1.2 Материалы для управляемой самостоятельной работы студентов учебно-методического комплекса по дисциплине специализации «Оптимальное управление линейными системами»

1.1 Оптимальное управление механическим движением

Пусть механическую систему (материальную точку, тележку и т.д.), находящуюся в покое в начале координат, требуется за фиксированное время с помощью усилий ограниченной величины максимально удалить в горизонтальном направлении от исходного состояния и остановить.

В качестве объекта управления рассмотрим тележку. Пусть дано:
m — масса тележки;
t^* — время движения;
F^* — предельная величина усилий.

Введем переменные:
$z(t)$ — положение тележки в момент времени t относительно исходного положения (начала координат);
$u(t)$ — усилие, прилагаемое к тележке в момент t.

Согласно закону Ньютона, движение тележки описывается уравнением

$$m\ddot{z}(t) = u(t), \quad t \in T = [0, t^*[. \tag{1.1}$$

По условию, в начальный момент $t = 0$ тележка покоится в начале координат:

$$z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \tag{1.2}$$

Прилагаемые к тележке усилия ограничены:

$$-F^* \leq u(t) \leq F^*, \quad t \in T. \tag{1.3}$$

В конечный момент $t = t^*$ тележка должна остановиться:

$$\dot{z}(t^*) = 0. \tag{1.4}$$

Качество управления будем оценивать по величине удаления тележки от начала координат в конечный момент времени:

$$J(u) = z(t^*) \to \max. \tag{1.5}$$

Задача (1.1)–(1.5) относится к классу линейных оптимизационных задач, т.к. ее ограничения и критерий качества линейны. В отличие от задач, рассмотренных в спецкурсах «Оптимизация линейных статических моделей» и «Оптимизация линейных дискретных динамических моделей», неизвестные $z(t)$, $u(t)$, $t \in T$, в задаче (1.1)–(1.5) являются не конечномерными векторами, а функциями, т.е. элементами бесконечномерного функционального пространства. Специфичны и некоторые ее ограничения — (1.1), (1.2), (1.4) — они имеют дифференциальную форму. Задачи подобного вида называют задачами оптимального управления непрерывными динамическими системами.

Введем обозначения: $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$. Тогда уравнение (1.1) можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}u(t), \quad t \in T; \end{cases}$$

начальные условия (1.2) в виде:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0; \end{cases}$$

условие на правый конец траектории (1.4) (терминальное условие):

$$x_2(t^*) = 0.$$

Введем векторно-матричные обозначения:

$$c = (1; 0), \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; b = \left(0; \frac{1}{m}\right), \;\; x_0 = (0; 0), \;\; g = (0; 1),$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)).$$

Тогда задачу (1.1)–(1.5) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} J(u) = c^{'}x(t^*) \to \max, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad t \in T = [0, t^*[, \\ x(0) = x_0, \quad g^{'}x(t^*) = 0, \\ -F^* \le u(t) \le F^*, \quad t \in T. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Задачу (1.6) называют линейной терминальной задачей оптимального управления непрерывной динамической системой.

2.1.2 Управляемость

Пусть наряду с системой (2.1), (2.2) имеется выходное устройство

$$y(t) = Hx(t), \quad t \in T, \tag{2.7}$$

где H — $m \times n$-матрица параметров выходного устройства, $\operatorname{rank} H = m \le n$.

Система (2.1), (2.2) называется управляемой на отрезке T по выходу (2.7), если для любого m-вектора g найдется такое управление $u(t)$, $t \in T$, что соответствующая ему траектория $x(t)$, $t \in T$, системы (2.1), (2.2) порождает выходной сигнал (2.7), принимающий в конечный момент t^* значение $y(t^*) = Hx(t^*) = g$.

