**Лекция 3.**

1. **Классификация частных уравнений.**

Решения уравнений и неравенств с параметрами представляет собой совокупность частных решений. При этом частные решения отличаются либо совпадают. Однако даже разные решения могут обладать похожими свойствами.

**Пример 8.** Уравнение при имеет решение ;

при , ;

при , ;

при , .

* 1. **3.1. Особые частные уравнения.**

**Определение 8.** *Для уравнения с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства частное уравнение , соответствующее значениям параметров , называется особым типа Ø (∞), если с помощью равносильных преобразований его можно привести к ложному (истинному) числовому равенству.*

*Всякое частное уравнение , не являющееся особым типа Ø и особым типа ∞, называется неособым.*

**Пример 9.** Уравнение при является особым типа *Ø,* при - особым типа *∞*.

По определению, полагаем, что все неособые частные уравнения, не имеющие решений, принадлежат одному типу.

* 1. **3.2. Неособые частные уравнения.**

Обозначим через – некоторый вектор пространства значений переменных .

**Определение 9.** *Для уравнения с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства неособое частное уравнение с множеством решений и неособое частное уравнение с множеством решений принадлежат одному типу на некотором множестве значений параметров, если существуют вектор - функции*

*такие, что для любых упорядоченных значений параметров и из множества индексов вектор - функций, и, кроме того, при подходящей нумерации решений*

*,, …, , …*

*,, …, , ….*

По определению, если частное уравнение  имеет решений, частное уравнение  имеет решений и эти уравнения принадлежат одному типу, то и решения каждого из уравнений получаются как значения одних и тех же функций при и .

**Пример 10.** *.*

Для все числовые уравнения имеют по 2 действительных корня

, .

Для соответствующие частные уравнения имеют корни и , вычисляемые по формуле .

Для уравнения на множестве всех неособых частных уравнений отношение однотипности является отношением эквивалентности. Множество всех неособых частных уравнений разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности – классы неособых частных уравнений. Типы частных уравнений обозначаются символами и.т.д.

Каждое частное уравнение , типа получается из уравнения при значениях параметров .

Обозначим через множество всех значений параметров , для которых соответствующее частное уравнение принадлежит типу . Тогда область допустимых значений параметров будет равна .

В рассмотренном в примере 10 уравнении имеем

.

Классификация частных уравнений по типам осуществляется разбиением области допустимых значений параметров на отдельные множества и выполнением равносильных преобразований уравнений на каждом из них.

* 1. **3.3. Общие решения частных уравнений.**

**Определение 10.**  *Для уравнения с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства вектор - функция называется общим решением на множестве значений параметров, если для каждого упорядоченного значения параметров значение является решением частного уравнения . В этом случае считается, что .*

В последнем примере – общее решение на множестве , т.е. .

Функции и , являются общим решением уравнения на , т.е. .

В дальнейшем, в уравнении с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства через будем обозначать множество всех допустимых значений параметров , для которых частное уравнение не имеет решений, через - дополнение множества в области допустимых значений параметров.

Таким образом, для всяких значений параметров частное уравнение не имеет решений, и, если – множество всех общих решений уравнения , то

По определению всякий тип неособых частных уравнений, имеющих решения, характеризуется определённым множеством общих решений

*,, …, , …* на множестве .

Легко видеть, что если – множество всех допустимых значений параметров, для которых является общим решением уравнения и – множество всех общих решений этого уравнения, то  
 В частности, если *,, …, , …*  - множество всех частных решений некоторого уравнения, то неособый тип частных уравнений, содержащих решения

*,, …,* , для , можно определить по формуле

.

Рассматривая всевозможные наборы общих решений уравнения по этой формуле можно построить все множества их частных решений.

* 1. **3.4. Характеристики частных уравнений.**

**Определение 11.** *Для уравнения с параметрами из пространства Ω и переменными из пространства характеристикой типа частных уравнений называется запись в виде дроби вида , где – множество всех общих решений уравнения на множестве .*

В примере 10 характеристики следующие:

Таким образом, решение уравнения  сводится к следующим этапам:

1. разбиение множества всех частных уравнений на типы;
2. определение характеристики каждого из типов.

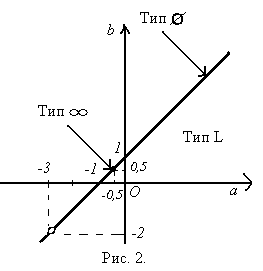
Объединение всех множеств частных решений (числители характеристик) всегда совпадает с областью допустимых значений параметров.

**Пример 11.** Записать характеристики уравнения  
.

Решение. Область допустимых значений ..

На области допустимых значений уравнение равносильно уравнению

.

Для этого уравнения рассмотрим совокупность частных уравнений, для значений параметров

т. е. точек прямой , за исключением точки . Соответствующие частные уравнения имеют вид .

При и правая часть превратится в 0. Т.е. точке соотвествует частное уравнение типа , точкам прямой , за исключением точек и , соответствуют частные уравнения типа *Ø (Рис. 2).*

В итоге, имеем следующие характеристики: