# МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть $R$ - пространство функций $f(x)$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$. Скалярным произведением функций $f$ и $g$ в $R$ называется выражение $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$. Нормой элемента $f$ называется число $\|f\|^2=\int_a^b f^2(x)dx$. Если для функций $f$ и $g$ выполняется условие $(f,g)=0$, то говорят, что элементы $f$ и $g$ ортогональны. Полученное таким образом пространство обозначается $L_2[a,b]$. Рассмотрим подпространство $H$ состоящее из линейных комбинаций $n+1$ линейно независимых функций $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$:

$$\varphi=c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n. \tag{1}$$

Это подпространство называется подпространством обобщенных многочленов по системе функций $\{\varphi_i(x)\}$. Среднеквадратичным отклонением элемента $\varphi\in H$ от элемента $f\in L_2$ называется величина

$$S^2=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2\,dx.$$

В методе наименьших квадратов приближение элемента $f\in R$ элементом $\overline{\varphi}\in H$ осуществляется таким образом, чтобы величина среднеквадратичного отклонения была минимальна в $L_2$:

$$S^2(c_0,\ldots,c_n)=\|f-\overline{\varphi}\|=\inf_{\varphi\in H[a,b]}\|f-\varphi\|. \tag{2}$$

Если такой элемент $\overline{\varphi}$ существует, он называется элементом наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f\in R$ в подпространстве $H$.

<u>Теорема 1.</u> Для того, чтобы элемент $\overline{\varphi}(x)\in H$ был элементом наилучшего среднеквадратичного приближения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$(f-\overline{\varphi},\varphi)=0 \tag{3}$$

для любого $\varphi\in H$.

Доказательство: Необходимость. Пусть существует такой элемент $\varphi_1$, что $(f-\overline{\varphi},\varphi_1)=\alpha\neq 0$. Без нарушения общности можно считать, что $\|\varphi_1\|=1$. Возьмем элемент $\varphi_2=\overline{\varphi}+\alpha\varphi_1$. Тогда имеем:

$$\|f-\varphi_2\|^2=(f-\varphi_2,\,f-\varphi_2)=(f-\overline{\varphi}-\alpha\varphi_1,\,f-\overline{\varphi}-\alpha\varphi_1)=$$
$$=(f-\overline{\varphi},\,f-\overline{\varphi})-\alpha(\varphi_1,\,f-\overline{\varphi})-\alpha(f-\overline{\varphi},\varphi_1)+\alpha^2(\varphi_1,\varphi_1)=$$
$$=\|f-\overline{\varphi}\|^2-2\alpha^2+\alpha^2=\|f-\overline{\varphi}\|^2-\alpha^2.$$

Отсюда следует $\|f-\varphi_2\|^2<\|f-\overline{\varphi}\|^2$, что невозможно, т.к. $\overline{\varphi}$ - элемент наилучшего приближения.

Достаточность. Пусть $\varphi\in H$. Тогда

$$\|f-\varphi\|^2=(f-\overline{\varphi}+\overline{\varphi}-\varphi,\,f-\overline{\varphi}+\overline{\varphi}-\varphi)=\|f-\overline{\varphi}\|^2+(\overline{\varphi}-\varphi,\,f-\overline{\varphi})+$$
$$+(f-\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\varphi)+\|\overline{\varphi}-\varphi\|^2=\|f-\overline{\varphi}\|^2+\|\overline{\varphi}-\varphi\|^2.$$

Если $\varphi\neq\overline{\varphi}$, то получим $\|f-\varphi\|^2>\|f-\overline{\varphi}\|^2$ для произвольного $\varphi\in H$, т.е. $\overline{\varphi}$ - элемент наилучшего среднеквадратичного приближения в $H$.

Из теоремы в частности следует, что если взять в качестве элементов из $H$ последовательно $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, то из условия ортогональности (3) получим:

$$(f-\overline{\varphi},\varphi_i(x))=0 \qquad (4)$$

для любого $i=\overline{0,n}$. Систему (4) можно переписать в виде

$$c_0(\varphi_0,\varphi_i)+c_1(\varphi_1,\varphi_i)+\ldots+c_n(\varphi_n,\varphi_i)=(f,\varphi_i),\ i=\overline{0,n}. \qquad (5)$$

Нетрудно показать, что матрица системы (5) $A=\{(\varphi_i,\varphi_j)\}$ симметрична, положительно определена и ее определитель, называемый определителем Грамма, для системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$ отличен от нуля. Следовательно, система (4) имеет единственное решение.

Возьмем в качестве $H$ класс алгебраических многочленов

$$P_n(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n.$$

Тогда $(\varphi_i,\varphi_j)=\int\limits_a^b x^i x^j dx$, $(f,\varphi_i)=\int\limits_a^b f(x)x^i dx$. Обозначим $s_i=\int\limits_a^b x^i dx$, $m_i=\int\limits_a^b f(x)x^i dx$. Перепишем систему (5) в виде

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n = m_0 \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_n s_{n+1} = m_1 \\ \ldots \\ c_0 s_n + c_1 s_{n+1} + \ldots + c_n s_{2n} = m_n \end{cases}. \tag{6}$$

Определитель Грамма этой системы всегда положителен и система имеет единственное решение.

Если $\varphi=\overline{\varphi}$, то из (3) следует

$$\left\| f-\overline{\varphi}\right\|^2 = \| f\|^2 - \left\|\overline{\varphi}\right\|^2 . \tag{7}$$

В этом случае, если система функций $\{\varphi_i(x)\}$ ортонормированна, т.е. $(\varphi_k,\varphi_l)=\begin{cases}0, & если\ \ k\neq l\\ 1, & если\ \ k=l\end{cases}$, то система (5) решается в явном виде

$$c_k = (f,\varphi_k)\,,\ \ k=\overline{0,n}. \tag{8}$$

При этом погрешность можно вычислить по формуле

$$\left\| f-\overline{\varphi}\right\|^2 = \| f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 . \tag{9}$$

Соответствующий обобщенный многочлен называется многочленом Фурье, а $c_k$ - коэффициентами Фурье элемента $f(x)\in R$ по ортонормированной системе функций $\{\varphi_i(x)\}$.

Примером ортогональной системы функций являются многочлены Лежандра

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \tag{10}$$

которые ортогональны на отрезке $[-1,+1]$ и $\left\|L_n(x)\right\|=\sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$. Эти многочлены можно вычислить по рекуррентной формуле

$$(n+1)L_{n+1}(x)-(2n+1)xL_n(x)+nL_{n-1}(x)=0\,. \tag{11}$$

Многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения по отрезку $[-1,+1]$ будет многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x), \qquad (12)$$

где $c_k = \dfrac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} f(x) L_k(x)dx$. Отметим, что ряд Фурье по многочленам Лежандра для любой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[-1,+1]$ сходится равномерно.

Для приближения на интервале $(-l,l)$ периодической функции с периодом $2l$ удобно использовать ортогональную систему функций $\left\{\dfrac{1}{2}, \cos\dfrac{\pi kx}{l}, \sin\dfrac{\pi kx}{l}\right\}$. Обобщенным многочленом наилучшего приближения тогда будет тригонометрический ряд Фурье

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l}\right), \qquad (13)$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \ \ b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

Если функция $f(x)$ задана на интервале $(0,l)$, то коэффициенты дискретного ряда Фурье (13) вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \ \ b_k = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

**Точечная среднеквадратичная аппроксимация функций на отрезке**

Пусть на отрезке $[a,b]$ для функции $f(x)$ известны только ее значения в $n+1$ точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Будем искать в классе обобщенных многочленов такой, чтобы величина квадратичного отклонения

$$S^2(c_0,\ldots,c_m) = \sum_{i=0}^{n}(f(x_i) - \varphi(x_i))^2 \qquad (14)$$

принимала наименьшее возможное значение. Если

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m,$$

то из необходимого условия минимума $\dfrac{\partial S}{\partial c_i} = 0$ получим систему вида (5):

$$\begin{cases} c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_m s_m = t_0 \\ c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_m s_{m+1} = t_1 \\ \ldots \\ c_0 s_m + c_1 s_{m+1} + \ldots + c_m s_{2m} = t_n \end{cases}, \qquad (15)$$

где

$$s_k = (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{l=0}^{n} \varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l), \ i + j = k, \ t_k = (f, \varphi_k) = \sum_{l=0}^{n} f(x_l)\varphi_k(x_l).$$

Если в качестве системы $\{\varphi_i(x)\}$ берется система $1, x, \ldots, x^m$, то приближение ищется в классе алгебраических многочленов степени $m$:

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

В этом случае коэффициенты системы (15) определяются по формулам

$$s_k = \sum_{l=0}^{n} x_l^k, \ t_k = \sum_{l=0}^{n} x_l^k f(x_l).$$

Определитель Грамма системы (15) положителен и, следовательно, система имеет единственное решение.

Замечание. В том случае, когда $m = n$ и приближение ищется в классе алгебраических многочленов, приближение дает интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, т.к. для него величина среднеквадратичного отклонения равна нулю: $S^2 = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - L_n(x_i))^2 \equiv 0$.

### Задания к лабораторной работе

1. Для заданной функции $y = f(x)$ построить полином второй степени, приближающий $f(x)$ с наименьшим квадратичным отклонением на отрезке $[a, b]$:

| Вариант | $f(x)$ | a | b |
|---|---|---|---|
| 1 | $e^x$ | 0 | 1 |
| 2 | $1/(x+1)$ | 1 | 2 |
| 3 | $1/(1+x^2)$ | 0 | 1 |
| 4 | $\sin x$ | 0 | $\pi$ |
| 5 | $x/(1+x)$ | 1 | 2 |
| 6 | $\ln x$ | 1 | 2 |

| Вариант | $f(x)$ | a | b |
|---|---|---|---|
| 7 | $\cos x$ | 0 | $\pi$ |
| 8 | $x^3 - 2x^2$ | 0 | 2 |
| 9 | $x/(1+x^2)$ | 0 | 1 |
| 10 | $x^2 - 4x$ | -1 | 1 |
| 11 | $2^x$ | 0 | 1 |
| 12 | $3x^3 + x$ | 1 | 2 |
| 13 | $2/(x+3)$ | 0 | 1 |
| 14 | $x^2/(1+x^2)$ | 0 | 1 |
| 15 | $2x + 5x^2$ | -1 | 2 |

2. Для функции $f(x)$, заданной таблично, с помощью метода наименьших квадратов построить аппроксимирующий многочлен второй степени:

| Вариант | $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $y_i$ | -1 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | $y_i$ | 1 | 9 | 10 | 16 |
| 3 | $y_i$ | -4 | 0 | 2 | 7 |
| 4 | $y_i$ | 4 | 1 | 0 | 2 |
| 5 | $y_i$ | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 6 | $y_i$ | -1 | -2 | 0 | 5 |
| 7 | $y_i$ | 1 | 1 | 0 | -1 |
| 8 | $y_i$ | -3 | 3 | -3 | 3 |
| 9 | $y_i$ | 0 | 3 | 8 | 15 |
| 10 | $y_i$ | -2 | 0 | 2 | 15 |
| 11 | $y_i$ | 5 | -1 | 1 | 2 |
| 12 | $y_i$ | 1 | 3 | -2 | -3 |
| 13 | $y_i$ | -3 | 0 | 1 | 4 |
| 14 | $y_i$ | 2 | 3 | 4 | -1 |
| 15 | $y_i$ | -2 | -1 | 0 | 2 |

3. Для функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$, с помощью метода наименьших квадратов построить обобщенный аппроксимирующий

многочлен, взяв в качестве ортогональной системы систему тригонометрических функций $1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x$:

| Вариант | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | $y = x$ |
| 2 | $y = \lvert x \rvert$ |
| 3 | $y = e^{x}$ |
| 4 | $y = e^{-x}$ |
| 5 | $y = 1 - x$ |
| 6 | $y = x^{2}$ |
| 7 | $y = x + 1$ |
| 8 | $y = 3x + 1$ |
| 9 | $y = 1 + \sin x$ |
| 10 | $y = 1 + \cos x$ |
| 11 | $y = 1 + \sin 2x$ |
| 12 | $y = 1 + \cos 2x$ |
| 13 | $y = \sin x + \cos 2x$ |
| 14 | $y = \sin x + \cos x$ |
| 15 | $y = \cos 2x + \sin x + 1$ |

**Вопросы по лабораторной работе**

1. Евклидовы пространства. Примеры.
2. Нормированные пространства. Примеры.
3. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций. Определитель Грама. Ортогональные системы функций.
4. Обобщенный многочлен. Многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения. Теорема о существовании и единственности многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения.
5. Интегральная квадратичная аппроксимация функций на отрезке $[a,b]$.
6. Точечная квадратичная аппроксимация функций.
7. Приближение функций дискретным рядом Фурье.