Оглавление

Предисловие

Здесь будет описание дисциплины.

Для удобства читателя в заключительной главе приведены различные определения и теоремы из других математических дисциплин (математический анализ, топология).

Глава 1

Комплексная плоскость

1.1. Множество комплексных чисел

1.1.1. Операции с комплексными числами

Всюду ниже множество действительных чисел обзначается общепринятым символом $\mathbb{R}$.

Определение 1.1. ***Множество комплексных чисел (комплексная плоскость)*** $\mathbb{C}$ *определяется как множество*

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Равенство*. Две пары* $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ *и* $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ *называются, если* $x_1 = x_2$ *и* $y_1 = y_2$.

Сложение*. Суммой элементов* $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ *и* $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ *называется*

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Умножение*. Произведением элементов* $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ *называется*

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Как и в случае действительных чисел мы чаще будем опускать знак операции умножения (точку) и писать просто $z_1 z_2$ вместо $z_1 \cdot z_2$.

Первый элемент x пары $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ будем называть **действительной частью** z, а второй y — **мнимой частью** z (основания для этого у нас скоро появятся). Для них используются следующие стандартные обозначения

$$\operatorname{Re} z := x, \quad \operatorname{Im} z := y.$$

Как множество комплексная плоскость $\mathbb{C}$ совпадает с обычной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Отношение равенства и операция сложения тоже определяются точно так же, как и для $\mathbb{R}^2$. Специфика множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ начинает проявляться тогда, когда мы вводим умножение — напомним, что в $\mathbb{R}^2$ умножение вообще не вводится.

1.1.2. Поле комплексных чисел

Непосредственной проверкой легко убедиться (мы рекомендуем выполнить это самостоятельно), что сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность сложения),

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность сложения),

3) $z + (0, 0) = z$ для любого $z_1 \in \mathbb{C}$ (элемент $(0, 0)$ является нейтральным элементом для сложения),

4) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ существует противоположный элемент $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ со свойством $z + (-z) = (0, 0)$.

Свойства 1)–4) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции сложения.

Умножение комплексных чисел обладает такими свойствами:

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность умножения),

6) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность умножения),

7) $z \cdot (1, 0) = z$ для любого $z_1 \in \mathbb{C}$ (элемент $(1, 0)$ является нейтральным элементом для умножения),

8) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq (0, 0)$, в $\mathbb{C}$ существует обратный элемент

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

со свойством $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$.

Свойства 5)–8) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции умножения.

Кроме того, операции сложения и умножения связаны дистрибутивным законом

9) для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Полный набор свойств 1)–9) говорит нам о том, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с указанными операциями сложения и умножения является полем. Оно называется **полем комплексных чисел** и обозначается тем же символом $\mathbb{C}$.

1.1.3. Алгебраическая форма записи

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{C}$. Это делается с помощью взаимно-однозначного отображения

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

Мы будем ниже систематически использовать это отождествление действительных чисел, как комплексных, и часто вместо $(x, 0)$ будем писать просто x. Таким образом, пара $(0, 0)$ отождествляется нами с действительным числом 0, а пара $(1, 0)$ — с 1. Скоро мы увидим выгоду от этого.

Рассмотрим еще одно специальное комплексное число $i = (0, 1)$, которое в дальнейшем будет называться **мнимой единицей**. Из определения умножения комплексных чисел легко следует (проверьте это самостоятельно), что

$$i^2 = -1.$$

Используя мнимую единицу и наше соглашение об обозначениях для действительных чисел, мы приходим к так называемой **алгебраической (декартовой) форме** записи комплексных чисел

$$x + iy := (x, y). \tag{1.1}$$

В самом деле,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Если $\operatorname{Re} z = 0$, то комплексное число z называется **мнимым** или, для большей выразительности, **чисто мнимым**. Кроме того, комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется **сопряженным** числом для $z = x + iy$.

1.1.4. Тригонометрическая форма записи

Используя полярные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, можно получить другое представление для комплексных чисел. Действительно, для $z = (x, y) \neq 0$ рассмотрим полярные координаты

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \tag{1.2}$$

где

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.3}$$

а φ — угол (между векторами (x, y) и $(1, 0)$), определяемый системой уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Число (1.3) называется **модулем** комплексного числа z и обозначается $|z|$. Оно определяется по комплексному числу z вполне однозначно.

Угол φ в (1.2) называется **аргументом** комплексного числа $z \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Он определен не однозначно, а лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — любое целое число. Однако множество $\operatorname{Arg} z$ содержит единственное число, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, которое называется **главным значением аргумента** и обозначается $\arg z$. Таким образом, мы можем записать, что

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.4}$$

В терминах координат (1.2) можно записать **тригонометрическую форму** комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.5}$$

1.2. Расширенная комплексная плоскость

1.2.1. Топология плоскости

На комплексной плоскости имеется естественное (евклидово) расстояние

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}, \quad z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0, 1).$$

Оно порождает открытые

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \tag{1.6}$$

и замкнутые

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\} \tag{1.7}$$

круги с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$.

Введем еще обозначения для «проколотых» открытого

$$B^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \tag{1.8}$$

и замкнутого

$$\overline{B}^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leqslant r\} \tag{1.9}$$

кругов с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$, а также

$$C_r(z_0) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r\} \tag{1.10}$$

для окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ (границы кругов $B(z_0, r)$ и $\overline{B}(z_0, r)$).

Евклидова метрика порождает естественную топологию на $\mathbb{C}$ (см. §8.1). Базой окрестностей точки (см. п. 8.1.1) $z_0 \in \mathbb{C}$ служит семейство открытых кругов (1.6).

1.2.2. Стереографическая проекция

Потребности теории функций комплексного переменного обуславливают необходимость расширения комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающегося из последней добавлением нового элемента — бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Для наглядного представления расширенной комплексной плоскости Риман предложил использовать способ, который сейчас будет описан.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, \omega) : x, y, \omega \in \mathbb{R}\}$$

и будем отождествлять комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с подмножеством в $\mathbb{R}^3$ с помощью взаимно-однозначного отображения

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Введем так называемую **сферу Римана**

$$S = \left\{ (x, y, \omega) : x^2 + y^2 + \left(\omega - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Соединим «северный полюс» сферы Римана — точку $(0, 0, 1)$ — с точкой z отрезком

$$\Gamma_z = \{(tx, ty, 1 - t) : t \in [0, 1]\}.$$

Если $z \neq 0$, то этот отрезок имеет единственную общую точку с S и соответствующее значение равно $t = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что эта точка есть

$$\left(\frac{x}{|z|^2 + 1}, \frac{y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Будем называет ее **стереографической проекцией** z. Стереографической проекцией точки $z = 0$ является «южный полюс» сферы Римана $(0, 0, 0)$.

Таким образом, $S \setminus \{(0,0,1)\}$ взаимно-однозначно отображается на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. «Северный полюс» сферы Римана $(0,0,1)$ оказался при этом незадействованным. Мы сопоставим точке $(0,0,1)$ новое «идеальное» комплексное число $z = \infty$ и образуем расширенную комплексную плоскость

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Конечно, мы не имеем возможности использовать «новое» комплексное число $z = \infty$ в алгебраических операциях. Но иногда, впрочем, некоторым операциям с $z = \infty$ можно приписать смысл

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a \cdot \infty = \frac{a}{0} = \infty \cdot a = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{a} = \infty,$$

но операции $0 \cdot \infty$ и $\infty \pm \infty$ лишены смысла.

Итак, функция

$$F(z) = \begin{cases} \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right), & z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,0), & z = \infty, \end{cases} \tag{1.11}$$

осуществляет взаимно-однозначное отображение расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ на сферу Римана S.

В качестве базы окрестностей точки $z_0 = \infty$ удобно взять семейство

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}, \quad r > 0.$$

Тем самым мы дополняем топологию плоскости $\mathbb{C}$ до топологии на $\widehat{\mathbb{C}}$.

Отметим, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ некомпактна (она неограничена), в то же время образ $\widehat{\mathbb{C}}$ при отображении (1.11) (сфера Римана) компактен. Поэтому процесс отождествления $\widehat{\mathbb{C}}$ и сферы Римана с помощью (1.11) называют часто компактификацией $\widehat{\mathbb{C}}$.

1.2.3. Сферическая метрика

Наряду с евклидовой метрикой в $\mathbb{C}$ будем рассматривать еще **сферическую метрику** в $\widehat{\mathbb{C}}$, определяя ее равенством

$$d_S(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty. \end{cases}$$

Другими словами, сферическое расстояние — это евклидово расстояние в $\mathbb{R}^3$ между стереографическими проекциями. Нетрудно показать, что это — действительно метрика на S.

Использование сферической метрики приводит к другому подходу к определению топологии на $\widehat{\mathbb{C}}$ — она дает возможность определить базу окрестностей точки на S как множество пересечений S и евклидовых шаров с центрами в этой точке.

Итак, на расширенной комплексной плоскости имеется две топологии и естественно их сравнить. Ответ является совершенно естественным — они совпадают.

Мы будем рассматривать функции вида $f : D \to \mathbb{C}$ (или $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$), где $D \subset \mathbb{C}$ или $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. При этом понятия предела и непрерывности таких функций мы всегда будем понимать в смысле топологий, введенных здесь. Приведем их в явном виде (см. п. 8.1.3).

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется пределом функции $f : D \to \mathbb{C}$ в предельной точке z_0 множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

точка $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ является пределом функции $f : D \to \mathbb{C}$

1) в предельной точке z_0 множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > A,$$

2) в бесконечно удаленной точке неограниченного множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall\, A > 0 \quad \exists\, \Delta > 0 \quad \forall\, z \in D \quad |z| > \Delta \Longrightarrow |f(z)| > A,$$

Во всех случаях это факт мы записываем, как обычно, так:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Функция $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$, $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, называется **непрерывной** в предельной точке $z_0 \in D$ множества D, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Мы говорим, что функция $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ **непрерывна на множестве** $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Класс всех таких функций обозначаем символом $C(D)$.

1.2.4. Пути и кривые

Путем в $\mathbb{C}$ называется любое непрерывное отображение $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Образ $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ — **след пути**, $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$

— соответственно **начало** и **конец** пути γ. В этом случае также говорят, что путь γ соединяет точки a и b.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь, то для любого разбиения

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta \tag{1.12}$$

его области определения положим

$$l_\gamma(\Pi) := \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \,. \tag{1.13}$$

Геометрический смысл $l_\gamma(\Pi)$ — длина ломаной, вписанной в след пути в точках $\gamma(t_k)$, $k = 0, \ldots, n$.

Определение 1.2. ***Длиной пути*** *называется число*

$$l_\gamma := \sup_{\Pi} l_\gamma(\Pi). \tag{1.14}$$

Если $l_\gamma < \infty$, то путь называется ***спрямляемым****.*

На самом деле справедливо равенство $l_\gamma = \lim\limits_{\lambda \to 0} l_\gamma(\Pi)$.

Если путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ спрямляем, то для любого $t \in [\alpha, \beta]$

$$l_\gamma[\alpha, \beta] = l_\gamma[\alpha, t] + l_\gamma[t, \beta].$$

(свойство аддитивности длины) и функция $t \mapsto l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Здесь было использовано обозначение $l_\gamma[a, b]$ для длины сужения пути γ на отрезок $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$.

Путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ называется

— **гладким**, если $\gamma \in C^1[\alpha, \beta]$,

— **кусочно-гладким**, если существует такое разбиение (1.12), что для каждого $k = 1, \ldots, n$ сужение $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1[t_{k-1}, t_k]$.

Гладкий (кусочно-гладкий) путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ является спрямляемым и его длина вычисляется по формуле

$$l_\gamma = \int_\alpha^\beta \Big(\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2 \Big)^{1/2} \, dt, \tag{1.15}$$

где $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Определение 1.3. *Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется* ***кривой****, если существует путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которого*

$$\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])\,.$$

Путь γ называется в этом случае ***параметризацией*** *кривой. Точки $a = \gamma(\alpha)$ и $b = \gamma(\beta)$ называются* ***концами*** *Γ.*

Кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется ***жордановой кривой****, если она имеет взаимно-однозначную параметризацию.*

Другими словами, жорданова кривая в $\mathbb{C}$ — это след взаимно-однозначного пути в $\mathbb{C}$.

Параметризация жордановой кривой не определяется однозначно. Действительно, легко видеть, что если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — параметризация кривой Γ, то для любой строго монотонной непрерывной функции $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$ композиция $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией Γ. Класс всех параметризаций кривой Γ обозначается $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — параметризация жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то любую непрерывную строго монотонную функцию $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ будем называть **заменой параметра**. Таким образом, предыдущее утверждение можно переформулировать так: если γ параметризация жордановой кривой и φ — замена параметра, то $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией. Справедливо и обратное.

Теорема 1.1. *Для любых двух параметризаций $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2)$ жордановой кривой Γ существует замена параметра φ, для которой $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Доказательство. Замена параметра, о которой говорится в формулировке, определяется как $\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Непрерывность γ_1^{-1}, а, следовательно, и φ гарантируется следующей леммой. $\square$

Лемма 1.1. *Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее параметризация, то $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $z_n \in \Gamma$, $z_n \to z_0 \in \Gamma$, но $\left|\gamma^{-1}(z_n) - \gamma^{-1}(z_0)\right| \geqslant \delta > 0$. По свойству Больцано–Вейерштрасса из ограниченной последовательности $t_n = \gamma^{-1}(z_n)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $t_{n_j} \to t_0$. $z_{n_j} \to \gamma(t_0) = z_0$ в силу непрерывности γ. В то же время $\left|t_{n_j} - t_0\right| \geqslant \delta > 0$ — противоречие. $\square$

Определение 1.4. ***Длиной*** *l_Γ жордановой кривой Γ называется длина любой ее параметризации.*

Длина не зависит от выбора параметризации. Иногда вместо обозначения l_Γ для длины пути мы будем писать $l(\Gamma)$.

Лемма 1.2. *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая, то существует такая параметризация $\gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $\gamma_0 : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$, что*

$$\forall\, s \in [0, l_\Gamma] \quad l_{\gamma_0}[0, s] = s.$$

Доказательство. Пусть γ — какая-нибудь параметризация Γ. Функция $l(t) = l_\gamma[\alpha, t]$ непрерывна и строго возрастает, следовательно, у нее есть непрерывная обратная $l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to [\alpha, \beta]$. Тогда функция

$$\gamma_0 = \gamma \circ l^{-1} : [0, l_\Gamma] \to \Gamma$$

является искомой. $\square$

Параметризация γ_0 из леммы 1.2 называется **натуральной** Γ — в качестве параметра берется переменная длина кривой.

Определение 1.5. *Задать **ориентацию** жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов. Жорданова кривая с заданной ориентацией называется **ориентированной**.*

Все параметризации ориентированной жордановой кривой разбиваются на два класса — сохраняющие и меняющие ориентацию. Две параметризации одного класса связаны возрастающей заменой параметра.

В самом деле, в силу леммы 1.1 функция $\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ непрерывна и взаимно однозначна (как композиция непрерывных и взаимно-однозначных отображений), поэтому φ строго монотонна и является заменой параметра.

Определение 1.6. *Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется **контуром** (замкнутой жордановой кривой) в $\mathbb{C}$, если существует непрерывная взаимнооднозначная функция $\gamma : C \to \mathbb{C}$, для которой $\gamma(C) = \Gamma$ (здесь $C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — единичная окружность).*

Если γ — функция из определения 1.6 и $\eta(t) = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, то композиция $\gamma \circ \eta : [0, 2\pi) \to \Gamma$ называется **параметризацией** контура Γ. Функция γ^{-1} является непрерывной (это доказывается как в лемме 1.1).

Длина контура определяется точно так же, как и для жордановой кривой в определении 1.4.

Жорданова кривая (или контур) называется

— **гладкой**, если у нее существует гладкая параметризация,

— **кусочно-гладкой**, если она является объединением конечного числа гладких жордановых кривых с последовательно соединенными началами и концами.

Отрезок в $\mathbb{C}$ с началом в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и концом в точке $z_1 \in \mathbb{C}$ определяется как множество

$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}.$$

Ломаной называется жорданова кривая, являющаяся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными началами и концами. Ясно, что ломаная является кусочно-гладкой жордановой кривой.

Полигон — контур, являющийся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными концам и началами, причем конец последнего совпадает с началом первого.

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, то ориентацию его можно задать «порядком прохождения» трех его точек

$$x \to y \to z \to x \quad \text{или} \quad x \to z \to y \to x.$$

Все параметризации контура тогда разбиваются на два класса — сохраняющие ориентацию и меняющие ориентацию.

Задание ориентации не зависит от выбора точек x, y, z в том смысле, что если параметризация «проходит» какие-то три точки x_1, y_1, z_1 в определенном порядке, то любая параметризация того же класса проходит их в том же порядке.

Одну из ориентаций можно назвать положительной, а другую — отрицательной. При этом в качестве положительной принято выбирать ту, для которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается «против часовой стрелки»). Такие параметризации будем называть положительными. Положительно и отрицательно ориентированный контур Γ будем обозначать соответственно Γ^+ и Γ^-.

Это определение знака ориентации контура не является, конечно, вполне строгим, но оно интуитивно ясно в случае, когда контур является гладким или кусочно-гладким (например, в случае полигона).

Условимся в дальнейшем **многоугольником** называть любое открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, границей которого является полигон.

1.2.5. Области

Мы будем широко пользоваться общими топологическими понятиями связности и линейной связности, которое можно найти в Приложении (см. п. 8.1.4).

Непустое открытое связное множество в $\mathbb{C}$ называется **областью**. Для областей понятия связности и линейной связности совпадают. Это показывает следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Любая область линейно связна. Более того, любые две точки области можно соединить ломаной, лежащей в области.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ — фиксированная точка. Обозначим D_1 множество точек из D, которые можно соединить с z_0 ломаной, содержащейся в D. Тогда D_1 содержит некоторый шар $B(z_0, r)$. Это же верно и для любой другой точки из D_1. Таким образом, D_1 открыто.

Множество $D_2 = D \setminus D_1$ также открыто, так как если $z \in D_2$ и шар $B(z, r)$ содержится в D, то ни одна точка $B(z, r)$ не входит в D_1.

Итак, множества D_1, D_2 открыты, $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \neq \varnothing$. Так как D связно, то $D_2 = \varnothing$ и $D = D_1$. $\square$

Дальше нам понадобится понятие топологической границы множества — его можно найти в п. 8.1.1, определение 8.1.

Важным классом областей в являются так называемые жордановы области: область называется **жордановой**, если ее границей является контур.

Мы будем всегда считать (если не оговорено противное), что граница жордановой области ориентируется положительно (см. предыдущий раздел) и будем обозначать ее тогда $(\partial D)^+$.

Теорема 1.2 (Жордан). *Контур (замкнутая жорданова кривая) разбивает комплексную плоскость на две односвязные области, для которых она является общей границей.*

Мы приводим это утверждение без доказательства.

1.2.6. Многосвязные области

Несмотря на то, что область — связное множество, ее граница может не быть связной. Примером может служить кольцо.

Компонентой связности границы области называют любое связное подмножество границы, не являющееся собственным подмножеством другого связного подмножества границы. Область называется **односвязной**, если ее граница является связным множеством, в противном случае область называется **многосвязной**.

Порядком связности области называется число компонент связности ее границы. Область называется m-связной, если ее порядок связности конечен и равен m, если же порядок связности бесконечен, то область называется бесконечносвязной.

Глава 2

Дифференцируемость

2.1. Комплексное дифференцирование

2.1.1. Функции комплексного переменного

Нашим основным объектом изучения будут функции вида $f : D \to \mathbb{C}$, отображающие подмножества $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Под этим мы понимаем (как это обычно делается в математике), что любому числу $z \in D$ поставлено в соответствие единственное комплексное число $f(z) \in \mathbb{C}$.

В теории функций комплексного переменного часто приходится использовать расширенное понятие функции: если каждому $z \in D$ поставлено в соответствие некоторой множество комплексных чисел, то будем говорить о **многозначной** функции, заданной на D.

Термин «функция» всегда будет использоваться в обычном понимании (как в первом абзаце). Иногда, впрочем, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело именно с такой (обычной) трактовкой понятия функции, мы будем говорить об **однозначной** функции.

В теории функций комплексного переменного вместо термина «взаимно однозначная» функция обычно используется «**однолистная**» функция. Мы также придерживаемся этой традиции.

2.1.2. Производная и дифференцируемость

Определение 2.1. *Пусть функция f задана в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Если существует предел*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.1}$$

то он называется ***производной*** *функции f в точке z_0.*

Если ввести обозначения

$$h = z - z_0, \quad \alpha(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0),$$

то условие существования производной легко переписать в виде

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + \alpha(h), \quad \text{где} \quad \alpha(h) = o(|h|) \quad \text{при} \quad |h| \to 0.$$

Определение 2.2. *Функция f заданная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{R}$ называется* ***дифференцируемой*** *в этой точке, если существует такое комплексное число $A \in \mathbb{C}$, что*

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Ah + o(|h|), \quad |h| \to 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, замечание перед последним определением говорит нам о том, что существование производной функции f в точке z_0 равносильно ее дифференцируемости в этой точке. При этом число A в определении 2.2 совпадает с $f'(z_0)$.

2.1.3. Правила дифференцирования

Дифференцированием (как и в математическом анализе) мы будем называть процесс вычисления производной. Этот процесс подчиняется таким же правилам, как и в случае функций действительного переменного.

Теорема 2.1 (правила дифференцирования)**.**
1. Если $f(z) \equiv c$, то $f'(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$.
2. Если функции f и g дифференцируемы в точке z, то
а) для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке z и

$$(\alpha f(z) + \beta g(z))' = \alpha f'(z) + \beta g'(z),$$

б) их произведение $f \cdot g$ дифференцируемо в точке z и

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

в) при условии $g(z) \neq 0$ их частное f/g дифференцируемо в точке z и

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

3. Если функция f дифференцируема в точке z, а функция g дифференцируема в точке $f(z)$, причем область значений функции f содержится в *области определения функции g, то их композиция $F = g \circ f$ дифференцируема в точке z и*

$$F'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

4. Если однолистная функция f дифференцируема в точке z, причем $f'(z) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $w = f(z)$ и

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Доказательства всех утверждений этой теоремы ничем не отличается от доказательств соответствующих свойств операции дифференцирования для функций действительного переменного.

