**Лекция 7.**

**7. Квадратные уравнения и неравенства.**

**7.1. Свойства граничных значений уравнений не выше второй степени.**

**Теорема 8.** *В уравнении с переменной и параметрами из пространства не выше второй степени всякая граничная точка значений параметров удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *соответствующее частное уравнение не определено;*
2. *в уравнении , (1)*

*равносильном исходному, коэффициент равен нулю;*

1. *дискриминант равен нулю;*
2. *точка является точкой разрыва функций*  и .

Доказательство. По определению граничные значения параметров, для которых частные уравнения не определены являются граничными точками в множестве критических точек.

На области допустимых значений параметров исходное уравнение равносильно уравнению (1). Причём, по лемме 1 (лекция 5.) множества их граничных значений совпадают. На этой области параметров выделим следующие подмножества:

Остальным допустимым значениям параметров будут соответствовать частные квадратные уравнения. Поэтому и типы особых частных уравнений, – тип неособых уравнений с общим решением

на множестве .

Совокупность всех частных уравнений второй степени в зависимости от значения функции разбивается на три типа:

- тип частных уравнений с отрицательным дискриминантом не имеющих действительных корней.

- тип частных уравнений с нулевым дискриминантом и общим решением - тип частных уравнений с положительным дискриминантом и общими решениями

Выделенные типы охватывают совокупность всех частных уравнений. При этом значения параметров из множеств , , , удовлетворяющие уравнению , являются критическими, – множество критических значений, удовлетворяющих уравнению . На множествах и дискриминант отличен от нуля, поэтому они либо пустые, либо не содержат граничных значений параметров.

Предположим, что *.* Тогда функция имеет в ней разрыв, так как в любой её - окрестности имеются точки , в которых функция как равна нулю, так и отлична от него. Аналогично получается разрыв в этой точке и для функции , если предположить, что . Теорема доказана.

**Следствие 1**. *Для уравнения с переменной и параметрами с непрерывными функциями и в области допустимых значений, всякому значению параметров соответствует частное уравнение одного из следующих типов:*

**7.2. Свойства граничных значений неравенств не выше второй степени.**

**Теорема 9.** *В неравенстве с переменной и параметрами из пространства не выше второй степени всякая граничная точка значений параметров удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *соответствующее частное неравенство не определено;*
2. *в неравенстве , (1)*

*равносильном исходному, коэффициент равен нулю;*

1. *дискриминант равен нулю;*
2. *точка является точкой разрыва функций*  и .

Доказательство. На области допустимых значений параметров исходное неравенство равносильно неравенству (1), имеющее то же множество допустимых значений.

Множество всех значений параметров , для которых разобьём на следующие подмножества:

Только этим значениям параметров соответствуют частные неравенства степени меньше 2. Тогда и типы особых частных неравенств, и – типы неособых неравенств с общими решениями

на соответствующих множествах и .

Множество всех частных неравенств второй степени при разбивается на типы со следующими характеристиками:

Каждому допустимому значению параметра соответствует частное неравенство, принадлежащее одному из этих типов.

Типы частных неравенств, выделенные уравнением соответствуют множествам критических значений параметров. Значения параметров из множества будут граничными тогда, когда неравенство равносильно уравнению и не будет иметь внутренних точек в качестве решений. Предположим теперь, что или . Тогда эти функции имеют в разрыв, так как в любой их - окрестности имеются точки , в которых функции и как равны нулю, так и отличны от него. Теорема доказана.