Теорема 2.1 *Для управляемости системы (2.1), (2.2) на отрезке T по выходу (2.7) необходимо и достаточно, чтобы при любом m-векторе l, $\|l\| = 1$, выполнялось соотношение*

$$l^{'} H\mathcal{F}(t^*, t)b \not\equiv 0, \quad t \in T. \tag{2.8}$$

Доказательство. Необходимость (доказательство от противного). Пусть система (2.1), (2.2) управляема на отрезке T по выходу (2.7), но при некотором l_*, $\|l_*\| = 1$,

$$l_*^{'} H\mathcal{F}(t^*, t)b \equiv 0, \quad t \in T. \tag{2.9}$$

Поскольку $\|l_*\| = 1$, то $\exists\, g_* \in R^m$ такой, что

$$l_*^{'}(g_* - H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0) \neq 0. \tag{2.10}$$

Поскольку система управляема, то существует управление $u_*(t)$, $t \in T$, переводящее траекторию системы (2.1), (2.2) из начального состояния x_0 на многообразие $Hx = g_*$: $Hx(t^*) = g_*$. Используя формулу Коши (2.6), последнее равенство запишем в виде

$$H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \int_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*, t)bu_*(t)\, dt = g_*. \tag{2.11}$$

Умножим равенство (2.11) на l_*:

$$l_*^{'} H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 + \int_0^{t^*} \underbrace{l_*^{'} H\mathcal{F}(t^*, t)b}_{\equiv 0}\, u_*(t)\, dt = l_*^{'} g_*,$$

но из (2.10) следует, что $l_*^{'} H\mathcal{F}(t^*, 0)x_0 \neq l_*^{'} g_*$. Полученное противоречие доказывает невозможность тождества (2.9).

Достаточность. Рассмотрим управления вида

$$u(t) = \mu^{'} H\mathcal{F}(t^*, t)b, \quad t \in T, \tag{2.12}$$

$\mu \in R^m$. Используя формулу Коши (2.6), условие управляемости на таких управлениях принимает вид:

$$H\mathcal{F}(t^*,0)x_0 + \int\limits_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*,t)b\mu' H\mathcal{F}(t^*,t)b\,dt = g. \tag{2.13}$$

Введем $m \times m$-матрицу

$$K = \int\limits_0^{t^*} H\mathcal{F}(t^*,t)bb'\mathcal{F}'(t^*,t)H'\,dt \tag{2.14}$$

и вектор

$$\tilde{g} = g - H\mathcal{F}(t^*,0)x_0. \tag{2.15}$$

Из (2.13)–(2.15) следует, что для управляемости достаточно, чтобы уравнение

$$K\mu = \tilde{g} \tag{2.16}$$

было разрешимо относительно μ при любых $\tilde{g}$.

Итак, пусть выполняется условие (2.8). Тогда матрица K (2.14) — невырожденная. Действительно, если предположить противное, то при некотором $l_* \in R^m$, $\|l_*\| = 1$, будем иметь

$$l_*'K = 0 \quad \text{и} \quad l_*'Kl_* = 0.$$

Умножим (2.14) слева и справа на l_*:

$$0 = l_*'Kl_* = \int\limits_0^{t^*} l_*'H\mathcal{F}(t^*,t)bb'\mathcal{F}'(t^*,t)H'l_*\,dt = \int\limits_0^{t^*} \big(l_*'H\mathcal{F}(t^*,t)b\big)^2\,dt.$$

Следовательно, $l_*'H\mathcal{F}(t^*,t)b \equiv 0$, $t \in T$, что противоречит условию (2.8).

В силу невырожденности матрицы K уравнение (2.16) можно разрешить относительно μ при любых $\tilde{g}$, т.е. управлениями вида (2.12) можно разрешить задачу управляемости. Теорема доказана.

2.2.3 Опорный принцип максимума

Пусть $\{u, T_{on}\}$ — опорное управление. Подсчитаем по нему вектор потенциалов y (2.44), котраекторию $\psi(t)$, $t \in T$ (2.41) и коуправление $\Delta(t)$, $t \in T$ (2.42).

Теорема 2.2 *Если выполняются соотношения*

$$\begin{gathered}\Delta(t) \geq 0 \;\; \textit{при} \;\; u(t) = f_*; \quad \Delta(t) \leq 0 \;\; \textit{при} \;\; u(t) = f^*; \\ \Delta(t) = 0 \;\; \textit{при} \;\; f_* < u(t) < f^*, \;\; t \in T,\end{gathered} \tag{2.45}$$

то $u(t)$, $t \in T$ — оптимальное управление.

Если $u(t)$, $t \in T$ — оптимальное управление и опорное управление невырождено, то на нем выполняются соотношения (2.45).

