**Лекция 4.**

**4. Классификация частных неравенств.**

Разобьем аналогично уравнениям совокупность частных неравенств на типы по некоторым общим свойствам.

Пусть требуется решить неравенство . При различных значениях будем иметь:

1. При

2. При

3. При

4. При .

5. При *.*

6. При

7. При

8. При

Из решений неравенства видно, что в случаях 4, 5 и 6, 7, 8 решения записываются в виде однотипных интервалов. Проясним общие признаки, по которым возможна классификация частных неравенств.

**4.1. Особые частные неравенства.**

**Определение 12.**  *Для неравенства с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства частное неравенство , соответствующее значениям параметров , называется особым типа Ø (типа ), если при помощи равносильных преобразований его можно привести к ложному (истинному) числовому неравенству.*

**Пример 11.** Неравенство при будет особым типа Ø а при особым типа .

Аналогично определяются особые частные неравенства для случая двух и более параметров.

**4.2. Неособые частные неравенства.**

Всякое частное неравенство, не являющееся особым типа Ø или типа **, называется неособым.

Пусть

 и

– некоторые вектор – функции пространства . Обозначим через вектор – интервал

 **Определение 13.**  *Для неравенства с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства неособое частное неравенство с множеством решений и неособое частное неравенство с множеством решений принадлежат одному типу на некотором множестве  значений параметров, если существуют вектор - функции такие, что для любых упорядоченных значений параметров и из множества индексов вектор - функций, и, кроме того, при подходящей нумерации решений*

*,, …, , …*

*,, …, , ….*

В определении однотипных неравенств не исключается возможность, когда некоторые множества будут неограниченными. Если множество частных решений неравенства состоит из различных областей значений вектор - функций, то множество решений неравенства также состоит из промежутков.

Как и в уравнениях с параметрами отношения однотипности на множестве всех неособых частных неравенств разбивается на непересекающиеся классы – типы неособых частных неравенств. По аналогии с уравнениями типы будем обозначать буквами и т.д. Через обозначим множество всех значений параметров, для каждого из которых соответствующее частное неравенство принадлежит типу . Разбиение множества всех частных неравенств на типы индуцирует разбиение области допустимых значений параметров на непересекающиеся подмножества . В частности, неравенствам типа Ø, типа и не имеющим решений соответствуют подмножества .

Пусть – множество всех допустимых значений параметров, для которых вектор – интервал является общим решением неравенства  и – множество всех общих решений этого неравенства.

 Тогда

В частности, если - множество частных решений некоторого неравенства, то неособый тип частных неравенства, содержащих решения , для , можно определить по формуле

Рассматривая всевозможные наборы общих решений уравнения по этой формуле можно построить все множества их частных решений.

Всякий тип неособых частных неравенств характеризуется:

- множеством всех упорядоченных значений параметров, для каждой из которых соответствующие частные неравенства принадлежат типу ;

- набором вектор - функций , определяющих общее решение данного типа неравенств через интервалы .

**Пример 12.** Найти все неособые частные типы неравенства

Решение. Если , то неравенство имеет вид с решением . Пусть теперь . Найдём дискриминант квадратного выражения

 В выражении в скобках сделаем подстановку

 Тогда

 Корни выражения

Решение квадратного неравенства зависит от знака коэффициента при . Пусть . Если , т. е. при решением будут промежутки . Если , т. е. при решением является множество . В случае имеем при и при . В случае корни совпадают и неравенство имеет решение , в случае , . Таким образом, мы установили следующие семь типов неособых частных неравенств:

1. тип , , ;
2. тип , , .;
3. тип , , ;
4. тип , , ;
5. тип , , ;
6. тип , , ;
7. тип , , , значит .

Заметим, что особых решений типа или типа неравенство не имеет.

**4.3. Характеристики частных неравенств.**

Пусть - тип неособых частных неравенств для неравенства , соответствующем множеству значений параметра. Если множества решений частных неравенств типа непусто, то по определению существуют вектор - функции , такие, что для любых значений параметров множество всех решений частного неравенства имеет вид . Тогда запись решения частного неравенства через функции называется общим решением типа неособых частных неравенств, а дробь вида

назовём характеристикой типа частных неравенств. По аналогии определяются характеристики типа , , 0.

 **Пример 13.** Рассмотрим линейное неравенство

 На множестве точек параболы (рис. 3.) , соответствующие частные неравенства

 или являются особыми, причём тип зависит от знака правой части. Выражение обращается в 0 для точек и параболы, поэтому множеству точек нижней части параболы соответствуют особые частные неравенства типа .

Характеристика типа :

Для типа особых частных неравенств со значениями параметров в множестве в качестве характеристики выступает дробь

Всем точкам плоскости , расположенным во внутренней области параболы, соответствуют неособые частные неравенства с отрицательным коэффициентом .

Общим решение для этого типа частных неравенств является
 Следовательно, характеристика типа имеет вид:

Для типа частных неравенств, соответствующих точкам плоскости, принадлежащим множеству , общее решение имеет вид:
 Поскольку типы охватывают все частные неравенства, то их характеристики определяют все множества решений любого из частных неравенств.

Запишем характеристику для типа неособых частных неравенств, не имеющих решений. характеристику в виде дроби

Множеству  всех значений параметра, для которых частные неравенства не определены, поставим в соответствие запись вида:

Тогда совокупность характеристик всех типов частных неравенств определяет решение каждого частного неравенства, т.е. полное решение исходного неравенства.