

Рис.3.

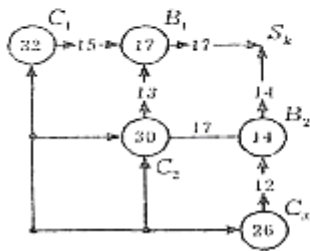


Рис.4.

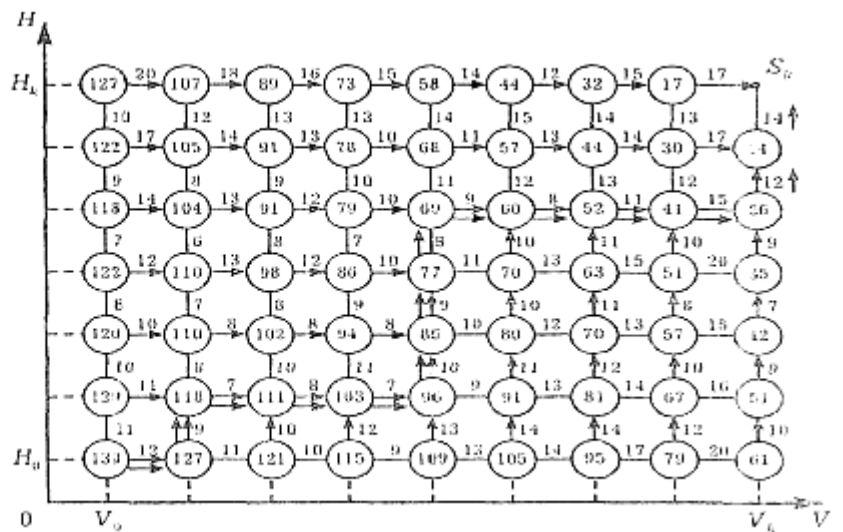


Рис.5.

Тогда условия задачи представлены на рис.2, а произвольной траектории, отмеченной стрелками, соответствует расход горючего:

$$Q = 12 + 11 + 10 + 8 + 11 + 8 + 10 + 10 + 13 + 15 + 20 + 9 + 12 + 14 = 163 \text{ у.е.т.}$$

Общее количество всех возможных траекторий достаточно велико, а потому простой их перебор неприемлем, и поэтому применим принцип оптимальности Беллмана. Поскольку конечное состояние системы  $S_k$  известно, то процесс построения оптимальной траектории начинаем с конца.

Из принципа оптимальности Беллмана следует, что если система находится в некоторой промежуточной точке ( $S_T$ ), и известна конечная точка, то оптимальной стратегией будет та, которая переводит из точки ( $S_T$ ) в конечную ( $S_k$ ) по оптимальной траектории, которой отвечают наименьшие затраты горючего. Поскольку это справедливо для любой промежуточной точки, то приходим к выводу: оптимальная траектория имеет такое свойство - ее каждый участок (фрагмент) составляет оптимальную траекторию. Применим этот вывод для построения оптимальной траектории, двигаясь из конечной точки  $S_k$ . В точку  $S_k$  можно переместиться только из двух соседних точек  $B_1$  и  $B_2$  (см. рис.3), причем только одним возможным способом, а поэтому выбора оптимального управления на последнем шаге нет - оно единственное. Если на предпоследнем шаге мы находились в точке  $B_1$ , то перемещение в  $S_k$  происходит по горизонтали и тратится 17 у.е.т., а если мы находились в точке  $B_2$ , то движемся по вертикали и тратим 14 у.е.т. Эти значения минимальных затрат ставим у точек  $B_1$ , и  $B_2$  и обводим кружком. Таким образом, число в кружке у точки всегда означает минимальный расход горючего для перемещения самолета из данной точки в конечную, а оптимальная траектория показана стрелками (рис.3.)

Теперь переходим к выбору оптимальной стратегии на предпоследнем

шаге. Для этого рассмотрим пункты, из которых можно попасть в  $V_1$ , и  $V_2$  за один шаг. Такими точками являются  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  (рис.4.) для каждой из них необходимо найти оптимальную траекторию в точку  $S_k$  и соответствующий расход горючего. В частности, для  $C_1$  выбора нет, нужно двигаться только по горизонтали и тратить  $15 + 17 = 32$  у.е.т.

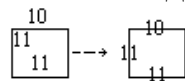
Для точки  $C_2$ , выбор существует: из нее в  $S_k$  можно идти через  $V_1$ , или  $V_2$ . В первом случае израсходуется  $13 + 17 = 30$  у.е.т., а во втором -  $17 + 14 = 31$  у.е.т. Итак, оптимальная траектория из  $C_2$ , в  $S_k$  проходит через  $V_1$ . Покажем эту траекторию стрелками, а соответствующий минимальный расход, равный 30–обведем кружком в точке  $C_2$ .

Наконец, для точки  $C_3$  путь в  $S_k$  - единственный (по вертикали), ему соответствует расход в  $12 + 14 = 26$  у.е.т. Это число обведем кружком в точке  $C_3$  и покажем оптимальную траекторию (рис.4).

Таким образом, двигаясь последовательно от точки к точке справа налево и сверху вниз, находим для каждой узловой точки оптимальную траекторию, ведущую к  $S_k$ , и соответствующее ей минимальное значение расхода горючего (которое обводим кружком). Этот процесс заканчивается, приведя к начальной точке  $S_n$ . Двигаясь теперь от нее в противоположном направлении, которое показано стрелками, последовательно проходим искомую траекторию от  $S_0$  к  $S_k$ . Эта оптимальная траектория показана на рис.5 дополнительными стрелками. Число 139 означает минимальный расход горючего, отвечающий этой траектории.

Поскольку в данной задаче фиксированы как начальная, так и конечная точки, то процесс построения оптимальной траектории можно было бы осуществлять и в противоположном направлении, от начала в конец. Тогда число в кружке означало бы минимальный расход горючего при перемещении самолета из  $S_0$  в точку, соответствующую числу в кружке. Очевидно, что при этом конечный результат - оптимальная траектория – не изменится.

**Задание:** Решить задачу о наборе скорости и высоты самолетом.



1)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 9  | 8  | 10 | 9  | 11 | 10 | 9  | 10 |    |
| 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 9  | 8  | 9  | 10 | 12 |
|    | 11 | 12 | 10 | 10 | 12 | 11 | 13 | 12 | 14 |
| 10 | 13 | 12 | 12 | 14 | 13 | 10 | 9  | 8  | 7  |
| 10 | 13 | 11 | 15 | 10 | 9  | 10 | 8  | 9  |    |
| 8  | 10 | 9  | 14 | 15 | 9  | 10 | 11 | 12 | 14 |
|    | 11 | 15 | 12 | 14 | 15 | 10 | 9  | 11 | 8  |
| 8  | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 10 | 9  | 8  | 11 |
| 8  | 10 | 11 | 13 | 16 | 12 | 10 | 12 | 14 |    |
| 10 | 9  | 8  | 7  | 14 | 7  | 12 | 10 | 12 | 14 |
|    | 12 | 8  | 9  | 10 | 11 | 13 | 15 | 12 | 10 |
| 10 | 8  | 9  | 10 | 15 | 12 | 14 | 13 | 11 | 10 |
|    | 12 | 10 | 15 | 13 | 15 | 12 | 12 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 12 | 11 | 14 | 10 | 12 | 10 | 13 | 15 |
| 10 | 13 | 12 | 14 | 11 | 12 | 10 | 14 | 13 |    |
| 10 | 13 | 10 | 12 | 10 | 12 | 11 | 10 | 12 | 16 |
|    | 12 | 14 | 13 | 10 | 14 | 12 | 11 | 10 | 15 |

2)

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 16 | 15 | 12 | 14 | 12 | 14 | 12 |    |
| 3  | 5  | 4  | 6  | 7  | 2  | 4  | 5  |
| 23 | 24 | 25 | 24 | 22 | 26 | 28 |    |
| 21 | 22 | 28 | 29 | 20 | 22 | 24 | 25 |
|    | 22 | 21 | 24 | 25 | 22 | 23 | 29 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 24 | 20 | 23 | 21 |
|    | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 21 | 19 | 21 | 22 | 24 | 28 | 26 | 24 |
|    | 17 | 14 | 15 | 16 | 14 | 18 | 19 |
| 22 | 24 | 26 | 25 | 23 | 24 | 25 | 26 |
|    | 21 | 24 | 28 | 26 | 28 | 26 | 24 |
| 23 | 24 | 25 | 26 | 24 | 24 | 25 | 26 |
|    | 24 | 25 | 26 | 24 | 29 | 31 | 29 |

3)

|    |    |    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 8  | 9  | 10 | 11 | 7  | 6  | 5  |   |
| 4  | 5  | 6  | 3  | 7  | 3  | 6  | 4 |
| 3  | 4  | 3  | 5  | 3  | 6  | 7  |   |
| 2  | 4  | 2  | 4  | 2  | 3  | 5  | 6 |
| 10 | 2  | 3  | 3  | 2  | 10 | 2  |   |
| 4  | 6  | 6  | 3  | 7  | 8  | 6  | 9 |
| 10 | 13 | 2  | 3  | 10 | 11 | 9  |   |
| 2  | 3  | 4  | 6  | 7  | 8  | 2  | 4 |
| 7  | 6  | 4  | 5  | 3  | 4  | 8  |   |
| 4  | 5  | 6  | 3  | 2  | 1  | 3  | 4 |
| 7  | 8  | 7  | 6  | 8  | 4  | 3  |   |
| 4  | 5  | 3  | 6  | 7  | 3  | 8  | 4 |
| 2  | 8  | 9  | 10 | 11 | 14 | 15 |   |
| 3  | 4  | 2  | 9  | 8  | 7  | 6  | 3 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |   |

4)

|   |   |   |   |    |    |    |    |   |
|---|---|---|---|----|----|----|----|---|
| 4 | 6 | 3 | 2 | 4  | 7  | 7  | 6  | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 4 | 5  | 7  | 6  | 8  | 9 |
| 6 | 6 | 3 | 5 | 4  | 3  | 2  | 10 | 3 |
| 6 | 3 | 5 | 6 | 3  | 4  | 2  | 3  | 4 |
| 3 | 2 | 6 | 3 | 4  | 5  | 6  | 3  | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 5 | 4  | 3  | 6  | 6  | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 6 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7 |
| 3 | 2 | 5 | 7 | 3  | 4  | 5  | 6  | 7 |
| 7 | 8 | 3 | 4 | 5  | 7  | 6  | 5  | 4 |
| 2 | 4 | 6 | 9 | 10 | 11 | 10 | 6  | 7 |
| 3 | 4 | 6 | 3 | 6  | 2  | 4  | 6  | 2 |
| 4 | 7 | 7 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8 |
| 7 | 8 | 3 | 4 | 5  | 10 | 9  | 8  | 9 |
| 6 | 6 | 8 | 5 | 6  | 5  | 3  | 4  | 5 |
| 7 | 3 | 2 | 1 | 4  | 3  | 3  | 4  | 6 |
| 7 | 3 | 5 | 1 | 1  | 2  | 1  | 1  | 3 |
| 4 | 6 | 4 | 7 | 2  | 6  | 3  | 7  | 3 |

5)

|   |   |   |   |    |    |    |   |    |
|---|---|---|---|----|----|----|---|----|
| 6 | 3 | 4 | 3 | 2  | 10 | 9  | 8 |    |
| 4 | 3 | 2 | 7 | 3  | 2  | 1  | 6 | 7  |
| 6 | 3 | 4 | 3 | 4  | 5  | 6  | 3 | 4  |
| 6 | 6 | 4 | 7 | 4  | 6  | 5  | 7 | 4  |
| 6 | 7 | 3 | 4 | 2  | 5  | 4  | 3 | 2  |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 6  | 5  | 4  | 3 | 5  |
| 3 | 2 | 3 | 6 | 4  | 5  | 3  | 4 | 2  |
| 2 | 3 | 4 | 6 | 5  | 7  | 4  | 6 | 3  |
| 2 | 3 | 2 | 6 | 3  | 4  | 4  | 2 | 3  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 7  | 8  | 9  | 3 | 2  |
| 4 | 6 | 4 | 3 | 4  | 2  | 1  | 3 | 8  |
| 7 | 6 | 7 | 7 | 8  | 9  | 10 | 6 | 14 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 9  | 8  | 9 | 11 |
| 7 | 7 | 8 | 6 | 6  | 3  | 4  | 3 | 2  |
| 8 | 9 | 6 | 5 | 4  | 3  | 2  | 4 | 9  |
| 6 | 6 | 8 | 9 | 2  | 4  | 3  | 4 | 6  |
| 4 | 6 | 7 | 3 | 6  | 2  | 4  | 6 | 2  |

6)

|    |    |    |    |    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 9  | 7  | 5  | 8  | 5  | 4  | 9  | 7  |   |
| 5  | 5  | 7  | 6  | 5  | 4  | 9  | 10 | 8 |
| 8  | 8  | 10 | 4  | 10 | 9  | 8  | 7  | 8 |
| 8  | 6  | 8  | 4  | 10 | 9  | 8  | 7  | 4 |
| 5  | 4  | 2  | 7  | 9  | 8  | 10 | 4  |   |
| 6  | 5  | 7  | 8  | 6  | 5  | 10 | 9  | 7 |
| 9  | 3  | 4  | 9  | 8  | 7  | 9  | 10 |   |
| 5  | 6  | 6  | 10 | 7  | 9  | 7  | 6  | 7 |
| 9  | 10 | 5  | 9  | 8  | 10 | 7  | 8  |   |
| 10 | 7  | 8  | 4  | 4  | 8  | 9  | 4  | 4 |
| 6  | 7  | 9  | 10 | 6  | 4  | 5  | 6  |   |
| 7  | 8  | 6  | 5  | 8  | 10 | 9  | 8  | 9 |
| 7  | 4  | 10 | 7  | 4  | 5  | 9  | 9  |   |
| 9  | 9  | 10 | 8  | 9  | 8  | 9  | 8  | 8 |
| 10 | 5  | 7  | 5  | 10 | 7  | 10 | 8  |   |

7)

|    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 16 | 14 | 15 | 13 | 12 | 13 | 14 | 11 |     |
| 13 | 15 | 16 | 17 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17  |
| 23 | 24 | 25 | 22 | 26 | 28 | 24 | 25 |     |
| 21 | 22 | 28 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24  |
| 22 | 21 | 24 | 22 | 23 | 25 | 29 | 31 |     |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 24 | 22 | 23 | 24 | 21  |
| 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |     |
| 21 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 21  |
| 17 | 14 | 15 | 16 | 17 | 14 | 13 | 12 |     |
| 21 | 19 | 21 | 22 | 24 | 28 | 26 | 24 | 25  |
| 17 | 15 | 13 | 17 | 16 | 14 | 13 | 13 |     |
| 21 | 21 | 15 | 16 | 17 | 14 | 17 | 21 | 122 |
| 18 | 19 | 21 | 2  | 22 | 21 | 23 | 24 |     |
| 17 | 14 | 15 | 16 | 14 | 18 | 19 | 20 | 21  |
| 19 | 21 | 22 | 23 | 24 | 19 | 18 | 20 |     |
| 16 | 18 | 21 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 24  |
| 24 | 25 | 26 | 24 | 29 | 31 | 30 | 28 |     |

8)

|   |    |    |    |    |    |   |   |    |
|---|----|----|----|----|----|---|---|----|
| 6 | 4  | 3  | 5  | 4  | 8  | 7 | 6 |    |
| 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 3  | 2 | 1 | 10 |
| 7 | 5  | 3  | 6  | 7  | 5  | 8 | 2 |    |
| 8 | 9  | 7  | 6  | 5  | 3  | 4 | 8 | 7  |
| 4 | 3  | 2  | 3  | 4  | 6  | 8 | 6 |    |
| 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 14 | 9 | 8 | 7  |
| 6 | 5  | 3  | 8  | 6  | 7  | 9 | 6 |    |
| 3 | 2  | 1  | 4  | 6  | 5  | 6 | 8 | 9  |
| 2 | 3  | 4  | 5  | 6  | 4  | 3 | 2 |    |
| 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 6 | 9 | 8  |
| 3 | 2  | 5  | 6  | 7  | 8  | 7 | 6 |    |
| 4 | 6  | 5  | 6  | 7  | 8  | 6 | 9 | 8  |
| 3 | 4  | 5  | 7  | 8  | 6  | 4 | 2 |    |
| 3 | 2  | 4  | 3  | 8  | 6  | 5 | 4 | 2  |
| 6 | 5  | 4  | 7  | 8  | 9  | 6 | 4 |    |

9)

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 14 | 16 | 12 | 14 | 15 | 16 | 14 |    |
| 3  | 3  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
| 5  | 4  | 3  | 2  | 8  | 10 | 12 |    |
| 4  | 4  | 2  | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  |
| 10 | 14 | 12 | 10 | 9  | 15 | 14 |    |
| 2  | 2  | 7  | 4  | 6  | 3  | 3  | 4  |
| 16 | 13 | 9  | 8  | 14 | 15 | 11 |    |
| 8  | 1  | 8  | 9  | 10 | 4  | 2  | 3  |
| 15 | 14 | 13 | 16 | 14 | 12 | 13 |    |
| 4  | 5  | 6  | 5  | 6  | 8  | 7  | 8  |
| 13 | 10 | 9  | 8  | 10 | 11 | 12 |    |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 9  | 7  | 8  | 9  |
| 14 | 12 | 10 | 9  | 10 | 9  | 8  |    |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 6  | 7  | 10 |
| 10 | 8  | 9  | 8  | 10 | 12 | 10 |    |

10)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7  | 6  | 5  | 3  | 4  | 5  | 7  | 8  | 9  |
| 7  | 6  | 3  | 7  | 8  | 9  | 10 | 12 | 13 |
| 11 | 12 | 13 | 9  | 8  | 7  | 10 | 11 | 16 |
| 9  | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 12 | 14 |
| 10 | 9  | 8  | 7  | 10 | 11 | 8  | 9  | 10 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 9  | 10 | 7  | 8  |
| 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 14 |
| 14 | 13 | 12 | 11 | 12 | 13 | 18 | 19 | 20 |
| 8  | 9  | 10 | 8  | 9  | 8  | 8  | 9  | 8  |
| 7  | 6  | 5  | 8  | 9  | 10 | 8  | 9  | 11 |
| 7  | 8  | 10 | 8  | 8  | 10 | 9  | 8  | 7  |
| 19 | 18 | 15 | 16 | 14 | 13 | 12 | 10 | 11 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 13 | 12 | 17 |
| 10 | 4  | 5  | 6  | 7  | 9  | 7  | 11 | 9  |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 8  | 7  | 9  | 9  | 8  |
| 9  | 8  | 7  | 6  | 11 | 5  | 6  | 8  | 9  |
| 8  | 9  | 10 | 9  | 10 | 9  | 8  | 9  | 11 |

11)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 12 | 12 | 13 | 10 | 12 | 14 | 13 | 12 | 14 |
| 13 | 10 | 12 | 12 | 11 | 10 | 12 | 15 | 13 |
| 10 | 12 | 13 | 11 | 16 | 10 | 18 | 10 | 12 |
| 12 | 14 | 11 | 10 | 12 | 11 | 10 | 12 | 10 |
| 10 | 9  | 11 | 8  | 11 | 10 | 11 | 12 | 14 |
| 14 | 12 | 11 | 13 | 16 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 9  | 8  | 7  | 10 | 11 | 9  | 8  | 6  | 10 |
| 14 | 12 | 11 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 12 |
| 19 | 18 | 17 | 14 | 16 | 12 | 14 | 12 | 9  |
| 10 | 8  | 9  | 6  | 9  | 10 | 10 | 10 | 11 |
| 12 | 14 | 16 | 15 | 18 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 8  | 7  | 6  | 5  | 8  | 4  | 9  | 11 | 10 |
| 14 | 12 | 13 | 15 | 16 | 14 | 12 | 13 | 14 |
| 18 | 19 | 17 | 16 | 14 | 16 | 20 | 19 | 18 |
| 8  | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 10 | 11 | 12 |
| 10 | 11 | 12 | 14 | 10 | 12 | 14 | 15 | 13 |
| 7  | 8  | 11 | 9  | 12 | 14 | 15 | 13 | 14 |

12)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 7  | 6  | 5  | 3  | 4  | 5  | 7  | 8  | 9  |
| 7  | 6  | 4  | 5  | 3  | 4  | 7  | 8  | 9  |
| 7  | 6  | 8  | 5  | 4  | 3  | 2  | 9  | 8  |
| 6  | 5  | 3  | 7  | 8  | 9  | 10 | 12 | 13 |
| 12 | 11 | 14 | 15 | 16 | 10 | 10 | 12 | 14 |
| 18 | 3  | 7  | 6  | 3  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 8  | 9  | 10 | 12 | 14 | 8  | 9  | 10 | 10 |
| 9  | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 12 | 14 |
| 10 | 9  | 8  | 7  | 9  | 14 | 9  | 9  | 9  |
| 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 14 | 15 |
| 20 | 19 | 18 | 19 | 17 | 16 | 18 | 14 | 15 |
| 8  | 9  | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 22 | 24 | 25 | 26 | 27 | 25 | 26 | 28 | 26 |
| 27 | 26 | 21 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 21 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 31 | 32 |
| 21 | 22 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

13)

|    |   |   |    |   |   |    |   |    |    |
|----|---|---|----|---|---|----|---|----|----|
| 9  | 2 | 3 | 2  | 5 | 4 | 3  | 6 | 4  | 4  |
| 7  | 6 | 1 | 5  | 2 | 8 | 3  | 4 | 5  | 9  |
| 3  | 7 | 1 | 7  | 2 | 7 | 9  | 8 | 8  | 1  |
| 10 | 9 | 7 | 8  | 6 | 5 | 3  | 4 | 2  | 1  |
| 5  | 6 | 9 | 4  | 3 | 7 | 7  | 7 | 10 | 11 |
| 3  | 2 | 4 | 1  | 5 | 3 | 6  | 7 | 9  | 11 |
| 5  | 7 | 4 | 3  | 4 | 6 | 9  | 1 | 7  | 10 |
| 6  | 7 | 9 | 2  | 1 | 2 | 3  | 5 | 4  | 10 |
| 7  | 2 | 7 | 6  | 8 | 5 | 9  | 8 | 11 | 8  |
| 3  | 2 | 4 | 1  | 5 | 3 | 2  | 4 | 7  | 10 |
| 1  | 6 | 2 | 9  | 8 | 9 | 7  | 5 | 4  | 10 |
| 4  | 3 | 2 | 4  | 6 | 7 | 8  | 9 | 10 | 13 |
| 6  | 4 | 6 | 11 | 4 | 3 | 12 | 2 | 13 | 2  |
| 4  | 3 | 2 | 4  | 5 | 6 | 7  | 8 | 9  | 2  |
| 6  | 5 | 7 | 3  | 5 | 4 | 2  | 1 | 8  |    |

14)

|    |   |   |    |   |   |    |    |   |
|----|---|---|----|---|---|----|----|---|
| 6  | 5 | 7 | 3  | 5 | 4 | 2  | 1  | 9 |
| 7  | 7 | 7 | 6  | 5 | 3 | 7  | 8  | 9 |
| 6  | 4 | 6 | 11 | 4 | 3 | 12 | 2  | 2 |
| 10 | 9 | 7 | 8  | 6 | 5 | 3  | 4  | 2 |
| 7  | 2 | 7 | 6  | 8 | 5 | 9  | 8  | 7 |
| 3  | 2 | 4 | 1  | 5 | 3 | 5  | 4  | 1 |
| 5  | 7 | 4 | 3  | 4 | 6 | 9  | 1  | 6 |
| 3  | 2 | 4 | 5  | 7 | 8 | 9  | 8  | 4 |
| 7  | 6 | 9 | 4  | 3 | 7 | 7  | 7  | 4 |
| 6  | 7 | 9 | 2  | 1 | 2 | 3  | 5  | 2 |
| 3  | 6 | 1 | 8  | 2 | 7 | 9  | 8  | 2 |
| 10 | 9 | 1 | 3  | 4 | 2 | 1  | 10 | 9 |
| 9  | 2 | 3 | 2  | 5 | 4 | 3  | 6  | 9 |
| 3  | 4 | 2 | 1  | 5 | 3 | 6  | 7  | 9 |
| 7  | 6 | 1 | 5  | 2 | 6 | 8  | 9  |   |

15)

|    |    |    |   |    |    |    |    |   |    |
|----|----|----|---|----|----|----|----|---|----|
| 10 | 7  | 1  | 2 | 10 | 5  | 9  | 3  | 4 | 3  |
| 5  | 10 | 9  | 8 | 6  | 4  | 2  | 5  | 4 | 10 |
| 8  | 9  | 8  | 9 | 4  | 3  | 5  | 8  | 1 | 10 |
| 7  | 3  | 2  | 3 | 1  | 1  | 6  | 1  | 2 | 9  |
| 10 | 4  | 1  | 5 | 4  | 6  | 6  | 7  | 2 | 9  |
| 2  | 10 | 10 | 4 | 7  | 5  | 6  | 7  | 8 | 2  |
| 5  | 6  | 7  | 7 | 6  | 8  | 5  | 8  | 7 | 1  |
| 3  | 8  | 9  | 8 | 7  | 6  | 10 | 9  | 4 | 3  |
| 6  | 2  | 3  | 3 | 1  | 4  | 2  | 1  | 5 | 3  |
| 5  | 9  | 6  | 7 | 5  | 4  | 3  | 2  | 1 | 10 |
| 7  | 6  | 10 | 9 | 8  | 7  | 9  | 8  | 4 | 1  |
| 10 | 5  | 4  | 8 | 5  | 9  | 4  | 10 | 9 | 6  |
| 5  | 8  | 3  | 2 | 1  | 4  | 3  | 2  | 1 | 10 |
| 6  | 7  | 3  | 8 | 2  | 10 | 1  | 7  | 8 | 6  |
| 8  | 10 | 9  | 9 | 10 | 1  | 10 | 3  | 2 |    |

16)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8  | 9  | 10 | 11 | 9  | 9  | 8  | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 11 | 12 | 10 | 13 | 12 | 11 | 13 |
| 7  | 8  | 11 | 3  | 8  | 9  | 10 | 11 | 13 |
| 9  | 10 | 12 | 13 | 12 | 13 | 14 | 15 | 13 |
| 10 | 9  | 8  | 7  | 12 | 13 | 9  | 10 | 10 |
| 12 | 11 | 13 | 11 | 13 | 12 | 7  | 8  | 10 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 9  | 8  | 7  | 11 | 12 |
| 13 | 12 | 10 | 9  | 8  | 10 | 11 | 10 | 12 |
| 12 | 9  | 8  | 10 | 9  | 8  | 10 | 11 | 10 |
| 9  | 10 | 8  | 11 | 12 | 13 | 9  | 8  | 10 |
| 13 | 12 | 10 | 9  | 7  | 9  | 8  | 10 | 12 |
| 11 | 12 | 10 | 11 | 9  | 8  | 10 | 11 | 12 |
| 10 | 11 | 12 | 11 | 12 | 9  | 10 | 8  |    |

17)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8  | 9  | 7  | 6  | 5  | 4  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 12 | 11 | 10 | 9  | 12 | 7  | 9  | 3  | 4  | 12 |
| 13 | 11 | 10 | 12 | 10 | 9  | 8  | 7  | 9  | 11 |
| 13 | 12 | 10 | 11 | 9  | 12 | 7  | 8  | 9  | 11 |
| 14 | 15 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 8  | 5  |
| 9  | 12 | 14 | 11 | 7  | 6  | 8  | 9  | 7  | 6  |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 10 | 11 | 10 | 8  | 13 | 8  |
| 10 | 11 | 10 | 13 | 9  | 8  | 9  | 8  | 9  | 8  |
| 7  | 8  | 10 | 11 | 14 | 15 | 9  | 9  | 7  | 9  |
| 12 | 10 | 6  | 15 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 9  |
| 4  | 8  | 9  | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 13 | 14 |
| 11 | 8  | 8  | 14 | 14 | 8  | 9  | 11 | 13 | 14 |
| 12 | 13 | 14 | 9  | 8  | 10 | 7  | 8  | 3  | 17 |
| 10 | 10 | 6  | 10 | 12 | 13 | 11 | 16 | 15 | 17 |
| 13 | 14 | 10 | 9  | 8  | 7  | 9  | 10 | 11 | 7  |
| 9  | 8  | 7  | 11 | 12 | 13 | 10 | 9  | 8  | 7  |
| 11 | 11 | 12 | 7  | 9  | 8  | 10 | 11 | 16 |    |

18)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 11 | 12 | 10 | 12 | 14 | 15 | 13 | 22 |
| 20 | 19 | 12 | 13 | 18 | 14 | 16 | 20 | 22 |
| 12 | 14 | 15 | 12 | 13 | 11 | 10 | 14 | 14 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 12 | 14 | 16 | 14 |
| 12 | 12 | 10 | 10 | 11 | 10 | 11 | 12 | 12 |
| 14 | 13 | 13 | 14 | 13 | 14 | 14 | 13 | 12 |
| 10 | 12 | 11 | 10 | 12 | 10 | 10 | 13 | 24 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 13 | 10 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 14 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 14 | 15 | 16 | 14 |
| 12 | 10 | 13 | 14 | 13 | 10 | 12 | 9  | 21 |
| 18 | 17 | 14 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 21 |
| 10 | 14 | 10 | 13 | 10 | 16 | 10 | 19 | 17 |
| 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 18 | 19 | 17 |
| 10 | 20 | 21 | 10 | 16 | 14 | 12 | 10 |    |

19)

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 10 | 11 | 12 | 9  | 10 | 11 | 10 | 9  |
| 9  | 8  | 7  | 9  | 8  | 9  | 10 | 9  |
| 11 | 12 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 7  |
| 8  | 7  | 10 | 11 | 12 | 10 | 8  | 7  |
| 9  | 8  | 10 | 12 | 13 | 11 | 14 | 11 |
| 10 | 12 | 13 | 10 | 11 | 12 | 10 | 11 |
| 8  | 9  | 7  | 6  | 8  | 9  | 11 | 10 |
| 8  | 9  | 7  | 8  | 10 | 11 | 12 | 10 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 12 | 12 |
| 9  | 7  | 8  | 9  | 10 | 10 | 11 | 12 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 12 | 12 |
| 9  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 10 | 12 |
| 10 | 11 | 10 | 12 | 10 | 10 | 13 | 12 |
| 10 | 12 | 10 | 11 | 12 | 10 | 11 | 12 |
| 9  | 8  | 7  | 8  | 6  | 7  | 5  |    |

20)

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 14 | 14 | 13 | 10 | 12 | 14 | 13 | 15 |
| 10 | 13 | 12 | 12 | 11 | 10 | 12 | 15 |
| 12 | 10 | 11 | 13 | 16 | 8  | 10 | 12 |
| 12 | 14 | 11 | 10 | 12 | 11 | 10 | 12 |
| 10 | 9  | 10 | 8  | 9  | 11 | 10 | 7  |
| 12 | 11 | 14 | 10 | 10 | 9  | 8  | 7  |
| 8  | 9  | 14 | 10 | 9  | 12 | 14 | 15 |
| 10 | 13 | 12 | 12 | 11 | 10 | 12 | 15 |
| 10 | 12 | 13 | 10 | 8  | 10 | 9  | 11 |
| 11 | 15 | 12 | 14 | 11 | 10 | 12 | 11 |
| 8  | 10 | 11 | 13 | 16 | 12 | 10 | 12 |
| 10 | 13 | 12 | 12 | 11 | 14 | 7  | 12 |
| 12 | 10 | 15 | 13 | 15 | 12 | 10 |    |

21)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 3  | 3  | 4  | 2  | 8  | 7  | 6  | 8  | 6  | 7  |
| 3  | 4  | 2  | 3  | 4  | 6  | 8  | 10 | 12 | 3  |
| 6  | 7  | 6  | 5  | 6  | 8  | 10 | 12 | 8  | 6  |
| 5  | 6  | 7  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| 4  | 5  | 5  | 4  | 2  | 7  | 8  | 9  | 8  | 10 |
| 11 | 5  | 6  | 4  | 3  | 2  | 4  | 3  | 5  | 6  |
| 14 | 12 | 13 | 14 | 15 | 14 | 10 | 12 | 8  | 7  |
| 8  | 10 | 11 | 12 | 8  | 9  | 10 | 12 | 14 | 6  |
| 9  | 8  | 9  | 10 | 6  | 7  | 8  | 4  | 3  | 5  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 8  | 9  | 8  | 9  | 6  | 7  |
| 7  | 6  | 5  | 7  | 6  | 8  | 9  | 4  | 7  | 8  |
| 6  | 5  | 4  | 5  | 6  | 3  | 2  | 4  | 5  | 6  |
| 6  | 5  | 6  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 6  | 8  |
| 7  | 6  | 5  | 4  | 5  | 3  | 2  | 4  | 5  | 6  |
| 6  | 5  | 5  | 7  | 8  | 6  | 8  | 4  | 3  | 8  |
| 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 8  | 7  | 6  | 4  |
| 6  | 7  | 4  | 5  | 6  | 7  | 5  | 3  | 2  | 4  |

23)

