**Лекция 5.**

**5. Особые значения параметров.**

**5.1. Критические значения параметров.**

**Определение 14.** *В уравнении (неравенстве ) с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства значение параметров*  *называется критическим, если для него выполняется одно из следующих условий:*

1. *соответствующее частное уравнение (неравенство) не определено;*
2. *частное уравнение (неравенство ) является особым типом Ø или типом ;*
3. *для типа неособых частных уравнений (частных неравенств) содержащего уравнение (неравенство ) все упорядоченные значения параметров из множества удовлетворяют некоторому уравнению .*

**Пример 14.** Найти множество всех критических точек уравнения
 Решение. В данном случае

**Пример 15.** Найти множество всех критических точек уравнения

Решение. Коэффициент при равен нулю при , правая часть равна нулю при , поэтому , причём:

 для частные уравнения имеют тип *Ø*;

 для частные уравнения имеют тип .

**Пример 16.** Найти множество всех критических точек уравнения

Решение. Значениям параметра из удовлетворяющих уравнению соответствует тип частных уравнений с решением
 В случае , . Следовательно .

**Пример 17.** Найти множество всех критических точек уравнения
Решение. Очевидно, что в этом случае

Для этих пар соответствующие частные уравнения не определены.

**Пример 18.** Найти множество всех критических точек неравенства

Решение. Если , то неравенство не определено.

Если , то неравенство является особым типа .

При , множество

 определяет решение частных неравенств. Следовательно

Множества критических значений параметров могут быть как конечными так и бесконечными.

**5.2. Граничные значения параметров.**

**Определение 15.**  *На числовой прямой для произвольной точки и открытый промежуток называется – окрестностью точки .*

*На плоскости для произвольной точки и открытый круг называется - окрестностью точки . В произвольном пространстве точек - окрестностью точки будем называть множество .*

**Определение 16.** *Точку называют изолированной точкой множества , если существует - окрестность точки , не имеющая точек множества , отличных от точки .*

*Точка называется граничной множества , если всякая - окрестность точки содержит точки, как принадлежащие , так и не принадлежащие ему.*

*Точка называется внутренней точкой множества , если существует - окрестность точки , состоящая только из точек .*

*Множество точек называется открытым множеством, если каждая точка этого множества является внутренней в нём.*

В естественной топологии действительной прямой всякая изолированная точка является граничной.

**Определение 17.** *В уравнении (неравенстве ) с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства значение параметров*  *называется граничным, если для него выполняется одно из следующих условий:*

1. *точка является граничной множества всех значений параметров, для которых соответствующие частные уравнения (неравенства) не определены;*
2. *точка является граничной множества всех значений параметров, для которых соответствующие частные уравнения (неравенства) являются особыми типа Ø или ;*
3. *для типа неособых частных уравнений (частных неравенств) содержащего уравнение (неравенство ) множество значений параметров не имеет внутренних точек (состоит из изолированных точек).*

**Примечание.** *Если множество всех критических значений параметров принадлежит некоторой линии на плоскости или является конечным, то такие значения параметров являются граничными.*

По определению граничные точки параметров являются критическими. В примере 14 для множества всех критических значений, не входящих в область допустимых значений параметра (изолированная точка) и (граничная точка) являются граничными значениями.

В примере 15 промежуток – множество критических значений параметра с особыми частными уравнениями типа *Ø*, и – граничные точки.

В общем случае не всякое критическое значение параметров является граничным. Однако в некоторых уравнениях и неравенствах они могут совпадать (пример 18).

Критические и граничные значения параметров выявляются в процессе решения уравнений и неравенств с параметрами.

Уравнение возникает в результате равносильных преобразований уравнений и неравенств.

Граничные значения помимо фиксирования значений параметров с неопределёнными или особыми частными уравнениями (неравенствами) разбивают область допустимых значений на открытые области, которым соответствуют частные уравнения (неравенства) одного типа.

Таким образом, критические и граничные значения параметров позволяют осуществить классификацию частных уравнений (неравенств) по типам и поиск общих решений в них.

* 1. **. Граничные точки равносильных уравнений и неравенств.**

Решение уравнений и неравенств с параметрами заключается в поиске граничных точек. Это осуществляется в процессе равносильных преобразований.

**Лемма 1.** *Если уравнение с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства*  *получено из уравнения при помощи равносильных преобразований, то их множества граничных точек совпадают.*

Доказательство. По определению равносильных уравнений с параметрами, области допустимых значений параметров в них совпадают. Тогда будут равными множества критических значений параметров, для которых частные уравнения не определены.

Пусть для допустимых значений параметров частное уравнение является особым типа Ø или . Ввиду равносильности уравнений значения параметров являются критическими и в уравнении *.* Следовательно, граничные точки их критических областей будут одни и те же.

Предположим теперь, что неособое частное уравнение принадлежит типу , для которого все упорядоченные значения параметров множества удовлетворяют уравнению . Так как каждому значению параметров соответствует частное уравнение , равносильное уравнению , то частным уравнениям типа соответствуют равносильные им частные уравнения типа и . Т. е. и неособые частные уравнения имеют соответствующие равные множества значений параметров. Из равенства множеств вытекают совпадения их граничных точек. Лемма доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать соответствующий результат и для неравенств.

**Лемма 2.** *Пусть неравенство с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства*  *получено из неравенства при помощи равносильных преобразований. Тогда множества граничных значений параметров в неравенствах совпадают.*

**5.4. Графическое решение уравнений и неравенств с параметрами.**

Пусть функция двух переменных и на множестве действительных чисел. Всякой упорядоченной паре значений переменных и из области определения функция ставит в соответствие действительное число . В области определения функции выделим множество всех упорядоченных пар с фиксированной второй координатой . Функция задаёт отображение множества в множество действительных чисел, т.е. некоторую частную функцию от переменной .

Понятие частной функции позволяет рассматривать функцию двух переменных как совокупность частных функций для всевозможных значений переменной . Аналогично можно рассматривать и функции большего числа переменных.

**Определение 18.** *Функция переменных называется функцией с переменными и параметрами , если для каждых значений переменных необходимо исследовать соответствующую частную функцию переменной .*

Для функции множество всех точек образует некоторую поверхность – график функции в системе координат . Для частной функции множество точек есть линия пересечения этой поверхности и плоскости , параллельной плоскости . Проекция этой линии на плоскость в геометрии называется сечением поверхности плоскостью . Сечение поверхности, т. е. – множество точек плоскости , является графиком частной функции .

Таким образом, всякому допустимому значению параметра в плоскости соответствует график частной функции  – сечение поверхности плоскостью . В плоскости функция  определяется совокупностью графиков частных функций для всевозможных допустимых значений параметра .

Графический подход к решению уравнения (неравенства ) как совокупности частных уравнений (неравенств) заключается в том, что для всевозможных значений параметров определяются по осям переменных из точки пересечения графиков соответствующих частных функций и , являющиеся решением частных уравнений (границей решений неравенств). Поскольку графики частных функций – некоторые сечения поверхности, то метод называют также методом сечений.

Наиболее часто решение уравнения вида графическим методом осуществляется в случаях, когда или .

В первом случае определяются точки пересечения фиксированного графика с графиками частных функций , во втором – точки пересечения графиков частных функций и семейства гиперплоскостей , параллельных осям .

Особенно эффективен графический метод решения для случая одного параметра. Уже с двумя параметрами исследование сечений выходит за рамки трёхмерной системы координат.

**Пример 19.** Исследовать следующую функцию с параметром

Решение. Данная функция двух переменных и в системе координат определяет некоторую поверхность. Сечения поверхности для всевозможных значений переменной в плоскости определяет совокупность графиков частных функций. Так, для частная функция определяет единственную точку , для графиком функции является положительная полуокружность с центром в начале координат и радиусом 1. Нетрудно заметить, что для всех значений параметра частная функция будет представлять собой график аналогичной полуокружности с радиусом .

**Пример 20.** Решить графическим способом уравнениес параметром

Решение. Представим уравнение в виде и рассмотрим в системе кординат параболу и семейство прямых (рис. 4.). Положение параболы не зависит от значений , а данные прямые в зависимости от параметра могут принимать различные положения, оставаясь параллельными оси . В положении () прямая не пересекается с параболой и, следовательно, уравнение не имеет решений. В положении () графики пересекаются в единственной точке . В положении

 графики пересекаются в двух точках: и . Таким образом, можем записать все характеристики уравнения.

Ответ: Тип -

 Тип -

 Тип - .