Соотношения (2.45) в терминах котраектории $\psi(t)$, $t \in T$, принимают вид

$$\begin{gathered}\psi^{'}(t)b \geq 0 \;\; \text{при} \;\; u(t) = f_*; \quad \psi^{'}(t)b \leq 0 \;\; \text{при} \;\; u(t) = f^*; \\ \psi^{'}(t)b = 0 \;\; \text{при} \;\; f_* < u(t) < f^*, \;\; t \in T,\end{gathered} \tag{2.54}$$

т.е. управление $u(t)$, $t \in T$, удовлетворяет экстремальному условию

$$\psi^{'}(t)bu(t) = \min_{f_* \leq u \leq f^*} \psi^{'}(t)bu, \quad t \in T. \tag{2.55}$$

Добавим к обеим частям (2.55) функцию $\psi^{'}Ax(t)$, $t \in T$, и введем функцию

$$H(x, \psi, u) = \psi^{'}\left(Ax + bu\right),$$

называемую гамильтонианом задачи. Тогда из (2.55) получим

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \min_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u), \quad t \in T. \tag{2.56}$$

Это позволяет критерий оптимальности сформулировать как опорный принцип максимума (минимума):

Теорема 2.3 *Для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, достаточно существования такой опоры T_{on}, чтобы вдоль опорного управления $\{u, T_{on}\}$ и соответствующих ему траекторий $x(t)$, $t \in T$; $\psi(t)$, $t \in T$, прямой (2.1), (2.2) и сопряженной (2.41) систем гамильтониан задачи достигал минимального значения (2.56).*

В случае невырожденности опорного управления $\{u, T_{on}\}$ для оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, необходимо, чтобы вдоль $\{u, T_{on}\}$; $x(t)$, $t \in T$; $\psi(t)$, $t \in T$, выполнялось соотношение минимума (2.56).

2.3.2 Два типа переменных опорной задачи

Переменные опорной задачи обозначим через z_j, $j \in K$. Разобъем их на две группы — переменные типа управления (типа u): z_j, $j \in K^u$ (эти переменные соответствуют тем участкам, для которых нет уверенности в направлении изменения управления), и переменные типа шага (типа θ): z_j, $j \in K^\theta$; $K^u \cup K^\theta = K$. Каждой переменной z_j, $j \in K$, будет соответствовать отрезок $T_j = [\tau_{*j}, \tau_j^*) \subset T$.

Переменные типа u после решения опорной задачи имеют смысл значения нового управления на T_j, $j \in K^u$:

$$\overline{u}(t) = z_j, \quad t \in T_j, \quad j \in K^u. \tag{2.65}$$

Поэтому прямые ограничения для них переходят из исходной задачи:

$$f_* \leq z_j \leq f^*, \quad j \in K^u.$$

Переменные типа θ имеют смысл шага вдоль выбранного направления:

$$\overline{u}(t) = u(t) + z_j \left(\omega(t) - u(t)\right), \quad t \in T_j, \quad j \in K^\theta. \tag{2.66}$$

При $z_j = 1$ управление $\overline{u}(t) = \omega(t)$, при $z_j = 0$ имеем $\overline{u}(t) = u(t)$. Поэтому на z_j, $j \in K^\theta$, можно наложить следующие прямые ограничения:

$$0 \leq z_j \leq 1, \quad j \in K^\theta.$$

Но можно предусмотреть и движение в обратном направлении, т.е. отрицательные значения для переменных:

$$z_j^* \leq z_j \leq 1, \quad j \in K^\theta.$$

2.3.5 Обсуждение

Изложенный выше метод опорных задач естественно называть методом последовательного накопления оптимальных участков допустимого управления. Такое название отражает основное свойство последовательных приближений, которые строятся новым методом. Как известно, качество классических приближений оценивается по их отклонению от предельного значения (рис.2.6).