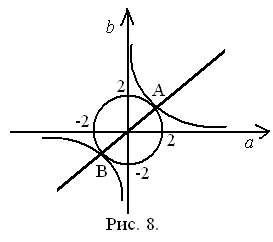
**Следствие 1.** *Для неравенства с переменной и параметрами из пространства и непрерывными функциями и в области допустимых значений, всякому допустимому значению параметров соответствует частное неравенствотолько одного из следующих видов:*

**7.3. Решение уравнений степени не выше второй.**

Согласно следствию 1 из теоремы 8 уравнение с переменной и параметрами не выше второй степени может иметь не более шести типов. Таким образом, можно использовать следующий алгоритм при решении:

1. *В пространстве (на координатной плоскости , если параметров два и на координатной прямой, если параметр один) отмечаются области значений параметров, для которых уравнение не определено.*
2. *На области допустимых значений параметров исходное уравнение при помощи равносильных преобразований приводится к виду*
3. *Выделяют области всех критических значений параметров, для которых , в которых выделяются подмножества с особыми частными уравнениями типа ∞, типа Ø и неособыми линейными уравнениями.*
4. *В области выделяются все граничные значения параметров, для которых дискриминант обращается в нуль либо имеет точки разрыва. Соответствующие частные уравнения имеют корень*
5. *Область параметров разбивается на две области: и с неособыми частными уравнениями, не имеющим решений и соответственно имеющим два различных действительных корня.*

**Пример 25.** Решить уравнение   
с параметрами , и переменной .

 Решение. Уравнения не определены для значений параметров, для которых .

На области допустимых значений = исходное уравнение равносильно уравнению  
 Граничными являются значения параметров, для которых . На множестве точек  
гиперболы (рис. 8), кроме точек и соответствующие частные уравнения имеют общее решение

Для значений параметров соответствующие частные уравнения являются квадратными.

Дискриминант  
обращается в нуль на множестве граничных точек окружности, исключая точки и .

На множестве точек окружности соответствующие частные уравнения  
 имеют корень

Для допустимых значений параметров, отличных от точек гиперболы и окружности, дискриминант квадратных уравнений отличен от нуля. При этом на внутренности круга уравнения не имеют решений.

Для точек вне круга общие решения уравнения имеют 2 корня.

Ответ:

**7.4. Решение неравенств не выше второй степени.**

В неравенстве с переменной и параметрами по теореме 9 может существовать не более 8 типов частных неравенств. Поэтому алгоритм их решения может быть следующий:

1. *В пространстве (на координатной плоскости ,если параметров два и на координатной прямой, если параметр один) отмечаются области значений параметров, для которых неравенство не определено. Выделяются области допустимых значений параметров, для которых решения соответствующих частных неравенств осуществляется отдельно.*
2. *На выделенной области допустимых значений параметров при помощи равносильных преобразований исходное неравенство приводится к виду .*
3. *Множество определяет разбиение выделенных областей на новые подмножества допустимых значений параметров. Решение неравенства осуществляется отдельно для каждой из областей , ,.*
4. *Множество в зависимости от значений разбивается на четыре подмножества с различными типами особых и неособых частных неравенств: ,*
5. *На каждой из выделенных критическими значениями параметров областях коэффициент сохраняет постоянный знак или . Значениями параметров, для которых дискриминант*

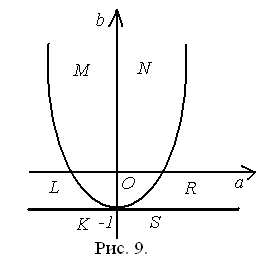
*обращается в нуль, определяются дополнительные разбиения областей параметров.*

1. *Каждое из выделенных множеств , значений параметров определяет дополнительные типы частных неравенств.*

**Пример** **26**. Решить неравенство  
с параметрами и переменной .

Решение. Неравенство не определено для , т.е. для оси . Соответствующие пары значений параметров являются граничными. На области допустимых значений граничными являются такие точки координатной плоскости , для которых . Для точек соответствующие частные неравенства имеют вид . Тогда на множестве множество решений соответствующих частных неравенств имеет вид

Для точек общим решением неравенства является промежуток

 Рассмотрим область . Исходному неравенству соответствует квадратное уравнение с дискриминантом . Дискриминант обращается в нуль на множестве точек параболы, исключая . Выделенные области отметим на координатной плоскости (Рис. 9).

На множестве точек частные неравенства для имеют решения , для - решений не имеют.

Линии граничных значений параметров , , разбивают множество всех допустимых значений параметров на совокупность областей выделяемых определённой системой неравенств. Решаем в каждой из этих областей неравенства и записываем их решения.

Ответ: