МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть задано нелинейное уравнение вида

$$f(x) = 0\,, \tag{1}$$

где $f(x)$ - некоторая заданная функция. Так как уравнение (1) может иметь бесконечное множество решений, то необходимо сначала отделить корни, т.е. определить отрезки, которые содержат только один корень уравнения (1). После отделения корней проводится их уточнение, т.е. доведение их до заданной степени точности ε. Отметим, что первая задача существенно сложнее второй, так как не существует достаточно эффективного метода ее решения в общем случае.

Отделить корни уравнения (1) можно графически и аналитически. При графическом подходе можно грубо определить точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x или представить сначала уравнение в виде $\varphi(x) = \psi(x)$ и найти абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$. При аналитическом способе отделения корней полезной оказывается теорема.

<u>Теорема 1.</u> Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $f(a)\,f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in [a, b]$ такое, что $f(\xi) = 0$.

Действительный корень ξ будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет знак внутри интервала (a, b).

Пусть $f(x) = P(x)$ - алгебраический многочлен и уравнение (1) не имеет кратных корней. Составим систему Штурма для многочлена $P(x)$:

$$P(x)\,,\; P_1(x)\,,\; P_2(x)\,, \ldots,\; P_m(x)\,,$$

где $P_1(x) = P'(x)$, $P_2(x)$ - взятый с обратным знаком остаток от деления многочлена $P(x)$ на $P_1(x)$, $P_3(x)$ - взятый с обратным знаком остаток при делении многочлена $P_1(x)$ на $P_2(x)$ и т.д. Последним элементом $P_m(x)$ системы Штурма является отличное от нуля действительное число.

Теорема 2 (Штурма). Число действительных корней уравнения (1) на отрезке $[a,b]$ равно разности между числом перемен знаков в последовательности Штурма при $x=a$ и $x=b$.

Важную роль в исследовании сходимости итерационных методов решения уравнения (1) играет принцип сжатых отображений. Пусть R - метрическое пространство и A некоторый оператор, действующий из R в R. Говорят, что A осуществляет сжатие в себя, если существует число α $(0<\alpha<1)$, такое, что для любых $x, y \in R$ выполняется условие

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y). \tag{2}$$

Теорема 3. Если R полное метрическое пространство и A осуществляет сжатие R в себя, то существует одна и только одна неподвижная точка отображения A такая, что

$$Ax = x. \tag{3}$$

При этом решением уравнения (3) является предел последовательности

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{4}$$

при любом $x_0 \in R$. Если x - неподвижная точка, то для сходимости процесса (4) справедлива оценка

$$\rho(x, x_m) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0). \tag{5}$$

Метод итерации

В методе итерации уравнение (1) приводится к эквивалентной форме

$$x = \varphi(x). \tag{6}$$

Итерационный процесс для отыскания решения (6) записывается в виде

$$x_{k+1} = \varphi(x_k). \tag{7}$$

Если процесс (7) сходится при некотором выборе начального приближения x_0, то $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ является корнем уравнения (6).

Теорема 4. Пусть $\varphi(x)$ определена, дифференцируема на $[a,b]$ и все ее значения принадлежат $[a,b]$. Если существует такая величина q, что

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \tag{8}$$

то итерационный процесс (7) сходится к единственному корню на $[a,b]$.

Утверждение теоремы следует из принципа сжатых отображений, если считать $\rho(x,y) = |x-y|$, $\alpha = q$, $Ax = \varphi(x)$. Для скорости сходимости итерационного процесса (7) справедливы оценки:

$$|\xi - x_n| \le q^n |\xi - x_0|, \tag{9}$$

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|, \tag{10}$$

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \tag{11}$$

Из (9) следует, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q. Формула (10) позволяет определить достаточное число итераций n при известной величине $|x_1 - x_0|$. На практике удобно пользоваться формулой (11). Так если выполняется условие $|x_n - x_{n-1}| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$, то корень уравнения определяется с точностью ε.

Таким образом, основная проблема применения метода итерации сводится к построению для (1) эквивалентного уравнения (6) так, чтобы отображение $\varphi(x)$ осуществляло сжатие в себя на отрезке, содержащем корень уравнения.