2.1.4. Условия Коши–Римана

Все это мы уже видели в курсе математического анализа и пока комплексный случай ничего нового нам не показал. Однако, мы уже сейчас убедимся, что дифференцируемость сейчас является существенно более сильным свойством, налагающим дополнительные ограничения на функцию. Для этого запишем значения функции f в алгебраической записи (1.1)

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy. \tag{2.3}$$

Запись (2.3) будет систематически использоваться ниже на протяжении всей книги.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция f была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы действительная $u = \operatorname{Re} f$ и мнимая $v = \operatorname{Im} f$ части были дифференцируемы (как функции из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$) и выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{2.4}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема точке z_0. Считаем, что в условии дифференцируемости (2.2) $D = A + iB$, $h = t + is$, то есть

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (A + iB)(t + is) + o(|h|) =$$
$$= (At - Bs) + i(Bt + As) + o(|h|)$$

и отделим в нем действительную и мнимую части, получая соотношения

$$\begin{cases} u(x_0 + t, y_0 + s) - u(x_0, y_0) = At - Bs + o(\sqrt{t^2 + s^2}), \\ \\ v(x_0 + t, y_0 + s) - v(x_0, y_0) = Bt + As + o(\sqrt{t^2 + s^2}). \end{cases}$$

Отсюда следует дифференцируемость функций u и v, а также равенства

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

и

$$B = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Поэтому все соотношения в утверждении нашей теоремы справедливы.

Обратно можно вернуться по этой же дорожке. $\square$

Равенства (2.4) называют обычно **уравнениями Коши–Римана**[1]. Необходимость их выполнения для существования производной делает теорию диффренцирования комплексных функций существенно отличной от соответствующей действительной теории функций из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

2.2. Аналитические функции и конформные отображения

2.2.1. Геометрический смысл аргумента производной

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — гладкая жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее гладкая параметризация, то, исходя из уравнения

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}$$

уравнение касательной к Γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ можно записать в виде

$$z = z_0 + t(\cos\arg\gamma'(t_0) + i\sin\arg\gamma'(t_0)),\ t \in \mathbb{R}.$$

[1]Историческая справедливость (см. об этом []) требует, однако, упоминания в связи с этим имен Эйлера и Даламбера, в первую очередь. Однако терминология уже устоялась и мы будем использовать общепринятый стандарт.

Таким образом $\arg\gamma'(t_0)$ — **угловой коэффициент касательной**.

Пусть задана функция $f \in C(G)$ ($G \subset \mathbb{C}$ — область), которая дифференцируема в точке $z_0 \in G$, причем $f'(z_0) \neq 0$. Проведем через z_0 гладкую жорданову кривую Γ и пусть $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $z_0 = \gamma(t_0)$. Тогда ее образ $f(\Gamma)$ — кривая с параметризацией $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

В силу правила дифференцирования композиции (см. теорему 2.1) справедливо равенство

$$\arg\widetilde{\gamma}'(t_0) = \arg(f'(z_0)\cdot\gamma'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0) \tag{2.6}$$

или

$$\arg\widetilde{\gamma}'(t_0) - \arg\gamma'(t_0) = \arg f'(z_0).$$

Возьмем теперь две гладкие жордановы кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку z_0 с параметризациями γ_1 и γ_2 (можно считать, что $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$). Под действием функции f они отобразятся в кривые $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ с параметризациями $\widetilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ и $\widetilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ соответственно. Вычисляя угловые коэффициенты касательных к этим кривым в точке z_0 с помощью равенства (2.6) находим, что

$$\arg\widetilde{\gamma}_1{}'(t_0) - \arg\widetilde{\gamma}_2{}'(t_0) = \arg\gamma_1'(t_0) - \arg\gamma_2'(t_0).$$

Это означает, что угол между касательными в точке z_0 к образам $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ кривых Γ_1 и Γ_2 равен углу между прообразами (как по величине, так и по направлению отсчета).

Таким образом, мы приходим к пониманию геометрического смысла аргумента производной функции $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который поворачиваются касательные к кривым в точке z_0 после отображения с помощью функции непрерывной функции f, имеющей в точке Z_0 отличную от нуля производную.

2.2.2. Геометрический смысл модуля производной

Смысл модуля производной легко усмотреть из равенства

$$|f'(z_0)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Если модуль $|z - z_0|$ мал, то

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|.$$

Таким образом, модуль производной $|f'(z_0)|$ — это предельный коэффициент растяжения, показывающий насколько изменяется расстояние между образами точек z и z_0 (при малых $|z - z_0|$) при отображении f.

2.2.3. Понятие аналитической функции

Определение 2.3. *Функция f, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется* ***аналитической*** *в этой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.*

Функция f называется аналитической в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если функция $f(1/z)$ аналитична в точке 0.

Функция называется аналитической в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

Для термина «аналитическая функция» используются также синонимы «**голоморфная**» функция, «**регулярная**» функция. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется **целой**.

Условимся называть углом между гладкими кривыми в точке их пересечения угол между касательными к к ним в этой точке. **Мне не нравится это определение.**

Определение 2.4. *Непрерывное отображение $f \in C(G)$ области $G \subset \mathbb{C}$ называется* ***конформным*** *в точке $z_0 \in G$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через эту точку.*

Результат п.2.2.1 говорит нам о том, что отображение с помощью аналитической функции в некоторой области функции является конформным во всех точках области, где ее производная отлична от нуля.

2.3. Дробно-линейные отображения

Дробно-линейными называются отображения вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.7}$$

2.3.1. Простейшие свойства

Условие (2.7) обеспечивает нам невырожденность дробно-линейной функции. Именно, вычисляя производную этой функции, мы видим, что

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2} \tag{2.8}$$

Поэтому, если (2.7) не выполнено, то наша функция является тождественной постоянной. Кроме того, условие (2.7) необходимо для конформности дробно-линейного отображения.

Случай $c = 0$ особенно прост — тогда наша функция является линейной и легко проследить, что происходит при отображении с ее помощью. Перепишем ее в виде

$$f(z) = Az + B, \quad \text{где } A = \frac{a}{d},\ B = \frac{b}{d}.$$

В силу (2.7) $A \neq 0$, следовательно, линейная функция f осуществляет конформное отображение всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом отображении касательные ко всем гладким кривым поворачиватся на один и тот же угол $\arg A$, а коэффициент растяжения во всех точках равен $|A|$. Очевидно также, что при линейном отображении прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

Далее рассмотрим случай $c \neq 0$. Тогда из равенства

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

вытекает, что дробно-линейное отображение является композицией двух линейных функций и функции $z \mapsto 1/z$.

Кроме того, легко видеть, что дробно-линейная функция взаимно однозначно отображает проколотую комплексную плоскость $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$ на $\mathbb{C}\setminus\{c/a\}$. Обратное отображение для дробно-линейной функции (2.7) задается так:

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}, \quad w \neq \frac{c}{a}.$$

и также является невырожденным дробно-линейным отображением.

Дробно-линейное отображение (2.7) является конформным во всех точках комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме $-d/c$. Это вытекает из его аналитичности и того, что производная (см. (2.8)) отлична от нуля в этих точках.

Можно рассматривать дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости. Функция (2.7) определена всюду в $\widehat{\mathbb{C}}$, кроме точек $-d/c$ и ∞ при $c \neq 0$ и кроме точки ∞ при $c = 0$. Для этого доопределим ее следующими равенствами

— если $c \neq 0$, то положим

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

— если $c = 0$, то положим

$$f(\infty) = \infty.$$

При таком определении дробно-линейное отображение является гомеоморфизмом (т.е. взаимно однозначным отображением, обратное к которому также непрерывно) расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ на себя. Это утверждение легко устанавливается непосредственной проверкой.

2.3.2. Групповое свойство

Рассмотрим теперь композицию двух невырожденных функций

$$f_k(z) = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда после элементарных преобразований получаем снова дробно-линейное отображение

$$f_2(f_1(z)) = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + c_1 d_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)},$$

которое невырождено, так как отличен от нуля его определитель:

$$(a_1 a_2 + c_1 b_2)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (b_1 a_2 + d_1 b_2)(a_1 c_2 + c_1 d_2) = (a_1 d_1 -$$

$$= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0.$$

Таким образом, мы показали что множество всех невырожденных дробно-линейных функций образует группу с групповой операцией — композицией отображений.

2.3.3. Круговое свойство

$\widehat{\mathbb{C}}$-**окружностью** (или обобщенной окружностью, или окружностью в расширенной комплексной плоскости) будем называть любую окружность или прямую на $\mathbb{C}$.

Такая трактовка прямых в $\mathbb{C}$ объясняется тем, что при стреографической проекции окружностям и прямым в $\mathbb{C}$ соответствуют окружности на сфере Римана (убедитесь в этом самостоятельно).

Теорема 2.3 (круговое свойство)**.** *При дробно-линейных отображениях образами $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей являются $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности.*

Доказательство. Рассмотрим общее уравнение прямой или окружности

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Если $A = 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$, то это — уравнение прямой. Если же $A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$, то это — уравнение окружности. С помощью замены

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

перейдем к уравнению

$$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0, \quad E = A + iB.$$

Заменяя здесь $z = 1/w$, получим уравнение такого же вида

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0.$$

Это означает, что функция $w = 1/z$ обладает свойством, сформулированным в нашей теореме.

Кроме того, линейная функция также обладает, очевидно, таким же свойством. Следовательно, оно имеет место и для любой дробно-линейной функции, как композиции линейных функций и функции $w = 1/z$. $\square$

2.3.4. Свойство симметрии

Определение 2.5. *Две точки называются* ***симметричными относительно прямой****, если они лежат на одном и том же перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее.*

Две точки называются ***симметричными относительно окружности****, если они лежат на одном луче с началом в центре окружности и произведение расстояний от этих точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса.*

Центр окружности будем считать симметричным бесконечно удаленной точке ∞.

Примеры:

— пара z и $\overline{z}$ симметрична относительно оси $\operatorname{Im} z = 0$,

— пара z и $R^2/\overline{z}$, симметрична относительно окружности $C_R(0)$.

Отсюда следует, что отображение

$$z \mapsto e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z}_0) + z_0 \tag{2.9}$$

дает точку, симметричную точке z относительно прямой $z = z_0 + te^{i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$. Аналогично

$$z \mapsto z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0} \tag{2.10}$$

дает точку, симметричную точке z относительно окружности $C_R(z_0)$. Будем называть их **преобразованиями симметрии** относительно прямой и окружности соответственно.

Преобразование симметрии относительно прямой часто называют **зеркальным отражением**, а преобразование симметрии относительно окружности — **инверсией**.

Очевидно, что композиция двух преобразований симметрии относительно прямых или окружностей ((2.9) или (2.10)) является невырожденным дробно-линейным преобразованием. Для доказательства обратного утверждения нам понадобится некоторая подготовка.

Лемма 2.1. *Пусть* Γ — $\widehat{\mathbb{C}}$*-оукружность. Тогда для симметрии двух точек* $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ *относительно* Γ *необходимо и достаточно, чтобы любая* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность, содержащая эти точки, была ортогональна* Γ.

Доказательство. Необходимость. Пусть точки z и z^* симметричны относительно Γ и $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность $\widetilde{\Gamma}$ содержит эти точки.

Если Γ или $\widetilde{\Gamma}$ является прямой, то ортогональность Γ и $\widetilde{\Gamma}$ очевидна, поэтому считаем, что и Γ, и $\widetilde{\Gamma}$ являются окружностями.

Пусть Γ — окружность с центром в точке z_0 радиуса R и z лежит внутри z и z^*. С одной стороны условие симметричности означает, что $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0| = R^2$. С другой стороны, если провести через z_0 касательную к окружности $\widetilde{\Gamma}$ и секущую (луч из точки z_0, содержащий z и z^*), то квадрат длины этой касательной равен произведению $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|$ длин отрезков секущей. Отсюда длина касательной равна R и является радиусом окружности Γ и ортогональна радиусу окружности $\widetilde{\Gamma}$, проведенному в точку касания. Следовательно, Γ и $\widetilde{\Gamma}$ ортогональны.

Достаточность. Доказательство очевидно в случае, когда Γ — прямая. Пусть Γ — окружность с центром в точке z_0 радиуса R.

Если $\widetilde{\Gamma}$ — прямая, содержащая точки z и z^*, то по условию $\widetilde{\Gamma}$ ортогональна Γ и все три точки z_0, z и z^* принадлежат $\widetilde{\Gamma}$.

Если $\widetilde{\Gamma}$ — окружность, содержащая точки z и z^*, то произведение $|z-z_0|\cdot|z^*-z_0|$ равно квадрату касательной к $\widetilde{\Gamma}$, выходящей из точки z_0 и равной радиусу R. Поэтому точки z и z^* симметричны относительно z и z^*. □

Теорема 2.4. *При дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружности, преобразуется в пару точек, симметричных относительно ее образа.*

Доказательство. Пусть f — наше дробно-линейное отображение и точки z и z^* симметричны относительно окружности или прямой Γ и пусть $\widetilde{\Gamma}$ — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, содержащая z и z^*. По лемме 2.1 $\widetilde{\Gamma}$ ортогональна Γ и по теореме 2.3 ее образ $f(\widetilde{\Gamma})$ является $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностью. Так как f осуществляет конформное отображение, то $f(\widetilde{\Gamma})$ ортогональна $f(\Gamma)$. При этом любая окружность или прямая, содержащая $f(z)$ и $f(z^*)$, может быть представлена в таком виде. Снова применяя лемму 2.1, получаем симметричность точек $f(z)$ и $f(z^*)$ относительно $f(\Gamma)$. □

2.3.5. Свойство трех точек

Дробно-линейная функция (2.7) вполне определяется тремя параметрами — можно разделить числитель и знаменатель дроби в (2.7) на одно и то же число, отличное от нуля. Поэтому естественно ожидать, что дробно-линейное отображение вполне определяется заданием его значений в трех точках. Это действительно так.

Теорема 2.5. *Для любых трех различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ и любых трех различных чисел $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ существует единственное дробно-линейное отображение f, удовлеторяющее условию*

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.11}$$

Доказательство. Будем считать, что все z_k и w_k принадлежат $\mathbb{C}$ (являются собственными числами).

Дробно-линейная функция

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

переводит точки z_1, z_2 и z_3 в 0, ∞ и 1 соответственно. Аналогично функция

$$f_2(z) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

переводит точки w_1, w_2 и w_3 в 0, ∞ и 1 соответственно. Поэтому $f_2^{-1} \circ f_1$ удовлетворяет условию (2.11).

В случае, когда одно из z_k или (и) одно из w_k равны ∞, доказательство предлагается провести самостоятельно.

Единственность. Если дробно-линейное отображение f удовлетворяет условию (2.11), то композиция (также дробно-линейное отображение) $g = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ оставляет точки 0, ∞ и 1 неподвижными. Поэтому из условия $g(\infty) = \infty$ вытекает, что $g(z) = Az + B$. Т.к. $g(0) = 0$, то $A = 0$, а из $g(1) = 1$ следует $B = 1$. Следовательно, $g(z) = z$ и $f = f_2^{-1} \circ f_1$, т.е. f определяется однозначно. □

Следствие 2.1. *Для двух любых $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей существует дробно-линейная функция, отображжющая одну окружность на другую.*

Доказательство. Это вытекает из теоремы 2.5 и кругового свойства (см. теорему 2.3) — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность однозначно определяется заданием трех ее точек. □

2.3.6. Примеры дробно-линейных отображений

Рассмотрим дробно-линейные отображения некоторых наиболее просто устроенных областей: расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$, **единичного круга**

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{2.12}$$

и **верхней полуплоскости**

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}. \tag{2.13}$$

Дробно-линейным автоморфизмом области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ будем называть любое дробно-линейное отображение области D на себя.

Ясно, что множество всех дробно-линейных автоморфизмов области является группой, которая является подгруппой группы всех дробно-линейных отображений.

Группы дробно-линейные автоморфизмов первых двух основных областей описываются очевидным образом:

— для расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ совпадает с группой всех дробно-линейных отображений,

— для плоскости $\mathbb{C}$ совпадает с группой всех линейных отображений, т.е. функций вида $az + b$.

Рассмотрим далее отображения полуплоскости H и круга U. В следующем примере описываются дробно-линейные автоморфизмы единичного круга с заданным прообразом нуля.

Пример 2.1. Формула

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает единичный круг U на себя так, что заданная точка z_0 переходит в центр этого круга.

Доказательство. Пусть функция

$$f(z) = \lambda\frac{z - a}{z - b} \tag{2.15}$$

отображает U на U, причем $f(z_0) = 0$. Тогда ясно, что $a = z_0$.

Отметим, что

$$f(\partial U) = \partial U. \tag{2.16}$$

В самом деле, пусть $|z| = 1$, тогда неравенство $|f(z)| < 1$ невозможно (f отображает U на U). Поэтому, если предположить, что $|f(z)| > 1$, то в некоторой точке отрезка $[z_0, z] \subset U$ непрерывная функция $|f|$ обязана принимать значение 1, что также невозможно. Итак, $f(\partial U) \subset \partial U$ и в силу кругового свойства (2.3) выполнено (2.16).

Рассмотрим теперь точку $1/\overline{z}_0$, симметричную z_0 относительно $\partial U = C_1(0)$. В силу (2.16) свойства симметрии (теорема 2.4) ее образ — точка симметричная началу координат, т.е. $f(1/\overline{z}_0) = \infty$. Отсюда $b = 1/\overline{z}_0$ и

$$f(z) = \lambda_1\frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}.$$

с некоторым другим λ_1. В силу(2.16) $|f(1)| = 1$, поэтому $|\lambda_1| = 1$.

Докажем теперь, что любое отображение вида (2.14) отображает U на себя так, что z_0 переходит в точку 0. Отметим, что если $|z| = 1$, то $z\overline{z} = 1$ и

$$|f(z)| = \left|\frac{z - z_0}{z\overline{z} - z\overline{z}_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|z| \cdot |z - \overline{z}_0|} = 1.$$

Поэтому $f(\partial U) \subset \partial U$ и в силу кругового свойства (теорема 2.3) выполнено (2.16). Отсюда следует, что при $|z| < 1$ будет $|f(z)| < 1$ (если это не так, то $|f(z)| > 1$ в некоторой точке $z \in U$ и, т.к. $f(z_0) = 0$, то непрерывная функция $|f(z)|$ должна принимать в U и значение 1, а это противоречит равенству (2.16). Точно так же доказывается, что $|f(z)| > 1$ при $|z| > 1$. Следовательно, $f(U) = U$. $\square$

Неединственность в примере 2.1 объясняется тем, что переход в (2.18) от одного θ к другому равносилен повороту круга, поэтому условия на отображение не нарушаются.

Пример 2.2. Формула

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0, \tag{2.17}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает верхнюю полуплоскость H на себя.

Доказательство. То, что отображение с указанными свойствами должно иметь вид (2.17), можно вывести из теоремы 2.5. То, что отображение вида (2.17) обладает этими свойствами, доказывается подобно рассуждениям из примера 2.1. Читателю предлагается проделать это самостоятельно. $\square$

Пример 2.3. Формула

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает верхнюю полуплоскость H на единичный круг U так, что заданная точка z_0 переходит в центр этого круга.

Доказательство. Пусть функция (2.15) отображает H на единичный круг U так, что $f(z_0) = 0$. Тогда $a = z_0$.

Заметим, что сейчас

$$f(\partial H) = \partial U. \tag{2.19}$$

Пусть $x \in \mathbb{R} = \partial H$, тогда неравенство $|f(x)| < 1$ невозможно, т.к. $f(H) = U$. Если предположить, что $|f(x)| > 1$, то на отрезке, соединяющем точки x и z_0 непрерывная функция $|f|$ обязана принимать значение 1, что также невозможно. Итак, $f(\partial H) \subset \partial U$ и в силу кругового свойства (2.3) выполнено (2.19).

В силу свойства симметрии (теорема 2.4) $f(\overline{z}_0) = \infty$, отсюда $b = \overline{z}_0$. Чтобы найти λ, возьмем $x \in \mathbb{R}$. Тогда числа $x - z_0$ и $x - \overline{z}_0$ являются взаимно сопряженными и имеют одинаковые модули, поэтому

$$|f(x)| = \left|\lambda \frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0}\right| = |\lambda|.$$

Это означает, что образ действительной оси — окружность радиуса $|\lambda|$, поэтому $|\lambda| = 1$ и $\lambda = e^{i\theta}$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

2.4. Элементарные аналитические функции

2.4.1. Экспоненциальная функция

Определение 2.6. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*[2]

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где $z = x + iy$.

В частности, при $x = 0$ мы получаем **формулу Эйлера**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{2.20}$$

которая приводит к **экспоненциальной форме** записи комплексных чисел

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}. \tag{2.21}$$

Запишем действительную и мнимую части для e^z

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y. \end{cases}$$

Они имеют частные производные любого порядка. Находя их частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y,$$

[2]Иногда мы пишем $\exp z$ вместо e^z.

видим, условия Коши-Римана (см. 2.4) выполнены, поэтому по теореме 2.2 функция $f(z) = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости, то есть целой (см. раздел 2.2.3). Кроме того, из соотношений (2.5) следует, что

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^x e^{iy}\big) = e^{iy} e^x = e^z.$$

Так как очевидно, что $\left|e^{iy}\right| = 1$ для любого $y \in \mathbb{R}$, то $|e^z| = e^x \neq 0$. Следовательно, экспоненциальная функция осуществляет конформное отображение в любой точке $z \in \mathbb{C}$.

Важнейшее свойство экспоненциальной функции

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \tag{2.22}$$

известное нам для действительных значений $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, остается справедливым и для любых комплексных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. В самом деле,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

Если $k \in \mathbb{Z}$, то

$$e^{z+2\pi ik} = e^x[\cos(y + 2\pi ik) + i \sin(y + 2\pi ik)] = e^z,$$

поэтому $w = 2\pi ik$ является периодом экспоненциальной функции. Обратно, если w — период, то есть $e^{z+w} = e^z$ для любого z, то при $z = 0$ получаем $e^w = 1$, отсюда $w = 2\pi ik$. Таким образом мы описали множество всех периодов функции e^z, это $\{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$. Простейший ненулевой период $2\pi i$ называется **основным периодом** экспоненциальной функции.

2.4.2. Тригонометрические и гиперболические функции

Из формулы Эйлера (2.20) следует, что

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}.$$

Это дает нам возможность распространить определения синуса и косинуса на комплексные значения аргумента.

Определение 2.7. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2.23}$$

Эти функции называются ***синусом*** *и* ***косинусом*** *соответственно.*

Непосредственно из определения вытекает, что первая из них является четной, а вторая — нечетной. Обе являются периодичными с периодом $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Число 2π называется **основным периодом** для этих функций.

Из теоремы 2.1 вытекает, что эти функции дифференцируемы и их производные вычисляются по привычным формулам

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Следующие два тождества

$$2\Big\{e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)}\Big\} = (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} \mp e^{-iz_2})$$

легко проверяются с помощью раскрытия скобок в правой части. Из них нетрудно вывести формулы сложения для тригонометрических функций

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \tag{2.24}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \tag{2.25}$$

которые являются основными в теории тригонометрических функций. Из них легко выводятся другие тождества для тригонометрических функций.

С помощью синуса и косинуса вводится еще одна пара тригонометрических функций — тангенс и котангенс.

Определение 2.8. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Эти функции называются **тангенсом** и **котангенсом** соответственно.*

Для данных функций также легко вывести стандартные тригонометрические формулы, связывающие их.

С тригонометрическими функциями тесно связаны так называемые гиперболические функции.

Определение 2.9. *Для $z \in \mathbb{C}$ положим*

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

*Эти функции называются соответственно **гиперболическими синусом** и **гиперболическими синусом***

Из определений 2.7 и 2.9 вытекают следующие формулы, выражающие связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = -i \sin z.$$

В свою очередь отсюда и из тригонометрических формул сложения (2.24)–(2.25) следуют формулы сложения для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Отметим еще несколько формул подобного рода

$$\operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y; \ \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y; \ \operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Отсюда, в частности,

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x$$

$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x$$

Из теоремы 2.1 следует, что гиперболические функции дифференцируемы, а формула для производной экспоненциальной функции приводит к равенствам

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

2.4.3. Логарифмическая функция

Здесь мы впервые столкнемся с многозначной функцией (см. раздел 2.1.1). Для любого $w \neq 0$ множеством решений уравнения $e^z = w$ является

$$\{\ln |w| + i(2\pi k + \arg w) : k \in \mathbb{Z}\} = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w. \tag{2.26}$$

Определение 2.10. ***Логарифмической*** *(с основанием e) называется многозначная функция*

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln |z| + i(2\pi k + \arg z) : k \in \mathbb{Z}\} = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Главным значением *логарифма называется*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Для любого значения $\operatorname{Ln} z$ справедливы равенства $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ (при $z \neq 0$) и $\operatorname{Ln} e^z = z$. Это показывает, что логарифмическая функция является в некотором смысле обратной к экспоненциальной. Хотя в обычном понимании термина «обратная функция» это не так, потому что экспоненциальная функция не является взаимно однозначной.

В силу основного свойства экспоненциальной функции (2.22) справедливы равенства

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

и

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

если последнее равенство понимать как совпадение множества слева и множества сумм элементов из слагаемых справа.

Отметим, что с равенствами для многозначных функций надо быть осторожным. Это показывает, например, следующий **парадокс Бернулли**

$$(-z)^2 = z^2 \;\Rightarrow\; \operatorname{Ln}(-z)^2 = \operatorname{Ln} z^2 \;\Rightarrow\; 2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z,$$

но множества$\operatorname{Ln}(-z)$ и $\operatorname{Ln} z$ не имеют общих элементов. Найдите ошибку в этом «рассуждении».

Выделение однозначной ветви логарифмической функции можно произвести, рассматривая сужение экспоненциальной функции, на какое-либо множество ее однолистности, к примеру на полосу

$$S(a,k) = \{z \in \mathbb{C} : a + (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leqslant a + (2k+1)\pi\}.$$

Однако можно поступить другим способом. Зафиксируем числа $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}$, задавая тем самым значение логарифмической функции

$$\ln_k z_0 = \ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2\pi k).$$

При обходе вокруг начала координат 0 с возвратом в z_0 мы придем к другому значению логарифмической функции. Поэтому 0 называется точкой ветвления логарифмической функции.

Чтобы избежать этого, проведем разрез комплексной плоскости, соединяя 0 с бесконечно удаленной точкой ∞, например, лучом

$$\left\{te^{i\varphi_0} : t \in [0, +\infty)\right\},$$

где $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ фиксировано. Тогда, переходя по любому пути из любой точки $0 \neq z \in \mathbb{C}$, мы не сможем вернуться в нее, пересекая этот луч. Поэтому мы возвращаемся в точку z, не изменяя значения функции в этой точке.

Таким образом, фиксация значения логарифмической функции в какой-либо точке $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ и проведение разреза, соединяющего точку ветвления с бесконечно удаленной точкой, позволяет выделить однозначную ветвь логарифмической функции.

Производная логарифмической функции, вычисляется независимо от выбора ветви на основании теоремы 2.1 по формуле

$$(\mathrm{Ln}\, z)' = \frac{1}{z}.$$

2.4.4. Степенная функция

Определение 2.11. ***Степенной*** *функцией с показателем $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется многозначная функция*

$$z^\mu = e^{\mu \,\mathrm{Ln}\, z} = |z|^\mu e^{i\mu \arg z} e^{2\pi i k \mu}.$$

Неоднозначность степенной функции обусловлена множителем $e^{2\pi k i \mu}$. Характер этой неоднозначности зависит от структуры показателя степени μ и мы рассмотрим подробнее некоторые частные случаи выбора μ в определении.

Если $\mu = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (см. (2.21))

$$e^{\mu \,\mathrm{Ln}\, z} = e^{\mu(\ln|z| + i \,\mathrm{Arg}\, z)} = e^{\mu \ln|z|} e^{\mu i \,\mathrm{Arg}\, z} = (|z| e^{i \arg z})^n = z^n.$$

В этом случае степенная функция имеет единственное значение, совпадающее с привычным.

Если $\mu = p/q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ — рациональное число, то $e^{2\pi i k \mu}$ принимает q различных значений, получаемых при $k = 0, \ldots, q-1$. Поэтому сейчас степенная функция в каждой точке имеет q различных значений.

Если $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — иррациональное число, то все значения $e^{2\pi k i \mu}$ при различных $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, в случае иррационального μ степенная функция z^μ имеет счетное множество различных значений.

Выделение однозначной ветви степенной функции осуществляется как и выше для логарифмической (см. раздел 2.4.3): фиксируем значение в какой-либо точке $z_0 \neq 0$ и производим разрез в комплексной плоскости, соединяя с его помощью $z = 0$ и $z = \infty$.

2.4.5. Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим

Рассмотрим теперь определения «обратных» функций к тригонометрическим и гиперболическим. Кавычки обусловлены тем, что эти функции выражаются через экспоненциальную (см. определения 2.7–2.9) и, естественно, не являются взаимно однозначными. Поэтому, как и в случае логарифмической функции, мы придем к многозначным функциям.

Пусть задано число $w \in \mathbb{C}$. Решим уравнение $\sin z = w$. В силу равенства (2.23) оно сводится к уравнению

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

откуда $e^{iz} = iw + \sqrt{1-w^2}$. Таким образом, множеством решений уравнения $\sin z = w$ является (см. (2.26)) $-i\,\mathrm{Ln}(iw + \sqrt{1-w^2})$. Это приводит нас к определению многозначной функции **арксинуса**

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$$

Действуя аналогично, мы получим определения обратных к другим тригонометрическим функциям — **арккосинуса**

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

арктангенса

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz},$$

арккотангенса

$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{iz-1}{iz+1}.$$

Точно так же нетрудно придти к следующим определениям обратных функций к гиперболическим — **арксинуса гиперболического**

$$\mathrm{Arcsh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2-1})$$

и **арккосинуса гиперболического**

$$\mathrm{Arcch}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2+1}).$$

Читателю рекомендуется проделать это самостоятельно. Подчеркнем, что эти функции являются многозначными.

Глава 3

Интегральные теорема и формула Коши

3.1. Криволинейные интегралы

3.1.1. Комплексные криволинейные интегралы

Пусть задан спрямляемый путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ и на следе пути $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Зададим произвольно разбиение

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta,$$

на каждом частичном отрезке отметим точку $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$, и составим интегральные суммы

$$s = s(\Pi, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]\,. \tag{3.1}$$

Рангом разбиения назовем число

$$\lambda_\Pi = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, \ldots, n\}$$

(это — наибольшая из длин частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$).

Определение 3.1. *Число $I \in \mathbb{C}$ называется пределом интегральных сумм, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon.$$

*Если такой предел существует, то он называется **криволинейным интегралом** (второго рода) от функции f по пути γ и обозначается*

$$\oint\limits_\gamma f(z)\, dz. \tag{3.2}$$

Пусть задана спрямляемая ориентированная жорданова кривая (или контур) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$.

Определение 3.2. ***Криволинейным интегралом*** *(второго рода) от функции f вдоль кривой (контура) Γ называется криволинейный интеграл по любой параметризации этой кривой (контура), сохраняющей ориентацию. Для этого интеграла используется следующее обозначение*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz. \tag{3.3}$$

Если $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ и $f = u+iv$, то мы можем преобразовать выражение для интегральных сумм (3.1) следующим образом

$$s = \sum_{k=1}^{n} \{u(\tau_k)[x(t_k) - x(t_{k-1})] - v(\tau_k)[y(t_k) - y(t_{k-1})]\} +$$

$$+i \sum_{k=1}^{n} \{v(\tau_k)[x(t_k) - x(t_{k-1})] + u(\tau_k)[y(t_k) - y(t_{k-1})]\}.$$

Действительная и мнимая части выражения справа являются интегральными суммами для обычных криволинейных интегралов второго рода от действительнозначных функций (см. п. 8.2.1)

$$\oint_{\Gamma}(u\,dx - v\,dy) \quad \text{и} \quad \oint_{\Gamma}(v\,dx + u\,dy).$$

Следовательно, комплексный криволинейный интеграл (3.3) выражается в виде линейной комбинации этих интегралов

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma}(u\,dx - v\,dy) + i\oint_{\Gamma}(v\,dx + u\,dy). \tag{3.4}$$

3.1.2. Свойства криволинейных интегралов

Из равенства (3.4) вытекает, что свойства комплексного криволинейного интеграла можно получить как следствия из соответствующих свойств криволинейных интегралов от действительнозначных функций, которые рассматриваются обычно в курсе математического анализа (в п. 8.2.1 приведены необходимые для дальнейшего сведения).

Прежде всего отметим, что в случае, когда ориентированная жорданова кривая или контур Γ является гладкой или кусочно-гладкой (см. раздел

1.2.4), то вычисление интеграла (3.3) сводится к вычислению интеграла Римана с помощью формул

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [u(\gamma(t))\varphi'(t) - v(\gamma(t))\psi'(t)]\,dt +$$

$$+\, i \int_{\alpha}^{\beta} [v(\gamma(t))\varphi'(t) + u(\gamma(t))\psi'(t)]\,dt. \tag{3.5}$$

Здесь $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация Γ. Это вытекает из формул, сводящих вычисление криволинейного интеграла от действительной функции к интегралу Римана в случае гладкого (кусочно-гладкого) контура (см. п. 8.2.1).

Равенство (3.5) можно переписать также в комплексной форме

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Для этого достаточно отделить действительную и мнимую части в интеграле (3.6) слева и мы получим правую часть (3.5).

Используем формулу (3.5) для вычисления двух интегралов.

Лемма 3.1. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *— гладкая (или кусочно-гладкая) кривая с началом в точке* z_0 *и концом в* z_1*. Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} dz = z_1 - z_0, \quad \oint\limits_{\Gamma} z\,dz = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

В частности, если Γ *— гладкий (или кусочно-гладкий) контур, то*

$$\oint\limits_{\Gamma} dz = \oint\limits_{\Gamma} z\,dz = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация кривой Γ. Тогда по формуле (3.5)

$$\oint\limits_{\Gamma} dz = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)\,dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \psi'(t)\,dt =$$

$$= [\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)] + i[\psi(\beta) - \psi(\alpha)] = z_1 - z_0.$$

Кроме того, снова применяя(3.5), получаем

$$\oint_{\Gamma} z\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(t)\varphi'(t) - \psi(t)\psi'(t)]\,dt + i \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\psi'(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\big[\varphi^2(t) + 2i\varphi(t)\psi(t) - \psi^2(t)\big]\Big|_\alpha^\beta = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

Здесь было использовано равенство

$$\int_\alpha^\beta [\psi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\psi'(t)]\,dt = \varphi(t)\psi(t)\Big|_\alpha^\beta,$$

вытекающее из формулы интегрирования по частям. □

В качестве примера применения равенства (3.6) вычислим один специальный криволинейный интеграл, значение которого нам понадобится ниже.

Лемма 3.2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ — окружность с центром в точке z_0 радиуса $r > 0$. Тогда*

$$\oint_\Gamma (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при} \quad n = -1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть сначала $n \neq -1$. Тогда, параметризуя окружность с помощью пути $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, получаем

$$\oint_\Gamma (z - z_0)^n\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n ire^{it}\,dt = ir^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \frac{r^{n+1}}{n+1}e^{i(n+1)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

в силу 2π-периодичности экспоненциальной функции (см. п. 2.4.1).

В случае $n = -1$ получаем

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}} = i\int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i. \quad \square$$

Далее перечислим основные свойства комплексных криволинейных интегралов.

Теорема 3.1 (свойства криволинейного интеграла)**.**

1. При изменении ориентации кривой или контура знак криволинейного интеграла изменяется на противоположный, т.е.

$$\oint_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

2. Криволинейный интеграл обладает свойствами

а) линейности

$$\oint_\Gamma [\alpha f(z) + \beta g(z)])\,dz = \alpha\oint_\Gamma f(z)\,dz + \beta\oint_\Gamma g(z)\,dz,$$

б) аддитивности — если жорданова кривая или контур Γ *является объединением жордановых кривых* Γ_1 *и* Γ_2*, причем конец* Γ_1 *совпадает с началом* Γ_2*, то*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

3. Для криволинейного интеграла справедливы следующие оценки

$$\left|\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \oint\limits_{\Gamma} |f|\,dl \leqslant \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|\cdot l_{\Gamma}.$$

В средней части последних неравенств находится криволинейный интеграл первого рода.

3.2. Интегральная теорема Коши

3.2.1. Интегральная теорема

Следующая теорема является одним из центральных фактов теории функций комплексного переменного, лежащим в основе ее важнейших результатов.

Теорема 3.2 (Коши (интегральная))**.** *Пусть* $D\subset\mathbb{C}$ *— односвязная область и функция* $f : D\to\mathbb{C}$ *аналитична в* D*. Тогда для любого спрямляемого контура в* $\Gamma\subset D$

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Начнем обоснование этой теоремы с частного случая многоугольника (в этом случае утверждение нашей теоремы обычно называют называется **леммой Гурса**).

Лемма 3.3. *Пусть* $D\subset\mathbb{C}$ *— односвязная область функция* $f : D\to\mathbb{C}$ *аналитична в* D*. Тогда для любого многоугольника* $\Delta\subset D$ *с границей* Γ *справедливо равенство*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство Достаточно рассмотреть случай треугольника, так как любой многоугольник разбивается в объединение конечного числа треугольников (**см. рисунок**). Обозначим

$$M = \left|\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\right|$$

и разобьем Δ на четыре треугольника, деля стороны пополам. Из них выберем тот треугольник Δ_1 с границей Γ_1, для которого

$$\left|\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4}$$

к Δ_1 применим такое же рассуждение, деля его на четыре треугольника.

Продолжая по индукции, мы получим последовательность замкнутых вложенных треугольников $\{\Delta_n\}$ со свойством

$$\left|\oint\limits_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n}.$$

(Γ_n — граница треугольника Δ_n).

По лемме Кантора существует точка $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Кроме того, так как z_0 является внутренней точкой D (напомним, что D — область, см. раздел 1.2.5), то существует круг $B(z_0, \delta) \subset D$, содержащийся в D. При этом для достаточно больших n треугольник Δ_n будет целиком содержаться в этом круге.

Далее используем дифференцируемость функции f (см. определение 2.2). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|\rho(z)| < \varepsilon|z - z_0|, \quad \rho(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$$

Отсюда, используя еще утверждение леммы 3.1 и неравенство из части 3 теоремы 3.1, получаем

$$\frac{M}{4^n} \leqslant \left|\oint\limits_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint\limits_{\Gamma_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \rho(z)]\,dz\right| =$$

$$= \left|\oint\limits_{\Gamma_n} \rho(z)\,dz\right| < \varepsilon l_{\Gamma_n} \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| = \varepsilon \frac{l_\Gamma \operatorname{diam} \Gamma}{4^n}.$$

Следовательно, $M \leqslant \varepsilon l_\Gamma \operatorname{diam} \Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому и $M = 0$.

Из леммы Гурса можно вывести и утверждение теоремы 3.2, совершая подходящий предельный переход. Мы не будем делать этого, так как в следующем разделе, также опираясь на лемму Гурса, докажем более общую форму этой теоремы.

3.2.2. Обобщение интегральной теоремы Коши

Введем понятие **модуля непрерывности** функции f на множестве E как

$$\omega(\delta, f, E) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta, \quad x, y \in E\}. \tag{3.7}$$

Это — удобная количественная характеристика функции, так как ее поведение при $\delta \to +0$ отвечает за свойство равномерной непрерывности. Действительно, если E — компакт, то условие $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0$ равносильно тому, что функция f равномерно непрерывна на E.

С помощью модуля непрерывности можно дать полезную оценку криволинейного интеграла.

Лемма 3.4. *Если Γ — спрямляемый контур и функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна на Γ, то*

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant \omega(\delta, f, \Gamma) l_\Gamma, \quad \delta = \operatorname{diam} \Gamma.$$

Доказательство. В самом деле, пусть $z_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка. Тогда, используя лемму 3.1, получаем

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| = \left| \oint\limits_{\Gamma} [f(z) - f(z_0)]\, dz \right| \leqslant \sup_{z \in \Gamma} |f(z) - f(z_0)| l_\Gamma \leqslant \omega(\delta, f, \Gamma) l_\Gamma. \quad \square$$

Следующая теорема является обобщением интегральной теоремы Коши 3.2. Существенным отличием в новой формулировке будет то, что в ней не требуется аналитичности функции в точках контура.

Теорема 3.3 (обобщенная теорема Коши)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, границей которой является спрямляемый контур, функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Возьмем $0 < \delta < \frac{1}{3} \operatorname{diam} \partial D$ и разобьем всю комплексную плоскость на открытые квадраты $\{Q_n\}$ с помощью прямых $\operatorname{Im} z = k\delta$, $\operatorname{Re} z = k\delta$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Введем два множества индексов

$$A = \{n : \overline{Q}_n \subset D\}, \quad B = \{n : \overline{Q}_n \cap \partial D \neq \varnothing\}$$

и обозначим $\Delta_n = Q_n \cap D$ при $n \in B$. Тогда каждое из множеств Δ_n, $n \in B$, открыто и является объединением конечного или счетного множества односвязных областей со спрямляемыми границами.

Запишем равенство (**см. рисунок**)

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \oint_{\partial\left(\bigcup_{n\in A}\overline{Q}_n\right)} f(z)\,dz + \sum_{n\in B}\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \tag{3.8}$$

и заметим, что первое слагаемое справа в (3.8) равно нулю в силу леммы 3.3, так как $\bigcup_{n\in A}\overline{Q}_n$ является многоугольнком.

Наше утверждение будет доказано, если мы установим, что, что сумма справа в (3.8) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Для оценки слагаемых этой суммы воспользуемся неравенством из леммы 3.4

$$\left|\oint_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \partial\Delta_n)l(\partial\Delta_n) \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D})[l(\partial D\cap Q_n) + 4\delta].$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\left|\sum_{n\in B}\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D})\left\{l(\partial D) + 4\sum_{n\in B}\delta\right\}.$$

Пусть Q_n^* — квадрат, концентрический с Q_n, но с длиной стороны втрое больше. Так как $\delta < \frac{1}{3}\operatorname{diam}\partial D$, а ∂D и Q_n имеют общую точку, то $\partial Q_n^* \cap \partial D \neq \varnothing$, следовательно,

$$\delta \leqslant l(\partial D \cap Q_n^*)\,.$$

Складываем эти неравенства:

$$\sum_{n\in B}\delta \leqslant \sum_{n\in B} l(\partial D\cap Q_n^*) \leqslant 9\sum_{n\in B} l(\partial D\cap Q_n) \leqslant 9l(\partial D),$$

а это означает, что при $\delta \to 0$

$$\left|\oint_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant 37l(\partial D)\omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D}) \to 0. \quad \square$$

3.2.3. Случай многосвязной области

Интегральная теорема Коши 3.3 допускает распространение на случай конечносвязных областей (см. раздел 1.2.6).

Пусть $D_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{C}$ — односвязные области, границы которых ∂D_k, $k = 0, \ldots, m$, являются спрямляемыми контурами, причем выполнены условия

$$\overline{D}_k \subset D_0; \ \overline{D}_k \cap \overline{D}_j \neq \varnothing, \quad (k \neq j)$$

Область

$$D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D}_k$$

будем называть **стандартной** $(m+1)$-**связной областью**. Ее границей является объединение границ $\bigcup_{k=0}^{m} \partial D_k$. Положительно **ориентированной границей** $(\partial D)^+$ будем называть

$$(\partial D_0)^+ \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (\partial D_k)^- \right)$$

При таком соглашении при обходе границы в выбранном направлении область D останется слева.

Принятая только что терминология позволяет, в частности, упростить выражение «односвязная область, границей которой является спрямляемый контур», заменив его на «стандартная односвязная область».

Теорема 3.4. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{(\partial D)^+} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Пусть D — ограниченная $(m+1)$-связная область, граница, которой состоит из $(m+1)$-го спрямляемого контура Γ_k, $k = 0, \ldots, m$, причем Γ_k, $k = 1, \ldots, m$, лежат внутри Γ_0. Проведем в D разрезы по непересекающимся гладким жордановым кривым, соединяющим последовательно Γ_0 с Γ_1, Γ_1 с Γ_2,…, Γ_{m-1} с Γ_m (**см. рисунок**). Тогда мы получим односвязную область, к которой можно применить теорему 3.3. Каждый из разрезов при интегрировании по границе новой области проходится дважды в противоположных направлениях, поэтому интегралы по этим разрезам взаимно сокращаются. Следовательно, интеграл по границе новой области совпадает с интегралом по границе области D. $\square$

3.2.4. Первообразная аналитической функции

Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ заданы две функции $F : D \to \mathbb{C}$ и $f : D \to \mathbb{C}$.

Определение 3.3. *Функция F называется **первообразной** для функции $f : D \to \mathbb{C}$, если для всех $z \in D$ справедливо равенство*

$$F'(x) = f(z).$$

Отметим, что любые две первообразные функции f отличаются на постоянное слагаемое. В самом деле, пусть F_1 и F_2 — две первообразные функции f в области D и

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z).$$

Тогда функция Φ аналитична в D и ее производная тождественно равна нулю в области D. В силу условий Коши–Римана (см. теорему 2.2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

А тогда, как известно из курса математического анализа, $\operatorname{Re}\Phi$ и $\operatorname{Im}\Phi$ есть тождественные постоянные.

