Э. И. Зверович

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
в шести частях

Часть 6
Теория аналитических функций комплексного переменного

Минск
БГУ
2004

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в пятом и шестом семестрах. Его содержание составляют элементы теории аналитических функций одного комплексного переменного.

Глава 24
ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

§ 1. Вводные замечания

1. О предмете комплексного анализа

Теория функций компле́ксного переменного (ТФКП) — это раздел анализа, в котором изучаются комплекснозначные функции, зависящие от комплексных переменных. Иногда эту теорию называют *комплексным анализом* в отличие от *вещественного анализа*, в котором изучаются вещественнозначные функции, зависящие от вещественных переменных. Однако любую функцию комплексного переменного

$$u + iv = f(x + iy)\,,$$

где $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, можно представить в виде равносильного ей отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, а именно

$$\begin{cases} u = u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)\,, \\ v = v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)\,. \end{cases}$$

Поэтому изучение свойств функций комплексного переменного в принципе можно свести к изучению соответствующих свойств отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ путем применения к ним методов вещественного анализа. В связи с этим возникает вопрос о целесообразности отдельного изучения функций комплексного переменного. Ответ на этот вопрос состоит в том, что в комплексном анализе изучаются лишь такие свойства, которые зависят от специфики, возникающей за счет введения именно комплексных переменных. Основным из таких специфических свойств является свойство комплексной дифференцируемости и связанное с ним свойство *аналитичности* функций. В связи с этим комплексный анализ иногда называют *теорией аналитических функций.*

Теория аналитических функций позволяет весьма просто решать многие вопросы, которые не поддаются простому решению методами вещественного анализа. В качестве простого примера рассмотрим два разложения

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k.$$

Радиус сходимости первого ряда равен бесконечности, а второго — единице. Возникает вопрос: в чем причина такого различия? Понять причину различия, оставаясь на позициях вещественного анализа, затруднительно, так как обе функции e^x и $\dfrac{1}{1+x^2}$ «одинаково хороши», т. е. бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$. Если же переменную x считать комплексной, то причина различия легко устанавливается на основании теоремы, согласно которой радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию от центра круга его сходимости до ближайшей особой точки его суммы. Но у функции e^x особых точек нет вовсе, значит, радиус сходимости первого ряда равен $+\infty$. Особые точки второй функции находятся из уравнения $x^2+1=0$, откуда $x=\pm i$, а расстояние от начала координат до точек $\pm i$ равно 1.

История становления и развития комплексного анализа насчитывает более двухсот лет. Его классиками являются Л. Эйлер (1707—1783), О. Коши (1789—1857), Б. Риман (1826—1866), К.Вейерштрасс (1815—1897).

Комплексный анализ богат связями с другими математическими науками и имеет большое прикладное значение. Он связан, например, с теорией дифференциальных уравнений, алгеброй, геометрией, топологией, теорией чисел и другими науками. Из физических наибольшие приложения комплексный анализ имеет в гидро- и аэромеханике, в теории упругости и в электродинамике.

2. Некоторые обозначения и факты, связанные с комплексными числами

Символом $\mathbb{C}$ принято обозначать поле всех комплексных чисел[1], т. е. чисел z, представимых в *алгебраической форме* $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а число i (мнимая единица) обладает свойством $i^2 = -1$.

Приняты следующие обозначения:
$\operatorname{Re} z = x$ — вещественная часть числа z;
$\operatorname{Im} z = y$ — мнимая часть числа z;
$\overline{z} = x - iy$ — число, комплексно сопряженное к $z = x + iy$.

Комплексное число z называется:
(чисто) вещественным, если $\operatorname{Im} z = 0$;
(чисто) мнимым, если $\operatorname{Re} z = 0$.

Таким образом, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Очевидны следующие утверждения:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im} z = 0 \iff z = \overline{z}\,;\\
&\operatorname{Re} z = 0 \iff z = -\overline{z}\,;\\
&\overline{(\overline{z})} = z\,;\\
&\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}\,;\\
&\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}\,;\\
&z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z\,.
\end{aligned}$$

Кроме того, операция комплексного сопряжения коммутирует с арифметическими операциями.

Напомним определение равенства комплексных чисел:

$$z_1 = z_2 \overset{def}{\iff} \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

Биективное отображение

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

[1]О комплексных числах см. также часть 1, гл. 2, § 3 этого пособия.

между $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ позволяет каждое комплексное число $z = x+iy$ изображать точкой (x, y) декартовой плоскости, а также радиусом-вектором этой точки. Декартова плоскость, используемая для геометрического изображения комплексных чисел, называется *комплексной плоскостью.* Ось абсцисс комплексной плоскости называется *вещественной* (или *действительной*) осью, так как ее точки (и только они) служат для изображения чисто вещественных чисел. Ось ординат комплексной плоскости называется *мнимой* осью, так как ее точки (и только они) служат для изображения чисто мнимых чисел. Отметим, что паре комплексно сопряженных чисел $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ соответствует на комплексной плоскости пара точек, симметричных относительно действительной оси.

Учитывая указанное соответствие между полем $\mathbb{C}$ и комплексной плоскостью, само поле $\mathbb{C}$ иногда называют комплексной плоскостью.

Рассмотрим на комплексной плоскости полярную систему координат (r, φ), помещая полюс в начало координат и совмещая полярную ось с положительным направлением вещественной оси. В силу известных формул $\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ и формулы Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ справедливы следующие равенства:

$$z = x + iy = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}\,, \tag{24.1}$$

дающие представление комплексного числа в различных формах. Первая из этих форм, как уже отмечалось, называется *алгебраической*, вторая — *тригонометрической*, третья — *показательной.*

Числа $r \geqslant 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, входящие в (24.1), называются соответственно *модулем* ($r = |z|$) и *аргументом* ($\varphi = \mathrm{Arg}\ z$) комплексного числа $z = x + iy$. Модуль комплексного числа $z = x + iy$ определяется однозначно и равен $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$. Кроме того, имеем $z\cdot\overline{z} = |z|^2$. Геометрический смысл модуля — расстояние между точками 0 и z.

Аргумент (т. е. величина угла между положительным направлением вещественной оси и радиусом-вектором[2] точки z) определяется из

[2]Значение аргумента считается положительным (отрицательным), если отсчет углов производится в направлении против (по) часовой стрелки.

системы уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}\,, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

не однозначно, а с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — любое целое число. Требуя, например, чтобы было $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, мы получим так называемую *главную ветвь аргумента*[3] $\varphi = \arg z$. Таким образом, имеем $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Поле $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел и различные его подмножества обычно снабжаются топологией, порожденной евклидовой метрикой, т. е. расстоянием

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \tag{24.2}$$

Таким образом, топологичнские свойства в $\mathbb{C}$ не отличаются от топологических свойств в $\mathbb{R}^2$. Например, компактные подмножества $\mathbb{C}$ — это в точности замкнутые и ограниченные его подмножества. Само множество $\mathbb{C}$ не является компактным, поскольку оно не ограничено.

3. Расширенная комплексная плоскость и стереографическая проекция

Присоединим к комплексной плоскости $\mathbb{C}$ «бесконечно удаленную точку», т. е. элемент ∞, обладающий свойством $\infty \notin \mathbb{C}$. Полученное в результате объединение $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ называется *расширенной комплексной плоскостью.* Снабдим $\widehat{\mathbb{C}}$ топологией, добавляя к совокупности открытых подмножеств плоскости базу окрестностей точки ∞, т. е. все множества вида $\widehat{\mathbb{C}} \diagdown K$, где $K \subset \mathbb{C}$ — всевозможные компактные множества. Основное свойство топологического пространства $\widehat{\mathbb{C}}$ устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1. *Расширенная комплексная плоскость гомеоморфна сфере и, следовательно, компактна.*

◀ Доказательство проведем с использованием *стереографической проекции* (рис. 1). В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами ξ, η, ζ рассмот-

[3]Иногда главную ветвь аргумента выбирают так, чтобы для нее выполнялось неравенство $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

рим сферу $\mathbb{S}^2:\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$. Координатную плоскость $\zeta=0$ совместим с комплексной плоскостью, причем $O\xi$ — с вещественной, а $O\eta$ — с мнимой осью. На сфере $\mathbb{S}^2$ возьмем точку $P(\xi,\eta,\zeta)\neq N(0,0,1)$, где $N(0,0,1)\in\mathbb{S}^2$ — «северный полюс». Через точки P и N проведем прямую и обозначим через $z=x+iy=(x,y,0)$ точку пресечения прямой PN с плоскостью $\zeta=0$. Соответствие $z\longmapsto P$ представляет собой биективное отображение $\mathbb{C}$ на $\mathbb{S}^2\diagdown N$. Доопределяя его соответствием $\infty\longmapsto N(0,0,1)$, получим биективное отображение $\widehat{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{S}^2$, которое и называется *стереографической проекцией.*

Чтобы найти для нее аналитическое выражение, запишем сначала уравнение прямой, проходящей через точки $N(0,0,1)$ и $z=(x,y,0)$

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-1}{0-1}=t\,,$$

откуда $\xi=tx$, $\eta=ty$, $\zeta=1-t$. Подставляя эти значения в уравнение сферы

$$(tx)^2+(ty)^2+(1-t)^2=1\quad\text{или}\quad t^2x^2+t^2y^2+1-2t+t^2=1\,,$$

найдем значение параметра t, соответствующее точке P пересечения

$$t=\frac{2}{x^2+y^2+1}=\frac{2}{|z|^2+1}\,.$$

Таким образом, координаты точки P равны

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{2x}{|z|^2+1}\,,\\[2mm] \eta=\dfrac{2y}{|z|^2+1}\,,\\[2mm] \zeta=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\,.\end{cases}\tag{24.3}$$

Это отображение непрерывно на $\mathbb{C}$, так как выражается элементарными функциями, определенными всюду на $\mathbb{C}$. Далее, очевидно, что $(\xi,\eta,\zeta)\to(0,0,1)$ при $|z|\to+\infty$, т. е. отображение непрерывно и в точке $z = \infty$. Отображение, обратное к (24.3), имеет вид

$$z = \begin{cases} \dfrac{\xi + i\eta}{1-\zeta} \quad \text{при} \quad \zeta \neq 1\,, \\ \infty \quad \text{при} \quad \zeta = 1\,. \end{cases}$$

Это отображение, очевидно, непрерывно на сфере $\mathbb{S}^2$. Итак, стереографическая проекция — гомеоморфизм. Сфера $\mathbb{S}^2$ компактна как замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$. А так как при гомеоморфизмах компактные множества переходят на компактные, то расширенная комплексная плоскость $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ компактна. ►

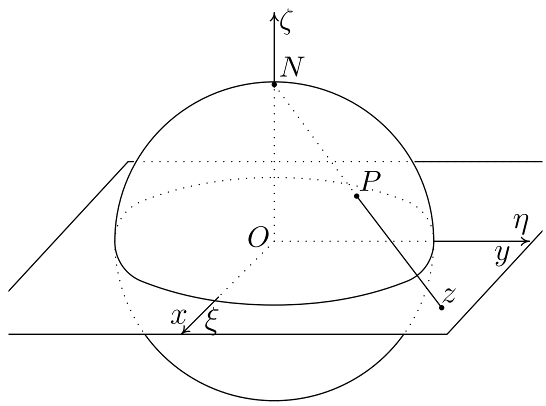

Рис.1. Стереографическая проекция

Таким образом, расширенная комплексная плоскость $\widehat{\mathbb{C}}$ (иногда называемая *сферой Римана*), представляет собой *компактификацию* комплексной плоскости.

Замечание. В соответствии с двумя способами геометрического изображения комплексных чисел на множестве $\mathbb{C}$ вводятся две метрики: *евклидова* и *сферическая*. Евклидова метрика $d\ :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ определена равенством (24.2). Сферическая метрика $\rho\ :\ \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ определяется следующим образом: *за расстояние* $\rho(z_1, z_2)$ *между точками* z_1 *и* z_2 *плоскости* $\mathbb{C}$ *принимается евклидово расстояние между образами* (ξ_1, η_1, ζ_1) *и* (ξ_2, η_2, ζ_2) *данных точек на сфере* $\mathbb{S}^2$ *при стереографической проекции.* Исходя из этого определения и используя равенства (24.3), вычислим сферическое расстояние

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \sqrt{2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\left(\frac{2x_1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{2x_2}{1+|z_2|^2} + \frac{2y_1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{2y_2}{1+|z_2 1|^2} + \frac{|z_1|^2 - 1}{1+|z_1|^2} \cdot \frac{|z_2|^2-1}{1+|z_2|^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\left[(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - (|z_1|^2-1)(|z_2|^2-1)\right]}}{\sqrt{|z_1|^2+1} \cdot \sqrt{|z_2|^2+1}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_2y_2}}{\sqrt{|z_1|^2+1} \cdot \sqrt{|z_2|^2+1}} = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1} \cdot \sqrt{|z_2|^2+1}}\,.$$

Итак, имеем

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1} \cdot \sqrt{|z_2|^2 + 1}}\,, \tag{24.4}$$

причем эта метрика продолжается по непрерывности до метрики на $\widehat{\mathbb{C}}$. На любом ограниченном множестве $M \subset \mathbb{C}$ евклидова и сферическая метрики эквивалентны, поскольку $\forall z_1, z_2 \in M$ имеют место неравенства

$$m \cdot |z_1 - z_2| \leqslant \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1} \cdot \sqrt{|z_2|^2 + 1}} \leqslant 2|z_1 - z_2| \quad \text{при некотором} \quad m \in (0, 2)\,.$$

4. Первоначальные сведения о функциях комплексного переменного

Функцией комплексного переменного принято называть всякое отображение вида $f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ A \in \mathbb{C}$. Обычно в качестве множества задания функции комплексного переменного берется *область* (т. е. открытое и связное множество). Вводя комплексные переменные $z = x + iy \in A$, $w = u + iv \in \mathbb{C}$, запишем функцию комплексного переменного в виде уравнения

$$w = f(z) \quad \text{или} \quad u + iv = f(x + iy)\,. \tag{24.5}$$

Выделяя здесь вещественную и мнимую части, запишем последнее уравнение в виде системы двух вещественных уравнений

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} f(x + iy)\,, \\ v = \operatorname{Im} f(x + iy)\,, \end{cases}$$

или, обозначая

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + iy)\,, \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + iy)\,,$$

в виде

$$\begin{cases} u = u(x, y)\,, \\ v = v(x, y)\,. \end{cases}$$

Итак, комплексное уравнение (24.5) равносильно системе двух вещественных уравнений. Это означает, что задание функции комплексного переменного (24.5) равносильно заданию некоторого отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Но график такого отображения лежит уже в $\mathbb{R}^4$ и, следовательно, не допускает такого наглядного изображения, как, например, графики функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ или из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$. Чтобы эту трудность хотя бы частично преодолеть, применяют различные способы. Например, рисуют в плоскостях комплексных переменных z и w какие-нибудь геометрические фигуры и их образы при отображении f. Чаще всего в качестве таких фигур в плоскости z берут сетки координатных линий, а в плоскости w — образы этих сеток. Снабжая эти линии числовыми отметками, можно в достаточно простых случаях получать хорошее наглядное представление об особенностях графика данной функции комплексного переменного. Примеры такого рода будут приведены ниже. Другим способом наглядного изображения функции $w = f(z)$ является построение так называемого «рельефа», т. е. графика функции $u = |f(z)|$. К функциям комплексного переменного относятся также отображения вида $f : A \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, $A \in \widehat{\mathbb{C}}$, где $\widehat{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость. В отличие от введенных ранее функций комплексного переменного здесь возможно, что $\infty \in A$, $\infty \in f(A)$. Для исследования вопросов, связанных с пределом и непрерывностью таких функций, когда переменные (одна или обе) находятся в окрестности точки ∞, можно использовать сферическую метрику (24.4). Для исследования вопросов, связанных с дифференцируемостью и аналитичностью таких функций в точке ∞, используется *переход к локальным координатам.* Смысл этой процедуры будет объяснен в следующих разделах.

§ 2. Дифференцируемые и аналитические функции комплексного переменного

1. $\mathbb{R}$-линейные и $\mathbb{C}$-линейные функции

Определение 1. *Функция $l : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ называется $\mathbb{R}$-линейной, если выполняются условия*

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}\ :\ l(z_1+z_2) = l(z_1) + l(z_2)\,; \\ &\text{b)}\ \ \forall z \in \mathbb{C}\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ :\ l(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot l(z)\,. \end{aligned}$$

Определение 2. *Функция $l : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ называется $\mathbb{C}$-линейной, если выполняются условия*

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \ \forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}\ :\ l(z_1+z_2) = l(z_1) + l(z_2)\,; \\ &\text{c)}\ \ \forall z \in \mathbb{C}\ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}\ :\ l(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot l(z). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то любая $\mathbb{C}$-линейная функция является и $\mathbb{R}$-линейной. Обратное в общем случае неверно. Общий вид линейных функций различных типов и связи между ними содержатся в следующей теореме.

Теорема 2. (a) *Любую $\mathbb{R}$-линейную функцию l можно задать уравнением $l(z) = a \cdot z + b \cdot \overline{z}$, где $a,\ b \in \mathbb{C}$ — постоянные;*

(b) *Любую $\mathbb{C}$-линейную функцию l можно задать уравнением $l(z) = a \cdot z$, где $a \in \mathbb{C}$ — постоянная;*

(c) *$\mathbb{R}$-линейная функция l является $\mathbb{C}$-линейной, если и только если $l(i \cdot z) = i \cdot l(z)$, где i — мнимая единица.*

◀ (a) Полагая $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, и используя $\mathbb{R}$-линейность функции l, имеем

$$l(z) = l(x+iy) = l(x) + l(iy) = x \cdot l(1) + y \cdot l(i) =$$

$$= \frac{z+\overline{z}}{2} \cdot l(1) + \frac{z-\overline{z}}{2i} \cdot l(i) = \frac{z+\overline{z}}{2} \cdot l(1) - i\frac{z-\overline{z}}{2} \cdot l(i) = az + b\overline{z}\,,$$

где обозначено

$$a := \frac{l(1) - il(i)}{2}\,, \quad b := \frac{l(1) + il(i)}{2}\,.$$

(b) Имеем $l(z) = z \cdot l(1) = a \cdot z$, где обозначено $a = l(1)$.

(c) Пусть l — $\mathbb{R}$-линейная функция, и $l(iz) = i \cdot l(z)$. По пункту (a) имеем $l(z) = az + b\overline{z}$. Заменяя здесь z на iz, получим

$$l(iz) = i \cdot (az - b\overline{z})\,.$$

С другой стороны, по условию имеем

$$l(iz) = i \cdot l(z) = i \cdot (az + b\overline{z})\,.$$

Сравнивая два полученных выражения для $l(iz)$, заключаем, что $b = 0$, т. е. данная функция имеет вид $l(z) = a \cdot z$ и, значит, является $\mathbb{C}$-линейной.

Обратно, пусть $\mathbb{R}$-линейная функция является $\mathbb{C}$-линейной, т. е. имеет вид $l(z) = a \cdot z$. Из этого равенства имеем

$$l(iz) = a \cdot (iz) = i \cdot a \cdot z = i \cdot l(z)\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Отметим геометрические свойства $\mathbb{R}$-линейных и $\mathbb{C}$-линейных отображений. Полагая $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ x,\ y,\ u,\ v \in \mathbb{R}$, представим $\mathbb{R}$-линейную функцию $w = az + b\overline{z}$ в виде

$$u + iv = (\alpha + i\beta)(x + iy) + (\gamma + i\delta)(x - iy)\,.$$

Выделяя здесь вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{cases} u = (\alpha + \gamma)x - (\beta - \delta)y\,, \\ v = (\beta + \delta)x + (\alpha - \gamma)y\,. \end{cases} \tag{24.6}$$

Таким образом, $\mathbb{R}$-линейное отображение $l\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — это однородное аффинное преобразование $l : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Его якобиан равен

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \gamma & \delta - \beta \\ \beta + \delta & \alpha - \gamma \end{vmatrix} = \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2 - \delta^2 = |a|^2 - |b|^2\,.$$

Отсюда видно, что преобразование (24.6) вырождается (т. е. переводит плоскость $\mathbb{R}^2$ на многообразие меньшей размерности), если и только если $|a| = |b|$.

При $|a| \neq |b|$ оно не вырождается (т. е. является гомеоморфизмом). В этом случае оно отображает прямые на прямые, параллельные прямые — на параллельные прямые, квадраты — на параллелограммы, а окружности — на эллипсы.

При $|a| > |b|$ отображение (24.6) сохраняет ориентацию, а при $|a| < |b|$ изменяет ее.

Любое $\mathbb{C}$-линейное отображение $l\ :\ z \longmapsto w = a \cdot z$ при $a \neq 0$ можно представить в виде композиции гомотетии с коэффициентом $|a|$ и поворота на угол α, где $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$. Центр гомотетии и поворота — точка 0:

$$l\ :\ z \longmapsto |a| \cdot z \longmapsto |a| \cdot e^{i\alpha} \cdot z = a \cdot z = w\,.$$

Так как гомотетия и поворот сохраняют ориентацию, то любое невырожденное $\mathbb{C}$-линейное отображение сохраняет ориентацию. Оно переводит любую фигуру на подобную ей фигуру. Якобиан $\mathbb{C}$-линейного отображения $w = az$ равен $|a|^2$, а вырождение имеет место только при $a = 0$.

2. Дифференцируемость и аналитичность функций комплексного переменного

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область, т. е. открытое и связное множество, а $f\ :\ D \longrightarrow \mathbb{C}$ — функция комплексного переменного.

Определение 3. *Функция f называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует линейная функция $l\ :\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, такая, что*

$$f(z+h) - f(z) = l(h) + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0\,. \tag{24.7}$$

Функция называется $\mathbb{R}$-дифференцируемой или $\mathbb{C}$-дифференцируемой в зависимости от того, является ли входящая в (24.7) функция l $\mathbb{R}$-линейной или $\mathbb{C}$-линейной соответственно.

Представляя функцию f в виде равносильного ей отображения

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\ :\ D \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ D \subset \mathbb{R}^2\,,$$

где $f = u + iv$, легко заключить, что $\mathbb{R}$-дифференцируемость функции равносильна дифференцируемости в обычном смысле[4] отображения $(x, y) \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ в точке (x, y), где $z = x + iy$.

[4] т. е. в смысле Фреше (см. часть 3 этого учебного пособия).

Так как $\mathbb{C}$-линейные функции являются частными случаями $\mathbb{R}$-линейных, то и $\mathbb{C}$-дифференцируемые функции образуют подкласс класса $\mathbb{R}$-дифференцируемых функций. Именно $\mathbb{C}$-дифференцируемые функции составляют предмет изучения теории аналитических функций.

Вводя в рассмотрение операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{24.8}$$

установим следующую теорему.

Теорема 3. (a) *Дифференциал $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции f в точке z на векторе h можно представить в виде*

$$Df(z)(h) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}h + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\overline{h}; \tag{24.9}$$

(b) *$\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z функция является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в этой точке, если и только если выполняется следующее равенство*:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = 0\,. \tag{24.10}$$

◀ (a) Полагая $h = h_1 + ih_2$, где $h_1,\ h_2 \in \mathbb{R}$, преобразуем входящую в (24.7) функцию $l(h)$

$$l(h) = l(h_1 + ih_2) = h_1 \cdot l(1) + h_2 \cdot l(i)\,.$$

Учитывая это, из (24.7) при $h_2 = 0$ имеем

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x + iy + h_1) - f(x + iy)}{h_1} = l(1)\,.$$

Аналогично, из (24.7) при $h_1 = 0$ получаем

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x + iy + ih_2) - f(x + iy)}{h_2} = l(i)\,.$$

Итак, имеем

$$Df(z)(h) = l(h) = h_1 l(1) + h_2 l(i) = \frac{h+\overline{h}}{2}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial x} + \frac{h-\overline{h}}{2i}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial y} =$$
$$= \frac{h+\overline{h}}{2}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial x} - i\cdot\frac{h-\overline{h}}{2}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial y} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{h} = \frac{\partial f(z)}{\partial z}h + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\overline{h}\,.$$

(b) $\mathbb{R}$-дифференцируемая функция будет $\mathbb{C}$-дифференцируемой, если и только если $\mathbb{R}$-линейная функция (24.9) будет $\mathbb{C}$-линейной, т. е. когда будет выполняться равенство (24.10). ▶

Замечание. Равенство (24.10) называется уравнением Коши — Римана (иногда оно называется уравнением Даламбера — Эйлера). Полагая $f = u + iv$, перепишем равенство (24.10) в равносильном виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = 0 \qquad (24.11)$$

или, выделяя здесь вещественную и мнимую части, в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0\,. \end{cases} \qquad (24.12)$$

Эта последняя форма записи уравнений Коши — Римана встречается наиболее часто.

Пример. Используя уравнения Коши — Римана, легко привести пример $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции, которая не является $\mathbb{C}$-дифференцируемой. Положим, например, $f(x+iy) = u + iv := x + 2iy$. Выделяя здесь вещественную и мнимую части, имеем $u = x\,,\ v = 2y$. Отсюда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2\,.$$

Так как $1 \neq 2$, то первое равенство системы (24.12) не выполняется ни в одной точке.

В заключение этого пункта введем понятие аналитической функции.

Определение 4. *Функция f называется аналитической (или голоморфной) в точке $z \in \mathbb{C}$, если в некоторой окрестности этой точки у нее существуют непрерывные частные производные, и выполняется условие Коши — Римана* $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} \equiv 0$.

Понятие аналитической функции является основным в теории функций комплексного переменного. Отметим, что включенное в определение требование непрерывности частных производных на самом деле является лишним. Это требование включено в определение ради упрощения теории.

3. Производная и производная по направлению от функции комплексного переменного

Определение 5. *Производная от функции $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ в точке z области $U \subset \mathbb{C}$ определяется равенством*

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \tag{24.13}$$

Как видим, это определение по форме не отличается от определения производной функции одного вещественного переменного. Единственное отличие заключается в том, что в (24.13) приращение является комплексным числом, и поэтому стремление $h \to 0$ происходит в топологии плоскости $\mathbb{C}$. Это, казалось бы, незначительное различие порождает весьма существенное различие свойств непрерывно дифференцируемых функций вещественного переменного с одной стороны, и комплексного переменного — с другой. Но о различиях речь пойдет позже, а сейчас остановимся кратко на одинаковых свойствах. Они основаны, кроме определения (24.13), на следующих фактах:

(a) теория пределов функций комплексного переменного (кроме теорем о связи предела функции с отношениями неравенства) совпадает с теорией пределов функций вещественного переменного;

(b) арифметические операции над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и арифметические операции над вещественными числами.

Вследствие этого, например, теоремы о производных суммы, произведения, частного, композиции, обратной функции для функций комплексного переменного — такие же, как и для функций вещественного переменного. Поэтому нет необходимости их снова формулировать и доказывать. Установим лишь следующий факт, важный для дальнейшего.

