Лабораторная работа №1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Ошибкой или погрешностью приближенного числа а называется разность между точным и приближенным значениями $\Delta a = A - a$. Величина $\Delta = |\Delta a| = |A - a|$ называется абсолютной погрешностью. Отношение абсолютной погрешности к модулю точного значения

$$\delta = \frac{|\Delta a|}{|A|} \tag{1}$$

называется относительной погрешностью числа a. Таким образом абсолютная и относительная погрешности связаны формулой

$$|\Delta a| = \delta |A| . \tag{2}$$

Так как точное значение A как правило неизвестно, то при достаточно малой абсолютной погрешности можно считать, что $|\Delta a| = \delta |a|$. Абсолютная погрешность является мерой ошибки числа a, а относительная погрешность определяет меру точности приближенного числа. На практике, как правило, известны лишь границы абсолютной и относительной точности приближенного числа. Любое число Δ_a такое, что $|A - a| \le \Delta_a$, называется предельной абсолютной погрешностью, а δ_a такое, что $\dfrac{\Delta}{|A|} \le \delta_a$, - предельной относительной погрешностью. Пусть число a в позиционной системе с основанием 10 имеет вид

$$a = \alpha_m \alpha_{m-1} ... \alpha_1 \alpha_0 , \alpha_{-1} \alpha_{-2} ... \alpha_{-n+m+1} .$$

Все сохраняемые в представлении числа цифры α_i называются значащими, за исключением нулей, которые служат лишь для обозначения разрядов. Первые n значащих цифр приближенного числа являются верными в узком (широком) смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины (единицы) разряда, выраженного n-й значащей цифрой, отсчитываемой слева направо:

$$\Delta \le \frac{1}{2} 10^{-n+m+1} \text{ или } (\Delta \le 1 \cdot 10^{-n+m+1}) . \tag{3}$$

Теорема1. Если положительное число a имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, то относительная погрешность удовлетворяет неравенству

$$\delta \le \frac{1}{\alpha_m} 10^{-n+1}, \tag{4}$$

где α_m - первая значащая цифра числа a.

Если $n \ge 2$, то практически справедлива оценка

$$\delta \le \frac{1}{2\alpha_m} 10^{-n+1}. \tag{5}$$

Формула (4) позволяет определить предельную относительную погрешность по количеству верных знаков. Если известно, что имеет место оценка $\delta \le \frac{1}{2} 10^{-n}$, то для абсолютной погрешности справедливо неравенство $\Delta \le \frac{\alpha_m + 1}{2} 10^{-n+m}$, т.е. число имеет, по крайней мере, n верных знаков.

Прямая задача теории погрешностей

Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ - дифференцируемая функция n аргументов, которые являются приближенными числами, абсолютная погрешность которых $|\Delta x_i|$ достаточно мала. Прямая задача теории погрешностей заключается в вычислении предельной абсолютной и относительной погрешностей функции u при известной погрешности аргументов $|\Delta x_i|$. Если $|\Delta x_i|$ достаточно малы, то для вычисления погрешности справедливы формулы:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{du}{dx_i} \right| |\Delta x_i| \tag{6}$$

$$\delta u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{d \ln u}{dx_i} \right| |\Delta x_i| \tag{7}$$

Следствие 1: Если $u = \sum_{i=1}^{n} x_i$, то из (6) следует, что за предельную абсолютную погрешность можно взять сумму абсолютных погрешностей слагаемых

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \tag{8}$$

Следствие 2: Если все слагаемые одного знака, то из (7) следует, что $\delta \le \delta x_{\max}$ – где $\delta x_{\max}$ – максимальная из относительных погрешностей слагаемых.

Следствие 3: Если $u = \prod_{i=1}^{n} x_i$, то из (7) следует, что за предельную относительную погрешность произведения можно взять сумму относительных погрешностей слагаемых:

$$\delta u = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \tag{9}$$

Следствие 4: Если $u = x^m$, то из (6) и (7) следует

$$\Delta_u = |m| \left| x^{m-1} \right| |\Delta x| \text{ и } \delta_u = \frac{|m|}{|x|} |\Delta x| = |m| \delta_x .$$

Замечание: Пусть $u = x_1 - x_2$, где x_i - близкие числа. Тогда $\Delta_u = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$ и для относительной погрешности получим $\delta_u = \dfrac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{|x_1 - x_2|}$. Так как знаменатель достаточно малое число, то относительная погрешность может резко возрасти, что приведет к потере точности. Поэтому следует избегать вычитания близких чисел.

Обратная задача теории погрешностей

Пусть нам нужно вычислить $u = f(x_1, \dots, x_n)$, где f - дифференцируемая функция аргументов x_i. Обратная задача заключается в том, чтобы вычислить допустимые погрешности аргументов x_i, с тем, чтобы погрешность вычисления функции u не превышала заданную величину. Для того, чтобы задача была математически определена необходимо наложить ограничения на поведение погрешностей аргументов.

1. *Принцип равных влияний.* Пусть погрешности распределены так, что выполняется условие $\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| = \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right| |\Delta x_j|$ для любых i и j. Из (6) получим

$\Delta_u = \sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| = n$, $\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| = \dfrac{\Delta_u}{n}$. Откуда следует

$$\left|\Delta x_i\right| = \frac{\Delta_u}{n\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|} \tag{10}$$

2. *Принцип равных абсолютных погрешностей.* Пусть все аргументы имеют одинаковую абсолютную погрешность: $\left|\Delta x_i\right| = \left|\Delta x_j\right| = \Delta$ для любых i и j. Тогда из (6) следует $\Delta_u = \sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta$ и

$$\Delta = \frac{\Delta_u}{\sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|} \tag{11}$$

3. *Принцип равных относительных погрешностей.* Пусть $\dfrac{\left|\Delta x_i\right|}{\left|x_i\right|} = \dfrac{\left|\Delta x_j\right|}{\left|x_j\right|} = k$ для любых i и j. Тогда из (6) получим $\Delta_u = \sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\Delta x_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right| k\left|x_i\right|$. Откуда $k = \dfrac{\Delta_u}{\sum_{i=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|x_i\right|}$ и, следовательно,

$$\left|\Delta x_i\right| = \frac{\Delta_u\left|x_i\right|}{\sum_{j=1}^{n}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right|\left|x_j\right|}. \tag{12}$$

При решении обратной задачи все постоянные, которые не могут быть заданы точно, должны рассматриваться как при-ближенные.

Задания к лабораторной работе

1. Найти абсолютную и относительную погрешности чисел a и b, все значащие цифры которых верные. Определить абсолютную и относительную погрешности их суммы, разности, произведения и частного, а также количество верных значащих цифр каждого результата.

2. Заданы два приближенных числа x и y, все значащие цифры которых верные. Определить потерю точности при выполнении операции вычитания.

3. При измерении некоторой физической величины получено значение p. Зная, что относительная погрешность этого значения равна s%, найти пределы, в которых заключается измеряемая величина.

4. Со сколькими значащими цифрами необходимо вычислить заданную величину l, чтобы ее относительная погрешность не превышала m%.

5. С какой точностью нужно измерить радиус круга r, чтобы его площадь была вычислена с точностью 0.1%. Со сколькими верными значащими цифрами нужно взять число π?

6. Найти значение функции $u = \varphi(a_1, a_2)$ и определить абсолютную и относительную погрешности вычисления u при заданных погрешностях $\Delta a_i, i = 1,2$. Определить погрешности u, если a_1 и a_2 имеют два верных знака после запятой.

7. Найти допустимые абсолютные и относительные погрешности чисел $x_1, x_2, x_3,$ которые позволяют вычислить значение функции f с тремя верными знаками.

Варианты заданий приведены в таблицах 1 - 4.

Таблица 1

Задание	1		2		3	
Вариант	a	b	x	y	p	s%
1	1.31	2.5	2.431	2.432	3.42	0.5
2	0.35	1.431	14.721	14.717	0.071	1
3	7.25	4.3	0.0341	0.0339	0.0083	1.2
4	2.488	0.35	7.4352	7.3451	4.877	0.2
5	3.742	0.444	0.348	0.347	1.334	0.2
6	2.1	0.37	12.731	12.729	4.338	1.1
7	0.75	2.43	3.333	3.332	7.21	1.5
8	2.741	1.38	1.778	1.775	3.241	0.5
9	4.528	2.41	4.735	4.733	8.888	1.4
10	3.31	4.745	10.841	10.844	0.741	2
11	2.7	0.45	0.0041	0.0039	2.339	0.3
12	4.733	0.341	3.393	3.391	12.741	0.1
13	5.72	0.489	5.448	5.446	5.441	0.8
14	5.241	1.343	0.0048	0.0046	7.339	0.9
15	3.341	0.998	9.7391	9.7389	3.448	1.4

Таблица 2

Задание	4		5
Вариант	l	m%	R
1	$\sqrt{41}$	1.2	12.371
2	$\lg 70$	0.5	5.483
3	$\ln 11$	0.01	6.779
4	$\sqrt[3]{112}$	0.05	10.375
5	$\sqrt{105}$	0.1	8.911
6	$\lg 45$	0.2	7.445
7	$\sqrt{22.5}$	0.01	4.574
8	$\log_3 17$	0.05	3.785
9	$\log_4 5$	0.1	5.749
10	$\sqrt[3]{73.4}$	0.05	6.435
11	$\sqrt{44.1}$	0.01	5.549
12	$\ln 9.1$	0.5	2.478
13	$\log_4 7.5$	0.01	3.563
14	$\sqrt[3]{90.3}$	0.05	4.589
15	$\lg 152$	0.1	7.892

Таблица 3

Задание	6				
Вариант	$\varphi(a_1, a_2)$	a_1	a_2	Δa_1	Δa_2
1	$e^{a_1} a_2$	1.371	2.471	0.04	0.08
2	$\sqrt{a_1} + a_1 / \sqrt{a_2}$	4.372	8.009	0.08	0.005
3	$\sin(a_1 + a_2)$	0.745	1.324	0.01	0.008
4	$\sqrt{\cos(a_1 + a_2)}$	0.379	0.091	0.02	0.001
5	$(a_1^2 + \sqrt{a_2})/5$	2.781	0.975	0.04	0.004
6	$\sqrt{a_1^3 + \sqrt{a_2}}$	1.541	2.485	0.03	0.08
7	$2^{a_1} \ln a_2$	0.745	4.583	0.001	0.04
8	$\lg(a_1 + \sqrt{a_2})$	2.735	1.483	0.009	0.001

Задание	6				
Вариант	$\varphi(a_1, a_2)$	a_1	a_2	Δa_1	Δa_2
9	$\sin(a_1\sqrt{a_2})$	1.441	0.993	0.08	0.002
10	$\lg(a_1/a_2)$	4.038	2.791	0.007	0.01
11	$2^{\sin a_1}\cos a_2$	0.743	0.809	0.005	0.001
12	$\sqrt{a_1}\ln a_2$	0.873	4.325	0.02	0.007
13	$\sqrt{\ln(a_1 + a_2^2)}$	1.545	2.483	0.009	0.01
14	$\sqrt[3]{2^{a_1}\ln a_2}$	0.811	1.441	0.001	0.006
15	$\sqrt{a_1 + \ln a_2}$	1.475	3.081	0.009	0.01

Таблица 4

Задание	7			
Вариант	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3
1	$x_1\sqrt[3]{x_2} + e^{x_3}$	1.2	4.02	0.75
2	$x_1^2 x_2 - \sqrt{x_3}$	4.3	0.83	1.57
3	$\ln(x_1 + x_2) - \sqrt{x_3}$	0.35	2.81	0.89
4	$\sin x_1 \cos(x_2 x_3)$	0.71	0.17	1.48
5	$\lg(x_1/x_2 + \sqrt{x_3})$	0.76	0.13	1.48
6	$2^{x_1}\sqrt{x_2 + x_3}$	0.41	1.42	0.93
7	$\sin(x_1/x_2 + \sqrt[3]{x_3})$	0.41	0.29	2.09
8	$3^{x_1}\sin(x_2 + x_3)$	0.12	0.81	0.21
9	$\ln(x_1 x_2 x_3)$	1.34	0.97	1.05
10	$\cos(x_1/x_2 + x_3^2)$	0.35	0.17	0.48
11	$(x_1 + \sqrt{x_2})/x_3$	4.35	2.79	1.37
12	$\sin(x_1 x_2)/x_3$	0.45	1.23	0.89
13	$x_1^2\sqrt{x_2 + x_3}$	1.09	4.05	3.08

14	$\sqrt{x_1 + \sin(x_2 x_3)}$	1.05	0.41	0.18
15	$2^{x_1} \sin(x_2 x_3)$	0.24	0.25	0.91

Вопросы по лабораторной работе

1. Источники возникновения погрешностей.
2. Абсолютная и относительная погрешности. Предельные абсолютная и относительная погрешности.
3. Значащая цифра числа. Верная значащая цифра.
4. Связь относительной погрешности с числом верных значащих цифр.
5. Погрешности арифметических операций. Погрешность степени и корня.
6. Прямая задача теории погрешностей и методы ее решения.
7. Обратная задача теории погрешностей и методы ее решения.