Итак, мы знаем все первообразные, если сумеем найти хотя бы одну. Нашей следующей целью является указание способа нахождения первообразной аналитической функции. Для этого нам понадобится подготовка.

Будем говорить, что криволинейный интеграл (3.3) не зависит от пути в области D, если для любых точек $z_0, z_1 \in D$ и любой кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в z_0 и концом в z_1 интеграл (3.3) имеет одно и то же значение.

Лемма 3.5. *Если $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D, то интеграл* (3.3) *не зависит от пути в D.*

Доказательство. Это нетрудно вывести из интегральной теоремы Коши. В самом деле, пусть $z_0, z_1 \in D$ и Γ_1, Γ_2 — две жордановы кривые с началом в z_0 и концом в z_1. Легко видеть (**это доказывать?**), что можно построить ломаную Γ с началом в z_0 и концом в z_1, дополняющую каждую из кривых Γ_1 и Γ_2 до контура (то есть $\Gamma \cup \Gamma_1$ и $\Gamma \cup \Gamma_2$ — контуры). В силу интегральной теоремы Коши 3.2

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma} f\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz. \quad \square$$

Итак, что при условиях леммы 3.5 корректно определение следующей функции
$$F(z) = \oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)\,d\zeta \equiv \oint_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{3.9}$$
где $\Gamma \subset D$ — любая спрямляемая жорданова кривая, соединяющая точки z_0 и z. Эту функцию естественно назвать интегралом с переменным верхним пределом и началом в точке z_0.

Теорема 3.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D, $z_0 \in D$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом и началом в точке z_0 является первообразной функции f.*

Доказательство. Пусть $z \in D$ и $r_0 > 0$ мало настолько, чтобы шар $B(z, 2r_0)$ содержался в области D. Для $z_1 \in \overline{B}(z, r_0) \equiv \overline{B}_0$ рассмотрим выражение
$$\left| \frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{z_1 - z} \oint_{[z,z_1]} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega(|z_1 - z|, f, \overline{B}_0) \to 0, \quad (z_1 \to z).$$
Здесь были использованы оценка криволинейного интеграла из части 3 теоремы 3.1 и определение модуля непрерывности (см. п. 3.2.2). □

Теорема 3.6 (формула Ньютона–Лейбница). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любых точек z_0 и z_1 и любой жордановой кривой $\Gamma \subset D$, соединяющей эти точки, справедливо равенство*
$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \tag{3.10}$$
где Φ — любая первообразная функции f в области D.

Доказательство. Запишем интеграл из (3.9)
$$F(z) = \oint_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta,$$
который является первообразной для функции f в области D по теореме 3.5. По доказанному выше существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что для всех $z \in D$
$$\Phi(z) = F(z) + C.$$
Это число C находим, подставляя в последнее равенство $z = z_0$, получая $C = \Phi(z_0)$. Беря теперь здесь $z = z_1$, приходим к равенству (3.10).

3.3. Интегральная формула Коши

3.3.1. Интегральная формула Коши

Здесь мы докажем важнейшее из следствий интегральной теоремы Коши. Это — замечательная формула Коши, которая количественно закрепляет удивительное свойство аналитических функций: ее значения в области можно восстановить по ее значениям на границе этой области.

Теорема 3.7 (формула Коши)**.** *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область и функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда для любого $z \in D$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ выбрано так, что $\overline{B}_0 = \overline{B}(z, \varepsilon_0) \subset D$. Тогда для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ по интегральной теореме Коши 3.4, применяемой к функции $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ в стандартной многосвязной области $D \setminus \overline{B}(z, \varepsilon)$ (см. п.3.2.3 об ориентации границы многосвязной области),

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint\limits_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

или

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.12}$$

С другой стороны, используя случай $n = -1$ леммы 3.2, мы видим, что

$$\left| 2\pi i f(z) - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\zeta \in C_\varepsilon^+(z)} |f(z) - f(\zeta)| \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant 2\pi\omega(\varepsilon, f, \overline{B}_0) \to 0$$

(определение модуля непрерывности ω см. в (3.7)) при $\epsilon \to 0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \to 2\pi i f(z).$$

Учитывая (3.12), получаем требуемое равенство. □

Интеграл в формуле (3.11) называется **интегралом Коши**, функция f — **плотностью** интеграла Коши, а функция $(\zeta - z)^{-1}$ — **ядром Коши**.

Если $z \notin \overline{D}$, то функция $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ является аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, поэтому в силу интегральной теоремы Коши 3.4 интеграл от нее вдоль ∂D будет равен нулю. Таким образом, формулу Коши (3.11) можно переписать так

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0 & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Далее выведем из формулы Коши несколько других равенств такого же типа, дающих формулы для вычисления значений функции по ее значениям на окружностях.

3.3.2. Формула среднего значения и принцип максимума

Теорема 3.8 (формула среднего значения). *Пусть функция f аналитична в круге $B(z, r_0)$, тогда при $0 < r < r_0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\,d\theta = f(z),$$

в частности,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + re^{i\theta})d\theta = \operatorname{Re} f(z), \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} f(z + re^{i\theta})d\theta = \operatorname{Im} f(z).$$

Доказательство. Применим формулу Коши (3.11) для круга $B(z, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{bmatrix} \zeta = z + re^{i\theta} \\ d\zeta = ire^{i\theta}\,\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\zeta - z| = r}\frac{f(z + re^{i\theta})ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\,d\theta.$$

Вторая часть теоремы получается из первой отделением действительной и мнимой частей. □

Теорема 3.9 (принцип максимума модуля). *Если функция аналитична в некоторой области, то ее модуль не может иметь точек строгого локального максимума в области аналитичности.*

Доказательство. Предположим противное, то есть для некоторого z_0 в области аналитичности неравенство $|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{i\theta})|$ выполнено для всех z из достаточно малой окрестности точки z_0. Отсюда следует, что

$$|f(z_0)| > \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

(непрерывная функция $\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$, $\theta \in [0, 2\pi]$, принимает свое максимальное значение на компакте $[0, 2\pi]$).

С другой стороны из формулы среднего значения (теорема 3.8) следует, что

$$|f(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta\right| \leqslant \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|.$$

Противоречие доказывает наше утверждение. □

Приведем еще одну форму принципа максимума.

Теорема 3.10 (принцип максимума модуля). *Если функция f аналитична в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ и ее модуль $|f|$ имеет локальный максимум в некоторой точке из D, то f есть тождественная постоянная.*

Доказательство. Пусть f не является тождественной постоянной, но $z_0 \in D$ точка локального максимума для $|f|$. Тогда существует такое $r > 0$, что

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)| \quad \text{при} \quad z \in B(z_0, r).$$

В чиле принципа сохранения области (теорема 6.11) образ $f(B(z_0, r))$ содержит некоторый круг $B(f(z_0), \rho)$, $\rho > 0$. Возьмем любую точку $w_1 \in B(f(z_0), \rho)$ с $|w_1| > |w_0|$. Тогда ее прообраз $z_1 \in B(z_0, r)$ удовлетворяет неравенству $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ — противоречие. □

Теорема 3.11 (Лиувилля). *Если функция аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена, то она есть тождественная постоянная.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $r > |z|$, тогда по теореме 3.14

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Тогда

$$|f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\right| = \left[\begin{array}{c} \zeta = re^{i\theta} \\ d\zeta = ire^{i\theta}\, d\theta \end{array}\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(re^{i\theta})ire^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2}\, d\zeta\right| \leqslant \frac{Mr}{(r - |z|)^2} \to 0, \quad r \to +\infty,$$

если $|f(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Итак, производная функции f тождественно равна нулю и f есть тождественная постоянная. □

Лемма 3.6 (Шварца). *Пусть функция f аналитична в круге $B(0,R)$, $f(0)=0$ и $f(z) \leqslant M$ при $z \in C_R(0)$. Тогда*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R}|z| \quad \text{при} \quad z \in B(0,R).$$

При этом, если в некоторой точке $0 \neq z_0 \in B(0,R)$ достигается равенство, то $f(z) = e^{i\theta}Mz/R$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Функция $g(z) = f(z)/z$ аналитична в круге $B(0,R)$ и удовлетворяет неравенству $g(z) \leqslant M/R$ на его границе. В силу принципа максимума (теорема 3.9) $|g(z)| \leqslant M/R$ при $z \in B(0,R)$.

Если $|f(z)| = M|z|/R$ в некоторой точке $0 \neq z_0 \in B(0,R)$, то функция $|g|$ во внутренней точке круга $B(0,R)$ имеет локальный максимум. По теореме 3.10 g является тождественной постоянной, по модулю равной 1. □

3.3.3. Формула Шварца

Следующая теорема говорит нам о том, что значения аналитической функции в круге можно вычислить, используя лишь значения ее действительной части на границе круга .

Теорема 3.12 (формула Шварца). *Пусть функция f аналитична в открытом круге $B(z_0,r)$ и непрерывна в его замыкании $\overline{B}(z_0,r)$. Тогда при $z \in B(z_0,r)$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} f\bigl(z_0 + re^{it}\bigr)\,\frac{re^{it} + (z-z_0)}{re^{it} - (z-z_0)}\,dt + i\operatorname{Im} f(z_0)$$

Доказательство. Для простоты будем считать $z_0 = 0$. Пусть $z \in B(0,r)$ и $z^* = r^2/\overline{z}$, тогда $z^* \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0,r)$.

По формуле Коши (3.11) и интегральной теореме Коши 3.3 справедливы равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\,d\zeta,$$

где $C_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = r\}$ — окружность с центром в точке z радиуса r. Вычтем из первого второе и воспользуемся тем, что при $z = re^{it}$

$$\zeta - z = re^{it} - re^{i\theta}, \quad \zeta - z^* = re^{it} - \frac{r^2}{\rho}e^{i\theta}, \quad d\zeta = ire^{it}\,dt.$$

Тогда мы получим равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(t-\theta) + \rho^2}\, dt. \tag{3.14}$$

Далее, легко видеть, что

$$\operatorname{Re} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} = \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(t-\theta) + \rho^2},$$

следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \operatorname{Re} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, dt.$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}\, dt.$$

Она аналитична в круге $B(0, r)$ — это проверяется непосредственной проверкой ее дифференцируемости. Кроме того, из доказанного равенства (3.14) следует, что $\operatorname{Re} f \equiv \operatorname{Re} g$, поэтому функции f и g различаются на некоторую постоянную C (см. замечание в конце раздела 2.1.4). В частности, $C = f(0) - g(0)$, но $\operatorname{Re} f(0) - \operatorname{Re} g(0) = 0$ и $\in g(0) = 0$, следовательно, $C = i \operatorname{Im} f(0)$. $\square$

3.3.4. Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая жорданова кривая или контур и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{3.15}$$

который существует при наших условиях для любого $z \notin \Gamma$.

Этот интеграл называется **интегралом типа Коши**, в отличие от интеграла Коши (3.11. Функция f в (3.15) называется **плотностью** интеграла типа Коши.

Рассмотрим случай, когда $D \subset \mathbb{C}$ стандартная многосвязная область $\Gamma = \partial D$ — ее граница. Тогда если задана функция f, аналитическая в области D и непрерывная в ее замыкании, то интеграл типа Коши совпадает с интегралом Коши (3.11) в D и вождественно равен нулю в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ (см. (3.13)).

Теорема 3.13. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая жорданова кривая или контур и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Тогда интеграл типа Коши F (3.15) является аналитической функцией в каждой точке из $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, функция $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет производные любого порядка и*

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_k(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

и покажем, что

$$F_k'(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \tag{3.17}$$

Для этого покажем, что выражение

$$I(h) = \frac{F_k(z+h) - F_k(z)}{h} - \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

сходится к нулю при $h \to 0$. Будем считать. что $|h| < d$, где $d = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z, \Gamma)$.

Используя формулу бинома Ньютона, запишем

$$I(h) = \frac{(k-1)!}{2\pi i h} \oint\limits_{\Gamma} f(\zeta) P(\zeta, h)\, d\zeta,$$

где

$$P(\zeta, h) = \frac{1}{(\zeta - z - h)^k} - \frac{1}{(\zeta - z)^k} - \frac{kh}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{h^2 Q(\zeta, h)}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^{k+1}}$$

и

$$Q(\zeta, h) = -\sum_{j=2}^{k} (-1)^j C_k^j (\zeta - z)^{k-j+1} h^{j-2} - k \sum_{j=1}^{k} (-1)^j C_k^j (\zeta - z)^{k-j} h^{j-1}.$$

Легко убедиться в том, что это выражение ограничено некоторой постоянной $A > 0$, зависящей только от кривой Γ, z и от d

$$|Q(\zeta, h)| \leqslant A.$$

Поэтому

$$|P(\zeta,h)| \leqslant \frac{A|h|^2}{d^{2k+1}}$$

и

$$|I(h)| \leqslant \frac{k!A|h|}{2\pi d^{2k+1}} \sup_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)| l_\Gamma \to 0, \quad h\to 0.$$

Применяя доказанное при $k=0$, получаем дифференцируемость функции F и базу для доказательства нашей теоремы по индукции. Предполагая, что наше утверждение уже доказано для $k-1$, то есть $F^{(k-1)}(z)=F_k(z)$ из (3.17) видим, что оно верно и для k. $\square$

Из теоремы 3.13 и замечания перед ее формулировкой сразу вытекает следующая важная теорема.

Теорема 3.14. *Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область и функция $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда f имеет производные любого порядка в D и справедливы равенства*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\,d\zeta, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.18}$$

В частности, все производные аналитической функции являются аналитическими.

3.3.5. Теорема Мореры

Здесь мы докажем утверждение, которое является в некотором смысле обратным к интегральной теореме Коши.

Лемма 3.7. *Пусть функция $f:D\to\mathbb{C}$ непрерывна в области $D\subset\mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ, $\overline{\Delta}\subset D$, равен нулю. Тогда в любом круге $B(z_0,r)\subset D$ функция f имеет первообразную.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta, \quad z\in B = B(z_0,r)$$

(интеграл берется по отрезку, соединяющему точки z_0 и z) и пусть $h\neq 0$ мало настолько, что $z+h\in B(z_0,r)$. По условию

$$\oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta + \oint\limits_{[z+h,z]} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\oint\limits_{[z+h,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$$

или

$$F(z+h) - F(z) = \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\oint\limits_{[z,z+h]} [f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta\right| \leqslant \sup_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta){-}f(z)| \to 0$$

при $h \to 0$ в силу непрерывности функции f в точке z. Здесь была использована часть 3 теоремы 3.1. Итак, $F'(z) = f(z)$ для любого $z \in B(z_0,r)$ и лемма доказана. □

Теорема 3.15 (Мореры)**.** *$f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, равен нулю, то f аналитична в D.*

Доказательство. В силу леммы 3.7 в любом круге $B(z_0,r) \subset D$ функция f имеет первообразную. Поэтому она анлитична в $B(z_0,r)$ как производная аналитической функции (см. теорему 3.14). □

3.3.6. Сопряженные гармонические функции

Введем обозначение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.19}$$

Это дифференциальное выражение называют **оператором Лапласа**. Функция u, заданная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ называется **гармонической** в области D, если она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и $\Delta u = 0$ во всех точках этой области.

Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, тогда по теореме 3.14 она и ее действительная и мнимая части $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ бесконечно дифференцируемы в D. Дифференцируя условия Коши–Римана (2.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

мы получим $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими.

Две гармонические функции u и v, связанные уравнениями Коши–Римана (2.4), называются **сопряженными гармоническими функциями**.

Теорема 3.16. *Пусть функция U гармонична в области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда существует такая аналитическая в области D функция f, что* $\operatorname{Re} f = u$.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ — фиксированная точка и $(x, y) \in D$ произвольная точка в области D. Рассмотрим функцию

$$v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy.$$

Здесь не имеет значения по какому пути, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y), идет интегрирование. В силу условия $\Delta u = 0$ выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом и интеграл не зависит от пути интегрирования. Частные производные функции v легко вычисляются (**сделать это? в курсе анализа это обычно делается**) и для них справедливы условия Коши–Римана (2.4). Поэтому в силу теоремы 2.2 функция $f = u + iv$ аналитична. $\square$

Из этой теоремы следует, что гармонические функции обладают рядом свойств аналитических функций. В частности, они бесконечно дифференциаруемы, для них справедливы формулы средних значений (см. теорему 3.8), доказательство принципа максимума говорит о том, что он справедлив для гармонических функций.

Глава 4

Последовательности и ряды

4.1. Ряды Тейлора

4.1.1. Основные понятия теории рядов

Напомним прежде всего основные понятия общей теории рядов, адаптированные к комплексному случаю. Если $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ — последовательность комплексных чисел, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.1}$$

называют **рядом**.

Чисто формальное восприятие знака суммы означает, что мы пытаемся складывать бесконечное число слагаемых. Такая операция нуждается в дополнительном определении.

С каждым рядом (4.1) свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{4.2}$$

которые называются его **частичными суммами**.

Ряд (4.1) называется **сходящимся**,если сходится последовательность его частичных сумм, то есть существует число $s \in \mathbb{R}$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

В этом случае s называется **суммой ряда** и мы пишем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. В противном случае ряд называется **расходящимся**.

Итак, по определению вопрос о сходимости ряда сводится к вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, если задана последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{R}$, то, полагая

$$a_1 = s_1, \quad a_k = s_k - s_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

получаем ряд (4.1), для которого $\{s_k\}$ является последовательностью частичных сумм (проверьте это самостоятельно).

Таким образом, вопрос о сходимости последовательности — вопрос о сходимости некоторого ряда. Следовательно, рассмотрение рядов — это лишь новая форма изучения последовательностей. Но такой подход даст нам новые возможности как при установлении существования предела, так и при его вычислении. Мы увидим, что теория рядов является мощным средством теории функций комплексного переменного.

Простейшими примерами сходящихся рядов могут служить следующие:

— ряд с постоянными слагаемыми

$$\sum_{k=1}^{\infty} a$$

сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$,

— геометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k, \quad a \neq 0,$$

сходится тогда и только тогда, когда $|z| < 1$, при этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k = \frac{a}{1-z}, \quad |z| < 1. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Ряд (4.1) сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм) фундаментальна, то есть*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \quad |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд (4.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ряд (4.1) называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{4.4}$$

Из леммы 4.1 вытекает, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Обратное неверно — существуют сходящиеся ряды, которые не являются абсолютно сходящимися. Если ряд (4.1) сходится, а ряд (4.4) расходится, то говорят, что ряд (4.1) сходится **условно**.

4.1.2. Степенные ряды

Определение 4.1. ***Степенным рядом*** *будем называть ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \tag{4.5}$$

при этом c_k — ***коэффициенты*** *степенного ряда, а z_0 — его* ***центр****.*

Областью сходимости ряда (4.5) называется множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых он сходится.

Следующие утверждения показывают, что область сходимости степенного ряда не может быть произвольной и имеет специфическую структуру.

Лемма 4.2 (Абеля)**.** *Если степенной ряд сходится при некотором $z^* \neq z_0$, то он сходится абсолютно в круге*

$$B(z_0 : |z^* - z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z^* - z_0|\}$$

и равномерно в любом круге $\overline{B}(z_0, r)$, $0 < r < |z^* - z_0|$.

Доказательство. В силу сходимости $\left|c_k(z^* - z_0)^k\right| \leqslant M$. Если $z \in \mathbb{C}$ такой, что $|z - z_0| < z^* - z_0$, то

$$\left|c_k(z-z_0)^k\right| = \left|c_k(z^*-z_0)^k\right| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^k \leqslant M\left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^k.$$

Абсолютная сходимость следует теперь из (4.3). Точно так же получается равномерная сходимость в любом круге $\overline{B}(z_0, r)$ меньшего радиуса. □

Теорема 4.1 (Коши–Адамара)**.** *Пусть $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ и*

$$l = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Тогда при

1) $l = \infty$ ряд (4.5) расходится при всех $z \neq z_0$,

2) $l > 0$ ряд (4.5) сходится при всех z с $|z - z_0| < 1/l$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > 1/l$,

3) $l = 0$ ряд (4.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. 1) В этом случае для любого $z \neq z_0$ для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |z - z_0| > 1$ и слагаемые ряда (4.5) не стремятся к 0 — не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

В случае 2) при $|z - z_0| < 1/l$ применим к ряду признак Коши с корнем. Если же $|z - z_0| > 1/l$, то (как и в случае 1)) не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Наконец, в случае 3) при любом $z \in \mathbb{C}$ по признаку Коши с корнем ряд (4.5) сходится. □

4.1.3. Радиус сходимости и формула Коши – Адамара

Формулировка теоремы 4.1 делает естественным следующее понятие.

Определение 4.2. *Число $R \in \mathbb{R}$ называется* ***радиусом сходимости*** *степенного ряда (4.5), если этот ряд сходится при всех z с $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > R$.*

Круг

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

называется ***кругом сходимости****.*

Если ряд (4.5) сходится только при $z = z_0$, то считаем $R = 0$, а если (4.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то считаем $R = \infty$.

Теорема 4.1 доказывает существование радиуса сходимости и дает формулу для его вычисления.

Теорема 4.2 (формула Коши–Адамара)**.** *Радиус сходимости R степенного ряда (4.5) вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}. \tag{4.6}$$

Конечно, формула (4.6) справедлива и в случаях $R = 0$ и $R = \infty$, если считать $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$.

Теорема 4.3. *Сумма степенного ряда (4.5) с положительным радиусом сходимости аналитична в круге сходимости и его коэффициенты вычисляются по формулам*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где f — сумма ряда.

Доказательство. Аналитичность суммы ряда вытекает из леммы Абеля 4.2 и теоремы Вейерштрасса 4.9. Кроме того, из второй части теоремы Вейерштрасса 4.9 следует, что при каждом $n = 0, 1, \ldots$ справедливо равенство

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)c_k(z-z_0)^{k-n}.$$

Беря здесь $z = z_0$, видим, что все слагаемые справа обращаются в нуль, кроме первого. Это приводит к равенствам $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$ и мы получаем формулы для коэффициентов. $\square$

Следствие 4.1. *Два степенных ряда вида (4.5) с положительными радиусами сходимости, сходящиеся к одной и той же сумме в некотором круге $B(z_0, \delta)$, где $\delta > 0$, являются тождественными.*

4.1.4. Разложение в степенной ряд

Рядом Тейлора функции f в точке z_0 называется степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \tag{4.7}$$

Из теоремы 4.3 сразу следует, что степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Конечно, чтобы записать ряд (4.7) мы должны потребовать существования производных любого порядка в точке z_0, а для этого на самом деле нужно, чтобы все производные существовали в некоторой окрестности z_0, то есть функция f должна быть аналитичной в некоторой окрестности точки z_0 (см. определение 2.3). Кроме того, подчеркнем, что в этом определении ничего не говорится о сходимости ряда (4.7).

Таким образом, возникают следующие естественные вопросы:

— сходится ли ряд Тейлора,

— чему равна его сумма в случае сходимости?

Теорема 4.4 (Тейлора)**.** *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $0 < r < d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда степенной ряд (4.5), коэффициенты которого вычислены по формулам*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.8}$$

сходится в круге $B(z_0, d)$ к функции f.

Доказательство. Пусть $z \in B(z_0, d)$ и $0 < \rho = |z - z_0| < r$ (ниже мы избавимся от предположения $\rho < r$). Воспользуемся интегральной формулой Коши (3.11) для круга $B(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

и разложим ядро Коши $(\zeta - z)^{-1}$ в ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

Умножим обе части этого равенства на $(2\pi i)^{-1} f(\zeta)$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}(z - z_0)^k$$

и проинтегрируем это равенство по $\zeta \in C_r(z_0)$, получая требуемое равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_))^{k+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^k$$

При этом почленное интегрирование ряда справа возможно в силу его равномерной сходимости по признаку Вейерштрасса — при $|\zeta - z_0| = r$ и $k \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \right| \leqslant \frac{M}{r} \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^k, \quad \text{где} \quad M = \sup_{\zeta \in C_r(z_0)} |f(\zeta)|.$$

То, что в (4.8) можно брать любое $r < d$, вытекает из следствия 4.1. □

4.1.5. Эквивалентные описания аналитичности

Следующее утверждение собирает многое из доказанного выше и дает нам возможность различными способами выражать свойство аналитичности.

Теорема 4.5. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда следующие условия равносильны аналитичности f в точке z_0:*

1) f дифференцируема в некоторой окрестности z_0,

2) f есть сумма степенного ряда с центром в z_0 с положительным радиусом сходимости,

3) f непрерывна в некоторой окрестности z_0 и интеграл от нее по границе любого треугольника равен нулю.

Доказательство. То, что из 1) следует 2), вытекает из теоремы 4.4 Тейлора. Обратное утверждение вытекает из теоремы 4.3.

По теореме 3.3 из 1) следует 3). Впрочем, это следует и из леммы 3.3 Гурса. Обратное получаем из теоремы 3.15 Мореры. □

4.2. Теоремы единственности

4.2.1. Локальная форма единственности

Множество нулей аналитической функции имеет весьма специфическую структуру и не может быть «очень большим». Здесь нуль функции — это, конечно, точка из области ее определения, в которой она обращается в нуль.

Лемма 4.3. *Если функция f аналитична и отлична от тождественного нуля в некоторой окрестности точки z_0, то она отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

Доказательство. Пусть f отлична от тождественного нуля в окрестности точки z_0. По теореме 4.4 ее можно разложить в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

сходящийся в окрестности z_0. Здесь n — наименьший номер, для которого $c_n \neq 0$ (не все коэффициенты этого ряда равны нулю — иначе она была бы тождественно равна нулю в этой окрестности). Поэтому

$$f(z) = (z - z_0)^n \left[c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n} \right]$$

и при $z \neq z_0$ достаточно близком к z_0 квадратная скобка отлична от нуля, так как первое слагаемое в ней отлично от нуля, а предел второго (при $z \to z_0$) равен нулю. □

4.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса

В частности, лемма 4.3 показывает, что нули аналитической функции изолированы от других нулей и этот эффект в ней имеет локальный характер. Следующая теорема дает глобальное утверждение такого же сорта.

Теорема 4.6 (Вейерштрасса о единственности)**.** *Если функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ и обращается в нуль на бесконечном множестве с предельной точкой в D, то $f(z) \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Пусть $Z \subset D$ — совокупность всех внутренних точек множества нулей функции. Тогда, очевидно, Z открыто.

Покажем, что его дополнение $D \setminus Z$ в D также является открытым. В самом деле, если предположить противное, то некоторая точка $z_0 \in D \setminus Z$ не является внутренней для $D \setminus Z$. Тогда она является предельной для Z и силу непрерывности f также является ее нулем. Отсюда и из леммы 4.3 следует, что наша функция тождественно равна нулю в некоторой окрестности z_0 и должно быть $z_0 \in Z$ в то время как $z_0 \in D \setminus Z$.

Итак, $D = Z \cup (D \setminus Z)$ и оба множества справа открыты и не пересекаются. Отсюда следует, что $D \setminus Z = \varnothing$ и $D = Z$, так как противное противоречит связности области D (см. п. 8.8). □

Следствие 4.2. *Если две функции аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}$ и совпадают на бесконечном подмножестве из D с предельной точкой в D, то они совпадают в D тождественно.*

Доказательство — применим теорему 4.6 к разности этих функций. □

4.3. Последовательности аналитических функций

4.3.1. Сходимость внутри области

Ниже нам будет удобно пользоваться следующей терминологией. Пусть имеется некоторое свойство, связанное с подмножествами из $\mathbb{C}$. Будем говорить, что это **свойство выполнено внутри** E, если оно справедливо для любого компактного подмножества $K \subset E$. Примерами могут служить ограниченность внутри E, равномерная сходимость внутри E и т.д.

Основное содержание многих утверждений в этом параграфе будет состоять в том, что свойства, присущие обычно непрерывным функциям (или последовательностям непрерывных функций) на компактах, для аналитических функций выполняются внутри областей.

4.3.2. Принцип счетной компактности

Для множеств в евклидовых пространствах справедлив принцип Больцано–Вейерштрасса: каждое бесконечное ограниченное множество содержит сходящуюся подпоследовательность. Положение меняется, когда мы переходим к последовательностям функций — чтобы выделить, к примеру, равномерно сходящуюся подпоследовательность, нужно требовать гораздо больше (см., например, теорему 8.8 Арцела–Асколи из приложений).

На первый взгляд, удивительным выглядит то, что для аналитических функций ситуация больше похожа на случай конечномерных пространств. Это показывает следующая теорема, известная под названием «**принцип счетной компактности**».

Теорема 4.7 (Монтеля). *Если последовательность аналитических функций ограничена внутри области $D \subset \mathbb{C}$, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри D.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $K \subset D$ — фиксированное замкнутое ограниченное (компактное) множество. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $z_1, z_2 \in K$ со свойством $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено неравенство $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$.

Пусть

$$\alpha = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$$

(**это доказывать?**) и рассмотрим множество

$$K_\alpha = \{z \in D : \operatorname{dist}(z, K) \leqslant 2\alpha\}.$$

Оно замкнуто и ограничено, поэтому в силу основного условия теоремы

$$\sup_n \sup_{z\in K_\alpha} |f_n(z)| = M < \infty.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \alpha$. Возьмем точки $z_1, z_2 \in K$ так, чтобы $|z_1 - z_2| < \varepsilon$ и применим формулу Коши (3.7) к кругу $B(z_1, 2\alpha)$

$$f_n(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z_1)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta, \quad j = 1, 2$$

($C_\alpha(z_1) = \{\zeta : |\zeta - z_j| = 2\alpha\}$ — граница круга $B(z_1, 2\alpha)$). Отсюда

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\alpha(z_1)} f_n(\zeta) \frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha \max_{\zeta\in C_\alpha(z_1)} \left| f_n(\zeta) \frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} \right| \leqslant 2\alpha M \frac{|z_1 - z_2|}{2\alpha\cdot\alpha} = \frac{M}{\alpha} |z_1 - z_2|\,.$$

Отсюда следует, что если взять $\delta = \min\{\varepsilon, \alpha\varepsilon/M\} > 0$, то для любых $z_1, z_2 \in K$ со свойством $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено неравенство

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon.$$

Итак, свойство равностепенной непрерывности доказано.

Итак, выполнены все условия теоремы 8.8 Арцела–Асколи (равностепенная непрерывность плюс равномерная ограниченность равносильны счетной компактности), из которой следует, что $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K.

Шаг 2. Для того, чтобы доказать, что из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящаяся равномерно внутри D, применим диагональный процесс Кантора.

Для $m \in \mathbb{N}$ определим множество

$$K_m = \left\{ z \in D : \operatorname{dist}(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{m} \right\} \cap \overline{B}(0, m).$$

Для достаточно больших m эти множества непусты и, кроме того, они ограничены и замкнуты (последнее следует из того, что функция $z \mapsto \operatorname{dist}(z, \partial D)$ непрерывна). Отметим также, что

$$K_m \subset K_{m+1}, \quad D = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

По доказанному существует такая подпоследовательность индексов $\{n_k^1\}$, что $\{f_{n_k^1}\}$ сходится равномерно на K_1. Из $\{n_k^1\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{n_k^2\}$, что $\{f_{n_k^2}\}$ сходится равномерно на K_2. Продолжая процесс по индукции, на j-м шаге из последовательности $\{n_k^{j-1}\}$ выделим подпоследовательность $\{n_k^j\}$ так, чтобы последовательность $\{f_{n_k^j}\}$ сходилась равномерно на K_j и так далее. Обозначим $n_k = n_k^k$, тогда ясно что подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно на каждом из множеств K_m.

Выбранная подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно внутри D, так как $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ для любого замкнутого ограниченного множества $K \subset D$ (см. шаг 1) и $K \subset K_m$ для $m > (\operatorname{dist}(K, \partial D))^{-1}$. $\square$

4.3.3. Теорема Витали

Теорема 4.8 (Витали). *Если последовательность $\{f_n\} \subset H(D)$ ограничена внутри D, и сходится на бесконечном множестве точек с предельной точкой в D, то она равномерно сходится внутри D.*

Доказательство. Пусть в некоторой точке $z_0 \in D$ последовательность расходится. Тогда выделим две подпоследовательности сходящиеся к разным пределам в z_0. Из этих последовательностей по теореме 4.7 выделим подпоследовательности, сходящиеся равномерно внутри D к двум аналитическим функциям, совпадающим на множестве с предельной точкой в D. По следствию 4.2 эти функции должны быть тождественны. Противоречие показывает, что $\{f_n\}$ сходится всюду в D. А равномерность сходимости внутри D вытекает из теоремы 4.7 Монтеля (**это надо делать подробнее?**). $\square$

4.3.4. Теорема Вейерштрасса

Следующая теорема показывает, в частности, что предел последовательности аналитических функций, сходящейся равномерно внутри области, также является аналитической функцией. Это, в свою очередь, говорит нам о том, что понятие равномерной сходимости внутри области является естественным для класса функций, аналитических в этой области, так как не выводит из этого класса.

Теорема 4.9 (Вейерштрасс). *Пусть последовательность аналитических функций $\{f_n\}$ сходится равномерно внутри области D к функции f. Тогда*

1) функция f аналитична в D,

2) для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность k-х производных $\{f_n^{(k)}\}$ сходится к производной предельной функции $f^{(k)}$ равномерно внутри D.

Доказательство. 1) Пусть $z_0 \in D$ и $\overline{B}(z_0, r) \subset D$, тогда по формуле Коши (3.11)

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Предельный переход под знаком интеграла справа возможен в силу равномерной сходимости f_n на окружностии $\{\zeta : |\zeta - z| = r\}$. Из полученного равенства и теоремы 3.13 следует, что f аналитична в в любом круге $B(z_0, r)$, содержащемся в D. Следовательно, функция f аналитична во всей области D.

2) Пусть $z_0 \in D$ и $\overline{B}(z_0, 2r) \subset D$. Применим равенство (3.18) из теоремы 3.14 к разности $f^{(k)} - f_n^{(k)}$, окружности $\{\zeta : |\zeta - z| = r\}$ и $z \in \overline{B}(z_0, r) \subset D$

$$|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{4\pi r}{r^{k+1}} \sup_{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| = \frac{2k!}{r^k} \sup_{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости последовательности f_n на компакте $\{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r\}$.

Таким образом, последовательность производных $f_n^{(k)}$ сходится равномерно к $f^{(k)}$ в любом замкнутом круге $\overline{B}(z_0, r)$, для которого $\overline{B}(z_0, 2r) \subset D$. Но любой компакт в D можно покрыть конечным числом таких кругов. Следовательно, $f_n^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D. $\square$

Глава 5

Ряды Лорана

5.1. Разложение в ряд Лорана

5.1.1. Ряд Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-z_0)^{-k}$$

по отрицательным степеням разностей $z - z_0$. С помощью замены $z - z_0 = \frac{1}{\zeta}$ легко видеть, что это ряд сходится в области

$$|z - z_0| > \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = R$$

и по теореме 4.9 Вейерштрасса о рядах его сумма аналитична в этой области.

Мы будем рассматривать ряды по всем целым степеням разностей $z - z_0$.

Рядом Лорана будем называть ряд вида

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k\,, \tag{5.1}$$

и его сумму будем понимать как

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{-1} c_k (z-z_0)^k + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k (z-z_0)^k$$

(конечно, если эти пределы существуют).

Часть ряда Лорана (5.1) с отрицательными индексами называется его **главной частью**, а часть с неотрицательными индексами — **правильной** или аналитической.

Из рассуждения перед определением ряда Лорана и из теоремы 4.2 Коши–Адамара получаем, что областью сходимости ряда Лорана является кольцо

$$K(z_0, r, R) \equiv \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\},$$

где

$$r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}; \quad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Конечно, если $r \geqslant R$, то это кольцо пусто.

Ряды Лорана естественно рассматривать по следующей причине. Если функция аналитична в некотором круге, то она разлагается в степенной ряд (см. теорему 4.4) в этом круге. Если же в круге есть точки неаналитичности, то такое разложение уже невозможно. Выбрав кольцо $K(z_0, r, R)$, в котором наша функция аналитична, можно попытаться разложить ее в ряд Лорана.

5.1.2. Формулы для коэффициентов разложения

Следующая теорема показывает, что аналитическая в кольце функция может быть разложена в ряд Лорана, а также позволяет вычислить коэффициенты этого ряда.

Теорема 5.1 (Лорана)**.** *Пусть* $0 \leqslant r < R$ *и* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Если функция* f *аналитична в кольце* $K(z_0, r, R)$, $0 \leqslant r < R$, *то она является суммой сходящегося ряда Лорана* (5.1), *причем*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad r < \rho < R. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть $z \in K(z_0, r, R)$, выберем числа r' и R' так, чтобы

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R,$$

а $\delta > 0$ возьмем настолько малым, чтобы $\overline{B}(z, \delta) \subset K(z_0, r', R')$.

Применим интегральную формулу Коши (теорема 3.7) в области

$$D = K(z_0, r', R') \setminus \overline{B}(z, \delta)$$

к функции $\zeta \to \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.3}$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

А так как $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{R'}(z_0)$. Поэтому первый интеграл в (5.3) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Аналогично

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

А так как $\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{r'}(z_0)$. Поэтому второй интеграл в (5.3) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, d\zeta.$$

Для доказательства того, что формулы коэффициентов не зависят от ρ, воспользуемся обобщенной теоремй Коши (теорема 3.3), применяя ее к двусвязной области $K(z_0, \rho, \rho')$ к функции $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ где $r < \rho < \rho' < R$. $\square$

Ряд Лорана (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.2), будем называть **рядом Лорана функции** f в кольце $K(z_0, r, R)$.

Справедливо следующее утверждение, которое является в некотором смысле обратным к теореме 5.1.

Теорема 5.2. *Пусть* $0 \leqslant r < R$ *и* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Если ряд* (5.1) *сходится равномерно внутри кольца* $K(z_0, r, R)$, $0 \leqslant r < R$, *то он является рядом Лорана своей суммы.*

Доказательство является следствием теоремы 4.9 Вейерштрасса. Действительно, все слагаемые ряда Лорана аналитичны и ряд сходится равномерно внутри кольца $K(z_0, r, R)$, поэтому его сумма аналитична в этом кольце.

Для вычисления коэффициентов ряда (5.1) обозначим f его сумму, умножим его на $\dfrac{1}{2\pi i}(z - z_0)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и проинтегрируем почленно по окружности $|z - z_0| = \rho \in (r, R)$, получая

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int\limits_{C_\rho(z_0)} (z - z_0)^{k-n-1} dz = c_n.$$

Последнее равенство вытекает из того, что интеграл

$$\int\limits_{C_\rho(z_0)} (z-z_0)^{k-n-1}dz$$

равен $2\pi i$ при $k=n$ и нулю при $k \neq n$ (см. лемму 3.2). $\square$

5.1.3. Неравенства Коши

Из формул (5.2) нетрудно получить следующие оценки для коэффициентов ряда Лорана функции f

$$|c_k| \leqslant M_\rho \rho^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad M_\rho = \max_{z \in C_{\rho(z_0)}} |f(z)|, \tag{5.4}$$

которые называют обычно **неравенствами Коши**.

Действительно, в силу (5.2) и теоремы 3.1 получаем

$$|c_k| = \left| \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{k+1}} dl \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho.$$

5.2. Классификация изолированных особых точек

5.2.1. Правильные точки функции

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ (см. обозначение (1.8)). Тогда либо найдется число $c_0 \in \mathbb{C}$, что переопределение нашей функции в точке z_0 равенством $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитичной также и в точке z_0, либо такого числа нет. В первом случае z_0 называют **правильной точкой** для f (часто используется также термин «устранимая особая точка»). Во втором случае, говорят, что z_0 — **изолированная особая точка** для f.

Простой способ проверки того, что точка является правильной для функции, дает следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда z_0 является для нее правильной точкой тогда и только тогда, когда f ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0.*

Доказательство. Ограниченность функции в окрестности правильной точки очевидна.

Для доказательства обратного утверждения разложим нашу функцию в ряд Лорана по теореме 5.1 и воспользуемся неравенствами (5.4) для коэффициентов Лорана: если $|f(z)| \leqslant M$ в $B^\circ(z_0, r)$, то для любого $0 < \rho < r$

выполнены неравенства $|c_k| \leqslant M\rho^{-k}$. При $\rho \to +0$ получаем отсюда, что $c_k = 0$ при всех $k < 0$. То есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{5.5}$$

и определение $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитической в $B(z_0, r)$. $\square$

Следствие 5.1. *z_0 является правильной точкой функции f в том и только в том случае, когда ее разложение в ряд Лорана имеет вид* (5.5), *т.е. является ее рядом Тейлора.*

Это вытекает из доказательства теоремы 5.3.

Понятие правильной точки функции не очень содержательно и не представляет интереса для теории.

Мы изучим более подробно изолированные особые точки. Основным и естественным средством при этом будут служить разложения в ряды Лорана.

5.2.2. Полюсы

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда из теоремы 5.3 вытекает, что z_0 является изолированной особой точкой для f в том и только том случае, когда

$$\overline{\lim_{z \to z_0}} |f(z)| = +\infty.$$

Определение 5.1. *Изолированная особая точка z_0 функции f называется ее **полюсом**, если*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty. \tag{5.6}$$

Самый простой пример полюса — точка z_0 для функции $f(z) = (z - z_0)^{-n}$ где $n \in \mathbb{N}$. По существу, этот пример показывает, как устроена функция в окрестности любого полюса, т.к. следующая теорема утверждает, что эта ситуация вполне типична.

Теорема 5.4. *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее полюсом тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что разложение f в ряд Лорана имеет вид*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \textit{где} \quad c_{-n} \neq 0. \tag{5.7}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g = 1/f$, заданную в такой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, r)$ точки z_0, в которой $F(z) \neq 0$ (ее существование обеспечивается условием (5.6)). Эта функция g аналитична в $B^\circ(z_0, r)$ и z_0 является ее правильной точкой (что также обесепечивается условием (5.6)), причем $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$. В силу следствия 5.1 ее лорановское разложение имеет вид

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$$

при некотором $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \neq 0$.

Так как $a_n \neq 0$, то функция h, определенная равенством

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k,$$

аналитична в некоторой окрестности точки z_0. Разлагая h в ряд Тейлора, видим, что ряд Лорана функции $f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$ имеет вид (5.7).

Обратно, разложение Лорана вида (5.7) дает нам

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = c_{-n} \neq 0,$$

поэтому (5.6) выполнено. □

Теорема 5.4 делает естественной следующую классификацию полюсов.

Определение 5.2. *Будем говорить, что изолированная особая точка* $z_0 \in \mathbb{C}$ *функции* f *является ее* ***полюсом порядка (кратности)*** $n \in \mathbb{N}$, *если разложение Лорана для* f *имеет вид* (5.7)

Полюс кратности $n = 1$ *называется* ***простым.***

Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. Условимся называть точку z_0 **нулем порядка (кратности)** n функции f, если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Другими словами, это означает, что разложение функции f в ряд Тейлора в точке z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{где} \quad c_n \neq 0.$$

Еще одна эквивалентная форма: в некоторой окрестности нуля кратности n функция f представима в виде $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, где g аналитична в этой окрестности и $g(z_0) \neq 0$.

Теорема 5.5. *Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс порядка n для функции f тогда и только тогда, когда z_0 — нуль порядка n для функции $1/f$.*

Доказательство. Пусть z_0 — полюс порядка n для f. Тогда функция $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, аналитична и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0, т.к. $g(z_0) = c_{-n} \neq 0$. Поэтому функция $1/g$ аналитична в этой окрестности и разлагается в ряд Тейлора

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

и z_0 — нуль порядка n для $1/f$. Каждый шаг в этом рассуждении обратим, поэтому обратное утверждение также верно. □

5.2.3. Существенно особые точки

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ и z_0 не является ни правильной точкой, ни полюсом. Такие изолированные особенности называются существенно особыми точками для f.

Определение 5.3. *Изолированная особая точка z_0 функции f называется* ***существенно особой точкой*** *для f, если в этой точке она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.*

Как и в случае полюса (см. теорему 5.4) судить о том, является ли изолированная особенность существенно особой точкой, можно по ряду Лорана.

Теорема 5.6. *Изолированная особая точка функции f является существенно особой тогда и только тогда, главная часть ряда Лорана в этой точке содержит бесконечно много ненулевых слагаемых .*

Доказательство следует из того, что правильная точка, полюс и существенно особая точка являются взаимоисключающими случаями изолированной особенности, а также из следствия 5.1 и теоремы 5.4. □

Таким образом, вид неаналитической части ряда Лорана полностью распознает тип изолированной особенности в точке z_0:

— если она отсутствует, то z_0 — правильная точка,

— если в ней лишь конечное число ненулевых слагаемых, то z_0 — полюс соответствуюшщего порядка,

— если ненулевых слагаемых бесконечно много, то z_0 — существенная особенность.

Следующее утверждение аналогично теореме 5.5 и дает способ проверки на существенную особенность для f с помощью функции $1/f$.

Теорема 5.7. *Пусть функция f аналитична и отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

Тогда если z_0 является существенно особой точкой для f, то z_0 — существенно особая точка для $1/f$.

Доказательство. Функция $g = 1/f$ аналитична в той же проколотой окрестности точки z_0, которая является для нее изолированной особенностью.

Если предположить, что z_0 — полюс для g, то по теореме 5.5 z_0 является нулем для f. Поэтому f аналитична в точке z_0, что невозможно по условию.

Следовательно, z_0 является либо правильной, либо существенно особой для для g. Если z_0 — правильная точка для g, то либо $g(z_0) = 0$ и f имеет в z_0 полюс (по теореме 5.5), либо $g(z_0) \neq 0$ и $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0, тогда функция $1/g = f$ аналитична в точке z_0. Это опять невозможно. Остается единственное: z_0 — существенно особая точка для g. $\square$

5.2.4. Случай бесконечно удаленной точки

Понятие изолированной особой точки можно распространить и на случай $z_0 = \infty$ следующим образом.

Пусть функция аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. в области вида $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ с достаточно большим R.

Определение 5.4. *Будем говорить, что бесконечно удаленная точка является правильной, полюсом порядка n или существенно собой точкой для функции f, если* 0 *является таковой для функции $g : z \mapsto f(1/z)$.*

Разложим функцию $g : z \mapsto f(1/z)$ в ряд Лорана в точке 0

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^{-k}.$$

По количеству ненулевых слагаемых в неаналитической части этого разложения мы можем проверить тип особенности функции g.

Выполняя в этом разложении замену $\zeta = 1/z$ и учитывая связь между f и g, мы получим разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k.$$

для f в окрестности бесконечно удаленной точки. Для того, чтобы иметь унифицированную запись разложения в ряд Лорана в точках $z_0 \in \mathbb{C}$ (см. (5.1)) и $z_0 = \infty$ заменим в поледнем ряде a_k на c_{-k}, приходя к ряду

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k. \tag{5.8}$$

Это разложение мы будем называть **рядом Лорана функци**и f **на бесконечности**. Однако теперь главной частью этого разложения является первая, а аналитической — вторая.

С помощью ряда (5.8) него мы будем судить о типе особенности функции f в бесконечно удаленной точке по числу ненулевых коэффициентов с положительными индексами в разложении (5.8):

— если все они отсутствуют, то ∞ — правильная точка для f,

— если их конечное число, то ∞ — полюс соответствующего порядка,

— если их бесконечно много, то ∞ является существенной особенностью функции f.

5.2.5. Теорема Сохоцкого

Асимптотическое поведение вблизи правильной точки функции и вблизи полюса уже выяснено. Именно,

— если z_0 — правильная точка для f, то существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$,

— если z_0 — полюс для f, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$,

— если z_0 — полюс порядка n для f, то существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^n$.

В окрестности существенной особой точки поведение функции значительно сложнее, что показывает следующее утверждение.

Теорема 5.8 (Сохоцкого)**.** *Если точка z_0 — существенно особая для f, то для любого числа $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $z_k \to z$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = w$.*

Доказательство. Если $w = \infty$, то все доказанно, так как f неограничена в любой окрестности z_0 (см. начало п.5.2.2).

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Если z_0 — предельная точка множества нулей функци $f(z)-w$, то все доказано. Если же нет, то $f(z)-w \neq 0$ в некоторой окрестности z_0 и по теореме 5.7 для функции $z \mapsto (f(z)-w)^{-1}$ точка z_0 также является существенно особой. По доказанному найдется последовательность $z_k \to z_0$, для которой $(f(z_k)-w)^{-1} \to \infty$, то есть $f(z_k) \to w$. $\square$

На самом деле справедливо следующее более глубокое утверждение, которое мы приводим здесь без доказательства.

Теорема 5.9 (Пикара). *Если z_0 — существенно особая точка функции f, то в любой окрестности точки z_0 f принимает каждое значение $w \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, одного, бесконечно много раз.*

Значение w, которое в теореме Пикара функция не принимает, называют обычно исключительным. Рассмотрим в связи с этим две функции

$$\exp\frac{1}{z}, \quad \sin\frac{1}{z}$$

и точку $z_0 = 0$, которая является существенно особой для каждой из них. Для первой функции исключительное значение $w_0 = 0$, а для второй исключительного значения нет.

5.2.6. Целые и мероморфные функции

Аналитическая функция, не имеющая особых точек в расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, является тождественно постоянной. Действительно, ее разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{5.9}$$

и сходится при всех $z \in \mathbb{C}$. Этот же ряд является разложением Лорана f в бесконечно удаленной точке. Поскольку ∞ не является особой, то (см. п.5.2.4) $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Функция, аналитическая всюду в $\mathbb{C}$ называется **целой**. Такие функции имеют единственную особенность — бесконечно удаленную точку.

Если $n \in \mathbb{N}$ и в разложении (5.9) все коэффициенты c_k с номерами $k > n$ равны нулю, а $c_n \neq 0$, то ∞ является полюсом порядка n. Такая функция является многочленом.

Если же в (5.9) бесконечно много коэффициентов c_k отличны от нуля, то ∞ является существуенно особой для f. Такие функции называются **целыми трансцендентными**. Примерами могут служить $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$.

Функция называется **мероморфной** в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если она не имеет в этой области других особых точек, кроме изолированных полюсов. Простейший пример мероморфной функции — это $(z - z_0)^{-n}$, у которой точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является полюсом порядка n.

Теорема 5.10. *Любая функция, мероморфная в расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, является рациональной, т.е. имеет вид*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P и Q — многочлены.

Доказательство. Наша функция имеет лишь конечное число полюсов, так как каждый из них является изолированным. Пусть z_k — конечный полюс порядка n_k, $k = 1, \ldots, p$, для f. Возможно еще ∞ является полюсом порядка n. Вычтем из f главные части рядов Лорана, соответствующих этим особенностям,

$$f(z) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{n_k} \frac{c_{mk}}{(z - z_k)^{n_k}} - \sum_{m=1}^{n} c_k z^k.$$

Для полученной разности все точки z_k, $k = 1, \ldots, p$, и ∞ являются устранимыми особенностями. Других особенностей она не имеет. По теореме 3.11 эта разность есть тождественная постоянная. □

Глава 6

Теория вычетов

6.1. Вычеты и основная теорема о вычетах

6.1.1. Вычеты

Пусть функция f аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, \varepsilon)$ изолированной особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

Определение 6.1. ***Вычетом функции*** f *в изолированной особой точке* $z_0 \in \mathbb{C}$ *называется число*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} f(z)\, dz, \quad 0 < r < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Используя теорему 3.4, нетрудно показать, что значение интеграла в (6.1) не зависит от $r \in (0, \varepsilon)$.

Действительно, если $0 < r' < r < \varepsilon$, то, применяя к двусвязной области $B(z_0, r) \setminus \overline{B}(z_0, r')$ теорему 3.4, получаем равенство

$$\oint\limits_{(C_r(z_0))^+} f(z)\, dz + \oint\limits_{(C_{r'}(z_0))^-} f(z)\, dz = 0.$$

или

$$\oint\limits_{(C_r(z_0))^+} f(z)\, dz = \oint\limits_{(C_{r'}(z_0))^+} f(z)\, dz.$$

В частности, это рассуждение показывает, что для вычисления вычета в (6.1) можно брать достаточно малое $r > 0$.

6.1.2. Формулы для вычисления вычетов

Поскольку представлением аналитической функции в изолированной особой точке является ряд Лорана, то естественно использовать этот ряд для вычисления вычета. Равенство (5.2) в теореме 5.1 при $k = 0$ показывает, это действительно возможно.

Теорема 6.1. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{z_0} f$ равен коэффициенту c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении Лорана для f в этой точке.*

Рассмотрим несколько примеров на вычисление вычетов.

Пример 6.1. Рассмотрим функция

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}, \quad z \neq 0.$$

Это разложение сходится в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и потому является ее рядом Лорана для точки $z_0 = 0$. В силу теоремы 6.1 $\operatorname*{Res}_0 \exp(1/z) = 1$.

Пример 6.2. Если особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является правильной, то вычет в этой точке равен нулю, так как в этом случае по следствию 5.1 ряд Лорана вырождается в ряд Тейлора — все коэффициенты Лорана с отрицательными индексами равны нулю.

В связи с последним примером отметим, что из того, что вычет в особой точке равен нулю, не следует. что эта особенность является устранимой. Другие лорановские коэффициенты с отрицательными индексами могут быть равны нулю. Пример $f(z) = z^{-2}$ показывает это.

Пример 6.3. Если z_0 — простой полюс для f (кратности 1), то

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

В самом деле, ряд Лорана в таком случае имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{или} \quad f(z)(z - z_0) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$ получим требуемое.

Следующая теорема дает способ вычисления вычета в полюсе любого порядка и обобщает результат последнего примера.

Теорема 6.2. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс кратности n, то*

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right].$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5.4 — умножим обе части разложения Лорана в полюсе 5.7 на $(z-z_0)^n$, получая равенство

$$(z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}.$$

Продифференцируем это равенство $(n-1)$-раз:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = (n-1)!c_{-1} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} c_k A_k (z-z_0)^{k+n},$$

где $A_k = (n+k)(n+k-1)\dots(k+1)$. Осталось перейти к пределу при $z \to z_0$.

6.1.3. Теорема Коши о вычетах

Своим появлением вычеты обязаны Коши. Одним из основных назначений вычетов является возможность вычислять интегралы по кривым. Как реализуется эта возможность — показывает следующая важная теорема.

Теорема 6.3 (Коши, о вычетах)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества $S = \{z_1, \dots, z_n\} \subset D$ изолированных особых точек, и непрерывна в $\overline{D} \setminus S$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f. \tag{6.2}$$

Доказательство. Выберем $r > 0$ так, чтобы круги $\overline{B}(z_k, r) \subset D$, $k = 1, \dots, n$, попарно не пересекались и содержались в D. Применим к многосвязной области

$$D_r = D \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B}(z_k, r)$$

теорему Коши 3.4, получая равенство

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D_r} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_k)} f(z)\,dz.$$

В силу теоремы 6.1 отсюда следует (6.2). □

6.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть функция f аналитична во внешности круга $\overline{B}(0,r)$ достаточно большого радиуса и $z_0=\infty$ является изолированной особой точкой для f.

Определение 6.2. ***Вычетом функции*** f *в изолированной особой точке* ∞ *называется число*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_r(0))^-} f(z)\,dz, \quad r > R. \tag{6.3}$$

Как и в случае конечной изолированной особой точки, интеграл в (6.3) не зависит от r (его надо брать достаточно большим).

Теорема 6.4. *Если* ∞ *— изолированная особая точка функции* f*, то вычет* $\operatorname*{Res}_{\infty} f$ *равен* $-c_{-1}$ *— коэффициенту при* z^{-1} *в разложении Лорана* (5.8) *для* f *в бесконечно удаленной точке, взятому с противоположным знаком.*

Доказательство получается интегрированием ряда (5.8) по отрицательно ориентированной окружности $C_R(0)$ и применением леммы 3.2. □

Пример 6.4. Если ∞ является правильной особой точкой (см. п.5.2.4), то ряд Лорана (5.8) вырождается в ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k,$$

поэтому теорема 6.2 дает нам $\operatorname*{Res}_{\infty} f = -c_{-1}$.

Обратим внимание на отличие результата последнего примера 6.4 от случая конечной особенности (ср. с примером 6.2).

Теорема 6.5. *Если* ∞ *— полюс кратности* n*, то*

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{n+2} f^{(n+1)}(z) \right].$$

Для бесконечно удаленной точки используем запишем разложение Лорана (5.8)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k z^k,$$

которое продифференцируем $n+1$ раз, а затем умножим на z^{n+2}

$$z^{n+2} f^{(n+1)}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)! c_{-1} + \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k A_k z^{k+1},$$

где $A_k = k(k-1)\ldots(k-n)$. Отсюда при $z\to\infty$ получаем требуемое. □

6.1.5. Теорема о полной сумме вычетов

Теорема 6.6. *Пусть функция f аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ изолированных особых точек. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f + \operatorname*{Res}_{\infty} f = 0.$$

Доказательство. Для достаточно большого $r > 0$ все точки из S содержатся в круге $B(0, r)$. Поэтому в силу теоремы 6.3 справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f = \oint\limits_{C_r^+(0)} f(z)\, dz,$$

правая часть которого равна $-\operatorname*{Res}_{\infty} f$ (см. определение 6.1). □

6.2. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения

6.2.1. Логарифмический вычет

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции f, которая аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, \varepsilon)$ и отлична там от нуля.

Определение 6.3. ***Логарифмическим вычетом*** *функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется вычет ее логарифмической производной f'/f в этой точке.*

Другими словами, логарифмический вычет — это

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Рассмотрим примеры на вычисление логарифмического вычета.

Пример 6.5. Пусть функция аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, которая является для нее нулем кратности n. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0} (f'/f) = n. \tag{6.4}$$

Действительно, функция f представима в виде $f(z) = (z - z_0)^{n_k} g(z)$, где g аналитична в окрестности z_0 и $g(z) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда

$$f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z),$$

откуда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Так как второе слагаемое справа аналитично в некоторой окрестности точки z_0, то равенство (6.4) вытекает из случая $n = -1$ леммы 3.2.

Пример 6.6. Пусть функция аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, которая является для нее полюсом кратности p. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f'/f) = -p \tag{6.5}$$

Это можно доказать повторяя рассуждение из примера 6.5. Однако, можно просто сослаться на этот пример, так как если $g = 1/f$, $f'/f = -g'/g$ и z_0 является нулем кратности p для g.

Следующая теорема является основной в этом параграфе. В ней инпользуется следующие обозначения:

$N(f, D)$ — число нулей функции f в области $D \subset \mathbb{C}$,

$P(f, D)$ — число полюсов функции f в области $D \subset \mathbb{C}$

с учетом их кратностей.

Теорема 6.7 (о логарифмическом вычете)**.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества полюсов S, непрерывна вместе со своей производной в $\overline{D} \setminus S$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N(f, D) - P(f, D), \tag{6.6}$$

где Z и P — числа нулей и полюсов f в D с учетом их кратности.

Доказательство. Пусть f имеет нули кратности n_k в точках $z_k \in D$, $k = 1, \dots, N$, и полюсы кратности m_k в точках $\zeta_k \in D$, $k = 1, \dots, P$. Тогда функция f'/f аналитична в D, кроме указанных нулей и полюсов функции f. Применив теорему о вычетах 6.3, получаем равенство

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_k} \frac{f'}{f} + \sum_{k=1}^{P} \operatorname*{Res}_{\zeta_k} \frac{f'}{f}. \tag{6.7}$$

Каждое слагаемое справа вычисляется по формуле (6.4) для нулей и по формуле (6.4) для полюсов. □

6.2.2. Принцип аргумента

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — путь в $\mathbb{C}$ (см. п.1.2.4) и на его следе $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не обращающаяся в нуль.

Тогда найдется такая непрерывная функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, что

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))|e^{i\varphi(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Эта функция определяется не единственным образом, однако, любые две такие функции отличаются на слагаемое, кратное 2π. Поэтому разность $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ не зависит от выбора функции φ. Эта разность называется **приращением аргумента** функции вдоль пути γ и обозначается $\Delta_\gamma \arg f$.

Если задана ориентированная жорданова кривая или контур $\subset \mathbb{C}$, то мы можем определить **приращение аргумента** функции f вдоль этой кривой или контура, как приращение аргумента вдоль его параметризации, сохраняющей ориентацию. При этом будет использоваться обозначение $\Delta_\Gamma \arg f$. Легко убедиться в том, что такое определение не зависит от выбора параметризации.

Теорема 6.8 (принцип аргумента). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная односвязная область с кусочно-гладкой границей, функция f удовлетворяет условиям теоремы 6.7 о логарифмическом вычете и имеет конечное число полюсов в D. Тогда*

$$N(f, D) - P(f, D) = \Delta_{\partial D} \arg f. \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть $\gamma : [0, 2\pi) \to \partial D$ — положительная параметризация (см. стр.15) границы ∂D. Тогда в силу равенства (3.6)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Ln} f \circ \gamma)'\, dt = \operatorname{Ln} f(\gamma(2\pi)) - \operatorname{Ln} f(\gamma(0)).$$

$$= [\ln |f(\gamma(2\pi))| - \ln |f(\gamma(0))|] + i[\operatorname{Arg} f(\gamma(2\pi)) - \operatorname{Arg} f(\gamma(0))]$$

Действительная часть выражения справа равна нулю, а мнимая есть $\Delta_{\partial D} \arg f$. Равенство (6.8) вытекает теперь из (6.6). $\square$

6.2.3. Теорема Руше

Теорема 6.9 (Руше). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная односвязная область, функции f и g аналитичны в D и непрерывны в $\overline{D}$ вместе со своими производными, причем*

$$|f(\zeta)| > |g(\zeta)| \quad \textit{при} \quad \zeta \in \partial D.$$

Тогда f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей в D.

Доказательство. Для $\alpha \in [0,1]$ рассмотрим семейство функций

$$h_\alpha(z) = f(z) + \alpha g(z).$$

Ясно, что $h_\alpha(z) \neq 0$ при всех $\alpha \in [0,1]$ и $z \in \partial D$, так как

$$|f(z) + \alpha g(z)| \geqslant |f(z)| - \alpha |g(z)| > (1-\alpha)|f(z)|$$

и $f(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$.

Применим к h_α теорему о логарифмическом вычете 6.7, получая

$$\oint_{\partial D} \frac{f'(z) + \alpha g'(z)}{f(z) + \alpha g(z)}\, dz = N(\alpha), \tag{6.9}$$

где $N(\alpha)$ — количество нулей h_α в D.

Левая часть (6.9) непрерывна по $\alpha \in [0,1]$ (так как подынтегральная функция непрерывно зависит от α). Функция $N(\alpha)$ также непрерывна по α. Но $N(\alpha)$ принимает только целые значения, поэтому она постоянна и $N(0) = N(1)$. Значит число нулей в D для $f+g$ и g одинаково. □

Смысл теоремы Руше в том, что можно вычислять количество нулей функции, упрощая выражение для нее отбрасывнием ее «небольших частей».

Для иллюстрации теоремы Руше докажем с ее помощью основную теорему алгебры.

Теорема 6.10. *Каждый алгебраический многочлен*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

степени n имеет ровно n комплексных нулей (с учетом их кратности).

Доказательство. Запишем наш полином в виде $P_n = f + g$, где

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Т.к. P_n имеет полюс порядка n в бесконечно удаленной точке, то все его корни (если таковые имеются) лежат в круге $B(0,R)$ достаточно большого радиуса R. Кроме того, $f(z)/g(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ и можно также считать, что $|f(z)| > |g(z)|$ при $|z| = R$. По теореме 6.9 Руше P_n имеет в круге $B(0,R)$ столько же нулей, сколько и $a_0 z^n$ — ровно n. □

6.2.4. Принцип сохранения области

Напомним, что область $D \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество (см. определение 8.8).

Теорема 6.11 (принцип сохранения области)**.** *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и отлична от тождественной постоянной. Тогда образ $f(D)$ является областью.*

Доказательство. Связность образа $f(D)$ является общетопологическим фактом (аналитическая функция непрерывна). Существенно комплексным фактом является открытость образа.

Докажем, что $f(D)$ — открытое множество. Пусть $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. Докажем, что некоторая окрестность точки w_0 также содержится в $f(D)$.

Сначала считаем $z_0 \neq \infty$ и $w_0 \neq \infty$. Тогда найдется круг $\overline{B}(z_0, \rho) \subset D$, в котором $f(z) \neq w_0$. Это следует из теоремы 4.6.

Обозначим

$$r = \min\{|f(z) - w_0| : z \in C_\rho(z_0)\}\,.$$

Тогда $r > 0$, так как непрерывная функция $z \mapsto |f(z) - w_0|$ принимает свое минимальное значение на компакте $C_\rho(z_0)$.

Покажем, что $B(w_0, r) \subset f(D)$. Если $w \in B(w_0, r)$ — произвольная точка, то

$$|w - w_0| < r < |f(z) - w_0|\,.$$

По теореме 6.9 Руше функция

$$f(z) - w = [f(z) - w_0] - [w - w_0]$$

имеет в круге $B(z_0, \rho)$ столько нулей сколько и $f(z) - w_0$ (а она их имеет). Итак, $f(z) = w$ в некоторой точке $z \in B(z_0, \rho)$, т.е. $w \in f(D)$. А так как w — произвольная точка $B(w_0, r)$, то $B(w_0, r) \subset f(D)$ и $f(D)$ открыто.

Если $z_0 \neq \infty$, $w = \infty$, то функция f имеет полюс в точке z_0 и $g = 1/f$ имеет в z_0 нуль. По доказанному $g(z_0) = 0$ — внутренняя точка ее области значений. Если $z_0 = \infty$, $w = \infty$, то точно так же рассуждаем с функцией $g(z) = 1/f(1/z)$. $\square$

Глава 7

Дополнительные главы комплексного анализа

7.1. Аналитическое продолжение

7.1.1. Элемент аналитической функции и его продолжение

Будем говорить, что функция f_0, аналитическая в области $D_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, допускает **аналитическое продолжение** в область $D_1 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, имеющую непустое связное пересечение с D_0, если существует функция f_1, аналитическая в области D_1, для которой

$$f_0(z) = f_1(z) \quad \text{при} \quad z \in D_0 \cap D_1.$$

Простейшим примером служит аналитическое продолжение аналитической функции в устранимую особую точку с сохранением свойства непрерывности. Это продолжение задается рядом Тейлора с центром в этой точке.

Пример 7.1. Рассмотрим гамма-функцию Эйлера, задаваемую несобственным интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{7.1}$$

Аналогично тому, как это делалось в курсе математического анализа, нетрудно установить, что интеграл (7.1) сходится при $\operatorname{Re} z > 0$.

Построим аналитическое продолжение гамма-функции с помощью функционального соотношения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, которое при $\operatorname{Re} z > 0$ получается интегрированием по частям.

Используем это соотношение для определения гамма-функции в более широкой области, чем исходная. Такой подход кажется естественным, так как в этом соотношении заложено ее важнейшее свойство — давать определение факториала для нецелых показателей (на самом деле, роль гамма-функции Эйлера в математике значительно шире).

Именно, положим

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z > -1,\ z \neq 0.$$

Повторяя эту процедуру, мы можем продолжить гамма-функцию в левую полуплоскость, за исключением точек $z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, в которых она будет иметь изолированные полюсы.

Пример 7.2. Рассмотрим задачу аналитического продолжения логарифма, начиная с его разложения Тейлора в круге $D_0 = B(1,1)$

$$f_0(z) = \ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k \quad z \in B(1,1).$$

Из теоремы 4.9 вытекает, что при $z \in B(1,1)$

$$f_0'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(z-1)^{n-1} = \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{z}.$$

Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница (теорема 3.6)

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in B(1,1), \tag{7.2}$$

где интегрирование ведется, например, по отрезку $[1,z]$.

Это равенство может служит для аналитического продложения логирифмической функции. Именно, положим

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

где интеграл снова берется по отрезку $[1,z]$.

Вместо разреза по отрицательной полуоси $(-\infty,0]$ можно было бы использовать другой, например, по любому лучу, исходящему из начала координат. Тогда мы получим аналитическое продолжение логарифма в другую область. Объединение таких областей даст проколотую плоскость $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Отметим еще, что интеграл в (7.2) имеет смысл для любого пути, соединяющего 1 и $z \in \mathbb{C}$ и не проходящего через точку 0. Однако, его значение уже будет зависеть от пути (сколько оборотов будет сделано вокруг начала координат).

Дадим теперь более общее понятие аналитического продолжения. В отличие от него аналитическое продолжение, введенное в начале параграфа будем называть **непосредственным**.

Определение 7.1. *Пара $\{D, f\}$, где $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — выпуклая область, $f \in H(D)$ называется* ***элементом аналитической функции****. Два элемента $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ называются равными, если $D_0 = D_1$ и $f_0(z) \equiv f_1(z)$ в D_0.*

Определение 7.2. *Элемент $\{D_1, f_1\}$ называется (непосредственным)* ***аналитическим продолжением элемента*** *$\{D_0, f_0\}$, если*

1) $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$,

2) $f_0(z) = f_1(z)$, $z \in D_0 \cap D_1$.

Если в этом случае $D_0 \subset D_1$, то будем говорить также, что элемент $\{D_0, f_0\}$ **подчинен** элементу $\{D_1, f_1\}$.

Определение 7.3. *Конечный набор элементов $\{D_k, f_k\}_{k=0}^{n}$ называется* ***цепью****, если каждый элемент $\{D_k, f_k\}$ является аналитическим продолжением предыдущего элемента $\{D_{k-1}, f_{k-1}\}$.*

В этом случае также говорят, что $\{D_n, f_n\}$ является аналитическим продолжением $\{D_0, f_0\}$ по соединяющей цепи.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ всех элементов $\{D, f\}$ и введем в нем отношение эквивалентности: два элемента эквивалентны, если один из них является аналитическим продолжением другого по некоторой цепи (проверьте самостоятельно, что это — действительно отношение эквивалентности).

Определение 7.4. *Каждый фактор-класс $\mathcal{E}$ по указанному отношению эквивалентности называются* ***полной аналитической функцией****.*

Областью существования полной аналитической функции называется объединение областей всех элементов, входящих в этот класс. Будем обозначать ее $\operatorname{Dom} F$. Область существования полной аналитической функции является областью (докажите это самостоятельно).

Каждая точка $z \in \operatorname{Dom} F$ может входить в различные области элементов класса и соответствующие функции в этой точке не обязаны иметь одинаковые значения, то есть полная аналитическая функция, вообще говоря, многозначна.

Желая избежать многозначности, Риман предложил некоторое обобщение понятия области определения полной аналитической функции — так называемая риманова поверхность.

Существо дела состоит в том, что точку $z \in \operatorname{Dom} F$, принадлежащую областям двух элементов $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ полной аналитической функции, мы рассматриваем как одну и ту же, тогда и только тогда, когда эти элементы являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга.

Может случиться, что пересечение областей D_0 и D_1 непусто, однако элементы $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ являются аналитическими продолжениями друг друга по некоторой цепи, содержащей некоторые промежуточные элементы. В таком случае мы не отождествляем точки из $D_0 \cap D_1$.

Чтобы придать наглядность этому процессу предположим, что для каждого D заготовлена «модель D» (кусок плоскости). Процесс объединения областей представляем себе как склеивание (отождествление) тех частей, точки которых отождествляются. В результате этого процесса «склеивания» мы получаем многослойную (вообще говоря) поверхность, расположенную над областью $\operatorname{Dom} F$.

Элементы аналитической функции вида

$$\left(B(z_0, r),\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right).$$

называются **каноническими**.

Нетрудно убедиться (сделайте это самостоятельно), что любой элемент $\{D, f\}$ аналитической функции является результатом аналитического продолжения по цепи любого канонического элемента, подчиненного ему. Поэтому при построении полной аналитической функции в качестве исходного класса можно брать не все множество элементов данного класса, а лишь его подмножество, состоящее из канонических элементов.

7.1.2. Принцип симметрии Римана-Шварца

Дадим достаточные условия аналитической продолжаемости. Пусть $D_k \subset \mathbb{C}$ — две области, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, имеющие общий участок границы — спрямляемую жорданову кривую Γ, Γ_0 — та же кривая, но без концов. Положим $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_0$

Лемма 7.1. *Пусть функции f_k аналитичны в D_k и непрерывны в $D_k \cup \Gamma_0$ соответственно ($k = 1, 2$), причем $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \Gamma_0$. Тогда функция*

$$\varphi(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \Gamma_0, \\ \\ f_2(z), & z \in D_2, \end{cases}$$

аналитична в D.

Доказательство. Достаточно доказать аналитичность в точках $z_0 \in \Gamma_0$. Пусть $B(z_0, \delta) \subset D$, тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z_0)} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad z \in B(z_0, \delta)$$

аналитична в круге $B(z_0,\delta)$.

Обозначим $\widetilde{D}_k = D_k \cap B(z_0,\delta)$, $k = 1, 2$, и в этих областях применим интегральную формулу Коши (3.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\widetilde{D}_k}\frac{f_k(\xi)d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f_k(z), & z\in\widetilde{D}_k,\\ 0, & z\notin\widetilde{D}_k.\end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\delta(z_0)}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f_1(z), & z\in\widetilde{D}_1,\\ f_2(z), & z\in\widetilde{D}_2.\end{cases}$$

Поэтому $\Phi\equiv\varphi$ в $\widetilde{D}_1\cup\widetilde{D}_2$, а на Γ_0 это следует из непрерывности. □

Теорема 7.1. *(принцип симметрии Римана–Шварца). Пусть граница области $D\subset\mathbb{C}$ содержит открытую дугу γ_0 $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности $\gamma\subset\partial D$, функция f аналитична в D, непрерывна в $D\cup\gamma_0$ и образ $\Gamma_0 = f(\gamma_0)$ является открытой дугой некоторой $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности.*

Тогда функию f можно аналитически продолжить из области D через дугу γ_0 в область D^*, симметричную D относительно γ_0 по правилу

$$f(z) = f^*(z^*),\quad z\in D^*.$$

В формулировке теоремы открытая дуга — дуга без концов, а $*$ означает отображения симметрии относительно γ_0 и Γ_0 соответственно.

Доказательство. Применяя подходящие дробно-линейные отображения (см. следствие 2.1) сводим доказательство к случаю, когда Γ_0 и γ_0 — интервалы на вещественной прямой. В этом случае $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

Если $z_0\in D$, то существует такой круг $B(z_0,r)$, $r>0$, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\quad z\in B(z_0,r).$$

Следовательно, при $z\in B(\overline{z}_0,r)$ справедливо равенство

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{c}_n(z-\overline{z}_0)^n.$$

В силу теоремы 4.5 продолженная функция аналитична в точках D^*.

В силу непрерывности функции f в $D\cup\gamma_0$ и того, что f на γ_0 имеет действительные значения при $z\to x_0\in\gamma_0$ (в D^*)

$$\lim_{z\to x_0} f^*(z) = \lim_{\overline{z}\to x_0}\overline{f(\overline{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0).$$

Итак, выполнены условия леммы 7.1, применение которой доказывает аналитичность продолженной функции и в точках γ_0. $\square$

Важный и интересный пример применения принципа симметрии мы рассмотрим немного позже в п. 7.4.2, когда изучим новую функцию — эллиптический синус.

7.2. Однолистные функции

7.2.1. Теорема о числе прообразов

Пусть функция f аналитична в точке z_0, $w_0 = f(z_0)$ и $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что z_0 является **n-кратной w_0-точкой функции** f, если $f^{(k)}(z_0) = 0$ при $k = 1, \ldots, n-1$ и $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Теорема 7.2. *Если z_0 является n-кратной $f(z_0)$-точкой функции f, $n \in \mathbb{N}$, то существуют такие круги $B(z_0, r)$, $r > 0$, и $B(f(z_0), \rho)$, $\rho > 0$, что каждая точка $w \in B(f(z_0), \rho)$ имеет ровно n прообразов в $B(z_0, r)$ (различных, если $w \neq f(z_0)$).*

Доказательство. По условию функция f имеет нуль кратности n в точке z_0. Существует замкнутый круг $\overline{B}(z_0, r)$, в котором функции $f - f(z_0)$ и f' нет других нулей, кроме точки z_0. Тогда

$$\rho = \inf\{|f(z) - f(z_0)| : z \in C_r(z_0)\} > 0.$$

Возмем $w \in B(f(z_0), \rho)$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = f(z) - w = [f(z) - f(z_0)] + [f(z_0) - w].$$

Т.к. $|f(z) - f(z_0)| \geqslant \rho > |f(z_0) - w|$, то по теореме 6.9 Руше функция $g = f - w$ имеет в круге $B(z_0, r)$ столько же нулей (с учетом их кратности), сколько и $f - f(z_0)$, т.е. n. Все эти нули простые, т.к. производная $g' = f'$ не имеет нулей, отличных от z_0. $\square$

7.2.2. Критерий локальной однолистности

Напомним (см. п.2.1.1), что функция f называется **однолистной** в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если она инъективна, т.е.

$$f(z_1) \neq f(z_2) \quad \text{для любых точек } z_1 \neq z_2 \text{ из } D.$$

Следующая лемма дает необходимое условие локальной однолистности.

Лемма 7.2. *Если функция f аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то f однолистна в некоторой окрестности z_0 и обратная функция f^{-1} однолистна и аналитична в некоторой окрестности точки $f(z_0)$.*

Доказательство однолистности является прямым следствием теоремы 8.9 об обратной функции из курса математического анализа. Пусть f однолистна в круге $B(z_0, r)$. Отметим, что по теореме 6.11 образ $f(B(z_0, r))$ является открытым множеством.

Для существования производной у обратной функции в любой точке $w \in f(B(z_0, r))$ возьмем $w_1 \in f(B(z_0, r))$, $w \neq w_1$. Тогда найдутся такие $z, z_1 \in B(z_0, r)$, что $w = f(z)$, $w_1 = f(z_1)$, при этом $z_1 \neq z$. Кроме того, если $w_1 \to w$, то $z_1 \to z$ (что легко вывести из леммы Больцано–Вейрштрасса — сделайте это самостоятельно). Поэтому

$$\lim_{w_1 \to w} \frac{f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w)}{w_1 - w} = \lim_{z_1 \to z} \frac{1}{\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}} = \frac{1}{f'(z)}. \quad \square$$

Пример функции $f(z) = e^z$ показывает, что это утверждение не носит глобального характера. Ее производная всюду в $\mathbb{C}$ отлична от нуля, однако e^z не является глобально однолистной (см. п.2.4.1).

Для глобальной однолистности условие отсутствия нулей у производной является необходимым.

Теорема 7.3. *Если функция f аналитична и однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$, то $f'(z) \neq 0$ в D.*

Доказательство. Предположим, что $f'(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in D$. Тогда для некоторого $n \geqslant 2$

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{причем} \quad c_n \neq 0.$$

В силу теоремы 4.6 о единственности существует такое $r_1 > 0$, что

$$f'(z) \neq 0, \quad z \in \overline{B}^{\circ}(z_0, r_1).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n}$$

и отметим, что второй множитель справа отличен от нуля в некотором круге $\overline{B}(z_0, r_2)$. Это означает, что z_0 является корнем кратности n для функции g. Положим

$$r = \frac{1}{2} \min\{r_1, r_2\} > 0$$

и

$$2\alpha = \inf\{|g(z)| : z \in C_r(z_0)\} > 0.$$

Тогда $|g(z)| \geqslant 2\alpha$ при $z \in C_r(z_0)$ и к функциям g и $h(z) \equiv \alpha$ можно применить теорему 6.9 Руше, согласно которой g и $g + h$ имеют одинаковое число нулей в $B(z_0, r)$. Функция g имеет там n-кратный корень z_0, а все корни $g + h = g + \alpha$ просты (ее производная отлична от нуля при $z \neq z_0$). Следовательно, и $f(z) = f(z_0) + \alpha$ в $n \geqslant 2$ точках, что невозможно в силу однолистности f. $\square$

Будем говорить, что функция f **однолистна в точке** $z_0 \in \mathbb{C}$, если она однолистна в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 7.4. *Функция f, аналитическая в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, будет однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 7.3. Достаточность является следствием теоремы 7.2, согласно которой каждое значение в точках из этой окрестности принимается ровно один раз, т.к. z_0 является 1-кратной $f(z_0)$-точкой для f. $\square$

Рассмотрим теперь понятие однолистности в бесконечно удаленной точке. Естественно считать, что функция однолистна в ∞, если функция $\zeta \to f(1/\zeta)$ однолистна в точке 0. Если f аналитична в точке ∞ (см. определение 2.3), то разложение функции $\zeta \to f(1/\zeta)$ в ряд Тейлора в нуле имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k,$$

и ее однолистность в нуле по теореме 7.4 равносильна тому, что $a_1 \neq 0$. Это дает разложение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k},$$

функции f в ∞ и мы приходим к следующему критерию однолистности на бесконечности.

Теорема 7.5. *Функция f, аналитическая в точке $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, будет однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда $\operatorname*{Res}_{\infty} f \neq 0$.*

7.2.3. Особые точки однолистных функций

Выясним теперь, какими особыми точками могут обладать однолистные функции. Оказывается они не могут быть произвольными.

Теорема 7.6. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — область, $S \subset D$ — конечное множество и функция f аналитична и однолистна в $D \setminus S$.*

Тогда все точки из S являются устранимыми для f, кроме, быть может, одной, которая может быть только полюсом 1-го порядка.

Доказательство. Пусть $z_0 \in S$, $z_0 \neq \infty$. Выберем $r > 0$ настолько малым, чтобы $B(z_0, r) \subset D$ и пусть $w_0 \notin \overline{f(B^\circ(z_0, r))}$ (здесь черта обозначает замыкание множества).

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(z) = (f(z) - w_0)^{-1}$, которая аналитична и ограничена в $B(z_0, r)$, поэтому z_0 является устранимой особенностью для g (см. теорему 5.3). Положим $g(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$ и доопределим f в точке z_0, полагая

$$f(z_0) = \begin{cases} w_0 + 1/g(z_0), & \text{если } g(z_0) \neq 0, \\ \infty, & \text{если } g(z_0) = 0. \end{cases}$$

При таком определении f локально ограничена в каждой точке $z_0 \in S$, где $g(z_0) \neq 0$. Поэтому такие точки из S являются для f устранимыми. Если же $g(z_0) = 0$, то z_0 является полюсом для f, т.к. в этом случае $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Доопределив таким образом f на S, покажем, что она однолистна в D.

В самом деле, если предположить, что для каких-то двух различных точек $z_1, z_2 \in D$ будет $f(z_1) = f(z_2)$, то

$$B(z_1, r) \cap B(z_2, r) \neq \varnothing, \quad B(z_k, r) \subset D, \quad k = 1, 2 \tag{7.3}$$

для достаточно малого $r > 0$, образы $f(B(z_k, r))$ этих кругов будут открыты по принципу сохранения области (теорема 6.11) и точка $f(z_1) = f(z_2)$ будет внутренней для $f(B(z_1, r)) \cap f(B(z_2, r))$. Поэтому каждое значение из этого пересечения будет приниматься дважды, что противоречит однолистности функции f на $D \setminus S$. Однолистность f на D доказана.

В частности, полюс может быть только в одной точке z_0. Если порядок n этого полюса больше единицы, то функция $1/f$ имела бы нуль порядка $n \geqslant 2$ в z_0 и по теореме 7.2 в некоторой окрестности z_0 каждое значение принимала бы по крайней мере дважды в различных точках. Это же было бы верно и для f, что невозможно из-за ее однолистности. $\square$

7.2.4. Последовательности однолистных функций

Теорема 7.7. *Пусть последовательность $\{f_n\}$ аналитических и однолистных функций сходится равномерно внутри $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ к функции f, отличной от тождественной постоянной.*

Тогда f аналитична и однолистна в D.

Доказательство. Если $f(z_1) = f(z_2) = w_0$, то возьмем $r > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось условие (7.3) и в кругах $B(z_k, r)$ зуачение w_0 функция f больше не принимает. Пусть

$$\rho = \inf\{|f(z) - w_0| : z \in \Gamma := C_r(z_1) \cup C_r(z_2)\} > 0$$

$\Gamma \subset D$ — компакт, поэтому в силу равномерной сходимости на Γ существует такое n, что $|f_n(z) - f(z)| < \rho \leqslant |f(z) - w_0|$ для всех $z \in \Gamma$. В каждом из кругов $B(z_1, r)$ и $B(z_2, r)$ применим теорему 6.9 Руше, по которой функция

$$f_n - w_0 = [f_n - f] + [f - w_0]$$

имеет в каждом из этих кругов столько же нулей, что $f - w_0$. Итак f_n принимает значение w_0 в каждом из кругов $B(z_1, r)$ и $B(z_2, r)$, что противоречит однолистности f_n. $\square$

7.3. Конформное отображение областей

7.3.1. Автоморфизмы основных областей

Мы уже встречались с термином «автоморфизм» в п.2.3.6, когда рассматривали дробно-линейные отображения основных областей — расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, плоскости $\mathbb{C}$ и круга (2.12). Сейчас мы расширим это понятие и рассмотрим его более подробно.

Определение 7.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область. Отображение $\varphi : D \to D$ называется **автоморфизмом области** G если*

1) φ аналитична в D,

2) φ отображает D на D однолистно (взаимно однозначно).

Множество всех автоморфизмов области D обозначается $\operatorname{Aut} D$.

Это множество является группой относительно операции композициии и обратным элементом к автоморфизму φ является обратная функция φ^{-1}.

Действительно, если φ является автоморфизмом области D, то по теореме 7.3 ее производная отлична от нуля всюду в D. По лемме 7.2 обратная функция φ^{-1} аналитична в каждой точке из D и также однолистна. Следовательно, φ^{-1} является автоморфизмом области D.

Опишем группы автоморфизмов основных областей $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и U (единичного круга).

Теорема 7.8. *Любой автоморфизм каждой из областей $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и U является дробно-линейным отображением.*

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ и $\varphi(z_0) = \infty$. Тогда по теореме 7.6 единственной особенностью функции φ является z_0 — полюс первого порядка, а по теореме 5.10

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{a}{z - z_0} + b & \text{при} \quad z_0 \neq \infty, \\ az + b & \text{при} \quad z_0 = \infty, \end{cases}$$

при некоторых $a, b \in \mathbb{C}$.

Теперь рассмотрим любой автоморфизм φ плоскости $\mathbb{C}$. Доопределим его равенством $\varphi(\infty) = \infty$. Тогда оно непрерывно в бесконечности. Действительно, если предположить, что для некоторой последовательности $z_k \to \infty$ последовательность $w_k = \varphi(z_k)$ будет ограниченной, то, выделяя из нее сходящуюся подпоследовательность $w_{k_l} \to w_0 \in \mathbb{C}$, получили бы $z_{k_l} = \varphi^{-1}(w_{k_l}) \to \varphi^{-1}(w_0)$.

Отсюда следует, что функция $1/\varphi$ аналитична в проколотой окрестности бесконечности и имеет в точке ∞ устранимую особенность.

Такое же рассуждение верно и для обратного отображения. Итак, мы продолжили φ до автомрфизма расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, причем $\varphi(\infty) = \infty$. Как уже доказано, тогда оно имеет вид $\varphi(z) = az + b$.

Рассмотрим, наконец, любой автоморфизм φ единичного круга U. Пусть $\varphi(0) = w_0 \in U$. Рассмотрим дробно-линейный автоморфизм единичного круга (см. пример 2.1)

$$\psi(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w},$$

переводящий w_0 в 0. тогда композиция $f = \psi \circ \varphi$ является автоморфизмом круга U, переводящим 0 в 0. Т.к. $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, то по лемме 3.6 Шварца будет $|f(z)| \leqslant |z|$ в U.

Повторяя это рассуждение для обратного автоморфизма f^{-1}, получим неравенство $|f^{-1}(\zeta)| < |\zeta|$ для всех $\zeta \in U$. Беря здесь $\zeta = f(z)$, видим, что $|z| \leqslant |f(z)|$ при всех $z \in U$. Следовательно, $|z| = |f(z)|$ при $z \in U$. В силу случая равенства в лемме 3.6 Шварца $f(z) = e^{i\theta}z$.

Таким образом, мы получаем, что

$$\varphi(z) = (\psi^{-1} \circ f)(z) = e^{i\theta}\psi^{-1}(z),$$

а это дробно-линейное отбражение. □

Вспоминая п.2.3.6, мы получаем слдеующие описания всех автоморфизмов основных областей:

$$\operatorname{Aut}\widehat{\mathbb{C}} = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$$\operatorname{Aut}\mathbb{C} = \{ z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \},$$

$$\operatorname{Aut} U = \left\{ z \mapsto e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} : \theta \in \mathbb{R},\ z_0 \in U \right\}.$$

7.3.2. Теорема Римана

Рассмотрим теперь конформные отображения различных областей.

Определение 7.6. *Две области $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$ называются* ***конформно эквивалентными****, если существует функция f, аналитическая и однолистная в D, со свойством*

$$f(D) = \Delta.$$

Точно так же, как на с.98 (после определения 7.5), доказывается, что обратное отображение f^{-1} к f вы определении 7.6 также аналитично и однолистно отображает Δ на D. Так что области D и Δ в этом определении действительно равноправны.

Заметим, что расширенная комплексная плоскость $\widehat{\mathbb{C}}$ компактна, поэтому она не может быть гомеоморфна открытым областям $\mathbb{C}$ и U. Кроме того, $\mathbb{C}$ не является конформно эквивалентной единичному кругу, так как инчае существовала бы функция, аналитическая во всей плоскости $\mathbb{C}$, по модулю ограниченная единицей. Но такая функция обязана быть тождественной постоянной по теореме 3.11 Лиувилля.

Рассмотрим следующий вопрос — какие области являются конформно эквиалентными единичному кругу U? Односвязность области, конечно, необходима для этого (докажите это самостоятельно).

Ответ на поставленный вопрос дает теорема 7.9 Римана, доказываемая ниже: граница односвязной области должна иметь более одной точки. В связи с этим заметим, что у $\widehat{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}$ границы — это соответственно $\varnothing$ и $\{\infty\}$.

Лемма 7.3. *Любую односвязную область $D \setminus \widehat{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки можно однолистно отобразить на область внутри единичного круга U, содержащую* 0.