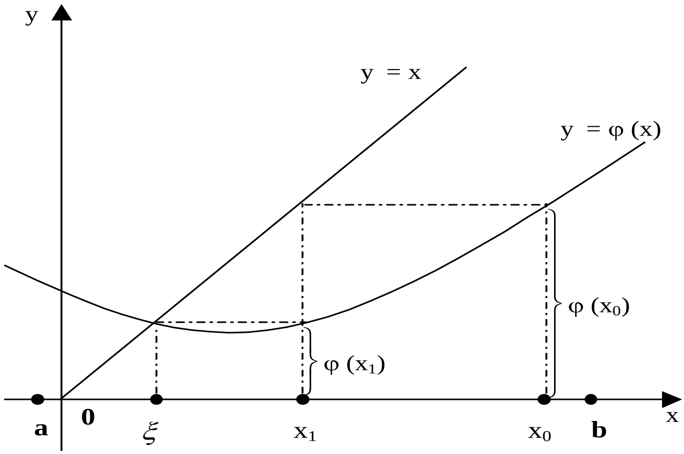
Рассмотрим способ приведения уравнения (1) к виду (6). Уравнение

$$x = x - \lambda f(x), \tag{12}$$

где λ - параметр, эквивалентно (1). Пусть $f'(x)$ сохраняет знак на $[a,b]$.

Если положить $\lambda = \begin{cases} \dfrac{k}{M_1} \text{ при } f'(x) > 0 \\ -\dfrac{k}{M_1} \text{ при } f'(x) < 0 \end{cases}$, где $M_1 = \max\limits_{[a,b]} \left| f'(x) \right|$, $k = 1{,}2$, то, очевидно, будет выполняться условие $\left| \varphi'(x) \right| \le q < 1$.

Геометрическая интерпретация метода итерации



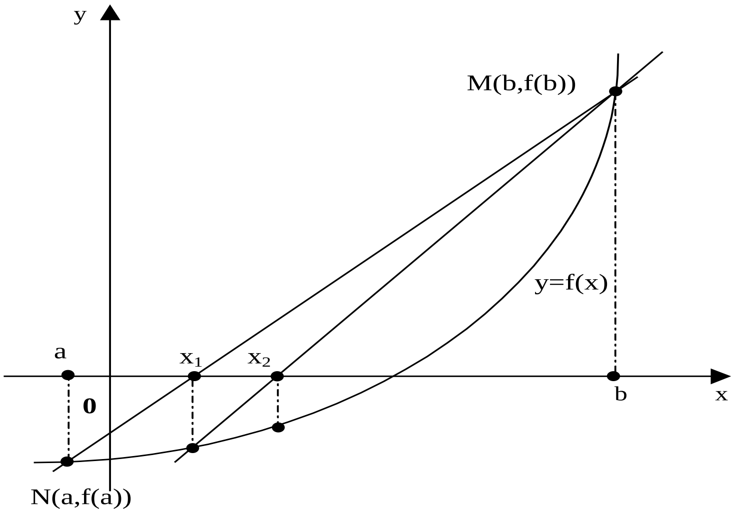
Метод хорд

Будем считать, что на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ непрерывна вместе с производными $f'(x)$ и $f''(x)$, которые не меняют знак на $[a,b]$ и $f(a)\, f(b) < 0$. В методе хорд точка пересечения кривой $y = f(x)$ с осью x на каждом шаге приближается точкой пересечения хорды, стягивающей концы дуги $(c,\, f(c))$, $(x_n,\, f(x_n))$, с осью x. Последовательные приближения при этом вычисляются по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}. \tag{13}$$

В формуле (12) в качестве c берется тот конец отрезка $[a,b]$, для которого выполняется условие $f(c)\,f''(c) > 0$, а начальное приближение x_0 выбирается так, что $f(x_0)\,f(c) < 0$.

Геометрическая интерпретация метода хорд:



Описанный метод называется также методом секущих или методом линейной интерполяции. Последовательные приближения в методе хорд образуют монотонную ограниченную сверху или снизу корнем ξ последовательность. При этом справедлива оценка

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{M_1 - m}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|, \tag{14}$$

где $M_1 = \max\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$, $m_1 = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

Метод секущих можно рассматривать как метод итерации для эквивалентного уравнения $x = x - \dfrac{f(x)(x-c)}{f(x) - f(c)}$, где $f(c)\,f''(c) > 0$ и начальное приближение берется так, что $f(x_0)\,f(c) < 0$.

Метод Ньютона

Если в уравнении (6) положить $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, то получим метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{15}$$

Будем предполагать, что на отрезке $[a, b]$ содержится единственный корень уравнения, производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак и не обращаются в нуль на $[a, b]$. Тогда $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{f'^2(x) - f(x)\,f''(x)}{f'^2(x)}$ и $\varphi'(\xi) = 0$. Следовательно, существует такая окрестность корня ξ, в любой точке x которой справедливо неравенство $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Начальное приближение в (15) целесообразно выбирать так, чтобы выполнялось условие $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$.

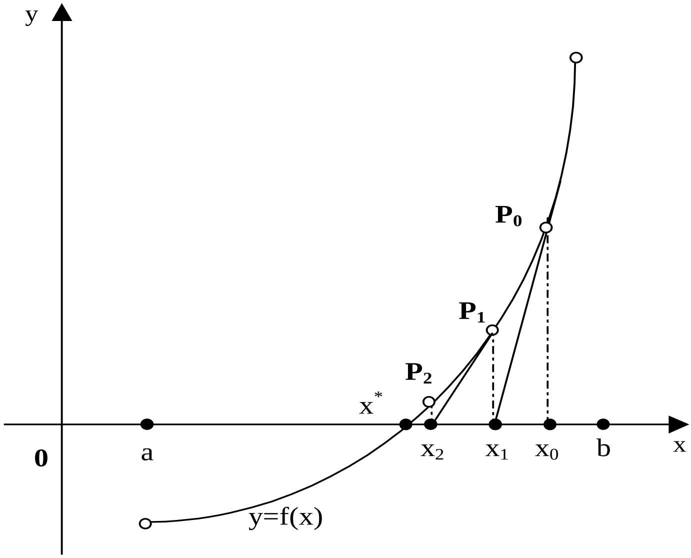
Для скорости сходимости метода справедливы оценки

$$|\xi - x_n| \le \frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}|x_n - x_{n-1}|^2, \tag{16}$$

$$|\xi - x_n| \le \frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1}|\xi - x_{n-1}|^2, \tag{17}$$

где $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{[a,b]}|f'(x)|$. Эти оценки указывают на квадратичную сходимость метода Ньютона.

Геометрически метод Ньютона означает, что в качестве точек приближения к корню берутся точки пересечения с осью x касательной к кривой $y = f(x)$.



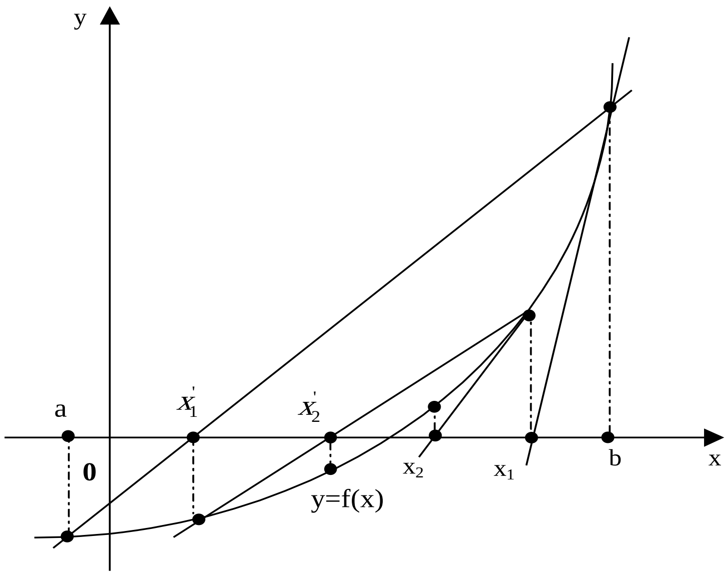
Последовательные приближения сходятся к действительному корню уравнения монотонно со стороны x_0 .

Комбинированный метод

Можно заметить, что в качестве начального приближения в методе секущих и касательнных берутся противоположные концы отрезка $[a,b]$. Так как последовательные приближения сходятся к корню монотонно, то они всегда определяют отрезок, в котором содержится решение уравнения (1). Будем считать, что $f(a)\,f(b)<0$, $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на $[a,b]$. Выбирая в качестве точки c в методе секущих приближения, полученные по методу касательных, придем к формулам комбинированного метода

$$\bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-\frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)};\; x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-\bar{x}_n)}{f(x_n)-f(\bar{x}_n)}. \qquad (18)$$

Геометрическая интерпретация комбинированного метода:



Преобразование Эйткена

Пусть ξ - корень уравненя (6). Тогда для погрешности $x_{n+1}-\xi$, очевидно, справедлива формула

$$x_{n+1}-\xi=\sum_{k=1}^{r}\frac{\varphi^{(k)}(\xi)}{k!}(x_n-\xi)^k+\frac{(x_n-\xi)^{r+1}}{(r+1)!}\varphi^{(r+1)}(\bar{x}). \qquad (19)$$

Если $\varphi^{(k)}(\xi)=0$ для всех $k=\overline{1,r}$, то говорят, что итерация имеет порядок $r+1$. Чем выше порядок итерации, тем быстрее последовательные приблидения сходятся к искомому корню. Метод секущих является методом первого порядка, а метод Ньютона методом второго порядка. Метод Эйткена позволяет из итераций одного и того же порядка построить итерации более высокого порядка. Пусть $\varphi(x)$ определяет итерацию порядка r. Тогда функция

$$\Phi(x)=\frac{x\varphi[\varphi(x)]-\varphi^2(x)}{x-2\varphi(x)+\varphi[\varphi(x)]} \qquad (20)$$

определяет итерацию порядка не ниже $2r-1$, и итерацию второго порядка, если $r=1$. Если итерационный процесс, определяемый функцией $\varphi(x)$ не сходится, как бы близко к ξ не выбиралось начальное приближение x_0, то процесс итераций, определяемый функцией (20), будет сходиться в некоторой окрестности корня, так как $\Phi'(\xi) = 0$.

При использовании формулы $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ функцию $\Phi(x)$ можно не находить в явном виде. Пусть $x_1 = \varphi(x_0)$ и $x_2 = \varphi(x_1)$. Тогда

$$x_3 = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2} = x_0 - \frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2 x_0} .$$

Далее вычисляем $x_4 = \varphi(x_3)$, $x_5 = \varphi(x_4)$ и $x_6 = \dfrac{x_3 x_5 - x_4^2}{x_3 - 2x_4 + x_5}$. В результате получим итерационный процесс:

$$x_{3i+1} = \varphi(x_{3i}) ,\ x_{3i+2} = \varphi(x_{3i+1}) ,\ x_{3(i+1)} = x_{3i} - \frac{(\Delta x_{3i})^2}{\Delta^2 x_{3i}} , \qquad (21)$$

где $i = 0,1,2,\ldots$.

Метод парабол

Пусть заданы три последних последовательных приближения x_{n-2}, x_{n-1}, x_n к корню ξ уравнения $f(x) = 0$. Построим по этим точкам интерполяционный многочлен второй степени, т.е. заменим график функции параболой. Запишем интерполяционный многочлен в форме Ньютона

$$P(x) = f(x_n) + (x - x_n)\, f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})\, f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$$

и, приравняв его к нулю, рассмотрим квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0 , \qquad (22)$$

где

$$z = x - x_n ,\ a = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) ,$$

$$b = a(x_n - x_{n-1}) + f(x_n, x_{n-1}) ,\ c = f(x_n) . \qquad (23)$$

Меньший по модулю корень уравнения (22) определяет новое приближение

$$x_{n+1} = x_n + z .$$

Для начала расчета нужно знать три первых приближеня x_0, x_1, x_2, т.е. метод парабол является трехшаговым. Можно показать, что вблизи простого корня выполняется соотношение

$$\left| x_{n+1} - \xi \right| \approx \left| \frac{f'''(\xi)}{6 f'(\xi)} \right|^{0.42} \left| x_n - \xi \right|^{1.84} ,$$

т.е. сходимость метода парабол медленнее квадратичной.

Решение систем нелинейных уравнений

Метод итераций

Пусть необходимо решить систему нелинейных уравнений вида

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \; i = \overline{0,n}. \quad (24)$$

Перепишем эту систему в эквивалентном виде

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \; i = \overline{0,n} \quad (25)$$

и построим для ее решения итерационный процесс

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \; i = \overline{0,n}. \quad (26)$$

Допустим, что в некоторой выпуклой области G функции $\varphi_i(x)$ имеют непрерывные первые производные $\dfrac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}$, $M_{i,j} = \max\limits_G \left| \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right|$ и в G система (24) имеет единственное решение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Будем считать, что при некотором начальном приближении $x^{(0)}$ все следующие приближения $x^{(k)}$ не выходят из области G.

Теорема 5. Для сходимости метода итераций достаточно, чтобы все собственные значения матрицы $M = [M_{i,j}]$ были по модулю меньше единицы, а начальное приближение $x^{(0)}$ было достаточно близко к решению α.

Условие теоремы будет выполнено, если какая-нибудь из норм матрицы M меньше единицы. Следовательно, для сходимости метода итераций достаточно выполнения одного из условий

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} < 1, \; i = \overline{0,n}; \sum_{i=1}^{n} M_{ij} < 1, \; j = \overline{0,n}; \qquad \sum_{i,j=1}^{n} M_{i,j} < 1.$$

Метод Ньютона

Рассмотрим разложение функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x^{(k)}$

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}(x_j - x_j^{(k)}) + f_i(x^{(k)}) + O\left(\left| x - x^{(k)} \right|^2 \right). \quad (27)$$

Будем считать, что $x^{(k)}$ достаточно близкое значение к точке x. Отбросим величины второго порядка малости в (27). Тогда система (27) заменится системой

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}(x_j - x_j^{(k)}) + f_i(x^{(k)}) = 0, \; i = \overline{0,n}. \quad (28)$$

Решение системы (28) будем считать следующим приближением $x^{(k+1)}$. Таким образом, метод Ньютона для решения системы (24) определяется системой уравнений

$$W(f(x^{(k)}))\cdot(x^{(k+1)}-x^{(k)})=-f(x^{(k)}), \qquad (29)$$

где $W(f(x^{(k)}))=\left[\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j}\right]$ - матрица Якоби.

Формально его можно переписать в виде аналогичном одномерному случаю:

$$x^{(k+1+}=x^{(k)}-W^{-1}(f(x^{(k)}))\cdot f(x^{(k)}). \qquad (30)$$

Для выяснения условий сходимости метода возьмем модифицированный метод, записанный в форме метода итераций

$$x=\varphi(x), \qquad (31)$$

где $\varphi(x)=x-W^{-1}(f(x^{(0)}))\cdot f(x)$. Рассмотрим матрицу

$$M=\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x)\right]$$

для вектор-функции $\varphi(x)$. Матрица M имеет вид

$$M=E-W^{-1}(f(x^{(0)})W(f(x)).$$

Если элементы матрицы $W^{-1}(f(x))$ непрерывны и она существует, то в достаточно малой окрестности точки $x^{(0)}$ $\|M\|<1$. Таким образом, если точка $x^{(0)}$ выбирается достаточно близко к решению системы (31), то отображение будет сжимающим и метод сходится.

Вычисления по методу Ньютона удобно производить следующим образом. Сначала решается система (28) и определяется вектор $\delta^{(k)}=x^{(k+1)}-x^{(k)}$, а затем уточняется очередное приближение $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\delta^{(k)}$.

