Лекция 9.

Системы и совокупности уравнений и неравенств.

Свойства граничных точек систем уравнений.

Рассмотрим систему уравнений с параметрами и переменными

Область допустимых значений параметров системы будет равна пересечению соответствующих областей допустимых значений каждого уравнения, т. е.

Пусть – множество всех общих решений каждого уравнения системы. Тогда общими решениями системы (1) на множестве будем считать множество таких общих решений , что

**Теорема 12**. *Пусть точка является граничной в системе уравнений (1). Тогда для нее справедливо одно из следующих условий:*

1. *соответствующее частное уравнение не определено для хотя бы одного значения ;*
2. *точка является граничной во всех уравнениях ,*
3. *точка является граничной в некоторых уравнениях системы (1), а в остальных является внутренней.*

Доказательство. Пусть является граничной точкой из области допустимых значений системы (1). Предположим, что она принадлежит области допустимых значений параметров системы и является граничной в некоторых ее уравнениях. Пусть существует такой индекс из остальных уравнений, что не является граничной и внутренней на множестве . Но тогда она является либо изолированной точкой множества , либо внешней. В первом случае – граничная точка , во втором принадлежит множеству значений параметров, при которых уравнение не определено, а, следовательно, не определена и система (1), что в обоих случаях не соответствует допущению теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Свойства граничных точек совокупности уравнений.

Рассмотрим совокупность уравнений с параметрами и переменными

Область допустимых значений параметров системы будет равна объединению соответствующих областей допустимых значений каждого уравнения, т. е.

Пусть – множество всех общих решений каждого уравнения совокупности. Тогда общими решениями совокупности (2) на множестве будем считать множество таких общих решений , что

**Теорема 13**. *Пусть точка является граничной в совокупности уравнений (2). Тогда для нее справедливо одно из следующих условий:*

1. *соответствующие частные уравнения не определены для всех значений ;*
2. *точка является граничной для хотя бы одного уравнения ,*

Доказательство. Предположим противное. Пусть определена хотя бы в одном уравнении совокупности и не являетсяграничной ни в одном из них. Тогда она является либо внутренней точкой некоторого уравнения, а значит, и совокупности уравнений, либо не принадлежит области допустимых значений параметров каждого уравнения. В обоих случаях она не может быть граничной точкой совокупности. Получаем противоречие. Теорема доказана.

Свойства граничных точек систем неравенств.

Рассмотрим систему неравенств с параметрами и переменными

Область допустимых значений параметров системы будет равна пересечению соответствующих областей допустимых значений каждого неравенства, т. е.

Пусть  
– множество всех общих решений каждого неравенства системы. Тогда общими решениями системы (3) на множестве будем считать множество таких общих решений , что

**Теорема 14**. *Пусть точка является граничной в системе неравенств (3). Тогда для нее справедливо одно из следующих условий:*

1. *соответствующее частное неравенство не определено для хотя бы одного значения ;*
2. *точка является граничной во всех уравнениях ,*
3. *значение нуля*  ***(****или точки разрыва) – го уравнения совпадает со значением нуля (или точки разрыва)* *k – того уравнения.*

Доказательство. Пусть является граничной точкой из области допустимых значений системы (3). Предположим, что она принадлежит области допустимых значений параметров системы и существует такое уравнение , в котором она не является граничной и пусть значение нуля  **(**или точки разрыва) – го уравнения не совпадает ни с каким значением нуля (или точки разрыва) *k* – того уравнения для всех индексов и *k.* Тогда точка принадлежит значению некоторой перестановки

нулей и точек разрывая общих решений соответствующих уравнений системы. Это означает, что принадлежит некоторому неособому типу частных неравенств системы и является внутренней в нем. Получаем противоречие с выбором . Теорема доказана.

Свойства граничных точек совокупности неравенств.

Рассмотрим совокупность неравенств с параметрами и переменными

Область допустимых значений параметров совокупности будет равна объединению соответствующих областей допустимых значений каждого неравенства, т. е.

Пусть  
– множество всех общих решений каждого неравенства совокупности. Тогда общими решениями совокупности (4) на множестве будем считать множество таких общих решений , что

**Теорема 15**. *Пусть точка является граничной в совокупности неравенств (4). Тогда для нее справедливо одно из следующих условий:*

1. *соответствующие частные неравенства не определены для всех значений ;*
2. *точка является граничной для хотя бы одного неравенства ,*

Доказательство. Предположим противное. Пусть определена хотя бы в одном неравенстве совокупности и не являетсяграничной ни в одном из них. Тогда она является внутренней точкой множества для некоторого частного типа неравенства. Но тогда она является такой же для совокупности неравенств. Получаем противоречие. Теорема доказана.