Теорема 4. *Равносильны следующие утверждения*:

(a) *Существует конечная производная* $f'(z)$;

(b) *Функция* f *является* $\mathbb{C}$*-дифференцируемой в точке* z.

◀ (a)⇒(b) Пусть

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)\in\mathbb{C}\,.$$

Тогда

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z)+o(1) \ \text{ при } \ h\to 0\,,$$

или, полагая $f'(z)=A$, получим

$$f(z+h)-f(z) = A\cdot h + o(h) \ \text{ при } \ h\to 0\,. \tag{24.14}$$

Последнее равенство означает, что функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке z.

(b)⇒(a) Пусть выполнено равенство (24.14). Деля его на $h\neq 0$, имеем:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = A+o(1)\,.$$

Переходя здесь к пределу при $h\to 0$, найдем $f'(z)=A$.

Определение 6. *Производную от функции* f *в точке* z *по направлению* $\theta\in[0,2\pi)$ *определим равенством*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_\theta} := \lim_{\substack{|h|\to 0\\ \arg h=\theta}}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\,.$$

Теорема 5. (a) *Если функция* f $\mathbb{R}$*-дифференцируема в точке* z, *то*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_\theta} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\cdot e^{-2i\theta}\,. \tag{24.15}$$

(b) *Производная по направлению* $\dfrac{\partial f(z)}{\partial z_\theta}$ *не зависит от направления, если и только если функция* f $\mathbb{C}$*-дифференцируема в точке* z, *и в этом случае*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_\theta} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = f'(z)\,. \tag{24.16}$$

◀ (a) Так как f $\mathbb{R}$-дифференцируема в точке z, то

$$Df(z)(h) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}h + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\overline{h}\,.$$

Полагая $h = |h|e^{i\theta}$, запишем приращение функции f в виде

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}|h|e^{i\theta} + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}|h|e^{-i\theta} + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0\,.$$

Деля это равенство на h, получим

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} \cdot e^{-2i\theta} + o(1) \quad \text{при} \quad h \to 0\,.$$

Переходя здесь к пределу при $|h| \to 0$, $\arg h = \theta$, получим равенство (24.15).

(b) Правая часть равенства (24.15) не зависит от θ тогда и только тогда, когда равно нулю второе слагаемое, т. е. когда $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = 0$, т. е. когда функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z. Предполагая это условие выполненным, имеем $Df(z)(h) = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z_\theta}h = \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}h = f'(z)h$, что равносильно равенствам (29.6). ▶

Замечания.

1) Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z, то ее производную $f'(z)$ можно представить в различных формах, например, в следующих:

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z_\theta} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

2) Учитывая теорему 4(b), аналитичность функции f в точке z можно определить как существование в некоторой окрестности точки z непрерывной производной функции f'.

3) На основании предыдущих результатов уже можно построить довольно большой запас аналитических функций. Постоянная функция $f(z) \equiv c$ аналитична в $\mathbb{C}$, так как $\dfrac{d}{dz}c \equiv 0$. Функция $f(z) = z = x+iy$ аналитична в $\mathbb{C}$, так как очевидно, что $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy) \equiv 0$. Далее, любая целая рациональная функция $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ аналитична в $\mathbb{C}$, так как получена с помощью конечного числа операций сложения и умножения из постоянных функций и функции $f(z) = z$. Любая дробная рациональная функция $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ аналитична всюду в $\mathbb{C}$, где знаменатель отличен от нуля (как частное аналитических функций). Далее, на основании теорем о производных композиции функций и обратной функции заключаем, что аналитическими функциями являются композиция аналитических функций и любая функция, обратная к однолистной[5] аналитической функции. При этом конкретные формулы для производных рациональной функции, композиции функций и обратной функции мы не выписываем, так как они не отличаются от соответствующих формул из вещественного анализа.

4) Отметим, что не всякая $\mathbb{C}$-дифференцируемая функция является аналитической. Возьмем, например, функцию $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Для нее имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 + y^2) = x + iy = z\,.$$

Отсюда видно, что для данной функции условие Коши — Римана выполняется в точке $z = 0$ и не выполняется ни в какой окрестности этой точки. Поэтому данная функция является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $z = 0$, но не является аналитической.

4. Первоначальные сведения о конформных отображениях

Определение 7. *Отображение $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ называется конформным в точке $z \in D$, если его дифференциал $h \longmapsto Df(z)(h)$ отличен от тождественного нуля и (как функция от приращения h) сводится к композиции растяжения и поворота. Отображение f называется конформным в области D, если оно конформно в каждой точке области D и однолистно в D.*

[5]Функция комплексного переменного f называется *однолистной*, если реализуемое ею отображение является инъективным, т. е. если $z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$.

Теорема 6. *Пусть отображение* f $\mathbb{R}$*-дифференцируемо в точке* z*, и* $Df(z)(h) \not\equiv 0$*. Равносильны следующие утверждения:*

(a) *Отображение* f *конформно в точке* z*;*

(b) *Отображение* f $\mathbb{C}$*-дифференцируемо в точке* z*.*

◀ (a)⇒(b) Согласно условию, дифференциал

$$h \longmapsto Df(z)(h) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}h + \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}}\overline{h}$$

должен сводиться к композиции растяжения и поворота, т. е. любую фигуру, лежащую в плоскости переменного h, должен отображать на подобную ей фигуру. Беря в качестве фигуры репер, т. е. пару векторов $h = 1$, $h = i$, из подобия реперов получим: $\dfrac{Df(z)(i)}{Df(z)(1)} = \dfrac{i}{1} = i$.

Далее,

$$Df(z)(1) = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}; \quad Df(z)(i) = \frac{\partial f}{\partial z}i - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}i.$$

Подставляя эти значения в условие подобия, найдем

$$\frac{\partial f}{\partial z}i - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}i = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right),$$

откуда $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} = 0$, т. е. f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z.

$(b) \Rightarrow (a)$ Если выполнено условие (b), то дифференциал имеет вид $h \longmapsto Df(z)(h) = f'(z) \cdot h$, т. е. сводится к композиции растяжения и поворота. ▶

Замечания. 1) Учитывая, что дифференциал конформного в точке z отображения f равен $Df(z)(h) = f'(z) \cdot h$, отметим геометрический смысл производной $f'(z) = |f'(z)| \cdot e^{i \arg f(z)}$. Модуль производной конформного отображения равен коэффициенту растяжения, а аргумент — углу поворота, которые реализует дифференциал $h \longmapsto Df(z)(h)$ над фигурами, лежащими в плоскости переменного h.

2) Исходя из приближенного равенства

$$f(z+h) \approx f(z) + f'(z) \cdot h,$$

которое справедливо с точностью до $o(h)$ при $h \to 0$, можно из геометрических свойств дифференциала $Df(z)(h) = f(z) \cdot h$ получить локальные свойства самого́ конформного отображения. Именно, с точностью до слагаемого $o(h)$ при $h \to 0$ конформное отображение $f : z \longmapsto f(z)$ отображает фигуры, лежащие в окрестности точки z, на подобные им фигуры, лежащие в окрестности точки $f(z)$, и сохраняет ориентацию. В частности, конформное отображение «сохраняет углы». Это означает, что угол между любыми гладкими кривыми, выходящими из точки z, по величине и направлению равен углу между образами этих кривых, выходящими из точки $w = f(z)$, причем это равенство — точное. Напомним, что под углом между кривыми понимается угол между касательными к ним, проведенными в точке пресечения этих кривых.

Свойство сохранения углов при конформных отображениях используется особенно часто, например, при черчении географических карт.

3) Из теоремы 6 следует, что любая функция, однолистная и аналитическая в области D, реализует конформный гомеоморфизм между областями D и $f(D)$. Верно и обратное: функция, реализующая конформный гомеоморфизм $f : D \longrightarrow G$ — аналитическая и однолистная в D.

5. Гармонические функции и их связь с аналитическими функциями

Определение 8. *Функция $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ называется гармонической в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если в этой области существуют частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, удовлетворяющие уравнению Лапласа*

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Теорема 7. *Предположим, что функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка и аналитична в области D. Тогда ее вещественная и мнимая части — гармонические в области D функции.*

◀ Обозначим

$$z = x + iy\,, \quad u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)\,, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)\,.$$

Так как функция f — аналитическая, то ее вещественная и мнимая части связаны равенствами Коши — Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial v}{\partial y}\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv -\dfrac{\partial v}{\partial x}\,. \end{cases} \tag{24.17}$$

Дифференцируя первое из этих тождеств по x, а второе — по y и складывая полученные равенства, найдем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \equiv 0$$

в силу теоремы о смешанных производных.

Дифференцируя первое из равенств (24.17) по y, а второе — по x, вычитая затем второе из полученных равенств из первого, найдем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \equiv 0\,.$$

Таким образом, обе функции u, v — гармонические. ▶

Замечание. Не всякую пару гармонических функций можно взять в качестве вещественной и мнимой частей некоторой аналитической функции, а только такую, которая удовлетворяет уравнениям Коши — Римана (24.17). Такие функции называются *гармонически сопряженными*. В связи с этим возникает вопрос: можно ли к данной гармонической функции $u(x,y)$ подобрать гармонически сопряженную? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

Теорема 8. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, а функция $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ гармонична в D. Существует функция $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, гармонически сопряженная к функции $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, и все такие функции содержатся в формуле*

$$v(x,y) = C + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right)\,,$$

где $(x_0,y_0) \in D$, $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная, а интегрирование ведется по любому пути из (x_0,y_0) в (x,y), лежащему в D.

◀ Используя уравнения Коши — Римана (24.17), имеем

$$v(x,y) = C + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv = C + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) =$$

$$= C + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right),$$

причем последний интеграл не зависит от пути, так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

в силу гармоничности функции u. ▶

6. Гидромеханическая интерпретация аналитических функций

Рассмотрим стационарное, плоскопараллельное течение идеальной жидкости. Стационарность означает, что вектор скорости каждой частицы жидкости зависит только от ее координат, но не зависит от времени. Плоскопараллельность означает, что существует плоскость, такая, что векторы скоростей всех находящихся в ней частиц жидкости тоже лежат в этой плоскости. Кроме того, скорости всех частиц, лежащих на одном и том же перпендикуляре к данной плоскости, одинаковы, и это справедливо для всех таких перпендикуляров.

Принимая одну из этих плоскостей за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, заключаем, что вектор скорости можно считать комплексной функцией комплексного переменного $z = x + iy$:

$$\boldsymbol{v}(z) = v_1(x,y) + iv_2(x,y)\,.$$

Предположим, что в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функции v_1 и v_2 имеют непрерывные частные производные. Предположим, кроме того, что течение жидкости является *безвихревым* и *соленоидальным.* То, что поле является безвихревым, означает, что тождественно равен нулю ротор (вихрь) поля скоростей т. е.

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \mathbf{0}\,,$$

где ζ — аппликата[6], а $\dfrac{\partial v_1}{\partial \zeta} \equiv \dfrac{\partial v_2}{\partial \zeta} \equiv 0$, так как v_1 и v_2 зависят только от x и y. Таким образом, условие отсутствия вихря у поля скоростей выражается равенством

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \equiv 0\,.$$

Это условие показывает, что выражение $d\varphi = v_1\,dx + v_2\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $\varphi = \varphi(x,y)$, называемой *потенциалом.* Поэтому безвихревые поля называются также *потенциальными.*

Обратимся теперь к условию соленоидальности поля. Это условие означает, что данное векторное поле — подобное полю соленоида, трубчатое, т. е. не имеющее источников и стоков. Поэтому дивергенция такого поля тождественно равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div} v(z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \equiv 0\,.$$

Это условие показывает, что выражение $d\psi = -v_2\,dx + v_1\,dy$ тоже является полным дифференциалом некоторой функции $\psi = \psi(x,y)$. На линиях $\psi(x,y) \equiv \mathrm{const}$ имеем $d\psi(x,y) = -v_2\,dx + v_1\,dy \equiv 0$, т. е. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_2}{v_1}$. Это равенство означает, что касательная к линии $\psi(x,y) = \mathrm{const}$ в точке (x,y) коллинеарна вектору скорости $v_1 + iv_2$ в этой точке. Значит, частицы жидкости текут вдоль линий $\psi(x,y) = \mathrm{const}$. Поэтому эти линии называются *линиями тока*, а функция ψ — *функцией тока.*

Сравнивая дифференциальные формы

$$d\varphi = v_1\,dx + v_2\,dy \quad \text{и} \quad d\psi = -v_2\,dx + v_1\,dy \equiv 0\,,$$

[6] *Аппликата* — координата точки, лежащей на оси аппликат, перпендикулярной к осям абсцисс (x) и ординат (y).

имеем

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\,, \\ v_2 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Это значит, что функции φ и ψ удовлетворяют системе уравнений Коши — Римана, поэтому функция

$$f(z) := \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

является аналитической в области D. Она называется *комплексным потенциалом* данного течения.

Таким образом, каждому течению сопоставляется его комплексный потенциал. Так как комплексный потенциал f аналитичен в D, то существует производная $f'(z)$, равная

$$f'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_1 - iv_2\,.$$

Отсюда следует, что вектор скорости данного течения выражается через комплексный потенциал в виде

$$v_1 + iv_2 = \overline{f'(z)}\,.$$

Это равенство показывает, что комплексный потенциал полностью задает течение жидкости в области D.

Таким образом, функции, аналитические в однолистной области D, можно интерпретировать как комплексные потенциалы некоторых плоскопараллельных течений жидкости.

Пример. Найти комплексный потенциал f бесконечно глубокого течения над плоским дном, обтекающего препятствие высотой h (см. рис. 2), при дополнительном условии, что скорость на бесконечности равна 1, т. е. $\lim\limits_{z\to\infty} f'(z) = 1$.

Для решения этой задачи заметим, что дно и препятствие должны быть линиями тока. Поэтому, обозначая $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, мы примем, что $\psi(x,y) \equiv 0$, когда (x,y) лежит на дне или на препятствии. Таким образом, для нахождения аналитической функции f имеем следующее краевое условие: $\operatorname{Im} f(z) = 0$, когда точка z лежит на дне или на препятствии. Кроме того, должно быть $f(z) \sim z$ при $z \to \infty$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Задача будет решена, если в качестве комплексного потенциала f взять конформный гомеоморфизм области течения на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$. Но такой гомеоморфизм легко построить, что и будет сделано ниже.

Функция $t = z^2$ отображает область течения на плоскость t с горизонтальным разрезом, соединяющим точку $-h^2$ с точкой $+\infty$.

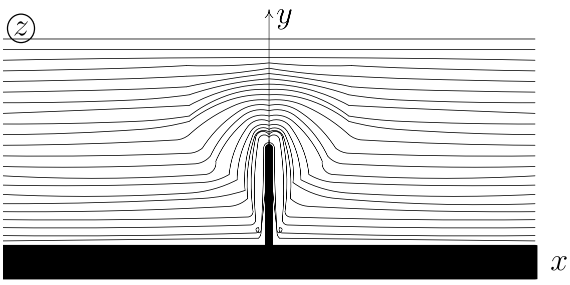

Рис.2. Обтекание вертикального отрезка

Функция $\zeta = t + h^2$ отображает предыдущую область на плоскость ζ, разрезанную по положительной части вещественной оси.

Функция $w = \sqrt{\zeta}$ отображает предыдущую область на верхнюю полуплоскость. Таким образом, искомая функция имеет вид

$$w = \sqrt{z^2 + h^2}\,,$$

где непрерывная ветвь корня должна быть найдена из условия $\sqrt{z^2 + h^2} \sim z$ при $z \to \infty$.

Глава 25

НЕКОТОРЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РЕАЛИЗУЕМЫЕ ИМИ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Дробно-линейные функции и их основные свойства

1. Дробно-линейные функции. Число параметров. Групповое свойство

Определение 9. *Дробно-линейной функцией называется любая отличная от постоянной функция, которую можно задать уравнением вида*

$$w = w(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,, \tag{25.1}$$

где a, b, c, d *— числовые коэффициенты.*

Условие отличия от тождественной постоянной функции (25.1) можно выразить неравенством

$$w'(z) = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2} \not\equiv 0\,, \tag{25.2}$$

которое равносильно следующему

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Очевидно, что дробно-линейная функция (25.1) не изменится, если числитель и знаменатель дроби (25.1) умножить на одно и то же число, отличное от нуля. Умножая числитель и знаменатель дроби (25.1) на

$\dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}$, можно привести функцию (25.1) к виду

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1\,. \tag{25.3}$$

В самом деле, полагая $\alpha := \dfrac{a}{\sqrt{\Delta}}$, $\beta := \dfrac{b}{\sqrt{\Delta}}$, $\gamma := \dfrac{c}{\sqrt{\Delta}}$, $\delta := \dfrac{d}{\sqrt{\Delta}}$, имеем

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{d}{\sqrt{\Delta}} \end{vmatrix} = 1\,.$$

Нормировка (25.3) иногда используется.

Полагая в равенстве (25.1) $c = 0$, получим *целую линейную функцию*

$$w = Az + B\,, \quad \text{где} \;\; A = \frac{a}{d}\,,\; B = \frac{b}{d}\,. \tag{25.4}$$

Таким образом, целая линейная функция есть частный случай дробно-линейной функции. Рассмотрим частные случаи целой линейной функции. При $A = 1$ имеем параллельный перенос

$$w = z + B\,.$$

При $B = 0$ функция (25.4) становится $\mathbb{C}$-линейной

$$w = A \cdot z\,.$$

Полагая здесь $A = |A| \cdot e^{i\theta}$, можно представить $\mathbb{C}$-линейную функцию в виде композиции гомотетии (растяжения или сжатия)

$$\zeta = |A| \cdot z$$

и поворота на угол θ:

$$w = e^{i\theta}\zeta$$

И, наконец, из (25.4) при $A = 1$, $B = 0$ получим тождественное отображение $w = z$, которое также является частным случаем дробно-линейной функции.

Теорема 9 (о числе параметров). *Множество всех дробно-линейных функций зависит от трех комплексных параметров и является многообразием комплексной размерности три.*

◀ Нормируя дробно-линейные функции, можно задавать их уравнениями вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1\,.$$

Рассмотрим теперь множество M всех точек $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, связанных уравнением

$$ad - bc = 1\,.$$

Множество $M \subset \mathbb{C}^4$ — многообразие комплексной размерности три, т. е. любая точка $(a_0,\ b_0,\ c_0,\ d_0) \in M$ имеет окрестность, гомеоморфную некоторой окрестности из $\mathbb{C}^3$. В самом деле, так как $a_0d_0 - b_0c_0 = 1$, то хотя бы одно из этих чисел a_0, b_0, c_0, d_0 отлично от нуля. Пусть, например, $a_0 \neq 0$. Выберем окрестность точки $(a_0,\ b_0,\ c_0)$ так, чтобы было $a \neq 0$ для всех точек этой окрестности. В пределах этой окрестности три параметра $a,\ b,\ c$ можно задать произвольно, а четвертый d через них выразить: $d = \dfrac{1+bc}{a}$. Аналогично рассматриваются случаи $b_0 \neq 0,\ c_0 \neq 0,\ d_0 \neq 0$.

Если в многообразии M отождествить каждую пару точек вида $(a\,,\ b\,,\ c\,,\ d)$ и $(-a\,,\ -b\,,\ -c\,,\ -d)$, то получится многообразие M', которое также имеет комплексную размерность три. С другой стороны, имеется биективное соответствие между многообразием M' и множеством всех дробно-линейных функций: именно, паре точек $(a,\ b,\ c,\ d)$, $(-a,\ -b,\ -c,\ -d)$ соответствует одна дробно-линейная функция

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{-az-b}{-cz-d}\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 10 (групповое свойство). *Множество всех дробно-линейных функций вместе с операцией композиции функций является группой.*

◀ Пусть

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{и} \quad L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

— дробно-линейные функции. Образуем их композицию

$$(L_1 \circ L_2)(z) = L_1(L_2(z)) = \frac{a_1 L_2(z) + b_1}{c_1 L_2(z) + d_1} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \cdot \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2) z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)} .$$

Таким образом, композиция дробно-линейных функций есть дробно-линейная функция. Иначе говоря, на множестве всех дробно-линейных функций определена бинарная операция $\circ$ (композиция). Так как операция композиции любых отображений ассоциативна, то на множестве всех дробно-линейных функций выполняется аксиома ассоциативности. В качестве единичного элемента возьмем тождественное отображение $E(z) \equiv z$. Для него имеем

$$(L \circ E)(z) = L(E(z)) = L(z) \quad \Longrightarrow \quad L \circ E = L .$$

Аналогично

$$(E \circ L)(z) = E(L(z)) = L(z) \quad \Longrightarrow \quad E \circ L = L .$$

Пусть дробно-линейная функция L задается уравнением

$$w = \frac{az + b}{cz + d} .$$

Построим обратную к ней функцию

$$w \cdot (cz + d) = az + b \;\Rightarrow\; z \cdot (cw - a) = b - dw ,$$

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} .$$

Принимая ее за элемент L^{-1}, имеем

$$(L^{-1} \circ L)(z) = L^{-1}(L(z)) \equiv z \;\Rightarrow\; L^{-1} \circ L = E .$$

$$(L \circ L^{-1})(z) = L(L^{-1}(z)) \equiv z \;\Rightarrow\; L \circ L^{-1} = E\,.$$

Итак, основные свойства групп для множества всех дробно-линейных функций выполнены. ▶

Замечания. 1. Легко видеть, что группа всех дробно-линейных функций не коммутативна. Пусть, например,

$$L_1(z) = \frac{1}{z}\,, \quad L_2(z) = z + 1\,.$$

Имеем

$$(L_1 \circ L_2)(z) = L_1(L_2(z)) = \frac{1}{L_2(z)} = \frac{1}{z+1}\,;$$
$$(L_2 \circ L_1)(z) = L_2(L_1(z)) = L_1(z) + 1 = \frac{1}{z} + 1 = \frac{z+1}{z}\,.$$

Так как $\dfrac{1}{z+1} \neq \dfrac{z+1}{z}$, то $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$.

2. Группа всех дробно-линейных функций имеет бесконечное множество подгрупп. Перечислим здесь некоторые из них.

1) Множество всех целых линейных функций, т. е. функций вида

$$w = Az + B\,, \quad \text{где} \;\; A\,,\; B \in \mathbb{C}\,,\; A \neq 0\,,$$

есть подгруппа группы дробно-линейных функций. В самом деле, пусть $L_1(z) = A_1 z + B_1$, $L_2(z) = A_2 z + B_2$. Имеем

$$(L_1 \circ L_2)(z) = L_1(L_2(z)) = A_1 L_2(z) + B_1 = A_1(A_2 z + B_2) + B_1 =$$
$$= A_1 A_2 z + (A_1 B_2 + B_1)\,.$$

Таким образом, композиция целых линейных функций есть целая линейная функция. Так как $(L_2 \circ L_1)(z) = A_1 A_2 z + (A_2 B_1 + B_2)$ и, вообще говоря, $A_1 B_2 + B_1 \neq$ $\neq A_2 B_1 + B_2$, то подгруппа всех целых линейных функций тоже не коммутативна. Так как эта подгруппа зависит от двух комплексных параметров $A \in \mathbb{C}\diagdown\{0\}$, $B \in \mathbb{C}$, которые могут принимать произвольные значения, то ее можно считать многообразием, гомеоморфным пространству $\mathbb{C} \times \mathbb{C}\diagdown\{0\}$. Рассмотрим некоторые другие подгруппы целых линейных функций.

a) Подгруппа параллельных переносов, т. е. функций вида $w = z + B$. Она коммутативна и изоморфна группе $\mathbb{C}$.

b) Периодические подгруппы, т. е. подгруппы, состоящие из функций вида $w = z + n\omega$, где $\omega \neq 0$ — фиксированное число, $n \in \mathbb{Z}$. Такие группы изоморфны группе $\mathbb{Z}$ всех целых чисел.

c) Двоякопериодические подгруппы, состоящие из функций вида

$$w = z + n\omega_1 + m\omega_2\,, \quad \text{где} \quad n\,,\; m \in \mathbb{Z} \;\text{— любые}\,,$$

а ω_1, ω_2 — фиксированные числа, такие, что $\operatorname{Im}\dfrac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$. Двоякопериодическая подгруппа изоморфна $\mathbf{Z}^2$.

d) Подгруппа всех $\mathbb{C}$-линейных функций $w = A \cdot z$ коммутативна, изоморфна мультипликативной группе $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$.

e) Подгруппа всех гомотетий, т. е. отображений вида $w = |A| \cdot z$, где $A \neq 0$ изоморфна мультипликативной группе положительных чисел $\mathbb{R}_+$.

f) Подгруппа всех поворотов, т. е. отображений вида $w = e^{i\theta} z$ (поворот на угол $\theta \in \mathbb{R}$), изоморфна группе вращений окружности.

g) Дискретные подгруппы поворотов, которые для каждого $n \in \mathbb{N}$ задаются как множества всех поворотов вида $w = \varepsilon^k \cdot z$, где $\varepsilon := 2\pi i / n$, изоморфные группам вращений правильных n-угольников.

h) Конечная подгруппа $\{L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}$, где

$$L_0(z) \equiv z\,,\ L_1(z) = \frac{1}{z}\,,\ L_2(z) = 1 - z\,,\ L_3(z) = \frac{1}{1-z}\,,\ L_4(z) = \frac{z-1}{z}\,,\ L_5(z) = \frac{z}{z-1}\,.$$

2. Конформность и круговое свойство дробно-линейных отображений.

Целая линейная функция $w(z) = Az + B$ определена всюду на $\mathbb{C}$. Доопределим ее до функции на $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, полагая $w(\infty) := \infty$. Так как $A \neq 0$, то $\lim\limits_{z\to\infty} w(z) = \lim\limits_{z\to\infty}(Az+B) = \infty = w(\infty)$. Это показывает, что целая линейная функция, доопределенная на $\widehat{\mathbb{C}}$, непрерывна (в сферической метрике (24.4)).

Проделаем аналогичное доопределение для дробно-линейной функции, не сводящейся к целой линейной функции. Пусть

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\,,\ c \neq 0$$

— дробно-линейная функция. Доопределим ее в точках $z = -\dfrac{d}{c}$ и $z = \infty$, полагая

$$w\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty\,, \quad w(\infty) := \frac{a}{c}\,.$$

Так как

$$\lim_{z\to-\frac{d}{c}} w(z) = \lim_{z\to-\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty = w\left(-\frac{d}{c}\right),$$
$$\lim_{z\to\infty} w(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = w(\infty),$$

то дробно-линейная функция, продолженная указанным образом в точки $z = -\dfrac{d}{c}$ и $z = \infty$, становится непрерывной на $\widehat{\mathbb{C}}$ (в сферической метрике (24.4)).

Определение 10. *Дробно-линейным отображением будем называть дробно-линейную функцию, продолженную по непрерывности на расширенную комплексную плоскость* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Для исследования вопроса о конформности дробно-линейных отображений надо обобщить понятие конформности отображения $f\ :\ z \longmapsto w$ на те случаи, когда точки z, w (одна или обе) совпадают с точкой ∞.

Определение 11. *Локальной координатой в окрестности точки* $z = \infty$ *называется переменная* t, *связанная с переменной* z *отображением*

$$t = \varphi(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & z \neq \infty, \\ 0, & z = \infty. \end{cases}$$

Это отображение по определению считается конформным в точке $z = \infty$.

Определение 12. *Пусть при отображении* $f\ :\ z_0 \longmapsto w_0$ *одна или обе точки* z_0, w_0 *равны* ∞. *Такое отображение считается конформным в точке* z_0, *если конформным оказывается отображение, полученное из* $w = f(z)$ *после перехода к локальным координатам в окрестности соответствующей бесконечно удаленной точки.*

Теорема 11. *Всякое дробно-линейное отображение есть конформный гомеоморфизм* $\widehat{\mathbb{C}}$ *на* $\widehat{\mathbb{C}}$.

◀ Рассмотрим сначала случай целого линейного отображения $w(z) = Az + B,\ A \neq 0,\ w(\infty) = \infty$. Как отмечалось выше, оно непрерывно на $\widehat{\mathbb{C}}$. Построим обратное к нему отображение

$$z(w) = \frac{w - B}{A}\,, \text{ если } w \neq \infty\,, \text{ и } z(\infty) = \infty\,.$$

Оно также является целым линейным отображением, непрерывным на $\widehat{\mathbb{C}}$. Таким образом, целое линейное отображение есть гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$. Докажем его конформность. Если $z \neq \infty$, то $w'(z) \equiv A \neq 0$ и тем самым конформность установлена (см. теорему 6). Если $z = \infty$, то переходим к локальным координатам, полагая

$$\zeta = \begin{cases} \dfrac{1}{w}\,, \ w \neq \infty\,, \\ 0\,, \ w = \infty\,; \end{cases} \qquad t = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,, \ z \neq \infty\,, \\ 0\,, \ z = \infty\,. \end{cases}$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{A}{t} + B\,, \quad \text{откуда} \quad \zeta = \frac{t}{A + Bt}\,, \ \zeta(0) = 0\,.$$

Имеем

$$\zeta'(0) = \left.\frac{A + Bt - Bt}{(A + Bt)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{A} \neq 0\,.$$

Итак, конформность имеет место и в точке $z = \infty$.

Рассмотрим теперь случай дробно-линейного отображения, не сводящегося к целому

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,, \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\,, \ c \neq 0\,, \ w(\infty) = \frac{a}{c}\,, \ w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty\,.$$

Как отмечалось выше, оно непрерывно $\widehat{\mathbb{C}}$. Построим обратное к нему отображение

$$z(w) = \frac{-dw + b}{cw - a},\ z(\infty) = -\frac{d}{c},\ z\left(\frac{a}{c}\right) = \infty\,.$$

Оно также является дробно-линейным и, значит, непрерывным на $\widehat{\mathbb{C}}$. Тем самым установлено, что дробно-линейное отображение есть гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$. Осталось показать, что он конформный. Если $z \neq \infty$

и $z \neq -\dfrac{d}{c}$, то

$$w'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2} \neq 0\,,$$

и тем самым конформность установлена.

Если $z = \infty$, то полагая $z = \dfrac{1}{t}$, получим

$$w(t) = \frac{\dfrac{a}{t} + b}{\dfrac{c}{t} + d} = \frac{a+bt}{c+dt}\,, \quad w(0) = \frac{a}{c}\,;$$

$$w'(0) = \left.\frac{\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}}{(c+dt)^2}\right|_{t=0} = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c^2} \neq 0\,.$$

Если $z = -\dfrac{d}{c}$, то, полагая $w = \dfrac{1}{\zeta}$, получим

$$\zeta = \frac{cz+d}{az+b}\,, \quad \zeta\left(-\frac{d}{c}\right) = 0\ ;$$

$$\zeta'\left(-\frac{d}{c}\right) = \left.\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(az+b)^2}\right|_{z=-\frac{d}{c}} = -\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{\left(-\dfrac{ad}{c} + b\right)^2} = -\frac{c^2}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \neq 0\,.$$

Таким образом, конформность установлена всюду на $\widehat{\mathbb{C}}$. ►

Замечания. 1. В дальнейшем (в главе 27) будет показано, что верно и обратное, а именно: *любое конформное отображение расширенной комплексной плоскости на себя есть дробно-линейное отображение* (25.1).

2. Переходя к пределу в равенстве (24.4) при $z_1 \to z = z_2$, можно получить для дифференциала дуги на сфере $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ следующее равенство: $ds = \dfrac{|dz|}{|z|^2+1}$. Исходя из этого равенства, можно показать, что стереографическая проекция (24.3) есть гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{S}^2$, конформный в смысле постоянства растяжений и сохранения углов в каждой точке.

Определение 13. *Окружностью на* $\widehat{\mathbb{C}}$ *(или короче,* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружностью) будем называть образ при стереографической проекции любой окружности, лежащей на сфере Римана.*

Теорема 12. *Любая* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность есть либо обычная окружность на* $\mathbb{C}$*, либо прямая линия вместе с присоединенной к ней точкой* ∞*. Любую* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность можно задать уравнением вида*

$$Ez\overline{z} + Fz + \overline{F}\overline{z} + G = 0\,, \tag{25.5}$$

где не все коэффициенты E, F, G *равны нулю, причем* $F \in \mathbb{C}$, E, $G \in \mathbb{R}$*. Обратно, любое уравнение вида* (25.5) *задает либо* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность, либо одну точку, либо пустое множество.*

◀ На сфере Римана зададим окружность как пересечение сферы и плоскости

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\,, \\ A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0\,, \end{cases} \tag{25.6}$$

где не все коэффициенты $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ равны нулю. Переходя по формулам стереографической проекции (24.3) к координатам плоскости $z = x + iy$, получим

$$A \cdot \frac{2x}{|z|^2+1} + B \cdot \frac{2y}{|z|^2+1} + C \cdot \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} + D = 0\,.$$

Освобождаясь от знаменателя, найдем

$$2Ax + 2By + (D + C)|z|^2 + (D - C) = 0\,.$$

Обозначая $E = D + C$, $G = D - C$, имеем

$$A(z + \overline{z}) - Bi(z - \overline{z}) + E|z|^2 + F = 0\,.$$

Полагая здесь $F = A - iB$, получим уравнение (25.5), где E, $G \in \mathbb{R}$, и не все коэффициенты E, F, G равны нулю, так как не все коэффициенты A, B, C, D равны нулю. Обратно, если дано уравнение (25.5), то из равенств $E = D + C$, $G = D - C$, $F = A - iB$ легко находятся A, B, C, D. Тем самым от уравнения (25.5) можно перейти к системе (25.6). А эта система изображает пересечение сферы и плоскости, которое может быть либо пустым, либо одноточечным, либо окружностью. ▶

Теорема 13 (круговое свойство). *Образом любой $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности при любом дробно-линейном отображении является $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность.*

◀ Рассмотрим сначала случай целого линейного отображения $w = L(z) = Az + B$, где $A = |A| \cdot e^{i\theta} \neq 0$, $L(\infty) = \infty$. Его можно представить в виде композиции трех отображений $L = L_3 \circ L_2 \circ L_1$, где $L_1(z) = |A| \cdot z$, $L_2(t) = e^{i\theta} t$, $L_3(\zeta) = \zeta + B$:

$$L \,:\, z \xmapsto{L_1} |A| \cdot z = t \xmapsto{L_2} e^{i\theta} t = \zeta \xmapsto{L_3} \zeta + B = w\,.$$

Отображение L_1 — гомотетия (подобие), отображение L_2 — поворот, отображение L_3 — параллельный перенос. Каждое из них переводит окружности на окружности, а прямые — на прямые, т. е. обладают круговым свойством. Следовательно, и их композиция, т. е. отображение $L(z) = Az + B$, также обладает круговым свойством.

Пусть теперь L — дробно-линейное отображение, не являющееся целым, т. е.

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,, \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \ c \neq 0\,.$$

Преобразуем его к виду

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a\left(z + \dfrac{d}{c}\right) + \left(b - \dfrac{ad}{c}\right)}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c(cz + d)}$$

и представим в виде композиции $L = L_3 \circ L_2 \circ L_1$, где

$$t = L_1(z) := c \cdot (cz + d)\,, \ \zeta = L_2(t) = \frac{1}{t}\,, \ L_3(\zeta) = \frac{a}{c} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \zeta\,.$$

Отображения L_1 и L_3 — целые и, по доказанному выше, они обладают круговым свойством. Осталось только показать, что отображение $L_2(t) = \dfrac{1}{t}$ обладает круговым свойством. Пусть

$$Et\bar{t} + Ft + \overline{F}\bar{t} + G = 0$$

— уравнение $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности в плоскости t. Производя замену $t = \dfrac{1}{\zeta}$, получим

$$\frac{E}{\zeta\overline{\zeta}} + \frac{F}{\zeta} + \frac{\overline{F}}{\overline{\zeta}} + G = 0\,.$$

Умножая это равенство на $\zeta \cdot \overline{\zeta}$, найдем

$$G\zeta\overline{\zeta} + \overline{F}\zeta + F\overline{\zeta} + E = 0\,.$$

Это уравнение по теореме 12 есть уравнение $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности в плоскости переменного ζ. Таким образом, $L_2(t) = \dfrac{1}{t}$ обладает круговым свойством. Так как $L = L_3 \circ L_2 \circ L_1$, и L_1, L_2, L_3 обладают круговым свойством, то и L обладает круговым свойством. ►

Определение 14. *Открытым $\widehat{\mathbb{C}}$-кругом называется область, границей которой является $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность* (*т. е. либо внутренность круга, либо открытая полуплоскость, либо внешность круга вместе с точкой ∞*).

Определение 15. *Замкнутым $\widehat{\mathbb{C}}$-кругом называется замыкание открытого $\widehat{\mathbb{C}}$-круга* (*т. е. либо замкнутый круг в $\mathbb{C}$, либо замкнутая полуплоскость вместе с точкой ∞, либо замыкание внешности круга вместе с точкой ∞*).

Следствие. *Образом любого $\widehat{\mathbb{C}}$-круга при любом дробно-линейном отображении является $\widehat{\mathbb{C}}$-круг.*

◄ Из теорем 11 и 13 вытекает, что дробно-линейное отображение отображает дополнение $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности на дополнение $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности. Каждое из этих дополнений не связно и состоит из двух связных компонент (открытых $\widehat{\mathbb{C}}$-кругов). Так как при гомеоморфизмах образ связного множества связан, то образом $\widehat{\mathbb{C}}$-круга может быть только $\widehat{\mathbb{C}}$-круг. При этом образ открытого $\widehat{\mathbb{C}}$-круга открыт, а образ замкнутого $\widehat{\mathbb{C}}$-круга замкнут. ►

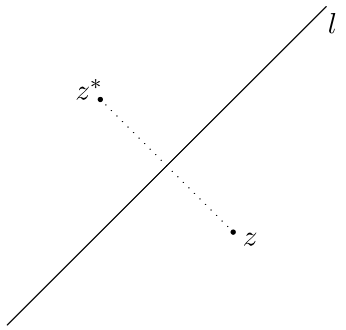

Рис. 3. Симметрия относительно прямой

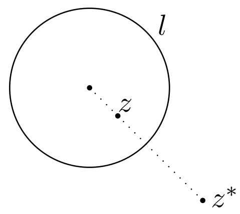

Рис. 4. Симметрия относительно окружности

3. Пары точек, симметричные относительно $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности. Свойство сохранения симметричных пар точек

Пары точек z, z^*, симметричных относительно прямой и окружности соответственно, показаны на рисунках 3 и 4.

Определение 16. *Две точки z и z^* называются симметричными относительно прямой l, если они лежат на одном и том же перпендикуляре к прямой l, по разные стороны и на равном расстоянии от прямой l.*

Очевидно, что точка z лежит на прямой l, если и только если она симметрична сама себе относительно этой прямой, т. е.

$$z \in l \iff z^* = z\,.$$

Кроме того, $\infty^* = \infty$ относительно любой прямой l.

Теорема 14. *Для того, чтобы две различные точки z и z^* были симметричными относительно прямой l, необходимо и достаточно, чтобы любая $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, проходящая через точки z и z^*, была ортогональной к прямой l.*

◀ Предположим, что любая $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, проведенная через точки z и z^*, ортогональна к l. Беря в качестве $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности прямую линию, проходящую через точки z и z^*, заключаем, что точки z и z^* лежат на одном и том же перпендикуляре к прямой l. Проведем теперь через точки z и z^* какую-либо окружность L. Она тоже ортогональна к l, и значит, центр окружности L должен лежать на l. Поэтому точки z и z^* лежат по разные стороны от l.

Далее, прямоугольные треугольники OKz и OKz^* конгруэнтны, так как у них общий катет, а длины гипотенуз равны как радиусы окружности L. Отсюда следует, что $|zK| = |z^*K|$, и тем самым точки z и z^* симметричны относительно прямой l.

Обратно, пусть точки z и z^* симметричны относительно прямой l. По определению прямая, проходящая через точки z и z^*, ортогональна к l. Проведем через точки z и z^* любую окружность L. Из того, что l есть множество точек, равноудаленных от z и z^*, следует, что центр O окружности L лежит на прямой l. Значит, l и L ортогональны. ►

Определение 17. *Точки z и z^* называются симметричными относительно окружности l радиуса R с центром в точке a, если обе эти точки лежат на одном и том же луче с вершиной в точке a, причем $|z^* - a| \cdot |z - a| = R^2$.*

Из этого определения видно, что симметрию точек z и z^* относительно окружности l можно выразить системой уравнений:

$$\begin{cases} |z^* - a| = \dfrac{R^2}{|z - a|}\,, \\ \arg(z^* - a) = \arg(z - a)\,. \end{cases}$$

Эта система равносильна одному комплексному уравнению[1]

$$z^* - a = \frac{R^2}{\overline{(z - a)}}\,. \tag{25.7}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to a$, получим $z^* \to \infty$. Отсюда естественно принять, что центр a окружности l и точка ∞ симметричны относительно этой окружности. Далее, уравнение (25.7) можно записать в виде

$$(z^* - a) \cdot \overline{(z - a)} = R^2.$$

[1]Из равенства (25.7) очевидно, что отображение симметрии представимо в виде композиции комплексного сопряжения и дробно-линейного отображения. Поэтому оно обладает круговым свойством и сохраняет абсолютные величины углов, меняя только их знаки.

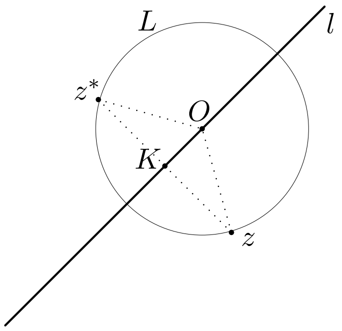

Рис. 5. К теореме 14

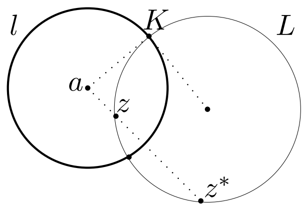

Рис. 6. К теореме 15

Полагая здесь $z = z^*$, получим $|z - a| = R$ (уравнение окружности l). Это означает, что точка z симметрична сама себе относительно окружности l, если и только если она лежит на этой окружности.

Теорема 15. *Для того, чтобы две различные точки z и z^* были симметричными относительно окружности l, необходимо и достаточно, чтобы любая $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, проведенная через точки z и z^*, была ортогональной к окружности l.*

◀ Предположим, что любая $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, проходящая через точки z и z^*, ортогональна к l. В частности, прямая, проходящая через точки z и z^*, ортогональна к l. Значит, эта прямая проходит через центр окружности l. Кроме того, точки z и z^* лежат по разные стороны от окружности l. Пусть L – окружность, проходящая через точки z и z^*. Она пересекается с l и ортогональна к l. Значит, касательные в точке пересечения ортогональны и поэтому проходят через центры окружностей. По теореме о касательной и секущей[2] имеем: $|z^* - a| \cdot |z - a| = R^2$, т. е. точки z и z^* симметричны.

Обратно, пусть точки z и z^* симметричны относительно окружности l. Тогда прямая, проходящая через точки z и z^*, проходит и через центр окружности l и, значит, ортогональна к l. Этим исчерпывается случай, когда одна из точек z и z^* есть ∞. Если же обе точки конеч-

[2]Речь идет о следующей теореме: *если из данной точки проведены касательная и секущая к данной окружности, то произведение длин секущей и ее внешней части равно квадрату длины касательной.*

ны, то проведем через них любую окружность L, и пусть K — точка пересечения окружностей. Так как $|z^* - a| \cdot |z - a| = R^2 = |aK|^2$, то прямая aK — касательная к окружности l. Отсюда видно, что в точке K окружности l и L ортогональны. ▶

Замечание. Напомним, что $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностью называется окружность или прямая вместе с точкой ∞. Определения 16 и 17 позволяют говорить о *симметрии относительно* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружности.* Именно, когда речь идет о симметрии относительно прямой (окружности), то имеется в виду соответствующее определение. Используя понятие симметрии относительно $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности, можно сформулировать обе теоремы 14 и 15 в виде одного текста: *для того, чтобы две различные точки* z *и* z^* *были симметричными относительно данной* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружности, необходимо и достаточно, чтобы любая проходящая через них* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружность была ортогональной к данной* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружности.*

Теорема 16. *При дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно любой* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружности, переходит на пару точек, симметричных относительно образа этой* $\widehat{\mathbb{C}}$*-окружности.*

◀ Пусть l — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, z, z^* — пара точек, симметричных относительно l, а $w : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ — дробно-линейное отображение. Рассмотрим множество всех $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей, проходящих через точки z и z^*. По теоремам 14 и 15 они ортогональны к l. По круговому свойству образы всех $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей при дробно-линейном отображении являются $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностями. Обозначим $L = w(l)$ — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, $w = w(z)$, $w^* = w(z^*)$. В плоскости w возникает семейство $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей, проходящих через точки w и w^*. По свойству конформности полученное семейство $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей ортогонально к $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности L. Отсюда на основании теорем 14 и 15 заключаем, что точки w и w^* симметричны относительно $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности L. ▶

4. Построение дробно-линейных отображений с заданными свойствами

Теорема 17. *Для того, чтобы дробно-линейное отображение было целым линейным, необходимо и достаточно, чтобы оно отобра-*

жало точку ∞ на точку ∞.

◀ Пусть дробно-линейное отображение является целым линейным, т. е. $w(z) = az + b$, $a \neq 0$. Так как $\lim\limits_{z\to\infty}(az+b) = \infty$, то $w(\infty) = \infty$. Обратно, пусть $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, и $w(\infty) = \infty$. Последнее можно записать так

$$\lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \infty\,,$$

а это возможно лишь тогда, когда $c = 0$, $a \neq 0$, т. е. когда $w(z) = \dfrac{a}{d}\cdot z + \dfrac{b}{d}$ — целая линейная функция. ▶

Теорема 18. *Существует единственное дробно-линейное отображение $L : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, принимающее в трех наперед заданных точках из $\widehat{\mathbb{C}}$ любые три наперед заданные различные значения из $\widehat{\mathbb{C}}$.*

◀ Пусть z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ — попарно различные точки и пусть w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{C}$ — другие три попарно различные точки. Будем искать дробно-линейное отображение $L : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ со свойствами

$$\begin{cases} L(z_1) = w_1\,, \\ L(z_2) = w_2\,, \\ L(z_3) = w_3\,. \end{cases}$$

Построим сначала вспомогательные дробно-линейные отображения $P : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ и $Q : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ со свойствами

$$\begin{cases} P(z_1) = 0\,, \\ P(z_2) = 1\,, \\ P(z_3) = \infty\,; \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} Q(w_1) = 0\,, \\ Q(w_2) = 1\,, \\ Q(w_3) = \infty\,. \end{cases}$$

В случае, когда все точки z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 — конечные, эти отображения имеют следующие выражения:

$$P(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\,, \quad Q(w) = \frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}\,. \tag{25.8}$$

Искомое отображение L может быть найдено в виде композиции $L = Q^{-1}\circ P$ или $L(z) = Q^{-1}(P(z))$, и его можно найти как решение относительно w уравнения

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}\,. \tag{25.9}$$

Если среди точек z_1, z_2, z_3 или среди точек w_1, w_2, w_3 есть ∞, то отображения P и Q можно получить, переходя к пределу в соответствующем равенстве (25.8), когда соответствующий параметр z_k или w_j стремится к ∞. Например, если $z_3=\infty$, $w_2=\infty$, то переходя к пределу в (25.8), когда $z_3\to\infty$ и $w_2\to\infty$, получим

$$P(z)=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},\quad Q(w)=\frac{w-w_1}{w-w_3}\,. \tag{25.10}$$

Аналогично рассматриваются другие подобные случаи.

Итак, искомое отображение $L=Q^{-1}\circ P$ построено. Чтобы доказать его единственность, возьмем любое отображение $T:\ \widehat{\mathbb{C}}\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ с теми же свойствами

$$\begin{cases} T(z_1)=w_1\,,\\ T(z_2)=w_2\,,\\ T(z_3)=w_3\,.\end{cases}$$

Рассмотрим отображение $Q\circ T\circ P^{-1}$. Оно дробно-линейное в силу группового свойства. Далее,

$$\begin{cases} (Q\circ T\circ P^{-1})(0)=0\,,\\ (Q\circ T\circ P^{-1})(1)=1\,,\\ (Q\circ T\circ P^{-1})(\infty)=\infty\,.\end{cases}$$

на основании теоремы 17 оно должно иметь вид

$$(Q\circ T\circ P^{-1})(z)=az+b\,,$$

причем

$$(Q\circ T\circ P^{-1})(0)=b=0\,,$$
$$(Q\circ T\circ P^{-1})(1)=a=1\,.$$

Таким образом, $Q\circ T\circ P^{-1}=E$ (тождественное отображение), откуда $T=Q^{-1}\circ P=L$. ▶

Следствие 1. *Существует дробно-линейная функция, отображающая любую наперед заданную $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность l на любую другую наперед заданную $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность Γ.*

◀ В самом деле, $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность однозначно определяется, если заранее задать три лежащие на ней точки. Фиксируя три различные точки z_1, z_2, $z_3 \in l$ и три различные точки w_1, w_2, $w_3 \in \Gamma$, на основании теоремы 18 заключаем, что существует дробно-линейная функция L со свойствами: $L(z_1) = w_1$, $L(z_2) = w_2$, $L(z_3) = w_3$. В силу кругового свойства при отображении L образом $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности l будет $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность Γ, т. е. $\Gamma = L(l)$. ▶

Следствие 2. *Существует дробно-линейная функция, отображающая любой наперед заданный $\widehat{\mathbb{C}}$-круг на любой другой наперед заданный $\mathbb{C}$-круг.*

◀ Пусть l — граница первого $\widehat{\mathbb{C}}$-круга, а Γ — граница второго $\widehat{\mathbb{C}}$-круга. Выберем различные точки z_1, z_2, $z_3 \in l$, расположив их в порядке положительной ориентации границы первого круга, а точки w_1, w_2, $w_3 \in \Gamma$, выберем так, чтобы они были расположены в порядке положительной ориентации границы второго круга. Так как конформное отображение сохраняет ориентацию, то дробно-линейная функция $L : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, построенная выше $(w_j = L(z_j))$, обладает свойством, указанном в формулировке следствия. ▶

Примеры. 1) Построим все дробно-линейные отображения верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$.

◀ Пусть $w(a) = 0$. Тогда $w(\overline{a}) = \infty$ (в силу свойства сохранения симметричных пар точек). Таким образом,

$$w = k \cdot \frac{z - a}{z - \overline{a}}.$$

Чтобы найти параметр k, положим $z = x \in \mathbb{R}$, и тогда получим

$$1 = |w(x)| = |k| \cdot \left|\frac{x - a}{x - \overline{a}}\right| = |k|.$$

Таким образом, $k = e^{i\theta}$ и, значит, $w = e^{i\theta} \cdot \dfrac{z - a}{z - \overline{a}}$. ▶

2) Построим все дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на себя.

◀ Пусть

$$x_1 \longmapsto u_1,\ x_2 \longmapsto u_2,\ x_3 \longmapsto u_3,$$

где все точки x_k, $u_j \in \mathbb{R}$, причем $x_1 < x_2 < x_3$, $u_1 < u_2 < u_3$. Тогда искомая функция может быть найдена из уравнения

$$\frac{w-u_1}{w-u_3}\cdot\frac{u_2-u_3}{u_2-u_1}=\frac{z-x_1}{z-x_3}\cdot\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}.$$

Решая это уравнение относительно w, получим

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{где} \;\; a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},$$

причем

$$w'(x)=\frac{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}>0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}>0. \;\blacktriangleright$$

3) Построим все дробно-линейные отображения единичного круга $|z|<1$ на единичный круг $|w|<1$.

◀ Пусть $a\longmapsto 0$. По свойству сохранения симметричных пар точек должно быть $\dfrac{1}{\overline{a}}\longmapsto\infty$ и, значит,

$$w=k\cdot\frac{z-a}{z-\dfrac{1}{\overline{a}}},$$

где k — параметр. Если $|z|=1$, то $z=e^{i\varphi}$, и мы имеем

$$1=\left|k\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{i\varphi}-\dfrac{1}{\overline{a}}}\right|=|k|\cdot|\overline{a}|\cdot\left|\frac{1-ae^{-i\varphi}}{1-\overline{a}e^{i\varphi}}\right|=|k|\cdot|a|.$$

Полагая $k\overline{a}=-e^{i\theta}$, получим

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

где $|a|<1$, $\theta\in\mathbb{R}$. ▶

§ 2. Некоторые элементарные аналитические функции, отличные от дробно-линейных

1. Степенная функция с натуральным показателем и обратная к ней функция

Так называется функция $z \longmapsto w$ комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$, которую можно задать уравнением вида

$$w = z^n, \tag{25.11}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, — параметр. Функция (25.11), очевидно, аналитическая (как целая рациональная функция), а ее производная равна

$$w'(z) = n \cdot z^{n-1}.$$

Очевидно, что $w'(z) = 0$ только при $z = 0$. Поэтому во всех точках $z \in \mathbb{C} \diagdown 0$ отображение (25.11) — конформное, а в точке $z = 0$ конформность нарушается. С целью более глубокого изучения функции (25.11) введем в плоскостях переменных z и w полярные координаты $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$. Тогда уравнение (25.11) станет равносильным следующему уравнению

$$\rho e^{i\theta} = r^n e^{in\varphi} \quad \text{или системе} \quad \begin{cases} \rho = r^n, \ r \geqslant 0\,, \\ \theta = n\varphi \end{cases} \tag{25.12}$$

(последнее равенство понимается с точностью до слагаемого, целократного 2π). Из равенства $\theta = n\varphi$ видно, что нарушение конформности в точке $z = 0$ заключается в том, что все углы с вершиной в нуле увеличиваются в n раз. Кроме того, любая пара точек z_1, z_2 для которых

$$|z_1| = |z_2|\,, \ \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi}{n} \cdot k\,, \tag{25.13}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, отображается на одну и туже точку плоскости w, т. е. $z_1^n = z_2^n$. Отсюда следует, что функция $w = z^n$ не является *однолистной* (т. е. *инъективной*) в $\mathbb{C}$ при $n > 1$. Для наглядного изображения

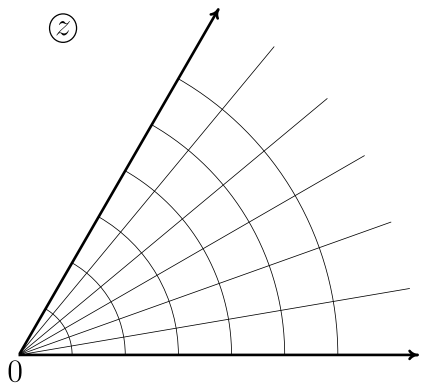

Рис. 7. Область однолистности функции $w = z^6$

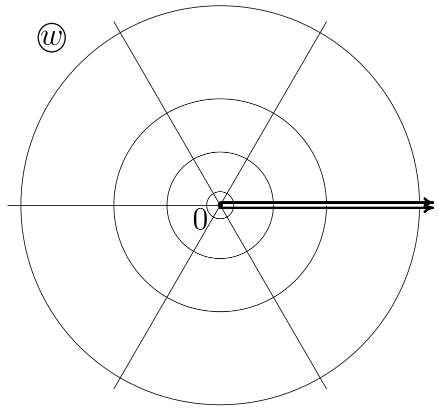

Рис. 8. Область однолистности функции $z = w^{1/6}$

отображения $w = z^n$ весьма полезно выделить ее *область однолистности.* Так называется максимальная (по включению) область, сужение на которую данной функции однолистно. Очевидно, что область однолистности степенной функции характеризуется тем, что она не может содержать ни одной пары точек, для которых выполнены равенства (25.13). Так как у одной и той же функции существует бесконечно много различных областей однолистности, то среди них обычно берут такие, которые устроены наиболее просто (с геометрической точки зрения). Исходя из этих соображений, область однолистности функции $w = z^n$ проще всего взять в виде угловой области $\{0 < \arg z < 2\pi/n\}$. Беря в этой области сетку координатных линий $r = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$ и используя равенства (25.12), получим в плоскости w угловую область $\{0 < \arg w < 2\pi\}$ (с изображенной на ней сеткой координатных линий). Итак, степенная функция $w = z^n$ переводит дуги окружностей $r = c$ на дуги окружностей $\rho = c^n$, лучи $\varphi = \varphi_0$ на лучи $\theta = n\varphi_0$, а все углы с вершиной в точке $z = 0$ увеличивает ровно n в раз.

Очевидно, что обратная функция $z = w^{1/n}$ является аналитической и однолистной в угловой области $\{0 < \arg w < 2\pi\}$, которая все углы с вершиной в точке $w = 0$ уменьшает в n раз. Итак, степенная функция реализует конформный гомеоморфизм любой области, ограниченной данными линиями полярной сетки, на область такого же типа, ограниченную образами данных линий.

2. Функция Жуковского

Функцией Жуковского[3] принято называть следующую рациональную функцию:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \tag{25.14}$$

аналитическую в $\mathbb{C}\diagdown 0$. Ее производная

$$w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

отлична от нуля всюду в $\mathbb{C}\diagdown 0$, кроме точек $z = \pm 1$. Значит, функция (25.14) реализует отображение, конформное в каждой точке области $\mathbb{C}\diagdown 0$, кроме точек $z = \pm 1$. Ввиду равенств

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \infty\,, \quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \infty$$

функцию (25.14) можно продолжить по непрерывности в точки $z = 0$ и $z = \infty$, полагая

$$w(0) := \infty\,, \qquad w(\infty) := \infty.$$

Оказывается, что при таком продолжении функция Жуковского становится отображением, конформным в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Покажем это, используя переход к локальным координатам в окрестности соответствующей бесконечно удаленной точки. Так как $z = 0 \longmapsto w = \infty$, то, полагая

$$w = \frac{1}{\zeta}\,, \quad w = \infty \quad \longleftrightarrow \quad \zeta = 0\,,$$

получим

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \text{откуда} \quad \zeta = \frac{2z}{z^2+1}\,,$$

и надо проверять конформность полученной функции в точке $z = 0$. Имеем $\zeta'(0) = 2 \neq 0$, поэтому отображение (25.14) является конформ-

[3]Жуковский Николай Егорович (1847—1921) — русский ученый, основоположник гидроаэродинамики. Его называли также «дедушкой русской авиации».

ным в точке $z = 0$. Для проверки конформности в точке $z = \infty$ положим

$$w = \frac{1}{\zeta}\,,\ w = \infty \longleftrightarrow \zeta = 0\,,$$

$$z = \frac{1}{t}\,,\ z = \infty \longleftrightarrow t = 0\,.$$

Подставляя это в (25.14), получим $\dfrac{1}{\zeta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} + t\right)$, откуда $\zeta = \dfrac{2t}{t^2+1}$ и $\zeta'(0) = 2 \neq 0$. Последнее неравенство показывает, что конформность есть и в точке $z = \infty$.

Выясним теперь условия однолистности функции (25.14). Пусть $z_1 \neq z_2$ — две точки, для которых

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right).$$

Последнее равенство равносильно такому

$$(z_1 - z_2)\cdot\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0$$

или, если учесть неравенство $z_1 - z_2 \neq 0$, такому

$$z_1 \cdot z_2 = 1\,.$$

Отсюда заключаем, что *всякая область однолистности функции* (25.14) *характеризуется тем, что она не может содержать ни одной пары различных точек z_1 и z_2, для которых $z_1 \cdot z_2 = 1$*. Примерами областей однолистности функции Жуковского являются $\widehat{\mathbb{C}}$-круги $\{|z| < 1\}$ и $\{|z| > 1\}$.

Изучим более подробно свойства сужения отображения (25.14) на область $\{|z| \geqslant 1\}$ (рис. 9). Полагая $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, перепишем уравнение (25.14) в следующих равносильных формах:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad v + iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) \tag{25.15}$$

или

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi\,, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi\,, \end{cases} \tag{25.16}$$

где $r \geqslant 1\,,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Из последней системы легко найти образ сетки координатных линий полярной системы координат. Если один из параметров $r\,,\ \varphi$ считать постоянным, а другой переменным, то система (25.16) будет представлять собой параметрические уравнения некоторой кривой. Исключая этот переменный параметр, можно перейти от параметрического задания кривой к неявному.

Найдем сначала образы семейства окружностей $\{r = r_0 \mid r_0 \geqslant 1\}$. Полагая в (25.16) $r = 1$, получим

$$\begin{cases} u = \cos\varphi\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,, \\ v \equiv 0\,. \end{cases}$$

Эти уравнения изображают отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси, проходимый дважды, когда φ меняется от 0 до 2π. Поэтому изобразим этот отрезок в виде двух «берегов». Полагая, далее, в (25.16) $r = r_0 > 1$, получим уравнения

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r_0 + \dfrac{1}{r_0}\right)\cos\varphi\,, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r_0 - \dfrac{1}{r_0}\right)\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Это — эллипс с фокусами в точках $z = \pm 1$, так как, обозначая

$$a := \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\,, \quad b := \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$$

и исключая из последней системы параметр φ, получим

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1\,,$$

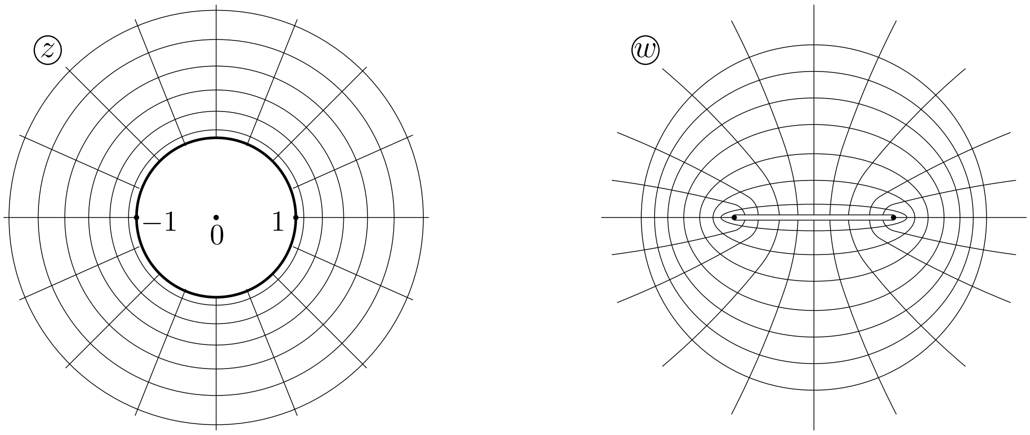

Рис. 9. Отображение внешности единичного круга функцией Жуковского

причем очевидно, что $\sqrt{a^2 - b^2} = 1$. Итак, образом семейства окружностей $\{r = r_0 \mid r_0 > 1\}$ является семейство эллипсов с фокусами в точках ± 1.

Найдем теперь образы лучей $\varphi = \varphi_0$, $r \geqslant 1$. Положим сначала в (25.16) $\varphi = 0$, $r \geqslant 1$. Тогда получим

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right), \ r \geqslant 1, \\ v \equiv 0\,. \end{cases}$$

Эта кривая есть вещественный луч $[1, +\infty]$. Полагая $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, получим

$$\begin{cases} u \equiv 0\,, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right), \ r \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Эта кривая есть луч мнимой оси, соединяющий точки i и ∞. Аналогично находятся образы лучей $\varphi_0 = \pi$ и $\varphi_0 = \dfrac{3\pi}{2}$. В остальных случаях положим в (25.16) $\varphi = \varphi_0$. Тогда получим параметрические уравнения

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)\cos\varphi_0\,, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)\sin\varphi_0\,. \end{cases}$$

Исключая отсюда параметр r, получим уравнение гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1\,,$$

фокусы которой лежат в точках $\pm\sqrt{\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0} = \pm 1$. Очевидно, что образом луча $\varphi = \varphi_0$, $r \geqslant 1$, является та часть гиперболы, которая лежит в том же квадранте, что и точка $(\cos\varphi_0; \sin\varphi_0)$. В силу свойства конформности семейство гипербол ортогонально семейству эллипсов.

Итак, функция Жуковского реализует конформный гомеоморфизм области $\{|z| > 1\}$ на область $\widehat{\mathbb{C}}\diagdown[-1;1]$. Более того, образом всякой области, ограниченной линиями $r = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$, будет область, ограниченная образами этих частей. Например, образом области, показанной на рис. 6, является верхняя полуплоскость (рис. 7). Желая подробнее исследовать функцию Жуковского в окрестностях точек $z = \pm 1$, сделаем такое преобразование

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - 1}{\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - 1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

Отсюда видно, что функцию Жуковского можно представить в виде композиции трех отображений

$$z \overset{U}{\longmapsto} \frac{z-1}{z+1} = t \overset{T}{\longmapsto} t^2 = \zeta \overset{U^{-1}}{\longmapsto} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = w\,. \tag{25.17}$$

Отображения U и U^{-1} — дробно-линейные и, значит, всюду конформные. Отображение $T\ :\ \zeta = t^2$ удваивает углы с вершинами в точке $t = 0$. Следовательно, функция Жуковского удваивает углы с вершинами в точке $z = 1$. То же самое происходит и с углами с вершиной в точке $z = -1$.

При отображении $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ не изменяется, а область $\{|z| < 1\}$ переходит на область $\{|z| > 1\}$. Поэтому она реализует также конформный гомеоморфизм внутренности единичного круга $\{|z| < 1\}$ на область $\widehat{\mathbb{C}}\diagdown[-1, 1]$.

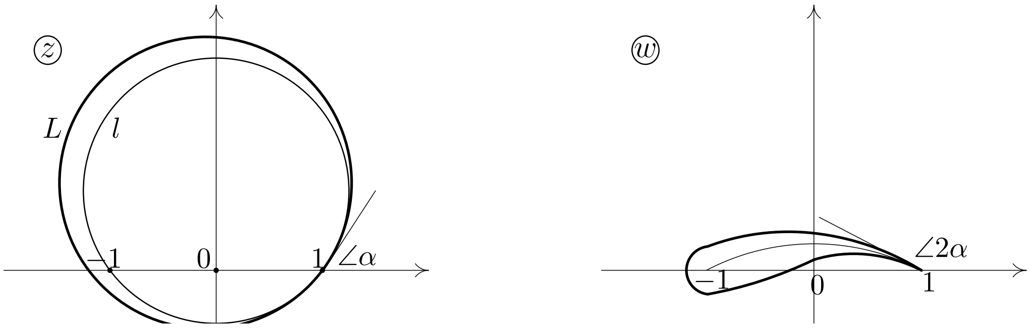

Рис. 10. К отображению внешности круга L на внешность профиля Жуковского

Используя представление функции Жуковского в виде композиции (25.17), можно показать, что она отображает окружность l, проходящую через точки $z = \pm 1$ под углом $\alpha \in (0; \pi/2)$ к положительному лучу, на дугу окружности, проходящей через точки $w = \pm 1$ под углом 2α к положительному лучу. При этом отображении внешность окружности l переходит на плоскость $\widehat{\mathbb{C}}$, из которой выброшена указанная дуга.

Возьмем теперь в плоскости z окружность L, проходящую через точку 1 и касающуюся внешним образом окружности l. Функция Жуковского конформно отображает область, ограниченную окружностью L и содержащую ∞, на область, ограниченную контуром, который напоминает поперечный разрез крыла самолета (так называемый «профиль Жуковского»), изображенный на правом рисунке 10. Используя это свойство, Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин (1869—1942) впервые получили явную формулу для вычисления подъемной силы крыла самолета.

3. Экспонента комплексного переменного

Исходя из известной формулы Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, определим экспоненту комплексного переменного $z = x + iy$ равенством

$$w = e^z := e^x \cdot (\cos y + i \sin y)\,. \tag{25.18}$$

Полагая здесь $w = u + iv$, запишем эту функцию в следующих равносильных формах:

$$w = e^z \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u = e^x \cdot \cos y\,, \\ v = e^x \cdot \sin y\,. \end{cases} \tag{25.19}$$

Переходим к изучению основных свойств экспоненты комплексного переменного.

1°. *Экспонента является аналитической функцией во всей плоскости*[4] $\mathbb{C}$.

◀ Дифференцируя равенства (25.19), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cdot \sin y\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin y\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos y\,.$$

Отсюда видно, что выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

и потому экспонента аналитична в $\mathbb{C}$. ▶

2°. *Производная функция экспоненты равна самóй экспоненте.*

◀ Имеем

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cdot e^{iy}) = e^{iy} \cdot \frac{d}{dx}e^x = e^{iy} \cdot e^x = e^{x+iy} = e^z\,,$$

т. е. $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$. ▶

3°. *Экспонента представляет собой отображение из* $\mathbb{C}$ *в* $\mathbb{C}^*$, *конформное в каждой точке* $z \in \mathbb{C}$.

◀ Имеем

$$|e^z| = |e^x \cdot (\cos y + i \sin y)| = e^x \cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x \neq= 0\,,$$

[4]Функции, аналитические во всей плоскости $\mathbb{C}$, принято называть *целыми*. Например, многочлен от z — *целая* рациональная функция.

т. е. экспонента нигде в $\mathbb{C}$ не обращается в нуль. Так как $\dfrac{d}{dz}e^z = e^z$, то и производная экспоненты нигде не обращается в нуль, чем и обеспечивается конформность в каждой точке. ►

4°. (теорема сложения). *Справедливо тождество*

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

◄ Полагая $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ и используя теоремы сложения для функций sin и cos, имеем

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i \sin y_2) =$$

$$= e^{x_1+x_2} \left[(\cos y_1 \cdot \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cdot \cos y_2 + \cos y_1 \cdot \sin y_2)\right] =$$

$$e^{x_1+x_2} \left[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)\right] = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \quad ►$$

5°. *Функция $z \longmapsto e^z$ — периодическая, с основным периодом $2\pi i$.*

◄ Применяя теорему сложения, имеем при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \cdot (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z.$$

Значит, числа вида $2k\pi i$ — периоды. Покажем, что никаких других периодов экспонента не имеет. Пусть $T = T_1 + iT_2$ — период, где T_1 $T_2 \in \in \mathbb{R}$. Тогда должно быть

$$e^z = e^{z+T} = e^z \cdot e^{T_1+iT_2} = e^z \cdot e^{T_1} \cdot e^{iT_2} = e^z \cdot e^{T_1} \cdot (\cos T_2 + i \sin T_2).$$

Умножая это равенство на e^{-z}, имеем

$$e^{T_1} \cdot (\cos T_2 + i \sin T_2) = 1.$$

Отсюда видно, что $T_1 = 0$, $T_2 = 2k\pi$. ►

6°. *Областью однолистности экспоненты является всякая область, не содержащая ни одной пары различных точек z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, связанных равенством $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.*

Простейшим примером области однолистности экспоненты $w = e^z$ является горизонтальная полоса $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ ширины

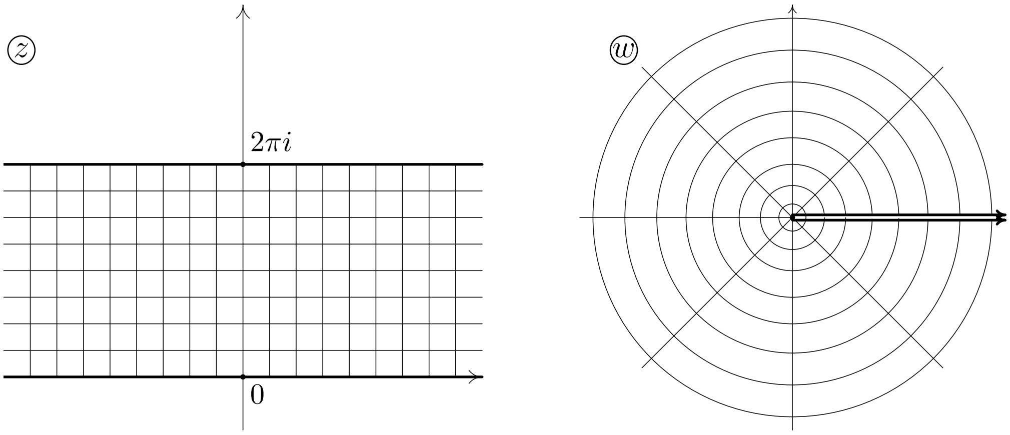

Рис. 11. Области однолистности экспоненты (слева) и логарифма (справа)

2π, показанная на левом рисунке 11. Желая найти образ этой полосы, положим $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\theta}$ и представим экспоненту $w = e^z$ в следующих равносильных формах

$$\rho \cdot e^{i\theta} = e^{x+iy} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = e^x, \ -\infty < x < +\infty \\ \theta = y, \ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\,. \end{cases}$$

Отсюда видно, что образом интервала $x = x_0$, $0 < y < 2\pi$ является окружность $\rho = e^{x_0}$, из которой выброшена точка, лежащая на положительном луче. Образом прямой $y = y_0 \in (0\,, 2\pi)$, $-\infty < x < +\infty$, является луч $\theta = y_0$, $\rho > 0$. Отсюда очевидно, что экспонента $w = e^z$ реализует конформный гомеоморфизм полосы $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ на плоскость $\mathbb{C}$, из которой выброшен положительный луч. Более того, *экспонента $w = e^z$ реализует конформный гомеоморфизм любой области, лежащей в полосе $\{0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2\pi\}$ и ограниченной координатными линиями декартовой системы координат, на некоторую область плоскости w, ограниченную координатными линиями полярной системы координат.*

Например, полоса $\{\alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$, где $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, отображается на угловую область $\{\alpha < \arg w < \beta\}$. Если $\beta - \alpha = \pi$, то получаем гомеоморфизм полосы на полуплоскость. Далее, полуполосы $\{x < 0,\ 0 < y < 2\pi\}$ и $\{x > 0,\ 0 < y < 2\pi\}$ переходят соответственно на внутренность и внешность единичного круга, разрезанного по положительному лучу. И, наконец, образом любого прямоугольника

$\{a < x < b;\ c < y < d\}$, лежащего в области однолистности, является область вида $\{e^a < \rho < e^b;\ c < \theta < d\}$.

4. Натуральный логарифм

Логарифмическая функция $w = \mathrm{Ln}\ z$ определяется как функция, обратная к экспоненте $z = e^w$. Так как экспонента является периодической функцией, а значит, не является инъективным отображением, то однозначной функции $\mathrm{Ln}\ z$ на самом деле не существует. В связи с этим в теории аналитических функций иногда допускаются к рассмотрению многозначные функции. Это обусловлено тем, что свойство аналитичности часто приходит в противоречие со свойством однозначности. Именно такая ситуация возникает при рассмотрении функции, обратной к экспоненте.

Рассмотрим сначала так называемую *главную ветвь* логарифмической функции, которую обозначим через $w = \ln z$. Так будем называть функцию, обратную к сужению экспоненты $z = e^w$ на ее область однолистности $\{0 < \mathrm{Im}\, w < 2\pi\}$. Полагая $w = u + iv$, $z = re^{i\varphi}$, получим

$$e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi}, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} u = \ln r\,, \\ v = i\varphi\,, \end{cases}$$

где под $\ln r$ понимается обычный (т. е. вещественнозначный) логарифм положительного числа. Таким образом, для главной ветви логарифмической функции имеем

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi\,.$$

Эта функция аналитична при $r > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$ (как функция, обратная к аналитической и однолистной), а ее производную можно вычислить по формуле для производной обратной функции

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{\frac{d}{dw}e^w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}\,.$$

Таким образом, производная логарифмической функции комплексного переменного вычисляется по той же формуле, что и производная логарифмической функции вещественного переменного. Конформные гомеоморфизмы, реализуемые функцией $w = \ln z$, — обратные тем, которые реализует экспонента $w = e^z$. Поэтому для их иллюстрации можно использовать области однолистности, показанные на рис. 11, поменяв там местами плоскости независимой и зависимой переменных.

И, наконец, очевидно, что многозначную функцию $w = \mathrm{Ln}\ z$ можно выразить через ее главную ветвь $w = \ln z$ равенством

$$\mathrm{Ln}\ z = \ln z + 2\pi ik = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)\,,$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку произвольная ветвь логарифмической функции отличается от ее главной ветви постоянным слагаемым, то

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Ln}\ z = \frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}\,.$$

5. Общие степенная и показательная функции

Общая степенная функция $w = z^\alpha$, где $\alpha \notin \mathbb{Z}$, определяется как композиция

$$z^\alpha := e^{\alpha\cdot\mathrm{Ln}\ z}\,.$$

Из равенства $\mathrm{Ln}\ z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$ очевидно, что если число α — не целое, то степенная функция — многозначная. При вещественных значениях показателя α подходящая ветвь степенной функции реализует конформный гомеоморфизм угловой области $\{a < \arg z < b\}$ на угловую область $\{\alpha a < \arg w < \alpha b\}$ аналогично тому, как это показано на рисунках 7 и 8.

Пример. В частности, при $\alpha = i$ имеем

$$w = z^i = e^{i\cdot(\ln|z| + i\mathrm{Arg} z)} = e^{i\ln|z| - \arg z - 2\pi n}.$$

Отсюда при $z = i$ получаем $i^i = e^{-\pi/2 - 2\pi n}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Полагая здесь $n = 0$, имеем $i^i = e^{-\pi/2}$.

Общая показательная функция $w = a^z$, $(a \neq 0)$, определяется равенством

$$a^z := e^{z\cdot\mathrm{Ln}\ a}$$

и представляет собой бесконечное (счетное) множество различных однозначных аналитических функций, зависящих от выбора ветви $\operatorname{Ln} a$.

6. Функции cos, sin, ch, sh

Исходим из выражений этих функций через экспоненту по формулам Эйлера

$$\begin{aligned} &\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,, \qquad &&\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\,, \\ &\operatorname{ch} z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\,, \qquad &&\operatorname{sh} z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}\,. \end{aligned} \tag{25.20}$$

Используя эти определения и свойства экспоненты, легко заключить, что функции cos, sin, ch, sh аналитичны всюду на $\mathbb{C}$ и связаны многочисленными тождествами, например, следующими:

$$\begin{aligned} &\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \qquad &&\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1\,, \\ &\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z\,, \qquad &&\cos iz = \operatorname{ch} z\,, \\ &\sin iz = i\operatorname{sh} z\,, \qquad &&\operatorname{ch} iz = \cos z\,, \\ &\operatorname{sh} iz = i\sin z\,, \qquad &&\ldots\,. \end{aligned}$$

Дифференцируя равенства (25.20), заключаем, что производные функций cos, sin, ch, sh вычисляются по тем же формулам, что и в случае вещественного переменного.

Из свойства периодичности экспоненты вытекает периодичность функций cos, sin, ch, sh, причем основной период функций cos, sin равен 2π, а основной период функций ch, sh равен $2\pi i$. Из теоремы сложения для экспоненты вытекают известные теоремы сложения для функций cos, sin, а также теоремы сложения для гиперболических функций ch, sh, которые здесь не приводим.

Пользуясь теоремой сложения для косинуса и полагая

$$z = x + iy\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

имеем

$$
\begin{gathered}
|\cos(x+iy)| = |\cos x \cdot \cos iy - \sin x \cdot \sin iy| = |\cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \sin \cdot \operatorname{sh} y| = \\
= \sqrt{\cos^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x(1+\operatorname{sh}^2 y) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\
= \sqrt{\cos^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \geqslant |\cos x|\,.
\end{gathered}
$$

Из этих вычислений следует, что $|\cos(x+iy)| \geqslant |\cos x|$, причем равенство имеет место только при $y = 0$. Отсюда, в частности, заключаем, что *функция* $\cos z$ *может обращаться в нуль только на вещественной оси, причем все ее нули содержатся в известной формуле* $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, *где* $k \in \mathbb{Z}$. Аналогичный вывод справедлив для синуса.

Рассмотрим примеры конформных отображений, реализуемых некоторыми из рассмотренных функций. Возьмем функцию $w = \cos z$. Так как $w' = -\sin z$, а $\sin z = 0 \iff z = k\pi$, то функция $\cos z$ конформна во всех точках, кроме точек вида $k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. В частности, никакая область однолистности функции $\cos z$ не может содержать внутри точек вида $k\pi$.

Одним из простейших примеров области однолистности является полуполоса $\{-\pi < \operatorname{Re} z < 0;\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Чтобы найти ее образ при отображении с помощью функции cos, представим функцию $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ в виде следующей композиции трех отображений:

$$
z \longmapsto \zeta = -iz \longmapsto e^{\zeta} = t \longmapsto \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) = w\,.
$$

Первое отображение $\zeta = -iz$ поворачивает полуполосу на угол $\dfrac{\pi}{2}$ по часовой стрелке. Вторая функция $t = e^{\zeta}$ реализует конформное отображение горизонтальной полуполосы на верхнюю полуплоскость, из которой выброшен полукруг $\{|t| \leqslant 1\,,\ \operatorname{Im} t > 0\}$. И, наконец, последнее отображение (функция Жуковского) $w = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$ отображает область $\{\operatorname{Im} t > 0;\ |t| > 1\}$ на верхнюю полуплоскость. Итак, функция cos реализует конформный гомеоморфизм полуполосы на верхнюю полуплоскость (см. рис. 12). Аналогично можно показать, что

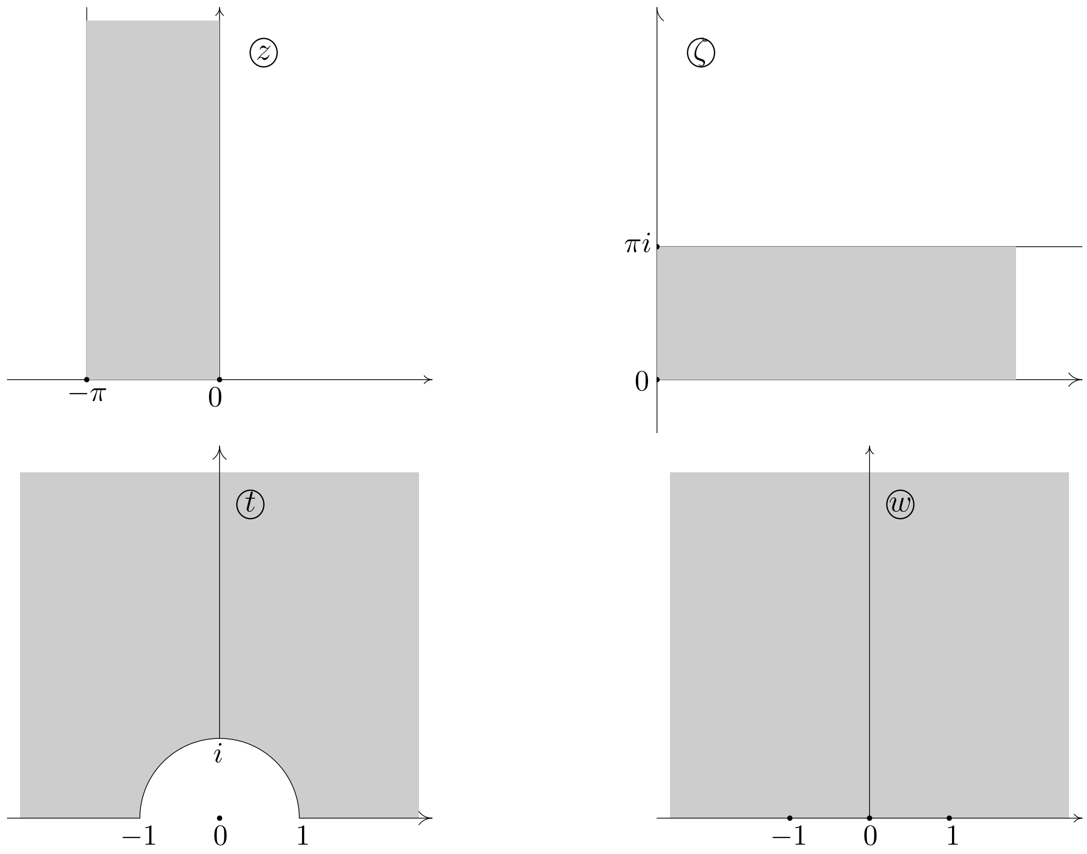

Рис. 12. Построение конформного гомеоморфизма вертикальной полуполосы на верхнюю полуплоскость функцией $w = \cos z$

функция $w = \cos z$ реализует конформный гомеоморфизм полуполосы $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на нижнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w < 0\}$.

Найдем область, на которую функция $w = \sin z$ отображает полуполосу $\{|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2};\ \operatorname{Im} z > 0\}$. С этой целью, учитывая тождество $\sin z = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$, представим функцию sin в виде композиции трех отображений:

$$z \longmapsto \frac{\pi}{2} + z = \zeta \longmapsto \cos\zeta = t \longmapsto -t = w\,.$$

Первое отображение сдвигает полуполосу вправо на $\frac{\pi}{2}$. Второе отображает сдвинутую полосу на нижнюю полуплоскость. И, наконец, третье отображение переводит нижнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость. Итак, образом данной полуполосы при отображении с помощью функции sin является верхняя полуплоскость. Аналогично можно рассмотреть конформные отображения, реализуемые гиперболическими функциями ch, sh.

7. Функции, обратные к cos, sin, ch, sh

Так как функции cos, sin, ch, sh — периодические, то обратные к ним функции многозначные.

Функция **арккосинус** $w = \mathrm{Arccos}\ z$ находится из уравнения $z = \cos w$. Подставляя сюда выражение косинуса через экспоненту, получим

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \iff e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0\,, \ e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}\,,$$

откуда $w = \dfrac{1}{i} \cdot \mathrm{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 - 1}$. Итак, $\mathrm{Arccos}\ z = \dfrac{1}{i} \cdot \mathrm{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$. Многозначность этой функции зависит, таким образом, от многозначности функций $\sqrt{\ }$ и Ln .

Арксинус $w = \mathrm{Arcsin}\ z$ находится из уравнения $z = \sin w$ или $z = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$. Преобразовывая его к виду

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

и решая относительно w, получим

$$\mathrm{Arcsin}\ z = \frac{1}{i} \cdot \mathrm{Ln}\,(iz \pm \sqrt{1 - z^2})\,.$$

Ареакосинус гиперболический $w = \mathrm{Arch}\ z$ находится из уравнения $z = \mathrm{ch}\, w = \dfrac{e^w + e^{-w}}{2}$, равносильного уравнению $e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0$. Решая его получим

$$\mathrm{Arch}\ z = \mathrm{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 - 1})\,.$$

Ареасинус гиперболический $w = \mathrm{Arsh}\ z$ находится из уравнения $z = \mathrm{sh}\, w = \dfrac{e^w - e^{-w}}{2}$, равносильного уравнению $e^{2w} - 2ze^w - 1 =$

$= 0$. Решая его находим

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2+1})\,.$$

8. Функции tg, ctg, th, cth

Функции tg, ctg, th, cth определяются соответственно равенствами

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}\,; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}\,;$$
$$\operatorname{th} z := \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\,; \quad \operatorname{cth} z := \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\,.$$

Каждая из них аналитична во всей плоскости, кроме тех точек, в которых соответствующий знаменатель обращается в нуль. Все четыре функции — нечетные. Все они — периодические, причем основным периодом функций tg и ctg является число π, а основным периодом функций th и cth является число πi. В качестве примера найдем образ полосы $\left\{|\operatorname{Re} z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ при отображении с помощью функции tg. Исходя из определения

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} = i\cdot\frac{1-e^{2iz}}{1+e^{2iz}}\,,$$

представим функцию tg в виде следующей композиции отображений:

$$z \longmapsto 2iz = \zeta \longmapsto e^{\zeta} = \tau \longmapsto i\cdot\frac{1-\tau}{1+\tau} = w\,.$$

Отсюда легко заключить, что образом полосы $\left\{|\operatorname{Re} z| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ является круг $\{|w|<1\}$ (см. рис. 13).

9. Функции, обратные к tg, ctg, th, cth

Так как функции tg, ctg, th, cth — периодические, то обратные к ним функции являются многозначными. Найдем выражения этих обратных функций.

Арктангенс $w = \mathrm{Arctg}\, z$ находится из уравнения $z = \mathrm{tg}\, w$. Переписывая его в равносильных формах

$$z = \frac{\sin w}{\cos w}\,, \quad z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}\,, \quad iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}\,,$$

$$(e^{2iw} + 1) \cdot iz = e^{2iw} - 1\,, \quad e^{2iw}(1 - iz) = 1 + iz\,,$$

получим

$$w = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\, \frac{1 + iz}{1 - iz}\,, \quad \text{т. е.} \quad \mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\, \frac{1 + iz}{1 - iz}\,.$$

Арккотангенс $w = \mathrm{Arcctg}$ z находится из уравнения $z = \mathrm{ctg}\, w$, равносильное такому $\dfrac{1}{z} = \mathrm{tg}\, w$. Решая его, найдем

$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\, \frac{z + i}{z - i}\,.$$

Ареатангенс гиперболический $w = \mathrm{Arth}\, z$ находится из уравнения $z = \mathrm{th}\, w$. Переписывая это уравнение в равносильных формах

$$z = \frac{\mathrm{sh}\, w}{\mathrm{ch}\, w}\,; \; z = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}}\,, \; z = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}\,,$$

$$(e^{2w} + 1)z = e^{2w} - 1\,, \; e^{2w} = \frac{1 + z}{1 - z}\,,$$

находим

$$w = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ln}\, \frac{1 + z}{1 - z}\,, \quad \text{т. е.} \quad \mathrm{Arth}\, z = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ln}\, \frac{1 + z}{1 - z}\,.$$

И, наконец, **ареакотангенс гиперболический** $w = \mathrm{Arcth}\, z$ находится из уравнения $z = \mathrm{cth}\, w$, равносильного такому $\dfrac{1}{z} = \mathrm{th}\, w$. Отсюда легко найти

$$\mathrm{Arcth}\, z = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Ln}\, \frac{z + 1}{z - 1}\,.$$

Конформные отображения, реализуемые однозначными ветвями обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций, могут быть получены из конформных отображений соответствующих

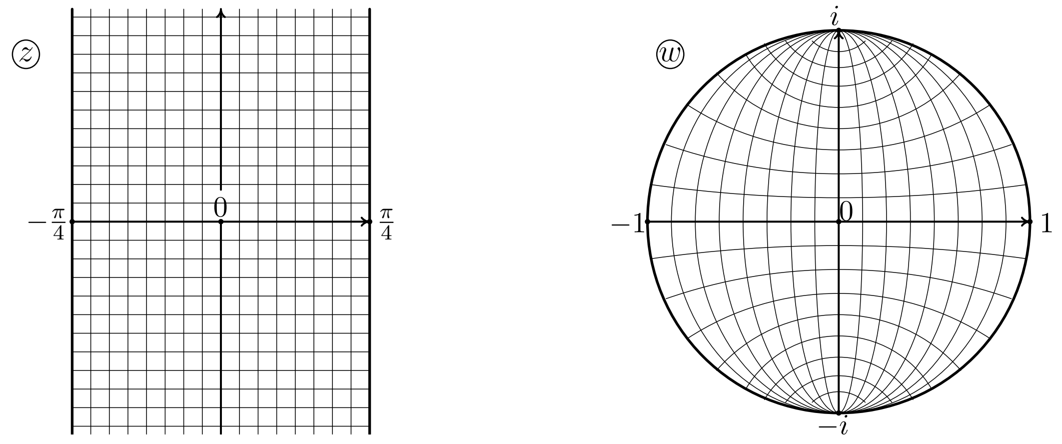

Рис. 13. Конформное отображение вертикальной полосы на единичный круг функцией tg

прямых функций. Для этого достаточно плоскости соответствующей независимой и зависимой переменных поменять местами. Например, подходящая ветвь функции $w = \operatorname{Arctg} z$ реализует конформный гомеоморфизм круга $\{|z| < 1\}$ на полосу $\left\{|\operatorname{Re} w| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

Глава 26

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА И НЕКОТОРЫЕ ИХ СЛЕДСТВИЯ

§ 1. Криволинейные интегралы от функций комплексного переменного. Формула Грина. Интегральная теорема Коши

1. Криволинейные интегралы и их свойства

Пусть $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$ — гладкий путь в области $D \subset \mathbb{C}$, ориентированный в направлении от α к β. Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Криволинейный интеграл (2-го рода) по пути γ от функции f по комплексной координате z определим равенством

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz := \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]\gamma'(t)\,dt\,, \tag{26.1}$$

которое прямо сводит вычисление криволинейного интеграла к вычислению обычного определенного интеграла, понимаемого в смысле Римана. Полагая

$$z = x + iy\,, \quad \text{где} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(z)\,, \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(z)\,,$$
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)\,, \quad \gamma(t) := x(t) + iy(t)\,,$$

преобразуем подынтегральное выражение интеграла (26.1)

$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= [u(x, y) + iv(x, y)]\,d(x + iy) = \\ &= (u + iv)(dx + idy) = (u\,dx - v\,dy) + i\,(v\,dx + u\,dy)\,. \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, преобразуем интеграл (26.1) к линейной комбинации криволинейных интегралов 2-го рода от вещественнозначных функций

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} (u\,dx - v\,dy) + i\int\limits_{\gamma} (v\,dx + u\,dy)\,. \tag{26.2}$$

Отсюда следует, что основные свойства криволинейного интеграла (26.1) можно получить как следствия известных свойств криволинейных интегралов 2-го рода от вещественнозначных функций.

В качестве **примера** вычислим интеграл

$$\int_\gamma (z-a)^n dz\,, \tag{26.3}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, а γ — окружность $|z-a| = r$, ориентированная в направлении против часовой стрелки и проходимая однократно. Эту окружность можно задать следующим уравнением: $z = a + r \cdot e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Применяя к интегралу (26.3) определение (26.1), при $n \neq -1$ имеем

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it} dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt =$$
$$= \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1}\left[e^{2\pi i(n+1)} - 1\right] = 0$$

в силу периодичности экспоненты. Если же $n = -1$, то интеграл (26.3) вычисляется так:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}dt}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i\,.$$

Итак, имеем

$$\int_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{при} \quad n = -1\,, \\ 0 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z}\,,\ n \neq -1\,. \end{cases} \tag{26.4}$$

Перечислим основные свойства криволинейных интегралов от функций комплексного переменного.

1° **(линейность).** *Если* $a\,,\ b \in \mathbb{C}$, *то*

$$\int_\gamma [af(z) + bg(z)]\,dz = a\int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz\,. \tag{26.5}$$

◀ Это свойство непосредственно вытекает из свойства линейности интеграла Римана. ▶

Для формулировки следующего свойства напомним понятие композиции путей.

Определение 18. *Пусть* $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *и* $\gamma_2 : [\beta, \delta] \longrightarrow \mathbb{C}$ *— гладкие пути, для которых выполнено условие* $\gamma_1(\beta) = \gamma_2(\beta)$. *Их композицией называется путь* $\gamma_1 * \gamma_2 : \longrightarrow \mathbb{C}$, *определяемый равенством*

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & \textit{при} \quad t \in [\alpha, \beta]\,, \\ \gamma_2(t) & \textit{при} \quad t \in [\beta, \delta]\,. \end{cases} \tag{26.6}$$

Отметим, что композиция гладких путей не обязательно является гладким путем, поскольку, вообще говоря, $\gamma_1'(\beta) \neq \gamma_2'(\beta)$.

2° **(аддитивность).** *Если композиция* $\gamma_1 * \gamma_2$ *гладких путей есть гладкий путь, то*

$$\int\limits_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\, dz\,. \tag{26.7}$$

◀ Это свойство вытекает из определения (26.1) и из свойства аддитивности интеграла Римана. ▶

Замечания. 1. Свойство аддитивности очевидным образом распространяется на интеграл по композиции любого конечного числа гладких путей.

2. Исходя из свойства аддитивности, можно определить понятие криволинейного интеграла кусочно-гладкому пути и вообще по любому сложному кусочно-гладкому контуру (графу).

3. Если путь $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ не ограничен (например, если $\gamma(\beta) = \infty$), то определение (26.1) пригодно и в этом случае, только интеграл в правой части (26.1) следует понимать как (сходящийся) несобственный интеграл.

3° **(инвариантность).** *Если два гладких ориентированных пути* $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow D$ *и* $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow D$ *гладко эквивалентны, то*

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\, dz\,. \tag{26.8}$$

◀ Напомним, что (ориентированные) пути γ_1 и γ_2 называются гладко эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\tau : [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow [\alpha_1, \beta_1]$ такой, что $\gamma_2 \circ \tau = \gamma_1$. Учитывая это и используя определение (26.1), имеем

$$\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} f[\gamma_2(\tau)]\cdot\gamma_2'(\tau)\,d\tau = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f[\gamma_2(\tau(t))]\cdot\gamma_2'(\tau(t))\cdot\tau'(t)\cdot dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f[\gamma_1(t)]\cdot\gamma_1'(t)\,dt = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Свойство инвариантности (26.8) означает, что криволинейный интеграл (26.1) имеет смысл не только как интеграл по пути, но и как интеграл по кривой (если кривую понимать как класс эквивалентных и одинаково ориентированных путей).

4° **(зависимость от ориентации).** *При изменении ориентации пути интегрирования на противоположную криволинейный интеграл* (26.1) *меняет знак.*

◀ Это следует из того, что при изменении ориентации кривой γ на противоположную в правой чисти равенства (26.1) пределы интегрирования меняются местами. ▶

5° **(оценка интеграла).** *Если* $\gamma\,:\,[\alpha,\beta]\longrightarrow D$ *— кусочно-гладкий путь, а* $f\,:\,D\longrightarrow\mathbb{C}$ *— непрерывная функция, то*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,ds\,, \tag{26.9}$$

где $ds = |\gamma'(t)|\,dt$ *— дифференциал длины дуги на* γ.

◀ Пусть $\alpha<\beta$. Обозначая

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz =: I = |I|\cdot e^{i\theta}\,,$$

имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| = |I| = e^{-i\theta}I = e^{-i\theta}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = e^{-i\theta}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left\{e^{-i\theta}f[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)\right\}dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta}f[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)\right\}dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left|e^{-i\theta}f[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)\right|dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}|f[\gamma(t)]\cdot\gamma'(t)|\,dt = \int\limits_{\gamma}|f(z)|\,ds\,.$$

Отсюда вытекает неравенство (26.51). ▶

Следствие. *Если* $|f(z)| \leqslant M < +\infty$, *то*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant M\cdot l\,,$$

где через l *обозначена длина пути* γ.

◀ Используя неравенство (26.51), имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\gamma}|f(z)|\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta}|f[\gamma(t)]|\cdot|\gamma'(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta}|\gamma'(t)|\,dt = M\cdot\int\limits_{\gamma}ds = M\cdot l\,. \ ▶$$

2. Формула Грина. Интегральная теорема Коши

Из курса вещественного анализа известна формула Грина[1]

$$\int\limits_{\partial D}(P\,dx + Q\,dy) = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\,, \tag{26.10}$$

[1]См., напр., часть 5 этого учебного пособия, гл. 22, § 2.

где $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно-гладким краем ∂D, ориентированным стандартно[2], а функции P, Q имеют непрерывные частные производные на $D \sqcup \partial D$. Здесь равенство (26.10) будет переписано в комплексной форме и из него будут получены следствия, важные с точки зрения комплексного анализа.

Теорема 19. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно-гладким краем ∂D. Пусть функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ и ее частные производные непрерывны на $D \sqcup \partial D$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2i \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dx \wedge dy\,, \tag{26.11}$$

где система координат xOy — правая, а край ∂D ориентирован стандартно.

◀ Введем обозначения $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$. Область D, ее край ∂D и введенные функции удовлетворяют условиям применимости формулы Грина (26.10). Применяя ее, имеем

$$\int\limits_{\partial D} (u\,dx - v\,dy) = -\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy\,; \tag{26.12}$$

$$\int\limits_{\partial D} (v\,dx + u\,dy) = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \wedge dy\,; \tag{26.13}$$

Умножая последнее равенство на i и складывая его с предыдущим, имеем

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int\limits_{\partial D} \left[(u\,dx - v\,dy) + i \cdot (v\,dx + u\,dy)\right] =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[-\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx \wedge dy =$$

$$= 2i \iint\limits_{D} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv)\,dx \wedge dy = 2i \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,dx \wedge dy\,.$$

[2] т. е. так, что если точка движется вдоль края ∂D в направлении положительной ориентации, то при этом область D остается слева.

Тем самым равенство (26.11) доказано. ►

Замечание. Используя свойства операции внешнего умножения, имеем

$$d\overline{z} \wedge dz = (dx - i\,dy) \wedge (dx + i\,dy) = dx \wedge dx - i\,dy \wedge dx + i\,dx \wedge dy + dy \wedge dy = \\ = 2i\,dx \wedge dy\,.$$

Таким образом, равенство (26.11) можно переписать еще так:

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} \wedge dz\,. \tag{26.14}$$

Следствие (интегральная теорема Коши). *Пусть* $D \subset \mathbb{C}$ *— ограниченная область с кусочно-гладким краем* ∂D*, а функция* f *аналитична в* D *и имеет непрерывные частные производные в* $D \sqcup \partial D$*. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0\,. \tag{26.15}$$

◄ Напомним что аналитичность функции f определялась как существование у нее непрерывных частных производных и выполнение условия Коши — Римана, т. е. тождества $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} \equiv 0$. Учитывая его, заключаем, что входящий в формулу Грина (26.14) двойной интеграл равен нулю, и потому равенство (26.14) переходит в равенство (26.15). ►

Замечание. Интегральная теорема Коши считается одной из основных теорем комплексного анализа. В связи с этим весь следующий параграф посвящается различным ее вариантам и обобщениям.

§ 2. Различные варианты и обобщения интегральной теоремы Коши

Поскольку для аналитических функций справедлива формула Грина, переходящая в данном случае и интегральную теорему Коши (26.15), то все известные из курса вещественного анализа ее следствия, связанные с независимостью интеграла от пути и существованием первообразных, остаются справедливыми для аналитических функций. Сформулируем здесь нужные нам следствия в той форме, которую они принимают в теории аналитических функций.

Определение 19. *Первообразной (глобальной) для функции* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *в области* D *называется аналитическая функция* $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$*, такая, что* $F'(z) = f(z)$ *для всех* $z \in D$*. Локальной первообразной для* f *в окрестности* U *точки* $a \in D$ *называется аналитическая функция* $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$*, такая, что* $F'(z) = f(z)$ *для всех* $z \in U$*.*

Теорема 20. *Если функция* F *является первообразной для* f *в области* $D \subset \mathbb{C}$*, то для интеграла от* f *по гладкому пути* $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$ *справедлива формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F[\gamma(\beta)] - F[\gamma(\alpha)]\,. \tag{26.16}$$

◀ Дифференцируя композицию $F \circ \gamma$, имеем

$$\frac{d}{dt}\,(F \circ \gamma)\,(t) = F'[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t) = f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t)\,.$$

Таким образом, композиция $F \circ \gamma$ является первообразной для функции $t \longmapsto f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Учитывая, далее, равенство (26.1) и применяя классическую формулу Ньютона — Лейбница для определенного интеграла Римана, получим

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma(t)] \cdot \gamma'(t)\,dt = F[\gamma(t)]\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} =$$
$$= F[\gamma(\beta)] - F[\gamma(\alpha)]\,. \quad ▶$$

Теорема 21. *Если функция* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *непрерывна в области* $D \subset \mathbb{C}$*, а интеграл от нее по краю любого треугольника, лежащего в* D*, равен нулю, то в некоторой окрестности каждой точки* $a \in D$ *существует локальная первообразная для* f*.*

◀ Пусть $a \in D$. Возьмем открытый круг U центром в точке a так, чтобы было $U \subset D$. Введем в рассмотрение функцию $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$, определяемую равенством

$$F(z) := \int\limits_a^z f(t)\,dt\,,\ \ z \in U\,, \tag{26.17}$$

где интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[a, z]$. Покажем, что функция F, определенная равенством (26.17), является первообразной для f в U. С этой целью зададим приращение $h \neq 0$, настолько малое, чтобы было $z + h \in U$. Так как круг U — выпуклое множество, то замкнутый треугольник Δ с вершинами в точках 0, z, $z + h$ лежит в U. По условию теоремы имеем

$$0 = \int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \left(\int\limits_a^z + \int\limits_z^{z+h} + \int\limits_{z+h}^a\right) f(z)\,dz\,,$$

что равносильно следующему равенству:

$$F(z + h) - F(z) = \int\limits_z^{z+h} f(t)\,dt\,.$$

Деля это равенство на h и вычитая из обеих частей полученного равенства $f(z)$, будем иметь

$$\left|\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} f(t)\,dt - f(z)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int\limits_z^{z+h} [f(t) - f(z)]\,dt\right| \leqslant \max_{t\in[z,z+h]} |f(t) - f(z)| \to 0 \tag{26.18}$$

при $h \to 0$ в силу непрерывности функции f. Переходя в (26.18) к пределу при $h \to 0$, получим $F'(z) = f(z)$. ▶

Замечание. Условие непрерывности функции f в теореме 21 существенно. Например, интеграл от функции

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad z = 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad z \neq 0\,, \end{cases}$$

по краю любого треугольника, очевидно, равен нулю, но локальной первообразной от нее в окрестности точки $z = 0$ не существует. Действительно, если бы такая первообразная F существовала, то она должна была бы быть аналитической функцией. Значит, ее производная функция F' должна была бы быть непрерывной в точке $z = 0$, а это условие в данном примере не выполняется.

Теорема 22. *Если функция $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, то в окрестности каждой точки $a \in D$ существует локальная первообразная для f.*

◀ Пусть Δ — произвольный замкнутый треугольник, лежащий в D. По интегральной теореме Коши (26.15) имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(t)\,dt = 0\,.$$

Отсюда, учитывая непрерывность аналитической функции, заключаем, что для функции f выполнены все условия предыдущей теоремы. Остается только применить ее. ▶

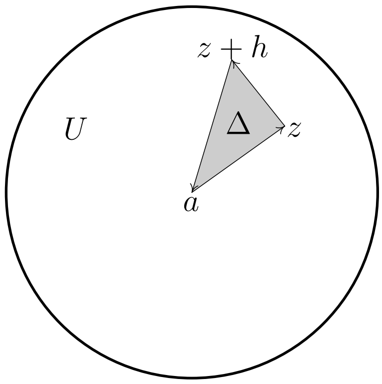

Рис. 14. К теоремам 21 и 22

Теорема 23 (теорема Коши «о гомотопии»). *Если функция $f \,:\, D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, а кусочно-гладкие пути*

$$\gamma_1 \,:\, [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow D \quad \text{и} \quad \gamma_2 \,:\, [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow D$$

гладко гомотопны в D, то

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz\,. \tag{26.19}$$

◀ Эта теорема представляет собой другую формулировку доказанной в вещественном анализе теоремы «о гомотопии», связанной с формулой Грина[3]. Надо только проверить, что у дифференциальной формы

$$f(z)\,dz = (u+iv)(dx+i\,dy) = (u\,dx - v\,dy) + i\cdot(v\,dx + u\,dy)$$

существует локальная первообразная. Но это вытекает из предыдущей теоремы, а также из тождеств

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

которые являются условиями Коши — Римана для аналитической функции $f = u + iv$. ▶

Напомним, далее, определение понятия односвязной области.

Определение 20. *Область D называется односвязной, если любые два лежащих в D пути с общими концами гомотопны в D, или, что равносильно, любой лежащий в D замкнутый путь гомотопен в D нулю (т. е. одноточечному пути).*

Примерами односвязных областей являются $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, любая выпуклая область, а также любая ограниченная область $D \subset \mathbb{C}$, граница которой связна (см. рис. 15).

Теорема 24. *Если область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, а функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая в D, то существует функция $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$, которая является глобальной первообразной для f в D.*

◀ Фиксируя произвольно точку $z_0 \in D$, рассмотрим интеграл

$$F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt\,, \tag{26.20}$$

взятый по любому гладкому пути, лежащему в D и соединяющему точки z_0 и z. Так как область D односвязна, то любые два таких пути гладко гомотопны в D. В силу теоремы 48 интеграл (26.20) не зависит от пути, и значит, является функцией только от z. Доказательство

[3] См., напр., часть 5 этого учебного пособия, гл. 22, § 3.

Рис. 15. Примеры односвязных областей

того, что $F' = f$, можно провести, выбирая специальным образом путь интегрирования в интеграле (26.20), затем используя ту же идею, которая была использована при доказательстве теоремы 21. ►

Теорема 25 (Коши для односвязных областей). *Если область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, а функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична в D, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0 \tag{26.21}$$

для любого замкнутого кусочно-гладкого пути $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$.

◄ Так как область D — односвязная, то любой лежащий в ней замкнутый путь γ гладко гомотопен нулю (т. е. одноточечному пути $\gamma_0(t) \equiv z_0 \in D$. Применяя теорему 48 (о «гомотопии»), имеем

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\gamma_0(t)] \cdot \gamma_0'(t)\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} 0 \cdot dt = 0\,,$$

поскольку $\gamma_0'(t) \equiv 0$ как производная постоянной функции. ►

Теорема 26 (Коши для областей с краем). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно-гладким краем ∂D. Если функция $f : D \sqcup \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична в D и непрерывна в $D \sqcup \partial D$, то*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0\,. \tag{26.22}$$

◀ Предположим сначала, что область D — односвязная. Тогда в силу теоремы 24 для функции f существует глобальная первообразная $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$, которую можно задать равенством (26.20), где интегрирование ведется по любому гладкому пути, лежащему в D и соединяющему точки z и z_0. С помощью той же формулы (26.20) функцию F можно продолжить на край ∂D до непрерывной функции $F : D \sqcup \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$. Покажем, что так продолженная функция сохраняет свойство быть первообразной для f на множестве $D \sqcup \partial D$ (а не только в области D). Пусть $\lambda \subset D$ — простая гладкая дуга, оканчивающаяся в точке $\xi \in \partial D$. Пусть $z \in \lambda \cap D$. Через $\lambda(z)$ обозначим часть дуги λ, которая начинается в точке z и оканчивается в точке ξ, а через $|\lambda(z)|$ — ее длину. Так как дуга λ — гладкая, то

$$\lim_{\substack{z\to\xi,\\ z\in\lambda}} \frac{|\lambda(z)|}{|\xi - z|} = 1\,.$$

Используя это равенство, имеем

$$\left|\frac{F(\xi)-F(z)}{\xi - z} - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\xi - z}\int\limits_{\lambda(z)} f(t)\,dt - \frac{1}{\xi - z}\int\limits_{\lambda(z)} f(\xi)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{|\xi - z|}\cdot\left|\int\limits_{\lambda(z)}[f(t)-f(\xi)]dt\right| \leqslant \frac{|\lambda(z)|}{|\xi - z|}\cdot\max_{t\in\lambda(z)}|f(t)-f(\xi)| \to 0$$

при $z \to \xi, z \in \lambda$ в силу непрерывности функции f. Итак, $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D \sqcup \partial D$. Поэтому

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{\partial D} = 0\,,$$

так как кривая ∂D — замкнутая, а приращение вдоль замкнутой кривой любой заданной на ней (однозначной) функции равно нулю.

Предположим теперь, что область D — многосвязная. Так как область с краем $D \sqcup \partial D$ — компакт, то ее край ∂D — тоже компакт, причем не связный, а состоящий из конечного числа связных компонент, гомеоморфных окружности (это число принято называть *порядком связности* области D).

Разрезая[4] область D по какой-нибудь простой гладкой кривой, соединяющей две различные компоненты края, получим в результате новую область, порядок связности которой на единицу меньше, чем у области D. Если новая область не односвязна, то ее разрезаем по какой-нибудь гладкой кривой, соединяющей различные компоненты ее края, уменьшив тем самым ее порядок связности на единицу. Продолжая этот процесс, мы после конечного числа разрезаний получим односвязную область $\widetilde{D}$. Добавляя к этой области край ∂D, а также оба «берега» выброшенных ранее разрезов и стандартно ориентируя их, получим в результате односвязную область с краем $\widetilde{D} \sqcup \partial\widetilde{D}$ (рис. 16). Для нее по доказанному выше будем иметь

$$0 = \int\limits_{\partial\widetilde{D}} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz\,,$$

так как интегралы по различным берегам разрезов взаимно уничтожаются в силу свойства ориентируемости плоскости $\mathbb{C}$. ▶

Желая обобщить интегральную теорему Коши на те случаи, когда подынтегральная функция разрывна или не ограничена в окрестности конечного множества точек края, введем понятие *интеграла в смысле главного значения* (по Коши), которое обобщает понятие несобственного интеграла.

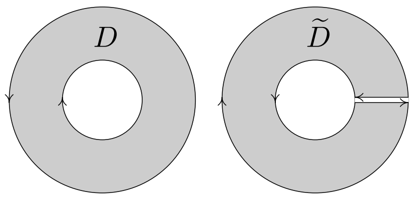

Рис. 16. Области D и $\widetilde{D}$

Определение 21. *Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — простая гладкая кривая, $t_0 \in L^0$ — ее внутренняя*[5] *точка, а $f : L \diagdown t_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Задавая малое число $\varepsilon > 0$, удалим из L точки круга $|z - t_0| < \varepsilon$, а оставшуюся часть кривой L обозначим через L_ε.*

[4] *Разрезанием* области D по простой кривой мы называем выбрасывание из области D множества точек этой кривой.

[5] т. е. не начальная и не концевая

Интеграл от функции f по кривой L в смысле главного значения (по Коши) определяется равенством

$$(\text{v.p.}) \int\limits_L f(t)\,dt := \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{L_\varepsilon} f(t)\,dt\,. \qquad (26.23)$$

Считается, как обычно, что интеграл в смысле главного значения существует, если и только если предел (26.23) существует и является числом. Буквы[6] «v.p.», которые иногда ставятся перед интегралом, служат напоминанием о том, что этот интеграл понимается в смысле главного значения. Очевидно, что если интеграл $\int\limits_L f(t)\,dt$ существует в смысле Римана или как несобственный, то он существует и в смысле главного значения с тем же числовым значением. Однако бывают случаи, когда интеграл, рассматриваемый как несобственный, расходится, а в смысле главного значения существует. Покажем это на примере расходящегося несобственного интеграла

$$\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0}\,,$$

где $L \subset \mathbb{C}$ — простая гладкая замкнутая кривая, являющаяся стандартно ориентированным краем области $D \subset \mathbb{C}$, а $t_0 \in L$.

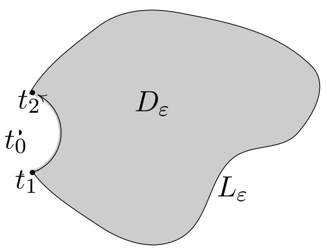

Рис. 17. К определению 21

Желая применить к этому интегралу определение 21, зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ настолько малым, чтобы кривая L и окружность $|z-t_0| = \varepsilon$ пересекались ровно в двух точках t_1, t_2, пронумерованных так, чтобы точки t_2, t_0, t_1 располагались на L в порядке положительного обхода (см. рис. 17). В силу интегральной теоремы Коши (теорема 26), примененной к области D_ε, закрашенной на рис. 17, интеграл по кривой L_ε равен интегралу по дуге окружности $|z-t_0| = \varepsilon$, ориентированной против часовой стрелки, от точки $t_1 = \varepsilon \cdot e^{i\varphi_1}$ до точки $t_2 = \varepsilon \cdot e^{i\varphi_2}$, где $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$,

[6]эти буквы — сокращения французских слов *valeur principal* — главное значение.

т. е.

$$\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{dt}{t-t_0} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t-t_0} = i\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)i \to \pi i \;\text{ при }\; \varepsilon \to 0\,.$$

Таким образом,

$$(\text{v.p.})\int\limits_{L} \frac{dt}{t-t_0} = \pi i\,. \tag{26.24}$$

Установим теперь интегральную теорему Коши для функции, которая в окрестности конечного числа точек края может быть неограниченной.

Теорема 27. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно-гладким краем ∂D. Пусть функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична в D и непрерывно продолжима на край ∂D, кроме конечного множества точек $c_1, \ldots, c_n \in \partial D$, причем имеют место равенства*

$$\lim_{\substack{z\to c_k\\ z\in D}} [(z-c_k)\cdot f(z)] = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n\,. \tag{26.25}$$

Тогда

$$(\text{v.p.})\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0\,. \tag{26.26}$$

◀ Удалим из плоскости попарно непересекающиеся круги $|z-c_k| < \varepsilon$ достаточно малого радиуса ε. Оставшуюся часть области D обозначим через D_ε, а оставшуюся часть ее края — через L_ε. Применяя к области D_ε теорему 26, имеем

$$0 = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,dz = \int\limits_{L_\varepsilon} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\substack{|z-c_k|=\varepsilon\\ z\in D}} f(z)\,dz\,. \tag{26.27}$$

Используя равенства (26.25), оценим сверху слагаемые последней суммы

$$\left|\int\limits_{\substack{|z-c_k|=\varepsilon\\ z\in D}} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{\substack{|z-c_k|=\varepsilon\\ z\in D}} (z-c_k)f(z)\cdot\frac{dz}{z-c_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{|z-c_k|=\varepsilon\\ z\in D}} |z-c_k|\cdot|f(z)| \int\limits_{\substack{|z-c_k|=\varepsilon\\ z\in D}} \frac{|dz|}{|z-c_k|} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\cdot \max_{\substack{|z-c_k|=\varepsilon\\ z\in D}} |(z-c_k)\cdot f(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0\,.$$

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon\to+0$ в равенстве (26.27), заключаем, что интеграл (26.26) существует в смысле главного значения и равен нулю. ▶

Замечания. 1. Условия (26.25) в теореме 27 существенны в том смысле, что если их ослабить, то теорема перестает быть верной. Например, для функции $f(z) = \dfrac{1}{z-t_0}$ вместо (26.25) имеем $\lim\limits_{z\to t_0}[(z-t_0)\cdot f(z)] = 1$, а вместо равенства (26.26) имеет место равенство (26.24).

2. Интегральная теорема Коши допускает обобщение и на те случаи, когда область аналитичности данной функции не является ограниченной, т. е. когда точка ∞ лежит внутри области аналитичности, либо когда некоторые из точек края этой области являются бесконечно удаленными. Это обобщение составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 28. *Пусть $D\subset\widehat{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладким краем ∂D, причем либо $\infty\in D$, либо некоторые из точек края ∂D являются бесконечно удаленными. Пусть функция $f : D\longrightarrow\mathbb{C}$ аналитична в D и непрерывно продолжима на край ∂D, кроме конечных точек $c_1,\dots,c_n\in\partial D$, в которых имеют место равенства* (26.25), *и бесконечно удаленных точек, в которых имеют место равенства*

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in D}} [z\cdot f(z)] = 0\,. \tag{26.28}$$

Тогда имеет место и равенство (26.26).

◀ Удалим из сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ множество $\{|z| \geqslant R\}$, где R — достаточно большое положительное число. Оставшуюся часть области D обозначим через D_R, а оставшуюся часть края ∂D — через L_R. Область D_R — ограниченная, поэтому к ней применима предыдущая теорема. Применив ее, получим

$$0 = \int\limits_{\partial D_R} f(z)\,dz = \int\limits_{L_R} f(z)\,dz + \int\limits_{\substack{|z|=R\\ z\in D}} f(z)\,dz\,. \tag{26.29}$$

Используя условие (26.28), оценим последний интеграл

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=R\\ z\in D}} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{\substack{|z|=R\\ z\in D}} zf(z)\,\frac{dz}{z}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\substack{|z|=R\\ z\in D}} |z\cdot f(z)| \int\limits_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z|} = 2\pi\cdot \max_{\substack{|z|=R\\ z\in D}} |z\cdot f(z)| \to 0 \quad \text{при} \quad R\to+\infty$$

в силу условия (26.28). Поэтому, переходя к пределу в (26.29), получим равенство (26.26). ▶

Замечание. В заключение приведем еще одну форму интегральной теоремы Коши, удобную для применений.

Теорема 29. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладким краем ∂D, а функция f аналитична в D и непрерывна на ∂D, кроме конечного множества точек (включая точку ∞, если область D неограничена), в окрестности которых она допускает особенности интегрируемых порядков. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0\,.$$

◀ Не ограничивая общности, будем считать, что область D односвязная. Тогда в силу теоремы 24 у функции $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ существует глобальная первообразная $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Так как f непрерывна на

∂D, кроме конечного числа точек, в окрестности которых она имеет интегрируемые особенности, то первообразную F можно продолжить на край до непрерывной функции $F : D \sqcup \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$. Сужение этой функции на край $F : \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$ будет, таким образом, обобщенной первообразной[7] для сужения функции f на край. Поэтому интеграл от f по ∂D можно выразить через обобщенную первообразную по формуле Ньютона — Лейбница. Итак, имеем

$$\int\limits_{\partial D} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{\partial D} = 0\,,$$

так как приращение вдоль замкнутой кривой любой непрерывной на ней функции равно нулю. ►

Пример. В качестве примера на применение интегральной теоремы Коши вычислим интеграл

$$I(a) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\,dx\,, \quad \text{где} \quad a \in \mathbb{R}_+\,,$$

исходя из того, что $I(0) = \sqrt{\pi}$.

◄ Применяя к функции $z \longmapsto e^{-z^2}$, аналитической в горизонтальной полосе полосе $\Pi := \{0 < \operatorname{Im} z < a\}$, интегральную теорему Коши 29, имеем

$$0 = \int\limits_{\partial\Pi} e^{-z^2} dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int\limits_{-\infty+ai}^{+\infty+ai} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ai)^2} dx =$$

$$= \sqrt{\pi} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-2xai} \cdot e^{a^2} dx = \sqrt{\pi} - e^{a^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos 2ax + i \sin 2ax)\,dx =$$

$$= \sqrt{\pi} - e^{a^2} \cdot I(a)\,.$$

Отсюда находим

$$I(a) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-a^2}\,. \quad ►$$

[7] О понятии обобщенной первообразной см. часть 2 этого учебного пособия, гл. 10.

§ 3. Интегральная формула Коши — Грина. Интегральная формула Коши и ее следствия

1. Интегральная формула Коши — Грина

Теорема 30. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная область с кусочно-гладким краем ∂D, а функция $f : D \sqcup \partial D \longrightarrow \mathbb{C}$ имеет непрерывные частные производные. Тогда $\forall z \in D$ выполняется равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{D} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}\,. \tag{26.30}$$

Если дополнительно предположить. что функция f аналитична в D, то $\forall z \in D$ будет выполняться следующее равенство:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{26.31}$$

◀ Подынтегральная функция двойного интеграла в (26.30) неограничена, поскольку

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{1}{\zeta - z} = \infty\,.$$

Таким образом, двойной интеграл не существует в смысле Римана. Покажем, что этот интеграл сходится как несобственный. Сходимость его будет установлена, если покажем, что интеграл

$$\iint\limits_{|\zeta - z| \leqslant \rho} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}\,, \tag{26.32}$$

взятый по кругу малого радиуса ρ с центром в точке z, существует и стремится к нулю при $\rho \to +0$. С этой целью сделаем в интеграле (26.32) замену переменной, перейдя от декартовых координат к полярным с полюсом и точке z:

$$\zeta = z + re^{i\varphi}\,, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho\,, \;\; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$d\zeta = e^{i\varphi}dr + rie^{i\varphi}d\varphi\,, \quad d\overline{\zeta} = e^{-i\varphi}dr - rie^{-i\varphi}d\varphi\,.$$

Перемножая эти дифференциалы внешне, находим

$$d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = -2ir\;dr \wedge d\varphi\,.$$

Таким образом, имеем

$$\iint\limits_{|\zeta-z|\leqslant\rho} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z} = -2i\int\limits_0^\rho dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} e^{-i\varphi}d\varphi\,. \tag{26.33}$$

Итак, двойной интеграл (26.32) преобразован к двойному интегралу с непрерывной подынтегральной функцией, находящемуся в правой части равенства (26.33), который поэтому существует в смысле Римана. Кроме того, из равенства (26.33) находим

$$\left|\iint\limits_{|\zeta-z|\leqslant\rho} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right| \leqslant 4\pi\rho\cdot\max_\zeta\left|\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \rho\to+0\,.$$

Отсюда следует, что двойной интеграл из (26.30) сходится.

Переходя к доказательству равенства (26.30), обозначим через D_ρ область D, из которой выброшен круг $|\zeta - z| \leqslant \rho$. При достаточно малых значениях ρ край ∂D_ρ области D_ρ будет состоять из края ∂D и окружности $|\zeta - z| = \rho$, ориентированной в направлении по часовой стрелке. Применяя к области D_ρ формулу Грина в форме (26.14), получим

$$\int\limits_{\partial D_\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \iint\limits_{D_\rho} \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)\cdot d\overline{\zeta}\wedge d\zeta\,. \tag{26.34}$$

Преобразуем подынтегральную функцию двойного интеграла

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{\zeta - z}\cdot\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} + f(\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{\zeta - z}\cdot\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\,,$$

так как $\dfrac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left(\dfrac{1}{\zeta - z}\right) = 0$ в силу аналитичности функции $\dfrac{1}{\zeta - z}$ при $\zeta \neq z$. Таким образом, равенство (26.34) переписывается в виде

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int\limits_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\iint\limits_{D_\rho} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \tag{26.35}$$

где интегрирование по окружности проводится в направлении против часовой стрелки. Преобразуем теперь интеграл по окружности $|\zeta - z| = \rho$, полагая $\zeta - z = \rho e^{i\varphi}$, $d\zeta = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$

$$\int\limits_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi = i \int\limits_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi})\, d\varphi \to 2\pi i f(z)$$

при $\rho \to +0$. Учитывая это и переходя в равенстве (26.35) к пределу при $\rho \to +0$, получим

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = -\iint\limits_{D} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z},$$

что равносильно равенству (26.30).

Предполагая дополнительно, что функция f аналитична в D, в силу условия Коши — Римана получим $\dfrac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}} \equiv 0$. Поэтому двойной интеграл в (26.30) обращается в нуль, и мы приходим к равенству (26.31). ▶

Замечания. 1. Равенство (26.30) выражает дифференцируемую функцию через значения ее производной по $\overline{z}$ в области и через значения само́й функции на краю области. Оно встречается у ряда авторов, однако впервые явно опубликовано итальянским математиком Д. Помпейю (D. Pompeiu) в 1912 г. и потому называется *формулой Помпейю.* Однако задолго до него этим кругом идей владели О. Коши и Д. Грин. Поэтому правильнее было бы назвать равенство (26.30) *формулой Коши — Грина.*

2. Равенство (26.31), называемое *интегральной формулой Коши*, имеет фундаментальное значение в комплексном анализе. Оно выражает значения аналитической функции в точках области D через ее значения в точках края ∂D. Если $z \notin \overline{D}$

(замыканию области D), то функция $\zeta \longmapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ будет аналитической всюду в D, и потому интеграл от нее по ∂D будет равен нулю на основании *интегральной теоремы Коши* (теоремы 26). Поэтому интегральная формула Коши иногда записывается в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{при} \quad z \in D\,, \\ 0 & \text{при} \quad z \notin \overline{D}\,. \end{cases} \tag{26.36}$$

2. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши

В следующей теореме интегральная формула Коши доказывается при меньших ограничениях на область D и функцию f, чем в теореме 30.

Теорема 31. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладким краем ∂D. Пусть функция f аналитична в D, а в $D \sqcup \partial D$ удовлетворяет условиям применимости интегральной теоремы Коши. Тогда справедлива и интегральная формула Коши* (26.36).

◀ Если $z \notin \overline{D}$, то функция $\zeta \longmapsto \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ аналитична в D, а в $D \sqcup \partial D$ удовлетворяет условиям применимости интегральной теоремы Коши. Применяя ее, заключаем, что в рассматриваемом случае интеграл из (26.36) равен нулю.

Если же $z \in D$, то, удаляя из области D круг $|\zeta - z| \leqslant \rho$ малого радиуса ρ и применяя к остальной части области D интегральную теорему Коши, будем иметь

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int\limits_{|\zeta - z| = \rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0\,. \tag{26.37}$$

Преобразуя интеграл по окружности так же, как и в доказательстве теоремы 30, получим

$$\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - i\int\limits_{0}^{2\pi} f(z + \rho e^{i\varphi})d\varphi = 0\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\rho \to 0$, получаем равенство

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) = 0\,,$$

равносильное верхнему равенству (26.36). ►

Замечания. 1. В зависимости от ограничений, налагаемых на функцию f в соответствующем варианте интегральной теоремы Коши, интеграл из (26.36) может пониматься либо в смысле Римана, либо как несобственный, либо в смысле главного значения.

2. Интеграл из (26.36) называется *интегралом Коши*, функция f — его *плотностью*, а функция $\dfrac{1}{\zeta - z}$ — *ядром Коши*. Обобщением интеграла Коши является так называемый *интеграл типа Коши* (т. е. интеграл, построенный по образцу интеграла Коши), определяемый ниже.

Определение 22. *Пусть* $L \subset \mathbb{C}$ *— простая гладкая кривая, а* $\varphi : L \longrightarrow \mathbb{C}$ *— функция, интегрируемая по Риману. Интегралом типа Коши называется функция* $\Phi : \mathbb{C} \diagdown L \longrightarrow \mathbb{C}$, *определяемая равенством*

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\,, \quad z \notin L\,. \tag{26.38}$$

Теорема 32. *Функция* Φ, *определяемая интегралом типа Коши* (26.38), *является аналитической на множестве* $\mathbb{C} \diagdown L$ *и стремится к нулю при* $z \to \infty$.

◄ Для доказательства аналитичности достаточно показать, что в произвольно зафиксированной точке $z_0 \in \mathbb{C} \diagdown L$ существует конечная производная $\Phi'(z_0)$. С этой целью зададим настолько малое число $\rho > 0$, чтобы замкнутый круг $K := \{|z - z_0| \leqslant \rho\}$ и кривая L не пересекались. Задавая приращение h так, чтобы было $0 < |h| \leqslant \rho$, составим разностное отношение

$$\frac{\Phi(z_0 + h) - \Phi(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_0 - h)} d\zeta\,. \tag{26.39}$$

Подынтегральная функция этого интеграла равномерно непрерывна по переменной (h, ζ) на компакте $\{|h| \leqslant \rho\} \times L$. По соответствующей теореме из теории интегралов, зависящих от параметра, таким же свойством обладает и интеграл (26.39). Поэтому возможен предельный переход под знаком этого интеграла, и мы имеем

$$\Phi'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(z_0+h)-\Phi(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \,.$$

Последнее утверждение теоремы следует из оценки, справедливой при достаточно больших значениях $|z|$:

$$\left| \int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leqslant \frac{\max\limits_{\zeta\in L} |\varphi(\zeta)|}{|z| - \min\limits_{\zeta\in L} |\zeta|} \cdot \int\limits_L |d\zeta| \to 0 \ \text{ при } \ z \to \infty \,. \ \blacktriangleright$$

3. Некоторые свойства аналитических функций, вытекающие из интегральной формулы Коши

Теорема 33 (бесконечная дифференцируемость). *У любой аналитической функции* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, *существуют производные функции* $f^{(n)} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ *любого порядка* $n \in \mathbb{N}$, *которые также являются аналитическими функциями.*

◀ Зафиксируем произвольный круг $K := \{|z - z_0| \leqslant R\}$, лежащий в области D, и представим функцию $f\big|_{K^0}$ в виде интеграла Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \partial\zeta \,, \quad |z - z_0| < R \,. \tag{26.40}$$

Зафиксируем точку z внутри круга K^0 и число $\rho \in (0, R - |z - z_0|)$. При таком выборе параметров окружность ∂K и круг $\{|h| \leqslant \rho\}$ не пересекаются, поэтому интеграл, представляющий при $h \neq 0$ разностное отношение

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} \, d\zeta \,, \tag{26.41}$$

непрерывно зависит от параметра h. Переходя в последнем равенстве к пределу при $h \to 0$, получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \partial\zeta\,, \quad |z - z_0| < R\,. \tag{26.42}$$

Поскольку производная функция f' существует и непрерывна, то функция f — аналитическая. Исходя из представления (26.42), составим и преобразуем разностное отношение

$$\begin{aligned} \frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} &= \\ = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^2}\, \partial\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, \partial\zeta \right) &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{(\zeta - z) + (\zeta - z - h)}{(\zeta - z - h)^2 (\zeta - z)^2} f(\zeta)\, \partial\zeta\,. \end{aligned} \tag{26.43}$$

Переходя здесь к пределу при $h \to 0$, получим

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, \partial\zeta\,, \quad z \in K^0\,,$$

откуда заключаем, что функция f' — аналитическая.

Применяя индукцию, предположим, что существуют все производные до порядка $(n-1)$ включительно, причем для сужения $f^{(n-1)}\big|_{K^0}$ имеет место представление

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, \partial\zeta\,, \quad z \in K^0\,, \tag{26.44}$$

Исходя из этого представления, составим и преобразуем разностное отношение

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h}=$$

$$=\left(\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^n}\,\partial\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\,\partial\zeta\right)\cdot\frac{1}{h}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\zeta-z)^{n-1-k}(\zeta-z-h)^k}{(\zeta-z-h)^n(\zeta-z)^n}f(\zeta)\,\partial\zeta\,. \qquad (26.45)$$

Переходя здесь к пределу при $h\to 0$, получим

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,\partial\zeta\,,\quad z\in K^0\,.$$

Таким образом, аналитическая функция имеет производные всех порядков, и значит, все они — тоже аналитические функции. ▶

Замечания. 1. В связи с теоремой 33 возникает естественный вопрос: можно ли дифференцировать по z интегральную формулу Коши? Ответ положительный. Дифференцируя n раз равенство (26.36) по переменной z, получим

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta=\begin{cases}f^{(n)}(z) & \text{при}\quad z\in D\,,\\ 0 & \text{при}\quad z\notin\overline{D}\,.\end{cases} \qquad (26.46)$$

Простое доказательство этого равенства предоставляетя читателю.

2. Установленное в теореме 33 свойство резко отличает аналитические функции от непрерывно дифференцируемых функций одного вещественного переменного. В отличие от аналитических функций существует непрерывно дифференцируемая функция вещественного переменного, у которой нигде не существует производной второго порядка.

Теорема 34 («о среднем арифметическом»). *Значение аналитической функции f в любой точке z ее области аналитичности равно среднему арифметическому ее значений на окружности достаточно малого радиуса $\rho>0$ с центром в точке z, т. е.*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta\,. \qquad (26.47)$$

◀ Выберем положительное число ρ настолько малым, чтобы круг $\bigl\{\zeta\in\mathbb{C}\ \big|\ |\zeta-z|\leqslant\rho\bigr\}$ лежал в области аналитичности функции f. Применяя интегральную формулу Коши и производя в интеграле Коши замену $\zeta - z=\rho e^{i\theta}$, $d\zeta=\rho i e^{i\theta}d\theta$, получим

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z|=\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})\rho i e^{i\theta}d\theta}{\rho e^{i\theta}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta\,. \quad ▶$$

Замечания. 1. Среди дифференцируемых функций одного вещественного переменного свойством, указанным в теореме 34, обладают только функции вида $y=kx+b$, т. е. только линейные функции. Теорема 34 обнаруживает, таким образом, некоторую «правильность» распределения значений, принимаемых аналитическими функциями. В связи с этим аналитические функции иногда называют *правильными* или *регулярными*.

2. Полагая $f(z)=u(z)+iv(z)$, и выделяя в равенстве (26.47) вещественные части, получим

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(z+\rho e^{i\theta})\,d\theta\,. \tag{26.48}$$

Учитывая, далее. что вещественная часть аналитической функции есть функция гармоническая, из (26.48) заключаем, что теорема о среднем арифметическом справедлива и для гармонических функций.

Теорема 35 (принцип максимума модуля). *Если функция f — аналитическая, то функция $|f|$ не может достигать строгого локального максимума в области аналитичности функции f.*

◀ Предположим противное: пусть существует точка z_0, в которой $|f(z_0)|>|f(z_0+\rho e^{i\theta})$ при всех достаточно малых ρ и при всех $\theta\in[0,2\pi]$. Так как отрезок $[0,2\pi]$ — компакт, то справедливо и следующее строгое неравенство:

$$|f(z_0)|>\max_{\theta\in[0,2\pi]}|f(z_0+\rho e^{i\theta})|\,. \tag{26.49}$$

С другой стороны, на основании теоремы 34 имеем

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta \right| \leqslant \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|\,,$$

что противоречит неравенству (26.49). ►

Замечание. Учитывая равенство (26.48), заключаем, что принцип максимума модуля справедлив и для гармонических функций.

Теорема 36 (Лиувилль). *Если функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена, то она тождественно равна постоянной.*

◄ Пусть $R \in \mathbb{R}_+$ — произвольное число, и $|z| < R$. Представляя функцию f интегралом Коши и дифференцируя его, получим представление для производной

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}\,. \tag{26.50}$$

Пусть $|f(z)| \leqslant M \in \mathbb{R}_+$. Производя в интеграле (26.50) замену $\zeta = Re^{i\theta}$, $d\zeta = Rie^{i\theta} d\theta$ и оценивая его модуль сверху, получим

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta}{(Re^{i\theta} - z)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MR}{2\pi(R - |z|)^2} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty\,. \tag{26.51}$$

С другой стороны, при возрастании радиуса R окружность $|\zeta| = R$ деформируется гомотопно, и по теореме Коши «о гомотопии» интеграл (26.50) не зависит от R. Поэтому из оценки (26.51) следует, что $f'(z) \equiv 0$, и значит, $f(z) \equiv \mathrm{const}$. ►

Теорема 37 («основная теорема алгебры»). *Существует лежащий в $\mathbb{C}$ корень любого алгебраического уравнения степени $n \in \mathbb{N}$*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,, \tag{26.52}$$

где $a_1, \ldots,\ a_n \in \mathbb{C}$ *— произвольные коэффициенты.*

◀ Введем в рассмотрение функцию

$$f(z) := z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$

аналитическую всюду в $\mathbb{C}$. Очевидно, что

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\left[z^n \cdot \left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right)\right] = \infty\,. \tag{26.53}$$

Предположим противное, т. е. что уравнение (26.52) не имеет корней в $\mathbb{C}$. В этом случае функция φ, определяемая равенством

$$\varphi(z) := \frac{1}{f(z)}\,, \tag{26.54}$$

оказывается аналитической всюду в $\mathbb{C}$ (как частное аналитических функций, у которого знаменатель нигде не обращается в нуль). Кроме того, из (26.54) очевидно, что

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0\,. \tag{26.55}$$

Доопределяя функцию φ в точку ∞ по непрерывности, т. е. полагая $\varphi(\infty) := 0$, получим, что функция $\varphi\ :\ \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на компакте $\widehat{\mathbb{C}}$ и потому ограничена. Но тогда на основании теоремы 36 (Лиувилля) должно быть $\varphi(z) \equiv \mathrm{const}$ и, более того, из (26.55) следует, что $\varphi(z) \equiv 0$. Полученное равенство противоречит равенству (26.54), из которого следует, что $\varphi(z) \not\equiv 0$. ▶

Глава 27

РАЗЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Некоторые свойства аналитических функций

1. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора и некоторые следствия

Сначала напомним кратко[1] определение понятия степенного ряда от комплексного переменного и некоторые свойства таких рядов.

Определение 23. *Степенны́м рядом от комплексного переменного z называется функциональный ряд следующего вида*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n = c_0 + c_1 \cdot (z-z_0) + \ldots + c_n \cdot (z-z_0)^n + \cdots \,, \quad (27.1)$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, а $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ — числовая последовательность, называемая последовательностью коэффициентов данного степенного ряда.

Определение 24. *Радиусом сходимости степенного ряда* (27.1) *называется величина $R \in [0, +\infty]$, вычисляемая по следующей формуле Коши — Адамара*

$$R := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\,. \quad (27.2)$$

Кругом сходимости степенного ряда (27.1) *называется множество $\big\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z-z_0| < R\big\}$, где R — его радиус сходимости.*

[1] Более подробно этот материал изложен в части 4 этого учебного пособия, где, в частности, доказаны утверждения, содержащиеся в теореме 38.

Замечание. При $R = 0$ кругом сходимости является пустое множество $\varnothing$, при $R = +\infty$ — вся плоскость $\mathbb{C}$, а при $0 < R < +\infty$ — обычный открытый круг с центром в точке z_0 радиуса R.

Теорема 38. *Степенной ряд: расходится во внешности его круга сходимости, сходится абсолютно внутри его круга сходимости, сходится равномерно на любом компакте, лежащем внутри его круга сходимости.*

Теорема 39 (Тейлор). *Если функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, и $z_0 \in D$ — произвольная точка, то в любом круге $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$, лежащем в D, справедливо разложение*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \ldots + c_n \cdot (z - z_0)^n + \cdots, \tag{27.3}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{27.4}$$

при любом достаточно малом $\rho > 0$.

◀ Представим функцию f по интегральной формуле Коши при $z \in U$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{27.5}$$

Обозначая $r := |z - z_0|$, имеем $r < R$, и значит, $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{r}{R} < 1$. Поэтому ядро Коши можно разложить в ряд следующим образом

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Умножая это равенство на $f(\zeta)$, получим разложение

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \tag{27.6}$$

которое при фиксированном z сходится равномерно по ζ на окружности $|\zeta - z_0| = R$, поскольку мажорируется сходящимся положительным числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R} \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad \text{где} \quad M = \max_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)| .$$

Таким образом, возможно почленное интегрирование ряда (27.6). Производя это интегрирование, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n ,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

— равенства, равносильные равенствам (27.4) в силу теоремы Коши «о гомотопии». ►

Следствие 1 (неравенства Коши). *Для коэффициентов степенного ряда* (27.3) *имеют место следующие оценки:*

$$|c_n| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots , \tag{27.7}$$

где $0 < \rho < R$, *а* $M(\rho) = \max\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|$.

◄ Из (27.4) имеем

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{|f(\zeta)| \cdot |d\zeta|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(\rho)}{2\pi \rho^{n+1}} \int\limits_0^{2\pi} |i\rho e^{i\theta}| \, d\theta = \frac{M(\rho)}{\rho^n} . \text{ ►}$$

Следствие 2 (теорема Лиувилля). *Если функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена, то она тождественно равна постоянной.*

◀ Так как функция f аналитична в $\mathbb{C}$, то она допускает разложение в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

сходящийся в круге $|z| < \rho$ любого радиуса $\rho \in \mathbb{R}_+$. Поэтому в неравенствах Коши (27.7) имеем право перейти к пределу при $\rho \to +\infty$. После перехода к пределу получим $c_n = 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Но тогда из (27.3) следует, что $f(z) \equiv c_0$ — постоянная. ▶

Теорема 40. *Сумма любого степенного ряда аналитична внутри круга его сходимости, и возможно его почленное дифференцирование.*

◀ Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \tag{27.8}$$

— степенной ряд, а $|z - z_0| < R$ — его круг сходимости. Составим ряд из производных данного ряда

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cdot (z - z_0)^{n-1}. \tag{27.9}$$

Кругом сходимости этого ряда является тот же самый круг $|z - z_0| < R$. На основании теоремы 38 ряд (27.9) можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему в круге сходимости. Поэтому имеем

$$c_0 + \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\, dt = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \int_{z_0}^{z} (t - z_0)^{n-1} dt = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = f(z)\,,$$

откуда

$$f(z) = c_0 + \int_{z_0}^{z} \varphi(t)\, dt\,,$$

причем интеграл не зависит от пути. При достаточно малом $h \neq 0$ разностное отношение преобразуется следующим образом:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{z_0}^{z+h} \varphi(t)\,dt - \int\limits_{z_0}^{z} \varphi(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} \varphi(t)\,dt = \\ = \varphi(z+\theta\cdot h)\,,$$

где $\theta \in [0,1]$. Переходя здесь к пределу при $h \to 0$, получим $f'(z) = \varphi(z)$. Поэтому f — аналитическая функция. ►

Следствие 1. *Равенство $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$ можно почленно дифференцировать любое число раз.*

◄ По теореме 40 сумма ряда (27.8) аналитична, и значит, у нее существуют производные всех порядков. По той же теореме имеет место равенство $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$. Применяя к этому равенству такое же рассуждение и индукцию, получим требуемое. ►

Следствие 2. *Для коэффициентов сходящегося степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$ справедливы равенства*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{27.10}$$

◄ Вычислим k-ю производную суммы данного степенного ряда

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot c_n\cdot(z-z_0)^{n-k}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to z_0$, получим $f^{(k)}(z_0) = k!\cdot c_k$, что равносильно доказываемым равенствам. ►

Замечание. Итак, коэффициенты разложения аналитической функции в степенной ряд можно вычислять не только по формулам (27.4), но и по формулам (27.10), знакомым из вещественного анализа. Пользуясь ими, можно многие известные из вещественного анализ разложения переносить в комплексный анализ, просто заменяя в них вещественную переменную на комплексную. Справедливы, например, следующие разложения:

$$
\begin{aligned}
&e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,\\
&\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,\\
&\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,\\
&\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \ldots\,, \quad |z| < 1\,,\\
&\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\,, \quad |z| < 1\,,\\
&(1+z)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} z + \binom{\mu}{2} z^2 + \binom{\mu}{3} z^3 + \ldots\,, \quad |z| < 1\,,
\end{aligned}
$$

где z — комплексная переменная.

Теорема 41 (Морера). *Если функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$, а интеграл от нее по краю любого треугольника, лежащего в D, равен нулю, то f аналитична в D.*

◀ На основании теоремы 21 у функции f в некоторой окрестности U каждой точки $a \in D$ существует локальная первообразная $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$. В этой окрестности функция f — аналитическая как производная аналитической функции F. ▶

2. Нули аналитических функций и теорема единственности

Определение 25. *Нулем функции f называется любая точка z, в которой $f(z) = 0$.*

Если f — дифференцируемая функция вещественного переменного, то множество всех ее нулей может быть устроено весьма сложно. Например, функция

$$
f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{при} \quad x \geqslant 0\,, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}
$$

принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R})$, а множество ее нулей — луч $(-\infty, 0]$.

Функция

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0\,, \\ 0 \qquad \text{при } x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема на $\mathbb{R}$, а множество ее нулей состоит из точки $x = 0$ и точек вида $1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, сгущающихся к точке $x = 0$.

Асимптотика дифференцируемых функций вещественного переменного в окрестности их нулей может быть настолько разнообразной, что в общем случае она не допускает простого описания.

На подобные вопросы относительно аналитических функций комплексного переменного содержательные ответы есть. Множество всех нулей, лежащих в области аналитичности, и асимптотика аналитической функции в окрестности каждого такого нуля допускают простое описание, содержащееся в следующих теоремах.

Теорема 42. *Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ — функция, аналитическая в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, а точка $z_0 \in D$ — нуль функции f. Если в некоторой окрестности точки z_0 функция f отлична от тождественного нуля, то существует проколотая*[2] *окрестность $\dot{U}(z_0)$, такая, что*

$$\forall z \in \dot{U}(z_0) \ : \ f(z) \neq 0\,. \tag{27.11}$$

◀ Предположим сначала, что $z_0 \neq \infty$. Разложим функцию f в ряд по степеням $(z - z_0)$

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots\,, \tag{27.12}$$

сходящийся в некоторой окрестности $V(z_0)$ точки z_0. Имеем $c_0 = f(z_0) = 0$, а так как $f(z) \not\equiv 0$ в $V(z_0)$, то среди остальных коэффициентов $c_1,\ c_2,\ \ldots$ есть отличные от нуля. Пусть $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, а $c_n \neq 0$. Тогда ряд (27.12) преобразуется к виду

$$f(z) = c_n \cdot (z - z_0)^n + c_{n+1}) \cdot (z - z_0)^{n+1} + \ldots = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)\,, \tag{27.13}$$

где обозначено

$$\varphi(z) := c_n + c_{n+1} \cdot (z - z_0) + c_{n+2} \cdot (z - z_0)^2 + \ldots\,,$$

[2] Напоминаю, что *проколотой* окрестностью точки называется окрестность, из которой удалена сама эта точка.

причем этот ряд сходится в той же окрестности $V(z_0)$, что и ряд (27.12). Так как аналитическая функция непрерывна, и $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z) = c_0 \neq 0$, то в силу локального свойства непрерывных функций существует окрестность $U(z_0) \subset V(z_0)$ такая,что $\forall\, z \in U(z_0)\ :\ \varphi(z) \neq 0$. Отсюда и из (27.13) видно, что выполнено условие (27.11).

Предположим теперь, что $\infty \in D$ и $f(\infty) \neq 0$. Переходя в окрестности точки ∞ к локальным координатам

$$t := \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{при} \quad z \neq \infty\,, \\ 0 & \text{при} \quad z = \infty\,, \end{cases}$$

получим функцию

$$g(t) := \begin{cases} f(1/t) & \text{при} \quad t \neq 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad t = 0\,, \end{cases}$$

аналитическую и отличную от тождественного нуля в некоторой окрестности точки $t = 0$. Применяя к функции g доказанную часть теоремы и переходя обратно к переменной z, заключаем, что утверждение (27.11) справедливо и при $z_0 = \infty$. ►

Замечание. Установленное в теореме 42 свойство (27.11) называется свойством *изолированности нулей.* То же самое свойство в другой форме выражает и следующая теорема.

Теорема 43. *Пусть функция $f\ :\ D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и обращается в нуль во всех точках множества $E \subset D$, имеющего предельную точку $z_0 \in D$. Тогда $f(z) \equiv 0$ всюду в D.*

◄ Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{F} := \left\{ z \in D \;\middle|\; f(z) = 0 \right\}\,.$$

Достаточно показать, что $\mathcal{F} = D$. С этой целью рассмотрим открытое множество $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$, состоящее из всех внутренних точек множества $\mathcal{F}$. Так как z_0 — предельная точка нулей функции f, то по предыдущей теореме $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Поэтому $z_0 \in \mathcal{F}^0$ и, таким образом, $\mathcal{F}^0 \neq \varnothing$. И, наконец, множество $\mathcal{F}^0$ замкнуто относительно D. Действительно, если $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность точек $z_n \in \mathcal{F}^0$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in D$, то z_0 — предельная точка нулей, и значит, $z_0 \in \mathcal{F}_0$. Итак, множество $\mathcal{F}^0$ непусто, открыто и замкнуто относительно области D, а так как область D связна, то $\mathcal{F}^0 = D$. И, наконец, учитывая включения $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F} \subset D$, имеем $\mathcal{F} = D$. ▶

Теорема 44 (единственность). *Если функции f_1, f_2 аналитичны в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и совпадают на множестве $E \subset D$, имеющем предельную точку, лежащую в D, то $f_1 = f_2$ всюду в D.*

◀ Введем в рассмотрение разность $f := f_1 - f_2$. Для нее выполняются все условия предыдущей теоремы. Поэтому $f = 0$ всюду в D, и значит, $f_1 = f_2$ всюду в D. ▶

Замечания. 1. Теорему единственности иногда называют *свойством жёсткости* аналитических функций. Это свойство можно сформулировать следующим образом. *Если функция f, аналитическая в области D, допускает продолжение в более широкую область $G \supset D$ до аналитической функции*[3] *$F : G \longrightarrow \mathbb{C}$, (т. е. $F\big|_D = f$), то это продолжение — единственное.*

2. Учитывая теорему единственности, можно упростить формулировку теоремы 42, предположив только, что $f \not\equiv 0$.

Определение 26. *Число n называется* **порядком** (*или* **кратностью**) *нуля функции f в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если*[4]

$$f(z) \asymp (z-z_0)^n \text{ при } z \to z_0, \text{ или, что равносильно, } \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \in \mathbb{C}^*.$$

Если $z_0 = \infty$, то это условие надо заменить следующим:

$$f(z) \asymp \left(\frac{1}{z}\right)^n \quad \text{при} \quad z \to \infty, \quad \text{или, что равносильно,} \quad \lim_{z\to z_0} z^n f(z) \in \mathbb{C}^*.$$

Теорема 45. *Если функция $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ аналитична и отлична от тождественного нуля в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, то кратности всех лежащих в области D нулей функции f являются натуральными числами.*

[3]Такое продолжение называется *аналитическим.*

[4]Здесь и всюду в дальнейшем символом $\mathbb{C}^*$ обозначается множество всех комплексных чисел, отличных от нуля.

◀ Предположим сначала, что $z_0 \neq \infty$. Разложим функцию f в ряд по степеням $(z - z_0)$

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots . \tag{27.14}$$

Имеем $c_0 = 0$, а так как $f(z) \not\equiv 0$, то среди остальных коэффициентов $c_1,\ c_2,\ \ldots$ есть отличные от нуля. Пусть $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$, а $c_n \neq 0$. Тогда ряд (27.14) преобразуется к виду

$$f(z) = c_n \cdot (z - z_0)^n + c_{n+1}) \cdot (z - z_0)^{n+1} + \ldots = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)\,, \tag{27.15}$$

где обозначено

$$\varphi(z) := c_n + c_{n+1} \cdot (z - z_0) + c_{n+2} \cdot (z - z_0)^2 + \ldots = \frac{f(z)}{(z - a)^n}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to z_0$, получим

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} = \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = c_n \neq 0\,.$$

Пусть теперь $z_0 = \infty \in D$, и $f(\infty) = 0$. Разлагая $f(z)$ по степеням локальной координаты $t = 1/z$, получим в окрестности точки ∞ следующее разложение:

$$f(z) = d_0 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \ldots\,,$$

где $f(\infty) = d_0 = 0$. Рассуждая так же, как и выше, заключаем, что $\exists\ n \in \mathbb{N}$, такое, что $d_0 = \ldots = d_{n-1} = 0$, а $d_n \neq 0$. Поэтому будем иметь

$$\lim_{z \to \infty} z^n f(z) = d_n \neq 0\,. \quad ▶$$

3. Теорема Вейерштрасса

Как известно, в вещественном анализе для возможности почленного дифференцирования функционального ряда требуется, кроме прочих условий, равномерная сходимость ряда, полученного в результате почленного дифференцирования. Если же все члены ряда — аналитические функции комплексного переменного, то ситуация упрощается, как показывает следующая теорема.

Теорема 46 (Вейерштрасс). *Если все члены функционального ряда* $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *аналитичны в области* $D \subset \mathbb{C}$, *а ряд сходится равномерно на любом компакте* $K \subset D$, *то его сумма аналитична в* D, *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)\,.$$

◀ Возьмем любой замкнутый треугольник $\Delta \subset D$. Так как его край $\partial\Delta$ — компакт, то ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно на $\partial\Delta$. А так как все его члены непрерывны, то и его сумма f непрерывна, и возможно почленное интегрирование. Производя почленное интегрирование по $\partial\Delta$ и пользуясь интегральной теоремой Коши, имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\Delta} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\partial\Delta} f_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0\,.$$

Отсюда на основании теоремы 41 (Мореры) заключаем, что функция f аналитична в области D.

Фиксируя, далее, произвольную точку $z \in D$, составим ряд

$$\frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,, \tag{27.16}$$

полученный умножением данного ряда функцию $n!f_k(t)\big/2\pi i$ и потому сходящийся равномерно по t на любой окружности $\big\{t \in D \;\big|\; |t-z| = \rho\big\}$. Интегрируя равенство (27.16) по переменной t вдоль окружности $|t-z| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ и используя формулы для производных интеграла Коши, имеем

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\rho} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|t-z|=\rho} \frac{f_k(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z)\,. \quad ▶$$

4. Теорема Рунге

В анализе и его приложениях большое значение имеет проблема равномерного приближения непрерывных функций многочленами. Для функций, непрерывных на отрезке, эту проблему в положительном смысле решает теорема Стоуна — Вейерштрасса. Для функций комплексного переменного постановка этой проблемы нуждается в некотором уточнении. Так как многочлены аналитичны в $\mathbb{C}$, то в силу теоремы 46 (Вейерштрасса) сумма ряда (или предел последовательности) многочленов, равномерно сходящихся на компактах $K \subset D$, обязательно будет функцией, аналитической в области D. Таким образом, в комплексном анализе приближать (в указанном смысле) многочленами имеет смысл только аналитические функции.

Если функция f аналитична в круге $|z - z_0| < r$, то, как известно, ее ряд Тейлора с центром в точке z_0 сходится к функции f равномерно на компактах, лежащих в этом круге. Таким образом, для функций, аналитических в круге, проблему равномерного приближения их многочленами можно считать решенной.

Переходя к случаю функций, аналитических в областях, отличных от круга, начнем с определения.

Определение 27. *Будем говорить, что функцию $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, аналитическую в области $D \subset \mathbb{C}$, можно приблизить многочленами P равномерно на компактах K, лежащих в D, если выполняется условие:*

$$\forall\, K \subset D \;\; \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists P \; : \; \max_{z \in K} |f(z) - P(z)| \leqslant \varepsilon\,. \tag{27.17}$$

Замечание. Отметим, что для возможности приближения в указанном смысле необходимы некоторые ограничения на область D. Если область D многосвязная, то не всякую аналитическую в ней функцию можно приблизить многочленами. Возьмем, например, функцию $f(z) = \dfrac{1}{z}$, аналитическую в кольце $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leqslant r < 1 < R \leqslant +\infty$. Покажем, что *эту функцию невозможно приблизить многочленами равномерно в указанном кольце.*

◀ Задавая компакт $K := \{|t| = 1\}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$, предположим противное, т. е. что существует такой многочлен P, что при данных K и ε выполняется условие

(27.17), т. е. $\max\limits_{|t|=1}\left|\dfrac{1}{t}-P(t)\right| \leqslant \varepsilon < 1$. Тогда будем иметь

$$2\pi = \left|\int\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t}\right| = \left|\int\limits_{|t|=1}\left[\frac{1}{t}-P(t)\right]dt\right| \leqslant \max_{|t|=1}\left|\frac{1}{t}-P(t)\right|\int\limits_{|t|=1}|dt| \leqslant \varepsilon\cdot 2\pi < 2\pi\,,$$

т. е. $2\pi < 2\pi$ — противоречие. ►

Поскольку приближение в многосвязных областях, вообще говоря, невозможно, то ограничимся в этом пункте только односвязными областями, установив предварительно одно почти очевидное свойство таких областей.

Лемма. *Если область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, то ее дополнение $\widehat{\mathbb{C}}\diagdown D$ связно.*

◄ Так как $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}\diagdown D$, то $\widehat{\mathbb{C}}\diagdown D \neq \varnothing$. Предполагая, что дополнение области D не является связным, заключаем, что существуют замкнутые множества A, $B \in \widehat{\mathbb{C}}$, такие, что

$$A \neq \varnothing\,,\quad B \neq \varnothing\,,\quad A\cap B = \varnothing\,,\quad A\sqcup B = \widehat{\mathbb{C}}\diagdown D\,.$$

Предположим, что $\infty \in B$. Тогда $\infty \notin A$, и потому A — непустой компакт. Значит, существует точка $a \in A\cap\mathbb{C}$. Пусть $\rho \in \mathbb{R}_+$ — любое число, меньшее расстояния между множествами A и B. Покроем плоскость $\mathbb{C}$ сетью квадратов со стороной $\delta = \rho/3$ так, чтобы точка a оказалась центром одного из них. Множество всех замкнутых квадратов, пересекающихся с компактом A, — конечное и образует замкнутый (вообще говоря, несвязный) многоугольник. Пусть G — та его связная компонента, которая содержит внутри точку a. Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$\int\limits_{\partial G}\frac{dz}{z-a} = 2\pi i\,. \tag{27.18}$$

С другой стороны, $G\cap B = \varnothing$, так как расстояние от G до B больше, чем

$$\rho - \delta\sqrt{2} > \rho - \frac{\rho}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\rho}{2}\,.$$

Отсюда следует, что $\partial G \subset D$. Так как $a \notin D$, то функция $\dfrac{1}{z-a}$ аналитична в D. И, наконец, так как область D односвязна, а кривая

$\partial G \subset D$ — замкнутая, то она гомотопна нулю, и по интегральной теореме Коши имеем

$$\int\limits_{\partial G} \frac{dz}{z-a} = 0\,,$$

что противоречит равенству (27.18). ►

Теорема 47 (Рунге). *Любую функцию f, аналитическую в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, можно приблизить многочленами равномерно на компактах, лежащих в D.*

◄ Пусть $K \subset D$ — компакт. С помощью метода, использованного в доказательстве леммы, можно построить односвязную область G с кусочно-гладким краем ∂G, такую, что $K \subset G \subset G \sqcup \partial G \subset D$. Тогда будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \text{для всех} \quad z \in K\,.$$

Используя это представление, покажем сначала, что функцию f можно равномерно на K приблизить рациональными дробями. С этой целью разобьем край ∂G на малые участки $\gamma_k = \zeta_k\zeta_{k+1}$ точками $\zeta_0,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_N = \zeta_0$, расположенными на ∂G в порядке положительного обхода и введем в рассмотрение рациональную дробь

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k - z}\, \Delta\zeta_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{\gamma_k} \frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k - z}\, d\zeta\,.$$

Тогда будем иметь

$$f(z) - g(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k - z} \right] d\zeta\,.$$

Так как функция $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ переменного (ζ, z) непрерывна на компакте $\partial G \times K$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на нем, т. е.

