ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ. СПЛАЙНЫ

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана некоторая функция $f(x)$ так, что в точках $x_0, x_1,..., x_n$ известны её значения $y_0, y_1,..., y_n$. Задача интерполирования заключается в построении функции $\varphi(x)$ из некоторого класса $\Phi(x)$ такой, что выполняется условие

$$\varphi(x_i) = y_i,\ i=\overline{1,n}. \qquad (1)$$

Пусть $\Phi(x)$ класс алгебраических многочленов степени n. Тогда справедлива **<u>Теорема 1</u>**: Существует и при том единственный многочлен, степени не выше n, для которого выполняется условие (1) на любой системе попарно различных точек $x_0, x_1,..., x_n$.

Пусть $\varphi(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$. Тогда из условия (1) получим систему из $n+1$ линейных алгебраических уравнений

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + ... + a_n = y_i,\ i=\overline{0,n}. \qquad (2)$$

Определяя коэффициенты $\{a_i\}$, получим интерполяционный многочлен $P_n(x)$. Заменяя функцию интерполяционным многочленом, можно определить значения $\overline{y}$ при не табличном значении аргумента $\overline{x}$. Если $\overline{x}\in[a,b]$, то говорят, что решается задача интерполирования; если $\overline{x}\notin[a,b]$, то проводится экстраполирование функции $f(x)$

Будем искать интерполяционный многочлен в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i}(x)\cdot y_i\text{, где } L_{n,i}(x_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i=j \\ 0, \text{ если i} \neq \text{j} \end{cases}.$$

Очевидно, что это условие будет выполняться, если

$$L_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}.$$

Тогда

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} y_i. \qquad (3)$$

Интерполяционный многочлен, записанный в форме (3), называется многочленом Лагранжа. Обозначая $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, многочлен $L_n(x)$ можно записать в виде $L_n(x) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\omega'(x_i)}$. Если $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая функция, то для погрешности интерполирование справедлива формула

$$R_n(f) = L_n(x) - f(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{4}$$

где ξ некоторая точка из отрезка $[a,b]$. На практике пользуются оценкой

$$|R_n(f)| \le \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|. \tag{5}$$

Интерполирование для равноотстоящих улов

Пусть все узлы интерполяции равностоящие, так что $x_{i+1} = x_i + h$, $h = \frac{b-a}{n}$. Величина $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$ называется первой конечной разностью или разностью первого порядка функции $y(x)$ в точке x. Конечной разностью порядка k называется величина $\Delta^k y(x) = \Delta(\Delta^{k-1} y(x))$. Из определения конечных разностей вытекают следующие свойства:

1) $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$,
2) $\Delta(cu) = c\Delta u$, где c -некоторая постоянная,
3) $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{m+n} u$.

Так как конечные разности определяются значениями в точках $x_0, x_1, ..., x_n$ функции $y(x)$, то из условия интерполирования следует, что

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0,\ m = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Используя равенство (6) интерполяционный многочлен можно записать в виде

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}\times$$
$$\times(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}). \tag{7}$$

Если сделать замену $q = \frac{x-x_0}{h}$, то формулу (7) можно записать в более компактной форме:

$$P_n(q(x)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 +$$
$$+ ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{8}$$

Формула (8) называется первой интерполяционной формулой Ньютона для равноотстоящих узлов. Аналогичным образом можно построить вторую интерполяционную формулу Ньютона для равноотстоящих узлов

$$P_n(q(x)) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \\ + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad , \tag{9}$$

где $q = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Формулу (7) следует использовать для интерполирования или экстраполирования вблизи начала таблицы, а формулу (9) вблизи конца таблицы.

В том случаи, когда точка $\bar{x}$ лежит в середине таблицы, используют формулы с центральными разностями, построенные для системы узлов $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{2n}$, например, первую формулу Гаусса

$$P_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \\ + \dots + \frac{(q+n-1)\dots(q+1)q(q-1)\dots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \tag{10}$$

или вторую формулу Гаусса

$$P_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\ + \dots + \frac{(q+n)\dots((q+1)q(q-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \quad . \tag{11}$$

Интерполирование для неравноотстоящих узлов

Для неравноотстоящих узлов интерполяции понятие конечной разности обобщается в понятие разделенной разности. Величина $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ называется разделенной разностью первого порядка $f(x)$ в точке x_0. Разделенной разностью порядка n в точке x_i называется величина

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) - f(x_i, \dots, x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}.$$

Из определения следует, что разделенная разность является симметрической функцией своих аргументов, т.е.

$$f(x_0, x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{i+1}, x_i, ..., x_0) .$$

Используя понятие разделенной разности, формулу Лагранжа можно записать в виде первой интерполяционной формулы Ньютона

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \\ &+ ... + f(x_0,x_1,...,x_n)(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{aligned} \qquad (12)$$

или в виде второй интерполяционной формулы Ньютона

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ &+ ... + f(x_n, ..., x_0)(x - x_n)...(x - x_1) \end{aligned} . \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13) следует использовать для интерполирования или экстраполирования в начале и конце таблицы соответственно.

Замечание о наилучшем выборе узлов интерполирования

Из выражения для погрешности следует, что ошибка интерполирования зависит от $|\omega(x)|$, т.е. от распределения узлов интерполирования $x_0, x_1, ..., x_n$, и от величины $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$. Допустим, что $f^{(n+1)}(x)$ мало меняется на отрезке $[a,b]$. В этом случае величина погрешности зависит от величины $|\omega(x)|$ - модуля отклонения $\omega(x)$ от нуля на отрезке $[a, b]$. Эта задача вплотную примыкает к задаче, решенной русским математиком П.Л. Чебышевым: среди всех многочленов степени n с коэффициентом равным единице при старшей степени найти многочлен наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,+1]$.

<u>**Теорема 2:**</u> Среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом равным единице наименьшее значение максимума модуля на отрезке $[-1,+1]$ имеет многочлен

$$\overline{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \ n \geq 1,$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ - многочлен Чебышева.

Отрезок $[a, b]$ заменой переменных $t = \dfrac{2x}{b-a} - \dfrac{b+a}{b-a}$ переводится в отрезок $[-1,+1]$. Поэтому для минимизации $|\omega(x)|$ в качестве узлов интерполирования следует взять точки $x_k = \dfrac{1}{2}(t_k(b-a) + b + a)$, где $t_k = \cos\dfrac{(2k+1)}{2(n+1)}\pi$ - корни многочлена Чебышева степени $n+1$. Тогда $x_k - x = \dfrac{(b-a)(t_k - t)}{2}$ и для величины отклонения $\omega(x)$ получим:

$$\omega(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\omega(t) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\overline{T}_{n+1}(t) \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} .$$

В этом случае для погрешности справедлива оценка

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

Обратное интерполирование

Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по заданному значению $\bar{y}$ определить аргумент $\bar{x}$, соответствующий этому значению. Решение задачи будет единственным, если $f(x)$ монотонна на отрезке, содержащем узлы интерполирования. Если узлы равноотстоящие, то для решения этой задачи можно использовать метод последовательных приближений. Пусть $\bar{y}$ содержится между y_0 и y_1. Запишем первую интерполяционную формулу Ньютона в виде

$$q = \varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} q(q-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0} q(q-1)\ldots(q-n+1). \quad (14)$$

Для определения q можно использовать итерационный процесс:

$$q_m = \varphi(q_{m-1}), \; m = 1,2,\ldots \quad (15)$$

В качестве нулевого приближения можно положить $q_0 = \dfrac{y - y_0}{\Delta y_0}$. Если итерационный процесс сходится, то значение искомого аргумента определяется по формуле $\bar{x} = x_0 + qh$.

В случае неравноотстоящих узлов значение аргумента можно определить по формуле Лагранжа для обратной функции

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\bar{y} - y_0)\ldots(\bar{y} - y_{i-1})(\bar{y} - y_{i+1})\ldots(\bar{y} - y_n)}{(y_i - y_0)\ldots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\ldots(y_i - y_n)} x_i \quad (16)$$

Численное дифференцирование

Заменяя $f(x)$ интерполяционным приближением $\varphi(x)$, получим $f(x) = \varphi(x) + R(f)$ и $f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(f(x))$. Если погрешность $R^{(k)}(f(x))$ достаточно малая, то можно положить $f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x)$.

Пусть узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - равноотстоящие. Тогда для вычисления производной в точке x вблизи x_0 удобно использовать первую интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_n(q) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} q(q-1) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!} q(q-1)...(q-n+1).$$

Учитывая, что $\frac{dP}{dx} = \frac{dP_n}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dP_n}{dq}$, получим

$$P_n'(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 +$$

$$+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + ...),$$

$$P_n''(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (q-1) + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + ...).$$

Тогда

$$R_n'(x) = \frac{h^n}{(n+1)!}\{ f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dq}[q(q-1)...(q-n)] +$$

$$+ q(q-1)...(q-n)\frac{d}{dq}[f^{(n+1)}(\xi)]\}.$$

В узлах интерполирования формула примет вид:

$$R_n'(x) = (-1)^{n-i}\frac{h^n i!(n-i)!}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

При достаточно малом шаге $h << 1$, можно считать, что $f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}}$.

Если узлы неравноотстоящие, для построения функции численного дифференцирования можно использовать формулы Ньютона для неравонотстоящих узлов

$$P_n'(x) = f(x_0, x_1) + f(x_0, x_1, x_2)(\alpha_0 + \alpha_1) + ... + f(x_0, ..., x_i) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_0\alpha_1 ... \alpha_{k-1}\alpha_{k+1} ... \alpha_{i-1} + ... + f(x_0, x_1, ..., x_n) \times \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0\alpha_1 ... \alpha_{k-1}\alpha_{k+1} ... \alpha_{n-1},$$

где $\alpha_i = x - x_i$.

Погрешность формул численного дифференцирования

Для погрешности численного дифференцирования справедливы формулы $R_n^{(k)}(f(x)) = \frac{\omega^{(k)}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, если $x \notin [a,b]$ и $R_n^{(k)}(f(x)) = \frac{\overline{\omega}(x)}{(n-k+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$,

где $\overline{\omega}(x) = (x-\varepsilon_0)...(x-\varepsilon_{n-k})$,

а $\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-k}$ - нули $f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. При численном дифференцировании может произойти существенная потеря точности. Так при использовании формулы $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$ значение производной вычисляется в лучшем случае с половиной верных знаков.

Приближение функций сплайнами

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ является некоторым алгебраическим многочленом. Максимальная по всем отрезкам степень многочленов называется степенью сплайна, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной производной на $[a, b]$ - дефектом. На практике широко используются сплайны третьей степени $S_3(x)$. Такие сплайны называются кубическими. Сплайн, который принимает в узлах те же значения, что и функция $f(x)$ называется интерполяционным.

Существует несколько способов задания сплайнов.

Способ 1: Положим, что $k_i = S_3'(x_i)$. Тогда определяя наклоны k_i по формуле $k_i = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$, $i = 1,\dots, N-1$, $k_0 = \dfrac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}$; $k_N = \dfrac{3f_N + f_{N-2} - 4f_{N-1}}{2h}$, где $h = \dfrac{b-a}{N}$, кубический сплайн можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} f_i + \\ &+ \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)}{h^2} k_i + . \\ &+ \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})}{h^2} k_{i+1} \end{aligned} \tag{17}$$

Способ 2: Если известны значения f_i', то полагаем $k_i = f_i'$. Затем сплайн записывается в форме (17).

Способы 1 и 2 называются локальными. При их использовании гарантируется непрерывность $S_3'(x)$ в узлах x_i.

Способ 3: Будем строить сплайн $S_3(x)$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $S_3(x) \in C^2(a, b)$;

2) На каждом из отрезков сплайн является многочленом третьей степени;

3) В узлах $S_3(x_k) = f(x_k), k = \overline{0, n}$.

Будем искать сплайн на отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ в виде

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3 . \qquad (18)$$

Из условия 3) следует, что $a_i = S_i(x_i)$; $b_i = S_i'(x_i)$, $c_i = S_i''(x_i)$, $d_i = S_i^{(3)}(x_i)$. Условия 3) обеспечивают равенства $a_0 = f_0$, $a_i = f_i$. Из условия непрерывности 1) функции получим $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$, что приводит к уравнению

$$f_i - f_{i-1} = h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i ,\ i = \overline{1, N} . \qquad (19)$$

Из условия непрерывности первой производной $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ имеем

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1},\ i = \overline{2, N}. \qquad (20)$$

Из условия непрерывности второй производной $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ вытекает

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1},\ i = \overline{2, N}. \qquad (20)$$

Следовательно, мы имеем систему (19)-(21) из $3N - 2$ уравнений относительно $3N$ неизвестных. Дополняя эту систему условиями на границе, получим систему из $3N$ уравнений.

Рассмотрим различные типы краевых условий:

1. Пусть заданы значения f_0'' и f_N''. Из уравнений (19)-(21) можно получить систему

$$\begin{cases} c_0 = f_0'' \\ h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6\left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \\ c_N = f_N'' \end{cases} \qquad (22)$$

где $i = \overline{1, N}$. Система (22) имеет диагональное преобладание и может быть эффективно решена методом трехточечной прогонки. Затем можно определить остальные неизвестные:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i};\ b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h_i^2}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} .$$

2. Если на границе заданы значения первых производных b_0 и b_N, то систему (19)-(21) можно привести к виду

$$\frac{2}{h_i}b_{i-1}+4(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}})b_i+\frac{2}{h_{i+1}}b_{i+1}=6(\frac{h_i}{h_{i+1}}(f_{i+1}-f_i)+\frac{h_{i+1}}{h_i}(f_i-f_{i-1})),\quad i=\overline{1,N-1} \qquad (23)$$

$b_0=f_0'$, $b_N=f_N'$.

Очевидно, что система (23) также может быть эффективно решена методом прогонки. Если эти граничные условия использовать при решении системы (22), то ее нужно дополнить уравнениями:

$$\frac{2}{3}c_0+\frac{1}{3}c_1=\frac{2}{h_1}\left(\frac{f_1-f_0}{h_1}-f_0'\right),$$

$$\frac{1}{3}c_{N-1}+\frac{2}{3}c_N=\frac{2}{h_N}\left(f_N'-\frac{f_N-f_{N-1}}{h_N}\right).$$

3. Если на границе заданы значения только функции f_0 и f_N, то можно решать систему (23) с дополнительными условиями

$$b_0=\frac{1}{6h}(-11f_0+18f_1-9f_2+2f_3)$$
$$b_N=\frac{1}{6h}(11f_N-18f_{N-1}+9f_{N-2}-2f_{N-3}) \qquad (24)$$

4. Пусть $f(x)$ периодическая функция с периодом $b-a$, тогда следует считать, что $f_0=f_N$, $S_3'(a)=S_3'(b)$, $S_3''(a)=S_3''(b)$. Если использовать систему (23), то ее нужно дополнить условиями

$$b_0=b_N,$$
$$\frac{f_1-f_0}{h_1^2}-\frac{f_{N-1}-f_0}{h_N^2}=\frac{1}{3h_1}(2b_0+b_1)+\frac{1}{3h_N}(2b_0+b_{N-1}). \qquad (25)$$

Для равномерной сетки из (25) получим уравнение

$$\frac{3(f_1-f_{N-1})}{h}=b_1+4b_0+b_{N-1}.$$

Если использовать систему (22), то ее можно дополнить краевыми условиями

$$c_0=c_N,$$
$$c_1h_1+2(h_N+h_1)c_N+c_{N-1}h_N=6\left[\frac{f_1-f_N}{h_1}-\frac{f_N-f_{N-1}}{h_N}\right]. \qquad (26)$$

Для равномерной сетки из (26) получим уравнение

$$c_1+4c_N+c_{N-1}=\frac{6}{h^2}(f_1-2f_N+f_{N-1}).$$

После решения системы (22) или (23) кубический сплайн можно сразу записать в явном виде (17) или в виде

$$S_3(x) = c_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + c_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (f_{i-1} - \frac{c_{i-1}h_i^2}{6})\frac{x_i - x}{h_i} + (f_i - \frac{c_i h_i^2}{6})\frac{x - x_{i-1}}{h_i}. \quad (27)$$

Погрешность приближения сплайнами

<u>Теорема 3</u>: Если $f(x) \in C_{k+1}[a,b]$, $0 \le k \le 3$, то интерполяционный сплайн $S_3(x)$, построенный способами 2 или 3, удовлетворяет неравенству

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]}\left| f^{(m)}(x) - S_3^{(m)} \right| \le ch^{k+1-m}\max_{[a,b]}\left| f^{(k+1)}(x) \right| \quad (28)$$

где $i = \overline{0, N-1}$, $m = \overline{0,k}$, c-не зависящая от h, i, f постоянная. Если $f \in C_4[a,b]$, то можно положить $c = 1$. Если $S_3(x)$ построен способом 1, то теорема справедлива при $0 \le k \le 2$.

Задания к лабораторной работе

1. Просуммировать конечные ряды:

Вариант	Ряд
1	$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$
2	$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$
3	$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$
4	$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$
5	$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$
6	$1 + 4 + 7 + ... + (3n-2)$
7	$1^2 + 4^2 + 7^2 + ... + (3n-2)^2$
8	$1^3 + 4^3 + 7^3 + ... + (3n-2)^3$
9	$1 + 5 + 9 + ... + (4n-3)$
10	$1^2 + 5^2 + 9^2 + ... + (4n-3)^2$
11	$1^3 + 5^3 + 9^3 + ... + (4n-3)^3$
12	$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$

Вариант	Ряд
13	$2^3+4^3+6^3+...+(2n)^3$
14	$3^2+7^2+11^2+...+(4n-1)^2$
15	$2^2+6^2+10^2+...+(4n-2)^2$

2. Для функции, заданной таблично, построить интерполяционный многочлен Лагранжа и вычислить значение функции в точке $\overline{X}$.

Вариант	x_i	2.0	2.3	2.5	3.0	$\overline{X}$
1	y_i	5.84	6.13	6.30	6.69	2.02
2	y_i	11.38	12.80	14.70	17.07	2.09
3	y_i	3.14	4.15	5.65	6.91	2.91
4	y_i	6.87	6.41	4.42	3.91	2.85
5	y_i	7.19	6.21	5.12	3.98	2.44
6	y_i	1.50	1.34	1.23	1.16	2.13
7	y_i	1.10	1.05	0.97	0.79	2.25
8	y_i	1.54	1.61	1.66	1.71	2.32
9	y_i	0.78	0.39	0.26	0.19	2.79
10	y_i	0.69	0.35	0.23	0.17	2.94
11	y_i	1.05	1.21	1.57	2.42	2.48
12	y_i	6.28	5.62	5.14	4.91	2.59
13	y_i	1.57	1.21	1.11	1.05	2.64
14	y_i	1.11	0.74	0.56	0.44	2.71
15	y_i	1.88	1.54	1.39	1.30	2.12

3. Для табличной функции из задания № 2 построить интерполяционный многочлен Ньютона и вычислить значение функции в заданной точке $\overline{x}$. Сравнить результаты.

4. Для заданной функции $f(x)$ построить таблицу значений функции на отрезке $[a, b]$, разбив отрезок на n равных частей, а затем с помощью интерполирования в форме Ньютона найти значение функции в заданной точке $\overline{x}$. Определить погрешность интерполирования.

Вариант	$f(x)$	a	b	n	$\overline{x}$
1	$\ln x$	1.0	1.6	3	1.55
2	2^x	-0.2	0.4	3	-0.11
3	$x/(x^2+1)$	0.6	1.2	3	0.65
4	$\overline{x}$	0.0	0.6	3	0.54
5	$\sin x$	0.1	0.4	3	0.13
6	$\cos x$	-0.1	0.2	3	0.18
7	$\sin x + \cos x$	0.0	0.3	3	0.27
8	$\sqrt{x}$	1.2	1.8	3	1.24
9	$\sqrt[3]{x}$	0.4	1.0	3	0.45
10	$\sqrt[3]{x^2}$	0.5	0.8	3	0.77
11	$1/(x^2+1)$	1.1	1.4	3	1.12
12	$3^{\sqrt{x}}$	0.1	0.4	3	0.37
13	$2^x \cos x$	0.0	0.3	3	0.12
14	$2^x \sin x$	-0.1	0.2	3	-0.05
15	$x2^x$	0.4	0.7	3	0.63

5. Для функции, заданной таблицей, найти приближенное значение первой и второй производной в точке $\overline{x}$

X	0.98	1.00	1.02	1.04
Y	0.7825	0.7739	0.7651	0.7473

$\overline{x}$=0.98+0.001k, k - номер варианта.

6. По заданной таблице значений функции определить значения аргументов x, соответствующих заданным значениям y

X	4	6	9	11	15	17	19
Y	16	36	81	121	225	289	361

1) y=25; 2) y=49; 3) y=100; 4) y=64; 5) y=144; 6) y=196; 7) y=169; 8) y=55; 9) y=105; 10) y=200; 11) y=300; 12) y=180; 13) y=150; 14) y=130; 15) y=200

7. Для функции, заданной таблицей из задания № 4, построить кубический сплайн и вычислить значение функции в указанной точке $\overline{X}$.

Вопросы по лабораторной работе

1. Постановка задачи интерполирования и ее геометрический смысл.
2. Теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена.
3. Интерполирование в форме Лагранжа. Остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа.
4. Определение конечных разностей k-го порядка и их свойства. Таблица конечных разностей.
5. Интерполяционные формулы Ньютона для случая равноотстоящих узлов интерполяции.
6. Определение разделенных разностей k-го порядка и их свойства. Таблица разделенных разностей.
7. Интерполяционные формулы Ньютона для случая неравноотстоящих узлов интерполяции.
8. Численное дифференцирование.
9. Обратная задача теории интерполирования и методы ее решения.
10. Приближение функций сплайнами. Интерполяционный сплайн. Степень и дефект сплайна.
11. Кубический сплайн. Способы задания наклона сплайна. Погрешность приближения сплайном.