**Лекция 8.**

**Уравнения и неравенства степени не выше** .

**8.1.** **Перестановки и размещения функций с параметрами.**

**Определение 20.** *Для многочлена с переменной и параметрами общее решение уравнения на множестве называется нулём функции на этом множестве.*

**Определение 21.** *В уравнении с переменной и параметрами для общих решений типа частных уравнений и некоторой перестановки инадексов , множеством значений перестановки называется совокупность всех значений параметров, для каждого из которых справедливы соотношения .*

Обозначим .

Для отдельных значений параметров возможны равенства . Тогда значения функций образуют некоторое размещение   
 **Определение 22.** Множеством значений размещения функций называется совокупность всех значений параметров, которым соответствует данное размещение значений функций

.

**Пример 27.** Найти значения всевозможных перестановок и размещений функций .

Решение. Так как при , при , при , то , , . Решив соответствующие неравенства, получим:

Для нахождения значений подстановок и перестановок можно использовать формулы:

**8.2.** **Свойства граничных точек уравнений - ой степени.**

**Теорема 10.** *Пусть – разложение многочлена -ой степени с переменной и параметрами в произведение многочленов меньшей степени. Если – граничное значение параметров в уравнении , то для него справедливо одно из следующих условий:*

1. *точка является граничной в уравнении для некоторого ;*
2. *в уравнении для типа неособых частных уравнений точка является граничной или изолированной точкой множества ;*

Доказательство. Действительно, всякие критические значения параметров, для которых уравнение  неопределено, будут критическими в некотором уравнении . При этом граничная (изолированная) точка на множестве этих значений для исходного уравнения является граничной (изолированной) в таком же множестве значений параметров и для уравнения  
 Если для соответствующее частное уравнение принадлежит типу Ø, то для некоторого . Из разложения многочлена на множители следует, что для всех , т. е. каждое из таких уравнений принадлежит типу Ø. Следовательно, каждая граничная или изолированная точка в множестве будет граничной или изолированной и в некотором из уравнений .

Предположим, что для частное уравнение принадлежит типу ∞. Тогда, по крайней мере, один из многочленов является нулевым. Так как – изолированная или граничная точка на множестве то, она будет такой и на множестве .

Пусть теперь, для уравнение принадлежит некоторому типу неособых частных уравнений, причём не содержит внутренних точек. Если – граничная точка в одном из уравнений , , то утверждение теоремы верно. Предположим, что точка не является граничной ни в одном из таких уравнений. Для уравнений через обозначим тип частных уравнений, содержащий уравнение

Если на множество решений уравнений каждого из типов пустое, то исходное уравнение не имеет решений, причём всякая граничная или изолированная точка в множестве будет граничной или изолированной в некотором из множеств .

Пусть – общее решение уравнения на множестве . Из равенства и разложения многочлена на множители, следует, что – общее решение частного уравнения на . Следовательно, если на соответствующем множестве параметров, уравнения имеют решения , а уравнения не имеют решений, то для исходного уравнения тип определяется общими решениями на множестве  
 По свойству граничных точек каждая граничная или изолированная точка на множестве будет такой же по крайней мере в одном из множеств .

**Следствие 1**. *Пусть – разложение многочлена - ой степени в произведение многочленов с рациональными выражениями не выше первой и второй степеней. Тогда всякое граничное значение параметров в уравнении является граничным значением параметров и в уравнении для некоторого .*

Доказательство. Для многочлена степени с рациональными коэффициентами всякое критическое значение параметров является граничным. Для сомножителя не выше первой степени по теореме 7 типу неособых частных уравнений соответствует совокупность открытых множеств параметров. Для не выше второй степени типу неособых частных уравнений также соответствуют совокупности открытых множеств. Следовательно, неособые частные решения не имеют изолированных точек.