Задания к лабораторной работе

1. Отделить корни уравнений графически и уточнить один из них методом хорд с точностью до 0.01:

1) $\lg x-7/(2x+6)=0$	2) $3x-\cos x-1=0$
3) $x+\lg x=0.5$	4) $x^2-20\sin x=0$
5) $\sqrt{x}-\cos x=0$	6) $x\lg x-2=0$
7) $x^2+4\sin x=0$	8) $10ctgx-x=0$
9) $3^{x-1}+4+x=0$	10) $x\lg(x+1)=1$

11) $arctgx - 1/(3x^3) = 0$ 12) $x^2 \cos 2x = -1$

13) $(x-3)\cos x = 1$ 14) $5^x + 6x + 3 = 0$

15) $x\log_3(x+1) = 1$

2. Отделить корни уравнений аналитически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0.01:

1) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ 2) $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$

3) $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$ 4) $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

5) $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$ 6) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

7) $x^3 - 12x - 5 = 0$ 8) $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$

9) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ 10) $x^3 - 12x + 6 = 0$

11) $x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$ 12) $x^3 - 12x + 10 = 0$

13) $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ 14) $2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$

15) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$

3. Отделить корни уравнения методом Штурма и уточнить один из них комбинированным методом с точностью до 0.01:

1) $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$ 2) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$

3) $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$ 4) $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$

5) $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ 6) $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$

7) $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$ 8) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

9) $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$ 10) $x^3 - 12x - 5 = 0$

11) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$ 12) $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$

13) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ 14) $x^3 - 12x^2 + 6 = 0$

15) $x^3 - 12x + 10 = 0$

4. Отделить корни уравнения графически и уточнить один из них методом итераций с точностью до 0.01:

1) $\ln x + (x+1)^3 = 0$ 2) $x2^x = 1$

3) $\sqrt{x+1} = 1/x$ 4) $x - \cos x = 0$

5) $3x + \cos x + 1 = 0$ 6) $x + \lg x = 0.5$

7) $2 - x = \ln x$ 8) $(x-1)^2 = e^x/2$

9) $(2 - x)e^x = 1$ 10) $x^2 + 4\sin x = 0$

11) $2x + \lg x = 7$ 12) $5x + 8\ln x = 8$

13) $3x + e^x = 0$ 14) $x(x+1)^2 = 1$

15) $x = (x+1)^3$

5. Отделить корни уравнения методом Штурма и уточнить один из них методом парабол с точностью до 0.01:

1) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$
2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$
3) $x^3 - 2x + 2 = 0$
4) $x^3 + 3x - 1 = 0$
5) $x^3 + x - 3 = 0$
6) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$
7) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$
8) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$
9) $x^3 + 2x + 4 = 0$
10) $x^3 + 4x - 6 = 0$
11) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
12) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
13) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$
14) $x^3 + 3x + 1 = 0$
15) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$

6. Используя методы итераций и Ньютона, решить систему нелинейных уравнений с точностью до 0.01:

1) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$
2) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$
3) $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0.7 \end{cases}$
4) $\begin{cases} \cos x + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y-0.5) = 1 \end{cases}$
5) $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$
6) $\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8 \\ \sin y - 2x = 1.6 \end{cases}$
7) $\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0.8 \end{cases}$
8) $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0.4 \end{cases}$
9) $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$
10) $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5 \\ x + \cos(y-2) = 0.5 \end{cases}$
11) $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$
12) $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$
13) $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0.7 \end{cases}$
14) $\begin{cases} \cos y + x = 1.5 \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1 \end{cases}$
15) $\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$

Вопросы по лабораторной работе

1. Методы отделения корней нелинейных уравнений. Теорема Штурма.

2. Метод простой итерации. Достаточное условие сходимости метода итераций. Оценки скорости сходимости.
3. Оценка погрешности метода простой итерации. Геометрическая интерпретация метода.
4. Метод Ньютона для решения нелинейных уравнений. Геометрическая интерпретация метода. Оценка погрешности и скорость сходимости.
5. Метод хорд для решения нелинейных уравнений. Выбор начального приближения в методе хорд. Геометрическая интерпретация и оценка погрешности метода.
6. Комбинированный метод для решения нелинейных уравнений и его геометрическая интерпретация.
7. Ускорение сходимости итерационных процессов с помощью преобразования Эйткена.
8. Решение нелинейных уравнений методом парабол.
9. Метод итераций для решения систем нелинейных уравнений. Достаточные условия сходимости метода.
10. Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.