Лабораторная работа 3

Решение целочисленных линейных задач методом отсечения Гомори

Постановка задачи: найти $x \in R^n$ такое, что $z = c'x \to \max$ при ограничениях $Ax = b, x \geq 0, x_i$ — целые числа, $i = \overline{1,n}, b \in R^m, c \in R^n$, $A - (m \times n)$-матрица.

Идея метода. Сначала решается соответствующая непрерывная задача (условия целочисленности не учитываются) симплекс-методом. Если полученный оптимальный план целочислен, то он будет решением исходной задачи. Если нет, то по одной из дробных компонент этого плана строится дополнительное ограничение (сечение Гомори), которое "отсекает" его от множества планов, а все целочисленные остаются, непрерывная задача с дополнительным ограничением снова решается. При этом используется результат решения предыдущей задачи (последняя симплекс таблица) и ее удобно решать двойственным симплекс-методом. Если новый оптимальный план целочисленен, то получено решение исходной задачи, в противном случае операция (построения сечения Гомори) повторяется. И т.д. Доказано, что метод Гомори через конечное число таких операций позволяет построить решение задачи.

Пример. Пусть мы имеем задачу целочисленного линейного программирования.

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, x_i \geq 0 \text{ — целые числа } i = \overline{1,n}$$

Применим к непрерывной задаче симплекс-метод. Получим оптимальный план: $x^0 = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0\right) \quad z_{\max} = 3\frac{3}{4}$.

Обозначим:

$[\alpha]$ — целая часть числа α;

$\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ — дробная часть α.

Последняя симплекс-таблица имеет вид:

$a_Б$	b	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	9/4	1	0	3/4	-1/4
a_2	3/2	0	1	-1/2	1/2
Δ	15/4	0	0	1/4	1/4

Так как план X^0 не целочисленен применим к задаче метод Гомори.

1. Из $b_г$ выбираем число с наибольшей дробной частью. Так как $\max\left[\left\{\frac{9}{4}\right\} = \frac{1}{4}; \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$, то по II строке строим отсечение Гомори по формуле:

$$\{b_i\} - \sum_{j \in I_H} \{a_{ij}\} x_{ij} \leq 0$$

имеем $\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{-\frac{1}{2}\right\} x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\} x_4\right) \leq 0 \qquad \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right) \leq 0; \ -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leq -\frac{1}{2}$

Приводим это ограничение к равенству введя дополнительную переменную $x_5 \geq 0$. $-\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$

Так как $b_5 = -\frac{1}{2}$, значит строим двойственную симплекс-таблицу и решаем полученную задачу двойственным симплекс-методом $(\delta = \Delta)$.

$a_Б$	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	9/4	1	0	3/4	-1/4	0
a_2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0
a_5	-1/2	0	0	-1/2	-1/2	1
Δ	15/4	0	0	1/4	1/4	0
σ				1/2	1/2	
a_1	3/2	1	0	0	-1	3/2
a_2	2	0	1	0	1	-1
a_3	1	0	0	1	1	-2
Δ	7/2	0	0	0	0	1/2

3.Строим сечение Гомори для I строки:

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\{-1\}x_4 + \left\{\frac{3}{2}\right\}x_5\right) \leq 0 \qquad \frac{1}{2} - \left(0 * x_4 + \frac{1}{2}x_5\right) \leq 0,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 \leq 0;\ -\frac{1}{2} + x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

4. Строим новую двойственную симплекс-таблицу.

a_1	3/2	1	0	0	-1	3/2	0
a_2	2	0	1	0	1	-1	0
a_3	1	0	0	1	1	-2	0
a_6	-1/2	0	0	0	0	-1/2	1
Δ	7/2	0	0	0	0	1/2	0
a_1	0						
a_2	3						
a_3	3						
a_5	1						
Δ	3	0	0	0	0	0	1

$x^* = (0,3,3,0), \quad z_{\max} = 3$

Задание. Решить задачу методом отсечения Гомори.

1) $$\begin{aligned} & f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max \\ & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ & x_j \geq 0, \text{целые},\ j = \overline{1,3} \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} & f = 110x_1 + 90x_2 \to \max \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_j \geq 0, \text{целые},\ j = \overline{1,2} \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} & f = x_1 - x_2 \to \max \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \\ & x_j \geq 0, \text{целые},\ j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

4) $$\begin{array}{l} f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_3 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

5) $$\begin{array}{l} f = -x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

6) $$\begin{array}{l} f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

7) $$\begin{array}{l} f = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,4} \end{array}$$

8) $$\begin{array}{l} f = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \le 7 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

9) $$\begin{array}{l} f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 + 4x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

10) $$\begin{array}{l} f = x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_3 \le 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

11) $$\begin{array}{l} z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 9 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

12) $$\begin{array}{l} z = 4x_1 + x_2 \to \max \\ 2x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

13) $$\begin{array}{l} z = x_1 + x_2 \to \max \\ 3x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0, \textit{целые} \\ ,\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

14) $$\begin{array}{l} z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5 \\ x_j \ge 0, \textit{целые} \\ ,\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

15) $$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_3 \le 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

16) $$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \\ x_2 + 4x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

17) $$\begin{array}{l} z = 2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_5 \to \max \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 4 \\ x_2 + x_4 \le 2 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,5} \end{array}$$

18) $$\begin{array}{l} z = -8x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 \le 7 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

19) $$\begin{array}{l} z = x_1 + x_2 - x_3 \to \max \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_1 + x_3 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

20) $$\begin{array}{l} z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 \le 3 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,4} \end{array}$$

21) $$\begin{array}{l} z = -6x_1 - x_2 + x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 9 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 \le 2 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,4} \end{array}$$

22) $$\begin{array}{l} z = 2x_1 + x_2 \to \max \\ 2x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,2} \end{array}$$

23) $$\begin{array}{l} z = x_1 - x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,4} \end{array}$$

24) $$\begin{array}{l} f = x_1 + 3x_2 + 7x_3 \to \max \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 13 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$$

25) $\begin{array}{l} z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$

26) $\begin{array}{l} z = 3x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,2} \end{array}$

27) $\begin{array}{l} z = 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 9 \\ x_2 + 3x_3 \le 7 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$

28) $\begin{array}{l} z = x_1 + 4x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_3 \le 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,3} \end{array}$

29) $\begin{array}{l} f = 79x_1 + 6x_2 \to \max \\ 3x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 5x_2 \le 2 \\ x_2 \le 13 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,2} \end{array}$

30) $\begin{array}{l} z = 2x_1 + 3x_2 + x_4 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0, \textit{целые},\ j = \overline{1,4} \end{array}$