**Следствие 2**. *Пусть – разложение многочлена - ой степени с параметром и переменной в произведение многочленов меньшей степени. Если – граничное значение параметра в уравнении , то для него справедливо одно из следующих условий:*

1. *значение является граничным в уравнении для некоторого*
2. *в уравнении для типа неособых частных уравнений является граничной или изолированной точкой множества.*

**Следствие 3**. *Пусть – многочлен с параметром и переменной не выше - й степени, разлагающийся в произведение многочленов с рациональными коэффициентами не выше первой и не выше второй степеней. Если и - соседние граничные значения параметра, то всем значениям параметра из промежутка в уравнении соответствуют частные уравнения одного типа.*

**8.3. Решение уравнений с параметрами не выше - ой степени.**

Для многочлена  
с переменной и параметрами определим следующие этапы общего решения уравнения :

1. *В пространстве (на координатной плоскости , если параметров два и на координатной прямой, если параметр один) отмечаются области значений параметров, для которых уравнение не определено.*
2. *На области допустимых значений параметров многочлен разлагается в произведение многочленов меньших степеней относительно .*
3. *Для каждого из сомножителей на области допустимых значений параметров исходного уравнения осуществляется решение уравнений . Определяется совокупность всех общих решений этих уравнений на соответствующих множествах значений параметров для каждого .*
4. *Устанавливается пересечение множеств всех значений параметров, для которых не является общим решением уравнения . Множество  
    определяeт все частные уравнения типа Ø и тип неособых частных уравнений, не имеющих решений.*
5. *В любом из подмножеств , выделяются значения параметров для которых  
    определяет тип неособых частных уравнений с общими решениями*

**Пример 28.** Решить уравнение

Решение. Разложим свободный коэффициент уравнения  
на множители. Подстановкой убеждаемся, что значение является корнем. Поделив его на , получаем  
 С другой стороны

Таким образом,

Проверка показывает, что значение является корнем нашего уравнения. Делим многочлен на , получаем разложение

Отсюда корни уравнения равны

Определяем граничные точки:

Граничные точки составляют множество . Теперь записываем типы частных решений в виде характеристик:

**8.4. Свойства граничных точек неравенств не выше -ой степени.**

**Теорема 11.**  *Пусть – разложение многочлена - ой степени в произведение многочленов меньших степеней. Если точка является граничной в неравенстве , то для неё справедливо одно из следующих условий:*

1. *точка является граничной в уравнении ;*
2. *в уравнении для типа  неособых частных уравнений, не имеющих решений, точка является граничной или изолированной на множестве ;*
3. *для значений параметров нуль функции совпадает с нулём функции ;*
4. *в уравнении для типа неособых частных уравнений с общими решениями множество значений перестановки не содержит внутренних точек.*

Доказательство. По определению, граничные значения параметров, для которых частные неравенства не определены или являются особыми, содержатся среди соответствующих критических значений параметров и уравнения .

Пусть – граничное значение параметров неравенства , не являющегося граничным в уравнении . Обозначим через тип неособых частных уравнений, содержащих уравнение .

Если частные уравнения типа не имеют решений, то для каждой точки либо для всех действительных значений переменной , либо . Тем самым частным уравнениям типа соответствуют частные неравенства двух типов – не имеющие решений и являющиеся тождеством на множестве действительных чисел. Граничное значение содержится в одном из множеств с соответствующими частными неравенствами. Множество значений параметров, содержащее эту точку не будет иметь внутренних точек только тогда, когда все его точки граничные или изолированные на всем множестве .

Предположим теперь, что частные уравнения имеют решения и – тип неособых частных уравнений с множеством общих решений  
т.е. нулей функции  на множестве . Из разложения многочлена на множители, вытекает, что в качестве его нулей выступают нули функций . Тогда множество значений параметров можно разбить на совокупность пересекающихся подмножеств одного из следующих видов:

1. подмножества точек, для которых значения некоторых нулей совпадают;
2. подмножества точек, соответствующих некоторой перестановке нулей функций.

Множество общих значений исходного неравенства на любом из выделенных подмножеств значений параметров определяется промежутками вида для конкретной перестановки нулей функции . Тогда для множества частных неравенств, содержащих неравенство множество состоит из объединения соответствующих подмножеств с едиными промежутками в качестве общих решений, причём точка попадает в одно из таких подмножеств. Но не содержит внутренних точек лишь тогда, когда в каждом из подмножеств все точки являются граничными или изолированными, т.е. удовлетворяет одному из условий 3) или 4) теоремы. Теорема доказана.

**Примечание.** *Значениям параметров из пункта 3) теоремы соответствует размещение нулей функции . Значениям параметров из пункта 4) соответствует перестановка нулей.*

**Следствие 1.** *Пусть - разложение многочлена - ой степени в произведение многочленов с рациональными выражениями в качестве коэффициентов при степенях переменной не выше первой и не выше второй. Если – граничные значения параметров в неравенстве , то для неё справедливо одно из следующих условий:*

1. *точка является граничной в уравнении для некоторого ;*

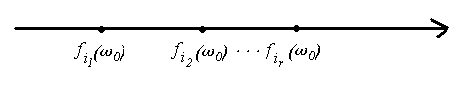
*2) для нуль функции совпадает с нулём функции .*

* 1. **. Решение неравенств для многочленов степени не выше** .

Для многочлена

решение неравенства осуществляется методом интервалов. При этом роль нулей функции  играют общие решения некоторых уравнений . Множество нулей образуют перестановку - некоторое упорядоченное множество. Каждая такая перестановка или размещение соответствует некоторой области значений параметров. При замене части строгих неравенств на равенства получается множество значений параметров некоторого размещения нулей функции . Исходя из этого, общую схему решения неравенства можно определить следующим образом:

1. *В пространстве (на координатной плоскости , если параметров два и на координатной прямой, если параметр один) отмечаются области значений параметров, для которых уравнение не определено.*
2. *На области допустимых значений параметров многочлен разлагается в произведение многочленов меньших степеней относительно ,для .*
3. *Осуществляется решение каждого из уравнений , поиск совокупности всех нулей функции на соответствующих множествах .*
4. *На множестве  
    значений параметров, для которых уравнение не имеет решений, определяются знаки каждого из сомножителей и множество решений неравенства .*
5. *Находятся все критические значения параметров, при которых функции обращаются в нуль для общих решений уравнения . Найденным значениям соответствуют размещения нулей функции . Для каждого из полученных размещений нулей методом интервалов определяется множество решений исходного неравенства.*
6. *В любом из подмножеств выделяются фиксированные значения параметров с для всех . Для них определяются знаки и на числовой прямой отмечается перестановка нулей функции*



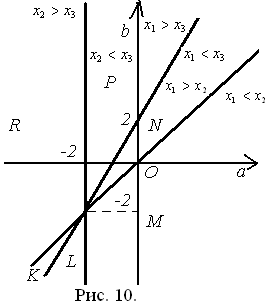
*Находится множество значений перестановки как решение систем неравенств*

*.*

*На множестве методом интервалов определяется множество решений неравенства .*

Если коэффициенты сомножителей не выше первой и не выше второй степеней являются рациональными выражениями, то каждое из уравнений имеет конечное множество решений. Полученные при этом граничные значения параметров и только они соответствуют некоторому размещению нулей функции . Для них частные неравенства решаются отдельно. Поиск множества значений параметров также упрощается: для соседних граничных значений параметров и , если множество  
 содержится в области допустимых значений параметров, то  
 При этом таблица знаков выражений определяет перестановку нулей на каждом из параметров.

**Пример 29.** Решить неравенство



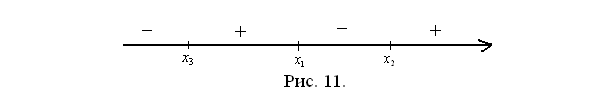
Решение. Областью определения неравенства является . Представим свободный коэффициент в виде . Проверкой убеждаемся, что - нуль функции. По теореме Безу получаем разложение на имножители правой части неравенства

Приравняв второй множитель к нулю, находим все нули функции , , . Так как неравенство строгое и коэффициент при равен тождественно единице, то . Найдём граничные значения параметров: ;

Изобразим эти множества на координатной плоскости и определим неособые частные решения. В результате мы получим области (Рис. 10).

Каждая область соответствует определённой подстановке нулей . В частности:

Отдельно необходимо рассматривать точку . В ней все три корня совпадают. Так как коэффициент при старщей степени больше нуля, то распределение знаков на числовой оси будет справа начинаться с плюса. На множестве , например, решение найдем с помощью метода интервалов следующим образом (Рис. 11).

 Т. е. . Аналогично построим решения и на других областях. В результате получим следующие 11 характеристик неравенства: