекс-метода с указанных позиций привел к созданию новых методов ЛП. Прежде всего, в начальной информации элементы разной природы — план и опора (базис) — были отделены друг от друга. Новый объект — опорный план — естественное обобщение понятия базисного плана. Построенный на основе нового понятия прямой опорный метод, итерации которого максимально близки к итерациям симплекс-метода, позволял использовать любую начальную информацию и давал возможность останова процесса решения по достижении ε-оптимального плана. Однако, как и в симплекс-методе, в прямом опорном методе направление улучшения плана было элементарным (на каждой итерации изменялась только одна неопорная компонента плана). Это направление соответствует максимальной скорости изменения целевой функции вдоль элементарного направления.

Между тем, направление максимального приращения целевой функции в пространстве всех неопорных компонент бо́льше соответствует поставленным целям, чем направление максимальной скорости вдоль элементарного направления. Прямой опорный метод с использованием неэлементарных направлений учитывает и этот недостаток. Однако в нем опора модифицировалась с помощью различных эвристических приемов (в прямом опорном методе, как и в симплекс-методе, опора (базис) заменялась по простому правилу, при этом новая опора могла оказаться хуже старой).

Адаптивный метод производит замену опоры также исходя из экстремальных соображений, уменьшая при этом меру неоптимальности опоры. Адаптивный метод — это комбинация двух методов — прямого опорного с использованием неэлементарных направлений (1-ая часть итерации) и двойственного опорного метода (2-ая часть итерации).

И, наконец, адаптивный метод оказался наиболее преемлемым в применении к задачам оптимального управления.

2.4.5 Алгоритм

Выпишем в компактной форме алгоритм адаптивного метода с длинным шагом.

Перед началом итерации считаются известными начальный опорный план $\{x, J_{on}\}$, матрица $Q = A(I, J_{on})^{-1}$ и параметры метода $\varepsilon \geq 0$ и $\mu_0 \geq 0$.

Итерация состоит из следующих шагов.

1). Вычислить вектор потенциалов u (2.16), оценки Δ_j, $j \in J_н$, (2.18) и разбить множество $J_н$ на две непересекающиеся части $J_н^+$ и $J_н^-$:

$$J_н^+ = \{j \in J_н\colon\ \Delta_j \geq 0\},\ \ J_н^- = \{j \in J_н\colon\ \Delta_j \leq 0\},\ \ J_н^+ \cup J_н^- = J_н,\ \ J_н^+ \cap J_н^- = \emptyset.$$

Построить неопорные компоненты сопровождающего псевдоплана $æ_н$ (2.54). Вычислить оценку субоптимальности $\beta(x, J_{on})$ (2.48). Если $\beta(x, J_{on}) \leq \varepsilon$, то x — ε-оптимальный план. Выход.

2). Вычислить опорные компоненты псевдоплана $æ_{on}$ (2.41). Если выполняются условия (2.47), то $æ$ — оптимальный план. Выход.

При $d_{*j} - \mu_0 \leq æ_j \leq d_j^* + \mu_0$ $\forall j \in J_{on}$ перейти к замене опоры (шаг 3), выбрав в качестве j_0 любой индекс $j \in J_{on}$, для которого $æ_j \notin [d_{*j}, d_j^*]$ (например, индекс, соответствующий максимальному выходу компонент $æ_{on}$ за границы прямых ограничений). В противном случае построить направление l (2.55) и вычислить максимально допустимый шаг $\theta^0 = \theta_{j_0}$ вдоль l (2.58), (2.59), заменить план x на $\overline{x}$ (2.60), вычислить $\beta(\overline{x}, J_{on})$ (2.61). Если $\beta(\overline{x}, J_{on}) \leq \varepsilon$, то $\overline{x}$ — ε-оптимальный план. Выход.

3). Построить направление $t_н$ (2.69) (l_{j_0} содержится в (2.64). Для каждого индекса $j \in J_н$ вычислить неотрицательный нуль σ_j компоненты $\overline{\delta}_j = \delta_j + \sigma_j t_j$:

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j/t_j, & \text{если либо } \Delta_j t_j < 0, \\ & \text{либо } \Delta_j = 0,\ t_j < 0,\ j \in J_н^+, \\ & \text{либо } \Delta_j = 0,\ t_j > 0,\ j \in J_н^-; \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

4). Найти индекс j_*, вводимый в опору. Для этого упорядочить индексы $j \in \{j \in J_н\colon\ \sigma_j \neq \infty\}$ по возрастанию σ_j:

$$\sigma_{j_1} \leq \sigma_{j_2} \leq \cdots \leq \sigma_{j_q}, \quad j_k \in J_н\colon\ \sigma_{j_k} \neq \infty,\ k = \overline{1, q}. \tag{2.80}$$

Перебирая указанные индексы в порядке (2.80) и вычисляя скачок скорости двойственной целевой функции

$$\Delta\alpha_{j_k} = (d^*_{j_k} - d_{*j_k})|t_{j_k}|,$$

выберем в качестве j_* такой индекс j_p, что

$$\alpha_{j_{p-1}} = \alpha^0 + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta\alpha_{j_k} < 0; \quad \alpha_{j_p} = \alpha^0 + \sum_{k=1}^{p} \Delta\alpha_{j_k} \geq 0,$$

где α^0 (2.70) — начальная скорость. Если на очередной итерации опора модифицируется без предварительной замены плана, то в (2.70) в качестве $\overline{x}_{j_0}$ выберем следующую величину

$$\overline{x}_{j_0} = \begin{cases} d_{*j_0}, & \text{если } æ_{j_0} < d_{*j_0}; \\ d^*_{j_0}, & \text{если } æ_{j_0} > d^*_{j_0}. \end{cases}$$

Вычислить

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_{оп}) = \beta(\overline{x}, J_{оп}) + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_{k-1}}(\sigma_{j_k} - \sigma_{j_{k-1}}),$$

где $\alpha_{j_0} = \alpha^0$, $\sigma_{j_0} = \sigma^0 = 0$. Если $\beta(\overline{x}, \overline{J}_{оп}) \leq \varepsilon$, то $\overline{x}$ — ε-оптимальный план. Выход. В противном случае заменить опору $J_{оп} \to \overline{J}_{оп} = (J_{оп} \setminus j_0) \cup j_*$, вычислить $\overline{Q}$ и перейти к новой итерации с опорным планом $\{\overline{x}, \overline{J}_{оп}\}$.

2.5 Первая фаза

Рассмотрим теперь случай 3). Как и в случае 2), вектор x^* — план исходной задачи. Найдем для него опору J_{on}, исключив из множества K^*_{on} входящие в него индексы $n+i \in J^u$ искусственных переменных. Для этого введем вспомогательную задачу, которую назовем буферной:

$$\begin{array}{l} c^{'}x \to \max, \\ A(i,J)x = b_i, \quad i \in I \setminus I^*, \quad I^* = \{i \in I\colon\, n+i \in K^*_{on}\}; \\ A(i,J)x + a_{i,n+i}x_{n+i} = b_i, \quad i \in I^*; \\ d_* \le x \le d^*; \quad d_{*n+i} \le x_{n+i} \le d^*_{n+i}, \quad d_{*n+i} = d^*_{n+i} = 0, \quad i \in I^*. \end{array} \tag{2.82}$$

Поскольку $x_{n+i} = 0$, $i \in I^*$, то задача (2.82) эквивалентна исходной задаче (2.1)–(2.3). Вектор $z^* = (x^*;\, x^*_{n+i} = 0,\, i \in I^*)$ является ее планом, множество K^*_{on} —опорой. Начиная с опорного плана $\{z^*, K^*_{on}\}$ опишем процедуру "очистки" множества K^*_{on} от индексов искусственных переменных и построения, таким образом, начальной опоры J_{on} исходной задачи.

Элементы, связанные с буферной задачей (2.82), будем снабжать значком "$\hat{\ }$", например, $\hat{c} = (c;\, c_{n+i} = 0,\, i \in I^*)$.

По опорному плану $\{\hat{z}, \hat{K}_{on}\} = \{z^*, K^*_{on}\}$ построим вектор потенциалов $\hat{u}^{'} = \hat{c}^{'}_{on}\hat{Q}$, вычислим оценки $\hat{\Delta}_j = \hat{u}^{'}\hat{a}_j - \hat{c}_j$, $j \in \hat{J}$; неопорные компоненты сопровождающего псевдоплана $\hat{æ}$: $\hat{æ}_j = \hat{d}^*_j$ при $\hat{\Delta}_j \le 0$; $\hat{æ}_j = \hat{d}_{*j}$ при $\hat{\Delta}_j \ge 0$, $j \in \hat{J}_н$; оценку субоптимальности $\beta(\hat{z}, \hat{K}_{on}) = \beta(z^*, \hat{K}_{on}) = \hat{\Delta}^{'}_н(z^*_н - \hat{æ}_н)$. Если $\beta(z^*, \hat{K}_{on}) \le \varepsilon$, то x^* — ε-оптимальный план исходной задачи, и процесс ее решения закончен. При $\beta(z^*, \hat{K}_{on}) > \varepsilon$ найдем опорные компоненты сопровождающего псевдоплана: $\hat{æ}_{on} = \hat{Q}(\hat{b} - \hat{A}_н\hat{æ}_н)$. Если окажется, что

$$\hat{d}_{*j} \le \hat{æ}_j \le \hat{d}^*_j, \quad j \in \hat{K}_{on}, \tag{2.83}$$

то процесс решения прекратим: $\hat{æ}(J)$— оптимальный план исходной задачи.

Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда $\beta(z^*, \hat{K}_{on}) > \varepsilon$ и неравенства (2.83) не выполняются. Выберем $j_0 = n + i_0 \in \hat{K}_{on}$ из тех, на которых не выполняются неравенства из (2.83). Приступим к выполнению операций по замене опоры по правилам п.2.4. Если замена опоры выполнена успешно, то в опору может войти только индекс $j_* \in J$. Выведенный из опоры индекс j_0 и соответствующие ему параметры $\hat{c}_{j_0}$, $\hat{a}_{j_0}$, $\hat{d}_{*j_0}$, $\hat{d}^*_{j_0}$ удалим из задачи (2.82).

Если в процессе операций по замене опоры получили ситуацию $\Delta\hat{\delta}_н = 0$, то $i_0 = (j_0 - n)$-ая строка матрицы A линейно зависит от остальных. В самом деле, имеем $\Delta\hat{\delta}_н = 0$, $|\Delta\hat{\delta}_{j_0}| = 1$, $\Delta\hat{\delta}(\hat{J}_{on} \setminus j_0) = 0$. Поэтому из $|\Delta\hat{\delta}| = \hat{q}^{'}_{(j_0)}\hat{A}$ следует $\hat{q}^{'}_{(j_0)}\hat{A} = 0$, $\hat{q}_{(j_0)} \ne 0$, что и доказывает искомую линейную зависимость.

В этом случае i_0-ое равенство в основном ограничении удалим из задачи. При этом матрица $\overline{Q}$, обратная к опорной в новой задаче, получается вычеркиванием из $\hat{Q}$ соответствующих i_0-й строки и j_0-го столбца. Покажем это. Без ограничения общности предположим, что $j_0 = n + m$. Тогда матрица $\hat{P}$ имеет структуру

$$\hat{P} = \left[\begin{array}{c|c} \overline{P} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \overline{p}' & 1 \end{array}\right].$$

Если матрицу $\hat{Q}$ записать в виде

$$\hat{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \overline{Q} & q_2 \\ \hline \overline{q}_1' & q_3 \end{array}\right],$$

то из $\hat{P}\hat{Q} = E$ имеем $\overline{P}\,\overline{Q} = E$, т.е. $\overline{Q} = \overline{P}^{-1}$, что и требовалось доказать.

На этом итерация в буферной задаче заканчивается. На каждой итерации описанного процесса из задачи (2.82) удаляется один индекс $i_0 \in I^*$. Через $|I^*|$ итераций процесс завершится построением опоры $\hat{K}^*_{on} \subset J$ задачи (2.1)–(2.3) и удалением всех линейно-зависимых строк в основном ограничении.