Доказательство. Пусть сначала D имеет внешнюю точку z_0, т.е. внутренность дополнения $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ непуста.

Если $z_0 = \infty$, то D содержится в некотором круге $D \subset B(0, R)$ и отображение $z \mapsto z/R$ переведет D в единичный круг. Если $z_0 \neq \infty$, то сначала выполним отображение $z \mapsto (z - z_0)^{-1}$, которое переведет D в область, для которой ∞ является внешней точкой и приходим к первому случаю.

Совершая автоморфизм единичного круга из примера 2.1 добиваемся того, что 0 принадлежит образу нашей области.

Пусть теперь D не имеет внешних точек. Т.к. граница D содержит по крайней мере две точки a и b, то функция

$$z \mapsto \frac{z - a}{z - b}$$

переведет D в область D_1, не содержащую 0 и ∞. Функция $z \to \sqrt[+]{z}$ (положительная ветвь квадратного корня) переведет D_1 в область D_2 с внешними точками (если $w \in D_2$, то $-w \notin \overline{D_2}$). Снова приходим к уже разобранному случаю. □

Теорема 7.9 (Римана). *Пусть — Любая односвязная область $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу U.*

Если $z_0 \in D$, то аналитическая и однолистная функция f со свойством $f(D) = U$, удовлетворяющая условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, определяется единственным образом.

Доказательство. В силу леммы (7.3) можно считать, что $D \subset U$ и $0 \in D$. Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ аналитических и однолистных в области D функций, удовлетворяющих условиям

$$f(D) \subset U, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0.$$

Это множество не пусто, так как $\lambda z \in \mathcal{A}$ при $\lambda \in (0, 1]$.

Так как $B(0, r) \subset D$ при некотором $r > 0$, то по лемме 3.6 Шварца $|f'(0)| \leqslant 1/r$ для каждой функции $f \in \mathcal{A}$, поэтому

$$1 \leqslant I_0 = \sup\bigl\{f'(0) : f \in \mathcal{A}\bigr\} < +\infty$$

Возьмем последовательность функций $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ так, чтобы $f_n' \to I_0$. В силу теоремы 4.7 Монтеля из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри D к некоторой функции f_0, которая аналитична и однолистна в D, причем $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) = I_0$, т.е. $f \in \mathcal{A}$. Докажем, что эта функция f_0 отображает D на U.

Предположим противное, то есть некоторая точка $a \in U$ не входит в образ $f_0(D)$. Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$b_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a} z}$$

(см. пример 2.1). Тогда

$$b_a' = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a} z)^2}.$$

Пусть

$$g(z) = e^{-i\lambda} b_{\sqrt[+]{|a|}}\left(\sqrt[+]{e^{i\lambda} b_a(f_0(z))}\right), \quad \lambda = \pi - \arg a.$$

Легко видеть, что $g \in \mathcal{A}$ (проверьте это самостоятельно).

Непосредственный подсчет показывает, что

$$g'(0) = b'_{\sqrt[+]{|a|}}\left(\sqrt[+]{e^{i\lambda} b_a(0)}\right) \frac{b_a'(0)}{2\sqrt[+]{e^{i\lambda} b_a(0)}} f'(0) = b'_{\sqrt[+]{|a|}}\left(\sqrt[+]{-a e^{i\lambda}}\right) \frac{1 - |a|^2}{2\sqrt[+]{a e^{i\lambda}}} f_0'(0) =$$

$$= \frac{1-|a|}{(1-|a|)^2}\frac{1-|a|^2}{2\sqrt[+]{|a|}}f_0'(0) = \frac{1+|a|}{2\sqrt[+]{|a|}}f_0'(0) > f_0'(0)$$

Это противоречит определению I_0 и тому, что $f_0'(0) = I_0$.

Докажем единственность. Пусть f_1 и f_2 две функции, удовлетворяющие нашим условиям. Тогда композиция $h(z) = f_1(f_2^{-1}(z))$ является автоморфизмом круга U, причем $h(0) = 0$. Поэтому (см. пример 2.1)

$$h(z) = e^{i\lambda}\frac{z-0}{1-0z} = e^{i\lambda}z$$

Отсюда $f_1(z) = e^{i\lambda}f_2(z)$, но $f_i'(0) > 0$ и $\lambda = 0$. □

Следствие 7.1. *Любые две области $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$, границы которых состоят более чем из одной точки, являются конформно эквивалентными.*

Доказательство. Если $f : D \to U$ и $g : \Delta \to U$ — функции, определяемые из теоремы Римана для областей D и Δ, то отображение $g^{-1} \circ f$ устанавливает конформную эквивалентность D и Δ. □

7.4. Конформные отображения многоугольников

Теорема 7.9 Римана является теоремой существования — она утверждает лишь, что функция Римана (осуществляющая аналитическое и однолистное отображение на единичный круг) существует, но не дает способа для нахождения такой функции.

Поэтому представляет интерес указание явной конструкции для функции Римана в случае хотя бы в случае наиболее просто устроенных областей. В этом параграфе мы дадим такую конструкцию для случая многоугольника.

7.4.1. Эллиптические интегралы 1-го рода

Для $0 < k < 1$ введем так называемый **эллиптический интеграл первого рода**

$$F(z) = F(z,k) := \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{7.4}$$

и рассмотрим отображение верхней полуплоскости H с его помощью. Для краткости будем обозначать подинтегральную функцию в (7.4)

$$\varphi(z) = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

Мы рассматриваем здесь однозначную ветвь φ, определяемую условием $\varphi(0) = 1$, в односвязной области D, которая получается из $\mathbb{C}$ выбрасыванием четырех лучей

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z : z = \pm 1 - iy,\ z = \pm 1/k - iy,\ y \geqslant 0\}.$$

Интеграл в (7.4) берется по любому спрямляемому пути, соединяющему начало координат 0 и z.

В исключительных точках ± 1, $\pm 1/k$, ∞ можно доопределить как абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. К примеру, при $z = 1$ положим

$$F(1) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \lim_{x \to 1-0} \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Сходимость этого интеграла вытекает из оценки

$$|\varphi(z)| \geqslant c\sqrt{|1-z|} \quad \text{при} \quad |1-z| \leqslant \delta$$

(c и δ — некоторые положительные постоянные). Аналогично определяются $F(-1)$ и $F(\pm 1/k)$. Для определения $F(\infty)$ как несобственного интеграла

$$F(\infty) = \int\limits_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

можно использовать оценку

$$|\varphi(z)| \geqslant c|z|^2 \quad \text{при} \quad x| \geqslant \delta.$$

Определенная таким образом функция F аналитична в полуплоскости H и непрерывна в $\overline{H}$. В самом деле, как первообразная аналитической функции она аналитична в $\overline{H} \setminus \{\pm 1, \pm 1/k\}$. Непрерывность в исключительных точках ± 1, $\pm 1/k$ и ∞ легко вывести из приведенных оценок (проделайте это самостоятельно).

Покажем, что функция (7.4) однолистно отображает полуплоскость H на открытый прямоугольник Δ с вершинами в точках

$$-K, \quad K, \quad K + iK', \quad -K + iK' \tag{7.5}$$

где

$$K = F(1, k) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{7.6}$$

$$K' = F\left(\frac{1}{k}, k\right) - F(1,k) = \int\limits_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{7.7}$$

При $z \in I_1 = [0,1]$ интеграл (7.4) принимает положительные значения, возрастающие от $F(0,k)$ до $F(1,k)$. Поэтому функция $w = F(z,k)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает на отрезок $[0,K] \subset \mathbb{C}_w$.

При переходе через точку $t = 1$ множитель $1-t$ в подкоренном выражении интеграла (7.4) меняет знак и на отрезке $I_2 = [1, 1/k]$ этот интеграл представим в виде

$$F(x,k) = K + i\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}},$$

причем выбор ветви квадратного корня здесь согласован с выбором ветви корня в (7.4) на I_1. Отсюда ясно, что интеграл (7.4) отображает взаимно однозначно и непрерывно I_2 на вертикальный отрезок в $\mathbb{C}_w$, соединяющий точки K и $K + iK'$.

При переходе через точку $t = 1/k$ множитель $1 - kt$ под корнем в (7.4) меняет знак. Легко видеть, что

$$\int\limits_{1/k}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = K.$$

Поэтому, рассуждая аналогично, мы видим, что интеграл (7.4) отображает взаимно однозначно и непрерывно луч $I_3 = [1/k, \infty]$ в отрезок с концами в точках $K + iK'$ и iK'.

Наконец, подобные рассуждения показывают, что (7.4) отображает взаимно однозначно и непрерывно отрицательную часть действительной прямой на ломаную с вершинами в точках iK', $-K + iK'$, $-K$ и 0.

Этим показано, что интеграл (7.4) взаимно однозначно и непрерывно отображает границу полуплоскости H на границу прямоугольника с вершинами в точках (7.5).

Отсюда уже можно вывести, что функция (7.4) осуществляет однолистное и конформное отображение полуплоскости на открытый прямоугольник с вершинами (7.5).

Докажем сначала, что $\Delta \subset F(H)$. Если $w \in \Delta$, то в силу интегральной формулы Коши (3.11)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{d\xi}{\xi - w} = 1.$$

После замены переменной $\xi = F(\zeta)$ с учетом того, что $F(\partial H) = \partial\Delta$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial H}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)-w}\,d\zeta = 1.$$

По теореме 6.7 о логарифмическом вычете функция $F - w$ имеет простой нуль в некоторой точке $z \in H$. Следовательно, $\Delta \subset F(H)$.

Для доказательства обратного включения $F(H) \subset \Delta$ предположим противное — существует точка $w_0 \notin \Delta$, для которой $F(z_0) = w_0$ при некотором $z_0 \in H$. Тогда если $w_0 \notin \overline{\Delta}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{d\xi}{\xi - w} = 0.$$

Отсюда аналогично предыдущему выводим, что $F - w_0$ не имеет нулей в H, а это противоречит тому, что $w_0 \in F(H)$. Случай $w_0 \in \partial\Delta$ также невозможен, т.к. иначе (поскольку $f(H)$ — область, см. теорему 6.11) $B(w_0, r) \subset f(H)$ при некотором $r > 0$ и $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ содержит точки из $F(H)$, хотя мы уже показали, что это не так. Итак, мы показали, что $F(H) = \Delta$.

Отметим, что вывод равенства $F(H) = \Delta$ из $F(\partial H) = \partial\Delta$ не использовал какие-то специфические свойства эллиптического интеграла (7.4). Следовательно, мы доказали следующий общий факт, известный как принцип взаимно однозначного соответствия.

Теорема 7.10. *Пусть $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — односвязные области, границами которых являются кусочно-гладкие жордановы кривые. Пусть еще функция f аналитична в D, непрерывна вместе со своей производной на ∂D и отображает ∂D на $\partial\Delta$ взаимно однозначно с сохранением ориентации. Тогда f однолистно и конформно отображает D на Δ.*

Эта теорема часто используется при построении конкретных однолистных конформных отображений заданных областей.

7.4.2. Эллиптический синус

В п. 7.4.1 было показано, что эллиптический интеграл первого рода $z \mapsto F(z,k)$, $0 < k < 1$, определяемый равенством (7.4) однолистно и конформно отображает верхнюю полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на прямоугольник Δ с вершинами в точках (7.5) (см. также (7.6)–(7.7)).

Обратная функция, отображающая прямоугольник Δ в H, называется **эллиптическим синусом** и обозначается $\operatorname{sn}(k)$, т.е. $\operatorname{sn}(k) : \Delta \to H$. С помощью принципа симметрии эта функция продолжается как мероморфная двоякопериодическая функция на всю комплексную плоскость.

Вертикальный интервал $(K, K+iK')$ функция $\operatorname{sn}(k)$ отображает на интервал $(1, 1/k)$. В силу принципа симметрии Римана–Шварца (теорема 7.1) область Δ_{+1}, симметричную Δ относительно интервала $(K, K+iK')$, отображается аналитическим продолжением функции $\operatorname{sn}(k)$ на нижнюю полуплоскость $H^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Точно так же вертикальный интервал $(-K, -K+iK')$ функция $\operatorname{sn}(k)$ отображает на интервал $(-1, -1/k)$ и в силу принципа симметрии область Δ_{-1}, симметричную Δ относительно $(-K, -K+iK')$, также отображается аналитическим продолжением функции $\operatorname{sn}(k)$ на нижнюю полуплоскость $H^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Этот процесс аналитического продолжения с помощью принципа симметрии теперь можно применить и к областям $\Delta_{\pm 1}$ и так далее. Кроме того, подобный процесс можно применить и к аналитическому продолжению функции $\operatorname{sn}(k)$ через горизонтальные интервалы $(-K, K)$ и $(-K+iK', k+iK')$. В результате мы получим аналитическое продолжение эллиптического синуса $\operatorname{sn}(k)$ на всю плоскость. Читателю предлагается самостоятельно проверить следующие свойства этого аналитического продолжения, которое мы также обозначаем $\operatorname{sn}(k)$:

1) $\operatorname{sn}(k)$ имеет простые полюса в точках вида $2mK+i(2n+1)K'$, $n, m \in \mathbb{Z}$,

2) $\operatorname{sn}(k)$ имеет простые нули в точках вида $2mK+2niK'$, $n, m \in \mathbb{Z}$,

3) $\operatorname{sn}(k)$ является периодической и ее периодом является любое число вида $4mK+2niK'$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

7.4.3. Формула Кристоффеля–Шварца

Пусть $P \subset \mathbb{C}$ — многоугольник (см. стр. 16) с последовательными вершинами $A_1, \ldots, A_n$ и углом $\pi\alpha_k =$ при вершине A_k. По теореме 7.9 существует однолистное конформное отображение F верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на P. Можно показать, что такая функция F задается равенством

$$F(z) = c_1 \int\limits_{z_0}^{z} (t-a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (t-a_n)^{\alpha_n - 1}\, dt + c_2,$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ — некоторые числа и $a_k = F^{-1}(A_k)$ — прообразы вершин многоугольника. Эта функция называется **интегралом Кристоффеля-Шварца** . Ясно, что она является обобщением эллиптического интеграла. Поэтому его можно использовать для построения функций, конформно отображающих полуплоскость H на заданный многоугольник.

Выбор начального значения z_0 и ветви подинтегрального выражения не является принципиальным — другой выбор приведет к изменению c_1 и c_2.

Глава 8

Приложение

8.1. Топология в метрическом пространстве

8.1.1. Открытые и замкнутые множества

Пусть X — произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой** на X, если для любых $x, y, z \in X$ выполнены условия

1) $d(x,y) \geqslant 0$, $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

2) $d(x,y) = d(y,x)$ (симметричность),

3) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (неравенство треугольника).

Число $d(x,y)$ называется **расстоянием** между x и y. Пара (X,d) называется **метрическим пространством**.

Определение 8.1. *Множество $A \subset X$ в метрическом пространстве X называется* ***открытым****, если для любой точки $x \in A$ существует открытый шар с центром в этой точке, содержащийся в A.*

Теорема 8.1. *Семейство открытых множеств в метрическом пространстве обладает следующими свойствами*

1) множества X и $\varnothing$ открыты,

2) для любого семейства открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ их объединение $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ открыто,

3) любое пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ конечного числа открытых множеств G_k $(k = 1, \ldots, n)$ открыто.

Окрестностью точки в метрическом пространстве (X,d) называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Если $G \subset X$ — окрестность точки $x \in X$, то $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется **проколотой** окрестностью этой точки. Ясно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки.

Определение 8.2. *Точка $x \in X$ называется* ***предельной*** *для множества $A \subset X$, если в любой проколотой окрестности xесть точки из A.*

Другими словами, это означает, что в любой окрестности точки x есть точки из A, отличные от x. Подчеркнем, что здесь не требуется принадлежности точки x множеству A. Множество всех предельных точек для A обозначается A'.

Базой окрестностей точки $x \in X$ называется такое семейство ее окрестностей $\mathcal{B}(x)$, что для любых двух окрестностей G_1 и G_2 точки x существует $B \in \mathcal{B}(x)$, что $x \in B \subset G_1 \cap G_2$

Точка $x \in X$ в метрическом пространстве является предельной для множества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность попарно различных точек из $\{x_n\} \subset A$, что $d(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, а также тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x бесконечно много точек из A.

Точки множества, не являющиеся предельными для него, называются **изолированными** множества.

Определение 8.3. *Множество называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои предельные точки.*

Теорема 8.2 (принцип двойственности)**.** *Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение A^c открыто.*

Определение 8.4. ***Замыканием*** *множества A называется множество $\overline{A} = A \cup A'$.*

Определение 8.5. ***Границей*** *множества A в метрическом пространстве называется множество*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}. \tag{8.1}$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются ***граничными*** *точками для него.*

Точка x является граничной тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из A и из A^c.

Определение 8.6. *Непустое множество в метрическом пространстве называется* ***ограниченным****, если оно содержится в некотором шаре.*

8.1.2. Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется **открытым покрытием** множества A, если все множества G_α $(\alpha \in I)$ открыты и

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

Определение 8.7. *Множество в метрическом пространстве называется* ***компактным*** *или компактом, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие.*

Теорема 8.3. *Компактное множество в метрическом пространстве замкнуто и ограничено.*

8.1.3. Непрерывность

Пусть X, Y — метрические пространства, $D \subset X$. Элемент $y_0 \in Y$ называется пределом функции $f : D \to Y$ в предельной точке z_0 множества $D \subset X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Функция $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$, $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, называется **непрерывной** в предельной точке $x_0 \in D$ множества D, если ее предел в x_0 точке равен ее значению $f(x_0)$ в этой точке.

Теорема 8.4. *Следующие условия равносильны*

i) функция $f : D \to Y$ непрерывна на множестве D,

ii) для любого открытого множества $V \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(V)$ открыт относительно D.

Теорема 8.5. *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна на X. Тогда для любого компакта $K \subset X$ его образ $f(K)$ компактен.*

8.1.4. Связность

Определение 8.8. *Множество A в метрическом пространстве X называется* ***связным****, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset X$ и $G_2 \subset X$, что*

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

Другими словами, связность означает, что множество нельзя разбить на непустые части, содержащиеся в непересекающихся открытых множествах.

Теорема 8.6. *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна на X. Тогда для любого связного множества $A \subset X$ его образ $f(A)$ связен.*

Определение 8.9. *Множество A в метрическом пространстве X называется* ***линейно связным****, если для любых двух его точек существует путь, соединяющий эти точки, след которого лежит в A.*

8.1.5. Равномерная непрерывность

Пусть X, Y — метрические пространства, $D \subset X$.

Определение 8.10. *Функция $f : D \to Y$ называется **равномерно непрерывной** на D, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x', x'' \in D \quad d_X\bigl(x', x''\bigr) < \delta \Longrightarrow d_Y\bigl(f(x'), f(x'')\bigr) < \varepsilon. \quad (8.2)$$

Конечно, из равномерной непрерывности функции на множестве вытекает ее непрерывность на этом множестве.

Теорема 8.7 (Кантора)**.** *Пусть $K \subset X$ — компакт и функция $f : K \to Y$ непрерывна на K. Тогда она равномерно непрерывна на K.*

Теорема 8.8. *Пусть X — компактное метрическое пространство и S — некоторое бесконечное множество непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$.*

Для того, чтобы S содержало равномерно сходящуюся на X последовательность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

1) равномерной ограниченности

$$\sup_{f\in S}\sup_{x\in X}|f(x)| < \infty,$$

2) равностепенной непрерывности

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x_1, x_2 \in X \quad \forall\,f \in S \quad d(x_1, x_2) \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

8.2. Математический анализ

8.2.1. Криволинейные интегралы

Пусть заданы две функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Зададим произвольно разбиение $\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ и на каждом частичном отрезке отметим точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ и составим интегральные суммы

$$s = s(\Pi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]\,.$$

Определение 8.11. *Число $I \in \mathbb{R}$ называется **пределом интегральных сумм**, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall\,(\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \Longrightarrow |s(\Pi, \xi) - I| < \varepsilon.$$

*Если такой предел существует, то он называется **интегралом Стилтьеса** функции f по функции g на $[a, b]$ и обозначается*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f\,dg.$$

Определение 8.12. *Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемый путь и на следе пути $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ задана функция $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.* ***Криволинейным интегралом*** *второго рода по пути γ от функции f называется*

$$\oint\limits_{\gamma} f\,dx = \oint\limits_{\gamma} \sum_{k=1}^{n} f_k\,dx_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} (f_k \circ \gamma)\,d\gamma_k. \tag{8.3}$$

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий или кусочно-гладкий путь и $f \in C(\Gamma)$, то

$$\oint\limits_{\gamma} f\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \left(\sum_{k=1}^{n} \big[\gamma_k'(t)\big]^2 \right)^{1/2} dt.$$

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ — гладкий или кусочно-гладкий путь и $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, то

$$\oint\limits_{\gamma} f\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} f_k(\gamma(t)) \cdot \gamma_k'(t)\,dt.$$

Определение 8.13. *Если Γ — спрямляемая жорданова кривая и $f \in C(\Gamma)$, то криволинейным* ***интегралом первого рода*** *от f вдоль Γ называется*

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dl = \oint\limits_{\gamma} f\,dl,$$

где $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$.

Определение 8.14. *Если Γ — спрямляемая ориентированная жорданова кривая и $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, то криволинейным* ***интегралом второго рода*** *от функции f вдоль Γ называется*

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dx = \oint\limits_{\gamma} f\,dx,$$

где $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ сохраняет ориентацию.

8.2.2. Теорема об обратной функции

Введем в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ проекцию на k-ю координатную ось

$$\pi_k(x) = x_k, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad k = 1, \dots, d$$

и для функции $f : D \to \mathbb{R}^d$, $D \subset \mathbb{R}^d$, введем d функций

$$f_k(x) := (\pi_f \circ f)(x), \quad x \in D, \quad k = 1, \dots, d,$$

которые называется координатными функциями отображения f. Класс $C^1(D)$ обозначает множество функций $f : D \to \mathbb{R}^d$, для которых все координатные функции имеют непрерывные частные производные в D.

Матрицей Якоби функции $f : D \to \mathbb{R}^d$ в точке $a \in D$ называется

$$\mathbf{J}f(a) = \left\{ \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \right\}_{k,j=1\ldots d}.$$

Теорема 8.9. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $a \in D$ и функция $f : D \to \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $C^1(D)$ и*

$$\det \mathbf{J}f(a) \neq 0.$$

Тогда существует окрестность U точки a со свойствами
1) $f|_U$ — биекция,
2) $V = f(U)$ — открытое множество,
3) $f^{-1} \in C^1(V)$ и для любого $y \in V$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'\right)^{-1}(x), \quad \text{где} \quad x = f^{-1}(y).$$

Предметный указатель

Именной указатель

Указатель обозначений