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 27 | 28 |
| 18 | 17 | 16 | 14 | 11 | 21 | 19 |
| 25 | 23 | 24 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 25 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 24 |
| 22 | 23 | 24 | 26 | 27 | 24 | 24 |
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 14 | 15 |
| 24 | 23 | 24 | 26 | 28 | 26 | 21 |
| 21 | 22 | 20 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 18 | 19 | 20 | 22 | 18 | 19 | 20 |
| 24 | 25 | 28 | 27 | 26 | 24 | 25 |
| 12 | 14 | 15 | 12 | 11 | 14 | 14 |

25)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 12 | 11 | 10 | 9  | 12 | 7  | 9  | 3  | 4  |
| 8  | 9  | 7  | 5  | 5  | 4  | 9  | 10 | 11 |
| 13 | 12 | 10 | 14 | 9  | 12 | 7  | 8  | 9  |
| 11 | 11 | 12 | 7  | 9  | 8  | 10 | 11 | 16 |
| 9  | 8  | 7  | 11 | 12 | 13 | 10 | 9  | 8  |
| 13 | 14 | 10 | 9  | 8  | 7  | 9  | 10 | 11 |
| 10 | 10 | 6  | 10 | 12 | 13 | 11 | 16 | 15 |
| 12 | 13 | 14 | 9  | 8  | 10 | 7  | 8  | 3  |
| 11 | 8  | 8  | 14 | 14 | 8  | 9  | 11 | 13 |
| 4  | 8  | 9  | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 13 |
| 12 | 10 | 6  | 15 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  |
| 7  | 8  | 10 | 11 | 14 | 15 | 9  | 9  | 7  |
| 10 | 11 | 10 | 13 | 9  | 8  | 9  | 8  | 9  |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 10 | 11 | 10 | 8  | 13 |
| 9  | 12 | 14 | 11 | 7  | 6  | 8  | 9  | 7  |
| 14 | 15 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 8  |

27)

|    |   |   |    |   |   |    |   |    |
|----|---|---|----|---|---|----|---|----|
| 9  | 2 | 3 | 2  | 5 | 8 | 3  | 6 | 8  |
| 7  | 6 | 1 | 5  | 2 | 3 | 3  | 8 | 5  |
| 3  | 6 | 1 | 6  | 2 | 6 | 9  | 3 | 3  |
| 10 | 9 | 6 | 8  | 6 | 5 | 3  | 4 | 2  |
| 5  | 6 | 9 | 4  | 3 | 6 | 6  | 6 | 10 |
| 3  | 2 | 8 | 1  | 5 | 3 | 6  | 6 | 9  |
| 5  | 6 | 4 | 3  | 8 | 6 | 9  | 1 | 6  |
| 6  | 6 | 9 | 2  | 1 | 2 | 3  | 5 | 8  |
| 6  | 2 | 6 | 7  | 3 | 5 | 9  | 3 | 11 |
| 3  | 2 | 8 | 5  | 5 | 3 | 2  | 8 | 6  |
| 1  | 7 | 2 | 9  | 3 | 9 | 6  | 5 | 8  |
| 8  | 3 | 2 | 8  | 6 | 7 | 8  | 9 | 7  |
| 7  | 8 | 6 | 11 | 8 | 3 | 12 | 2 | 3  |
| 8  | 3 | 2 | 8  | 5 | 6 | 7  | 8 | 9  |
| 7  | 5 | 6 | 3  | 5 | 8 | 2  | 1 | 3  |

29)

|   |   |   |   |    |    |    |   |   |
|---|---|---|---|----|----|----|---|---|
| 5 | 6 | 3 | 2 | 5  | 7  | 7  | 6 | 5 |
| 3 | 5 | 5 | 5 | 4  | 7  | 4  | 8 | 9 |
| 6 | 3 | 5 | 5 | 3  | 2  | 10 | 3 | 5 |
| 6 | 6 | 3 | 4 | 4  | 3  | 5  | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 7 | 3 | 5  | 4  | 6  | 7 | 5 |
| 7 | 3 | 4 | 5 | 4  | 3  | 6  | 6 | 5 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 3  | 4  | 4  | 6 | 7 |
| 3 | 2 | 4 | 7 | 3  | 5  | 4  | 4 | 7 |
| 7 | 8 | 3 | 5 | 4  | 7  | 4  | 4 | 5 |
| 2 | 4 | 6 | 9 | 10 | 11 | 10 | 4 | 7 |
| 3 | 5 | 6 | 3 | 6  | 2  | 5  | 6 | 3 |
| 4 | 9 | 7 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7 | 8 |
| 7 | 8 | 3 | 4 | 5  | 9  | 9  | 8 | 9 |
| 6 | 6 | 8 | 5 | 4  | 5  | 3  | 4 | 5 |
| 7 | 3 | 2 | 7 | 5  | 3  | 3  | 4 | 6 |
| 7 | 3 | 5 | 1 | 1  | 2  | 1  | 1 | 3 |
| 4 | 6 | 5 | 1 | 2  | 6  | 3  | 7 | 3 |

22)

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 8  | 9  | 10 | 10 | 8  | 9  | 9  |
| 9  | 9  | 10 | 11 | 8  | 7  | 7  | 12 |
| 10 | 9  | 12 | 13 | 10 | 9  | 13 | 12 |
| 12 | 13 | 10 | 11 | 8  | 9  | 9  | 9  |
| 9  | 12 | 9  | 10 | 10 | 13 | 7  | 10 |
| 10 | 10 | 11 | 9  | 8  | 9  | 10 | 10 |
| 12 | 9  | 11 | 10 | 10 | 12 | 10 | 9  |
| 11 | 11 | 9  | 12 | 11 | 9  | 9  | 10 |
| 9  | 8  | 10 | 9  | 10 | 11 | 8  | 13 |
| 12 | 12 | 13 | 10 | 12 | 9  | 9  | 11 |
| 10 | 9  | 8  | 13 | 10 | 11 | 9  | 9  |
| 13 | 11 | 9  | 10 | 9  | 10 | 9  | 12 |
| 10 | 12 | 11 | 11 | 11 | 9  | 12 | 11 |
| 9  | 9  | 9  | 10 | 9  | 10 | 10 | 13 |
| 10 | 13 | 10 | 10 | 9  | 10 | 11 | 9  |

24)

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 3  | 4  | 2  | 4  | 5  | 6  | 9  | 8  | 7  |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 8  | 9  | 10 | 9  | 8  |
| 3  | 4  | 7  | 4  | 5  | 6  | 4  | 8  | 1  |
| 2  | 4  | 5  | 3  | 4  | 6  | 8  | 7  | 6  |
| 2  | 4  | 5  | 6  | 9  | 8  | 7  | 6  | 7  |
| 3  | 2  | 4  | 2  | 5  | 6  | 4  | 6  | 3  |
| 4  | 3  | 4  | 2  | 4  | 5  | 6  | 7  | 6  |
| 4  | 3  | 4  | 3  | 2  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 4  | 5  | 3  | 2  |
| 6  | 5  | 6  | 4  | 3  | 4  | 5  | 3  | 2  |
| 4  | 3  | 2  | 8  | 2  | 4  | 8  | 9  | 10 |
| 3  | 4  | 2  | 8  | 2  | 4  | 8  | 9  | 10 |
| 14 | 15 | 16 | 19 | 13 | 12 | 14 | 20 | 19 |
| 4  | 3  | 8  | 2  | 6  | 3  | 4  | 5  | 4  |
| 21 | 22 | 24 | 20 | 25 | 26 | 21 | 22 | 28 |
| 3  | 2  | 4  | 3  | 3  | 2  | 1  | 3  | 2  |
| 9  | 10 | 12 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  |

26)

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 8  | 9  | 10 | 10 | 8  | 9  | 9  |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 8  | 7  | 7  | 12 |
| 10 | 9  | 12 | 8  | 10 | 9  | 13 | 12 |
| 12 | 12 | 10 | 11 | 8  | 9  | 9  | 9  |
| 9  | 13 | 9  | 10 | 10 | 13 | 7  | 7  |
| 10 | 10 | 11 | 9  | 8  | 8  | 8  | 10 |
| 12 | 9  | 11 | 10 | 10 | 12 | 10 | 9  |
| 7  | 7  | 9  | 12 | 11 | 9  | 9  | 10 |
| 9  | 8  | 10 | 9  | 10 | 11 | 8  | 13 |
| 8  | 12 | 13 | 10 | 12 | 9  | 9  | 11 |
| 13 | 9  | 8  | 13 | 10 | 11 | 9  | 9  |
| 13 | 11 | 9  | 7  | 9  | 8  | 9  | 12 |
| 10 | 12 | 11 | 11 | 13 | 9  | 12 | 11 |
| 9  | 9  | 8  | 10 | 9  | 10 | 7  | 13 |
| 8  | 13 | 10 | 9  | 9  | 10 | 8  | 9  |

28)

|    |    |   |    |    |   |    |
|----|----|---|----|----|---|----|
| 9  | 4  | 2 | 6  | 5  | 4 | 6  |
| 3  | 3  | 3 | 4  | 5  | 6 | 7  |
| 5  | 4  | 3 | 2  | 8  | 1 | 10 |
| 4  | 4  | 2 | 9  | 8  | 7 | 6  |
| 3  | 6  | 2 | 10 | 9  | 5 | 1  |
| 2  | 2  | 7 | 4  | 6  | 3 | 3  |
| 8  | 3  | 9 | 8  | 3  | 5 | 1  |
| 8  | 1  | 8 | 9  | 1  | 4 | 2  |
| 5  | 4  | 3 | 6  | 4  | 2 | 3  |
| 4  | 5  | 6 | 5  | 6  | 8 | 7  |
| 1  | 10 | 9 | 8  | 10 | 1 | 2  |
| 4  | 5  | 6 | 7  | 9  | 7 | 8  |
| 4  | 2  | 1 | 9  | 1  | 9 | 8  |
| 5  | 6  | 7 | 8  | 9  | 6 | 7  |
| 10 | 8  | 9 | 9  | 1  | 2 | 10 |

30)

|    |   |   |    |   |    |    |   |    |
|----|---|---|----|---|----|----|---|----|
| 3  | 2 | 3 | 2  | 8 | 8  | 3  | 6 | 6  |
| 7  | 6 | 1 | 5  | 2 | 3  | 3  | 8 | 5  |
| 3  | 6 | 1 | 6  | 2 | 6  | 9  | 3 | 3  |
| 11 | 9 | 6 | 8  | 6 | 5  | 3  | 4 | 2  |
| 5  | 6 | 9 | 4  | 3 | 6  | 6  | 6 | 10 |
| 3  | 2 | 8 | 1  | 5 | 3  | 6  | 6 | 9  |
| 12 | 6 | 8 | 3  | 8 | 6  | 9  | 1 | 6  |
| 6  | 6 | 9 | 2  | 1 | 2  | 3  | 5 | 8  |
| 6  | 2 | 6 | 7  | 3 | 5  | 9  | 3 | 11 |
| 3  | 2 | 8 | 5  | 5 | 3  | 2  | 8 | 6  |
| 1  | 7 | 4 | 9  | 3 | 22 | 6  | 5 | 8  |
| 8  | 3 | 2 | 8  | 6 | 7  | 8  | 9 | 7  |
| 7  | 8 | 6 | 11 | 8 | 3  | 12 | 2 | 3  |
| 8  | 3 | 2 | 8  | 5 | 6  | 7  | 8 | 9  |
| 5  | 5 | 6 | 3  | 7 | 8  | 2  | 1 | 3  |