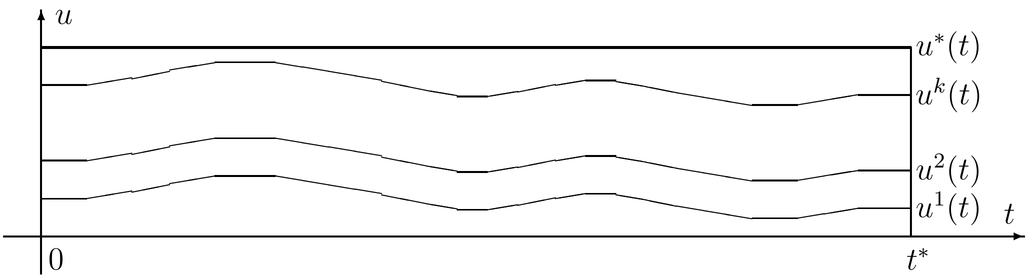

Рис. 2.6: “Поперечные” приближения функций

Такие приближения будем называть “поперечными”. Их качество оценивается по значениям отклонения управления от предельного на всем отрезке. Качество строящихся в данной главе приближений оценивается по протяженности участков, на которых они совпадают с предельными значениями (рис.2.7).

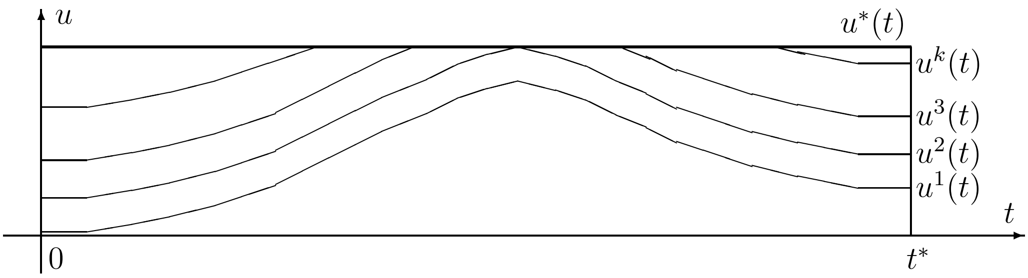

Рис. 2.7: “Продольные” приближения функций

Такие приближения естественно называть “продольными”. В них систематически увеличиваются участки с оптимальными значениями управления, в силу чего от итерации к итерации сокращается продольный (по времени) размер задачи оптимального управления (исключаются участки с оптимальным управлением).

2.3.6 Конечность метода

Работу каждого алгоритма оптимизации можно представить как совокупность обращений к объекту оптимизации с входной информацией, на которую объект отвечает выходной информацией. В свою очередь, последняя алгоритмом оптимизации преобразуется в новую входную информацию и т.д.

Алгоритм оптимизации называется конечным, если для построения решения достаточно конечное число раз обращаться к объекту оптимизации, и если при этом для преобразования входной информации в выходную и наоборот требуется конечное время работы и конечный объем памяти ЭВМ. Время получения ответа на запрос, количество ячеек памяти для записи чисел в конечных алгоритмах может зависеть от требуемой точности окончательного результата, но количество обращений и количество запоминаемых чисел должны быть равномерно ограниченными.

При оптимизации сложных объектов (например, динамических систем) следует различать обращения разных типов. Среди них выделяется стандартное (полное) обращение. Остальные, представляя частичное обращение, приводятся к стандартному путем сравнения времени выполнения.

В задаче оптимального управления обращение к объекту оптимизации означает интегрирование прямой и сопряженной систем, а входная информация представляет собой начальные условия для этих систем и опорное управление. Преобразование выходной информации в новую входную в описанном алгоритме осуществляется в процессе решения опорных задач.

Рассмотрим вопрос о конечности метода последовательного накопления оптимальных участков допустимого управления. В этом алгоритме процедура доводки сходится в силу известных свойств метода Ньютона почти для каждой линейной задачи, если начальное приближение достаточно хорошее. При этом (это нетрудно показать) производится интегрирование прямой и сопряженной систем на отрезках, общая протяженность которых ограничена числом, не зависящим от точности результата. Необходимые приближения для процедуры доводки строит опорная задача за конечное число итераций. При этом достаточно конечное число раз обращаться к прямой и сопряженной системам для формирования элементов опорной задачи.

Таким образом, в описанном алгоритме для построения оптимального управления с помощью процедуры доводки и решения опорных задач достаточно конечного числа обращений к объекту оптимизации и хранения конечного набора чисел. Эти факты составляют основу доказательства следующего утверждения

Теорема 2.5 *Метод последовательного накопления оптимальных участков допустимого управления является конечным методом решения задачи терминального управления (2.32).*