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall\, (\zeta', z')\,,\ (\zeta'', z'') \in \partial G \times K \ \ :$$

$$\left.\begin{array}{l}|z'-z''|\leqslant\delta\\ |\zeta'-\zeta''|\leqslant\delta\end{array}\right\}\Longrightarrow\left|\frac{f(\zeta')}{\zeta'-z'}-\frac{f(\zeta'')}{\zeta''-z''}\right|\leqslant\varepsilon\,.$$

Выберем точки ζ_0, ζ_1, ζ_2, $\ldots$, $\zeta_N = \zeta_0$ так, чтобы было $\max\{|\gamma_0|,|\gamma_1|,\ldots,|\gamma_{N-1}|\}\leqslant\delta$. Тогда при $\zeta\in\gamma_k$, $z\in K$ будет

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k-z}\right|\leqslant\varepsilon\,,$$

и потому при $z\in K$ будем иметь

$$|f(z)-g(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\gamma_k}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{f(\zeta_k)}{\zeta_k-z}\right|\cdot|d\zeta|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\cdot|\gamma|\,,$$

где $|\gamma|$ — длина края ∂G. Итак, $\max\limits_{z\in K}|f(z)-g(z)|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2\pi}\cdot|\gamma|$, и тем самым установлена возможность приближения аналитической в D функции рациональными дробями.

Теорема будет доказана полностью, если установим, что рациональные дроби вида $\dfrac{1}{\zeta_k-z}$ можно приблизить многочленами равномерно на K. С этой целью введем в рассмотрение множество

$$E:=\left\{a\notin G\;\middle|\;\text{дробь }\frac{1}{z-a}\text{ можно приблизить многочленами}\right\}.$$

Множество E не пусто, так как содержит внешность любого круга, содержащего K. Действительно, если $a\notin\{|z-z_0|\leqslant R\}\supset K$, то

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-z_0)-(a-z_0)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}}\,,$$

и этот ряд сходится равномерно на K. Далее, E замкнуто, так как если $a_n\in E$ и $a_n\to a$ при $n\to\infty$, то $\dfrac{1}{z-a_n}\rightrightarrows\dfrac{1}{z-a}$ при $n\to\infty$ равномерно по $z\in K$. Значит, $a\in E$, и потому множество E замкнуто. И, наконец, E открыто, так как если $a_0\in E$, то $\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ существует полином P, такой, что $\max\limits_{z\in K}\left|\dfrac{1}{z-a_0}-P(z)\right|<\varepsilon$, и это неравенство сохраняется для всех a, достаточно близких к a_0. Так как область G односвязна, то по лемме множество $\mathbb{C}\diagdown G$ связно, поэтому E как непустое открыто-замкнутое его подмножество должно с ним совпадать. ▶

§ 2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Особые точки аналитических функций

1. Разложение аналитической функции в ряд Лорана и некоторые следствия

Наряду со степенными рядами, рассмотренными в предыдущем параграфе, здесь будем рассматривать степенные ряды, расположенные по неотрицательным и отрицательным степеням разности $(z-z_0)$, т. е. ряды, которые могут быть записаны в следующих формах:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n =$$
$$= \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1 \cdot (z-z_0) + c_2 \cdot (z-z_0)^2 + \ldots . \tag{27.19}$$

Такие ряды (бесконечные «в обе стороны») по форме несколько отличаются от рассматривавшихся ранее рядов (бесконечных «в одну сторону»), однако с точки зрения сходимости различия между ними не очень существенны. Ряд (27.19) считается сходящимся, если и только если сходятся оба ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \,,$$

а в случае сходимости его сумма получается как результат сложения сумм этих двух рядов.

Теорема 48 (Лоран). *Любую функцию f, аналитическую в кольцевой области $V = \{r < |z-a| < R\}$, можно представить в виде суммы степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,, \tag{27.20}$$

где $\rho \in (r, R)$ — любое число.

◀ Пусть $z \in V$ — произвольно зафиксированная точка. Выберем числа r' и R' так, чтобы выполнялись неравенства

$$r < r' < |z - a| < R' < R\,. \tag{27.21}$$

Применяя интегральную формулу Коши к функции f, аналитической в кольце, закрашенном на рисунке 18, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{27.22}$$

При $|\zeta - a| = R'$, учитывая соответствующее неравенство из (27.21), имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}\,.$$

Полученный ряд сходится равномерно по ζ, так как мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R'} \left(\frac{|z-a|}{R'}\right)^n$. Умножая его на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя почленно, найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - a)^n\,, \tag{27.23}$$

где обозначено

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{27.24}$$

При $|\zeta - a| = r'$, учитывая соответствующее неравенство из (27.21), имеем

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{(z - a) - (\zeta - a)} =$$

$$= \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z - a)^n}\,.$$

Полученный ряд тоже сходится равномерно по ζ, так как мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z-a|} \left(\frac{r'}{|z-a|} \right)^n$. Умножая его на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя почленно, найдем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z-a)^n \,, \qquad (27.25)$$

где обозначено

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-a|=r'} f(\zeta)(\zeta - a)^{-n-1} d\zeta \,, \quad n = -1, -2, -3, \ldots . \qquad (27.26)$$

Подставляя разложения (27.23) и (27.25) в интегральную формулу Коши (27.22), получим разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n \,, \qquad (27.27)$$

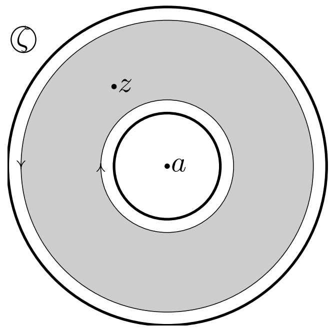

Рис. 18. К теореме Лорана

коэффициенты которого вычисляются по формулам (27.24) и (27.26) при $n \geqslant 0$ и при $n < 0$ соответственно. Далее, по теореме Коши «о гомотопии» интегралы из (27.24) и (27.26) не зависят от радиусов окружностей интегрирования. Заменяя эти окружности какой-нибудь одной окружностью $|\zeta - a| = \rho$, где $\rho \in (r, R)$ — любое число, заключаем, что для коэффициентов ряда (27.27) справедливы равенства (27.20). ►

Определение 28. *Ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n$, *коэффициенты которого вычисляются по формулам* (27.20), *называется рядом Лорана функции* f *в кольцевой области с центром в точке* a. *При этом ряды* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ *и* $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n \cdot (z-a)^n$ *называются соответственно регулярной и главной частями ряда Лорана.*

Замечание. Очевидно, что если главная часть ряда Лорана тождественно равна нулю, то такой ряд становится рядом Тейлора.

Теорема 49. *Если функция* f *в кольцевой области* $V = \{r < |z-a| < R\}$ *представима в виде суммы степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n\,, \tag{27.28}$$

то она аналитична в этой области, а коэффициенты ряда вычисляются по формулам (27.20)

◀ Все члены данного степенного ряда аналитичны, а сам ряд сходится равномерно на компактах, лежащих в кольце его сходимости. Отсюда в силу теоремы 46 (Вейерштрасса) вытекает аналитичность его суммы f. Для вычисления коэффициентов c_k умножим равенство (27.28) на $\frac{1}{2\pi i}(z-a)^{-k-1}$ и проинтегрируем полученное равенство вдоль окружности $|z-a| = \rho$, где $\rho \in (r, R)$. Тогда получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{-k-1}dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-k-1}dz = c_k\,,$$

так как

$$\int\limits_{|z-a|=\rho} (z-a)^{n-k-1}dz = \begin{cases} 2\pi i\,, & n = k\,, \\ 0\,, & n \neq k\,. \end{cases} \qquad ▶$$

Следствие (неравенства Коши). *Для коэффициентов степенного ряда* (27.28) *имеют место следующие оценки:*

$$|c_n| \leqslant \frac{M(\rho)}{\rho^n}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{27.29}$$

где $0 < \rho < R$, *а* $M(\rho) = \max\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} |f(\zeta)|\,.$

◀ Из (27.20) имеем

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{|f(\zeta)| \cdot |d\zeta|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}} \int\limits_0^{2\pi} |i\rho e^{i\theta}|\, d\theta = \frac{M(\rho)}{\rho^n}\,. \ ▶$$

Замечание. Теорему 49 можно сформулировать еще так: *любой сходящийся в кольцевой области степенной ряд является рядом Лорана своей суммы.* Это означает, в частности, что для нахождения разложения функции в ряд Лорана не обязательно вычислять коэффициенты по формулам (27.20), а можно использовать любые другие законные способы. Покажем это на примере.

Пример. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряды Лорана в максимальных кольцевых областях с центром в точке 0.

◀ Очевидно, что данная функция аналитична во всей плоскости, кроме точек $z = 1$ и $z = 2$. Поэтому окружности $|z| = 1$ и $|z| = 2$ разбивают плоскость $\mathbb{C}$ на три кольцевых области аналитичности данной функции:

$$V_1 := \Big\{ z \in \mathbb{C} \ \Big|\ 0 < |z| < 1 \Big\}\ ;$$
$$V_2 := \Big\{ z \in \mathbb{C} \ \Big|\ 1 < |z| < 2 \Big\}\ ;$$
$$V_3 := \Big\{ z \in \mathbb{C} \ \Big|\ 2 < |z| < +\infty \Big\}\ .$$

Для построения лорановских разложений данной функции сначала разложим ее на простейшие дроби

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\,.$$

При $|z| < 1$ имеем

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots\ ;$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z/2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots + \frac{z^n}{2^n} + \ldots \right)\,.$$

Складывая эти разложения, найдем

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n\,, \quad |z| < 1\,.$$

В этом разложении присутствует только регулярная часть (нет главной части), и потому это лорановское разложение является тейлоровским.

При $1 < |z| < 2$ имеем

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\,;$$
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\ldots+\frac{z^n}{2^n}+\ldots\right).$$

Складывая эти разложения, найдем

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\,, \quad 1 < |z| < 2\,.$$

При $|z| > 2$ имеем

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\,;$$
$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}\,.$$

Складывая эти разложения, найдем

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{n-1}-1)}{z^n}\,, \quad 2 < |z| < +\infty\,.$$

В этом разложении присутствует только главная часть (нет регулярной части). ►

2. Общее понятие особой точки аналитической функции

Определение 29. *Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ — функция, аналитическая в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Ее особыми точками (в широком смысле) условимся называть все точки, не лежащие в области D. Особая точка a функции f называется устранимой, если существует аналитическое продолжение функции f из области D в некоторую окрестность точки a, и неустранимой, если такого аналитического продолжения не существует.*

Это определение показывает, что понятие особой точки аналитической функции является весьма общим. Не занимаясь пока подробным изучением множества таких точек, отметим здесь только один связанный с ними факт, позволяющий просто вычислять радиусы сходимости некоторых классов степенных рядов.

Теорема 50. *Радиус сходимости степенного ряда*

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + c_2 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots + c_n \cdot (z - z_0)^n + \ldots \quad (27.30)$$

равен евклидову расстоянию от точки z_0 до ближайшей к ней неустранимой особой точки его суммы $f(z)$.

◀ Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда (27.30), а $z^* \in \widehat{\mathbb{C}}$ — ближайшая к точке z_0 неустранимая особая точка его суммы f. Если $z^* = \infty$, то сумма ряда (27.30) допускает аналитическое продолжение на всю плоскость $\mathbb{C}$, поэтому в данном случае $R = +\infty$. Если $z^* \in \mathbb{C}$, то сумма ряда (27.30) допускает аналитическое продолжение в круг $\{|z - z_0| < |z^* - z_0|\}$, который поэтому должен содержаться в круге сходимости $\{|z - z_0| < R\}$. Таким образом, должно выполняться неравенство $|z^* - z_0| \leqslant R$. Если предположить, что $|z^* - z_0| < R$, то особая точка z^* окажется внутри круга сходимости ряда (27.30) и потому будет устранимой. Полученное противоречие показывает, что $|z^* - z_0| = R$. ▶

3. Изолирванные особые точки аналитических функций

В этом пункте мы ограничимся только простейшими особыми точками аналитических функций, называемыми *изолированными*, и изучим поведение аналитических функций в окрестности таких точек.

Определение 30. *Пусть $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ — функция, аналитическая в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Особая точка $a \notin D$ функции f называется изолированной, если существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, что $\dot{U}(a) \subset D$.*

Изолированные особые точки аналитической функции f в свою очередь подразделяются на типы в зависимости от поведения функции f

в проколотых окрестностях этих точек.

Определение 31. *Изолированная особая точка $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ аналитической функции f называется:*

(a) *устранимой особой точкой, если* $\lim\limits_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$;

(b) *полюсом, если* $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;

(c) *существенно особой точкой, если* $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ *не существует.*

Например, для аналитических функций, задаваемых следующими формулами

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad e^{1/z},$$

точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, полюсом и существенно особой точкой соответственно.

Замечание. Поскольку проколотую окрестность точки можно считать кольцом (с нулевым внутренним радиусом), то естественно, что поведение аналитической функции в окрестности изолированной особой точки связано со свойствами соответствующего ряда Лорана.

Теорема 51 (критерий устранимости). *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ аналитической функции f является устранимой, если и только если ее лорановское разложение в окрестности точки a имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n$, т. е. не содержит главной части.*

◀ Разложим функцию f в ряд Лорана в проколотой окрестности точки a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n \cdot (z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z-a)^n . \qquad (27.31)$$

Предположим, что a — устранимая особая точка, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z)$. В силу свойств предела функция $|f|$ финально ограничена при $z \to a$, т. е.

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists\, \rho \in \mathbb{R}_+ \; : \; |z-a| < \rho \implies |f(z)| \leqslant M .$$

Применяя к коэффициентам ряда Лорана неравенства Коши (27.29), имеем при $n < 0$

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} = M \cdot \rho^{|n|} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0 .$$

Отсюда следует, что $\forall\ n < 0\ :\ c_n = 0$, т. е. главная часть в ряде Лорана (27.31) исчезает.

Обратно, предположим, что главная часть в ряде Лорана (27.31) исчезает. Тогда этот ряд приводится к виду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z-a)^n , \tag{27.32}$$

откуда следует, что $\lim\limits_{z\to a} f(z) = a_0 \in \mathbb{C}$. ►

Замечание. Употребленное здесь понятие устранимой изолированной особой точки согласуется с понятием устранимой особой точки, введенном в определении 29. Действительно, равенство (27.32) дает не только *непрерывное*, но и *аналитическое* продолжение функции f в точку $z = a$.

Теорема 52 (критерий полюса). *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ аналитической функции f является полюсом, если и только если главная часть лорановского разложения функции f в окрестности точки a не исчезает, но содержит конечное число ненулевых слагаемых.*

◄ Предположим, что $a \in \mathbb{C}$ — полюс функции f. По определению полюса должно быть $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. Введем функцию $\varphi(z) :=$ $:= 1/f(z)$. Она аналитична в проколотой окрестности точки a, причем $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. Поэтому a — устранимая особая точка функции φ. Согласно теореме 51 лорановское разложение функции φ в окрестности точки a не содержит главной части и имеет следующий вид:

$$\varphi(z) = b_N \cdot (z-a)^N + b_{N+1} \cdot (z-a)^{N+1} + \ldots ,$$

где $N \in \mathbb{N}$, а $b_N \neq 0$. Вынося множитель $(z-a)^N$ за скобки, получим равенство

$$\frac{1}{f(z)} = \varphi(z) = (z-a)^N \cdot \psi(z) , \tag{27.33}$$

где ψ аналитична в окрестности точки a, причем $\psi(a) = b_N \neq 0$. Отсюда следует, что функция $\dfrac{1}{\psi(z)}$ тоже аналитична в окрестности точки a и потому допускает разложение в степенной ряд Тейлора

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_{-N} + c_{-N+1} \cdot (z-a) + \ldots + c_{-1} \cdot (z-a)^{N-1} + \ldots ,$$

где $c_{-N} = \dfrac{1}{b_N} \neq 0$. Из равенства (29.17) получаем лорановское разложение функции f

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{\psi(z)} = \left[\frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a}\right] + \ldots ,$$

где многоточием обозначена его регулярная часть. Главная часть полученного лорановского разложения содержит конечное число слагаемых, среди которых есть ненулевые.

Обратно, предположим, что лорановское разложение функции f в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z-a)^k , \quad \text{где} \quad c_{-N} \neq 0 .$$

Умножая это равенство на $(z-a)^N$ и переходя к пределу при $z \to a$, получим

$$\lim_{z \to a} \left[(z-a)^N \cdot f(z)\right] = c_{-N} \neq 0 ,$$

а так как $(z-a)^N \to 0$ при $z \to a$, то $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Таким образом, a — полюс функции f. ▶

Определение 32. *Число $N \in \mathbb{N}$ называется кратностью (или порядком) полюса $a \in \mathbb{C}$ аналитической функции f, если старший член*[5] *главной лорановского разложения функции f в окрестности точки a имеет вид $\dfrac{c_{-N}}{(z-a)^N}$, где $c_{-N} \neq 0$. Полюс кратности N называется простым при $N = 1$ и кратным при $N > 1$.*

[5] *Старшим членом* называется то слагаемое, которое при $z \to a$ имеет наибольший порядок роста по сравнению с другими слагаемыми.

Замечание. Из доказательства теоремы 52 видно, что кратность полюса $a \in \mathbb{C}$ функции f совпадает с кратностью этой точки как нуля функции $\varphi = 1/f$.

Теорема 53 (критерий существенно особой точки). *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ аналитической функции f является существенно особой точкой, если и только если главная часть лорановского разложения функции f в окрестности этой точки содержит бесконечное число ненулевых членов.*

◀ Доказательство проведем «методом исключения».

Предположим, что $a \in \mathbb{C}$ — существенно особая точка функции f. Тогда главная часть ее лорановского разложения (27.31) не может отсутствовать и не может содержать лишь конечное число ненулевых слагаемых (в силу теорем 51 и 52). Значит, остается единственная возможность, указанная в формулировке теоремы.

Обратно, если главная часть лорановского разложения (27.31) содержит бесконечное множество ненулевых слагаемых, то в силу теорем 51 и 52 точка a — не устранимая и не полюс. Значит, эта точка — существенно особая. ▶

Замечание. Случай, когда изолированной особой точкой аналитической функции f является точка ∞, может быть сведен к случаю конечной точки путем перехода к локальным координатам по формуле $t := 1/z$. Если это проделать и вернуться снова к переменной z, то разложение в ряд Лорана функции f в окрестности точки ∞ оказывается следующим:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{z^n}\,, \tag{27.34}$$

причем левый ряд является его главной частью, а правый — регулярной. Теоремы 51 — 54 остаются справедливыми и в этом случае.

Теорема 54 (Сохоцкий). *Если $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка аналитической функции f, то*

(a) *в любой окрестности точки a функция $|f|$ неограничена;*

(b) *для любого $A \in \widehat{\mathbb{C}}$ существует такая последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

◀ Учитывая замечание, сделанное перед формулировкой теоремы, ограничимся только случаем $a \in \mathbb{C}$.

(a) Предположим противное: функция $|f|$ финально ограничена при $z \to a$ т. е.

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists\, \rho \in \mathbb{R}_+ \ : \ |z-a| < \rho \implies |f(z)| \leqslant M\,.$$

Применяя к коэффициентам ряда Лорана (27.31) неравенства Коши (27.29), имеем при $n < 0$

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{\rho^n} = M \cdot \rho^{|n|} \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0\,.$$

Отсюда следует, что $\forall\, n < 0 \ : \ c_n = 0$, т. е. главная часть в ряде Лорана (27.31) исчезает. Поэтому a — устранимая особая точка. Получено противоречие.

(b) Так как в любой окрестности точки a функция $|f|$ неограничена, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует точка z_n, такая. что

$$0 < |z_n - a| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |f(z_n)| \geqslant n\,.$$

Переходя к пределу в этих неравенствах при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$. Таким образом, теорема доказана в случае $A = \infty$.

Предположим теперь, что $A \in \mathbb{C}$. Если в любой окрестности точки a уравнение $f(z) = A$ имеет корень, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое z_n, что $0 < |z_n - a| \leqslant \dfrac{1}{n}$ и $f(z_n) = A$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A = A$.

Предположим, наконец, что существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, в которой уравнение $f(z) = A$ не имеет корней. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(z) := \dfrac{1}{f(z) - A}$. Она аналитична в $\dot{U}(a)$, так как определена в виде дроби, знаменатель которой аналитичен в этой окрестности и не обращается там в нуль. Точка a — изолированная особая точка функции φ. Более того, a — существенно особая точка функции φ, так как в противном случае должен был бы существовать предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, чего на самом деле нет. По доказанному выше существует последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \infty$. Это последнее равенство равносильно следующему: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. ►

4. О некоторых классах функций, имеющих изолированные особые точки

Согласно теореме Лиувилля, аналитическая функция, которая нигде в $\widehat{\mathbb{C}}$ не имеет особых точек, тождественно равна постоянной. Таким образом, непостоянных аналитических функций, которые бы вовсе не имели особых точек, не существует.

Рассмотрим теперь функции, имеющие в $\widehat{\mathbb{C}}$ единственную особую точку. Предполагая, что этой особой точкой является точка ∞, приходим к функциям, аналитическим всюду в $\mathbb{C}$.

Определение 33. *Функция, аналитическая всюду в $\mathbb{C}$, называется целой.*

Разлагая целую функцию f в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$, получим

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots\,, \tag{27.35}$$

причем этот ряд сходится всюду в $\mathbb{C}$ (его радиус сходимости равен $+\infty$).

Единственной особой точкой целой функции является точка ∞, которая, таким образом, является изолированной особой точкой. Разложение (27.35) можно рассматривать как лорановское разложение целой функции f в окрестности точки ∞. Регулярная часть этого разложения равна c_0, а его главная часть — ряд $c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$. Если все коэффициенты главной части равны нулю, то $f(z) \equiv c_0$ (теорема Лиувилля). Если все коэффициенты главной части, начиная с некоторого номера (пусть с $(n+1)$-го), равны нулю, то точка ∞ — полюс порядка n, а функция f сводится к многочлену («обобщенная» теорема Лиувилля)

$$f(z) \equiv c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n\,. \tag{27.36}$$

Такие функции называются иногда *целыми рациональными функциями.* Если в разложении (27.35) имеется бесконечное число ненулевых слагаемых, то ∞ — существенно особая точка функции f. В этом случае целая функция называется *целой трансцендентной функцией.* Существует обширная теория таких функций, но мы ими заниматься пока не будем.

Определение 34. *Функция f называется мероморфной в области D, если в каждой точке этой области функция f либо аналитична, либо имеет полюс.*

Поскольку полюсы изолированы, то множество всех полюсов всякой мероморфной функции f — не более, чем счетное, и сгущаться они могут только к границе области D.

В заключение этого пункта более подробнее рассмотрим функции, мероморфные на $\widehat{\mathbb{C}}$. Примерами таких функций являются рациональные функции, а в следующей теореме дается описание всего множества таких функций.

Теорема 55. *Любая функция, мероморфная в $\widehat{\mathbb{C}}$, есть рациональная функция и представима в виде суммы постоянной и всех главных частей этой функции.*

◀ Пусть функция f мероморфна в $\widehat{\mathbb{C}}$. Так как множество $\widehat{\mathbb{C}}$ — компактное, то множество всех полюсов функции f — конечное. Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ и, возможно, ∞ — все эти полюсы, и пусть

$$\sum_{\mu=1}^{n_1} \frac{c_{1\mu}}{(z-a_1)^\mu}, \dots, \sum_{\mu=1}^{n_m} \frac{c_{m1\mu}}{(z-a_m)^\mu}, \sum_{\mu=1}^{n_0} c_\mu z^\mu \tag{27.37}$$

— главные части функции f в окрестностях соответствующих полюсов. Рассмотрим разность

$$f(z) - \sum_{\mu=1}^{n_1} \frac{c_{1\mu}}{(z-a_1)^\mu} - \dots - \sum_{\mu=1}^{n_m} \frac{c_{m1\mu}}{(z-a_m)^\mu} - \sum_{\mu=1}^{n_0} c_\mu z^\mu. \tag{27.38}$$

Так как все лорановские разложения этой разности не содержат главных частей, то все особые точки $a_1, \dots, a_m, \infty$ функции (27.38) — устранимые. Устраняя их, заключаем, что функция (27.38) аналитична всюду в $\widehat{\mathbb{C}}$ и в силу теоремы Лиувилля тождественно равна постоянной.

Таким образом, имеем

$$f(z) \equiv \mathrm{const} + \sum_{\mu=1}^{\mathrm{n}_1} \frac{\mathrm{c}_{1\mu}}{(\mathrm{z}-\mathrm{a}_1)^\mu} + \ldots + \sum_{\mu=1}^{\mathrm{n}_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{c}_{\mathrm{m}1\mu}}{(\mathrm{z}-\mathrm{a}_\mathrm{m})^\mu} + \sum_{\mu=1}^{\mathrm{n}_0} \mathrm{c}_\mu \mathrm{z}^\mu\,, \quad (27.39)$$

т. е. функция f — рациональная, а представление (27.39) есть представление ее в виде суммы постоянной и всех ее главных частей. ▶

Замечание. Доказательство теоремы 55 является еще одним доказательством возможности разложения произвольной рациональной функций на сумму простейших рациональных функций.

Теорема 56. *Любой конформный гомеоморфизм* $f\ :\ \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *есть либо целое линейное отображение, либо дробно-линейное отображение.*

◀ Действительно, любой конформный гомеоморфизм сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ на себя есть мероморфная функция, имеющая в $\widehat{\mathbb{C}}$ единственный простой полюс.

Если $f\ :\ \infty \longmapsto \infty$, то f — целая функция с простым полюсом в точке ∞ и потому она должна иметь вид $f(z) = c_0 + c_1 z$, т. е. отображение f — целое линейное.

Если $f\ :\ z_0 \longmapsto \infty$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, то должно быть

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots .$$

Так как f аналитична в точке $z = \infty$, то $c_1 = c_2 = \ldots = 0$, и потому

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0\,,$$

т. е. функция f — дробно-линейная. ▶

Глава 28

ВЫЧЕТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Понятие вычета, вычисление вычетов, основная теорема о вычетах

1. Понятие вычета, вычисление вычетов

Станем рассматривать аналитические функции, имеющие изолированные особые точки.

Определение 35. *Вычетом*[1] *аналитической функции в ее изолированной особой точке* $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ *называется интеграл*

$$\operatorname*{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(a)} f(z)\, dz\,, \tag{28.1}$$

взятый по стандартно ориентированному краю окрестности $U(a)$ *точки* a*, не содержащей других особых точек функции* f*, кроме* a*.*

В силу интегральной теоремы Коши интеграл (28.1) не изменится, если вместо окрестности $U(a)$ взять любой лежащий в ней достаточно малый $\widehat{\mathbb{C}}$-круг, содержащий внутри точку a. Тогда при $a \in \mathbb{C}$ в качестве $\partial U(a)$ следует взять окружность, ориентированную в направлении против часовой стрелки, а при $a = \infty$ в качестве $\partial U(\infty)$ следует взять окружность, ориентированную в направлении по часовой стрелке, что мы и будем обычно делать.

Конкретизируя предыдущее замечание, будем использовать в качестве определений вычета приводимые ниже равенства. Если $a \in \mathbb{C}$, то полагаем

$$\operatorname*{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)\, dz\,, \tag{28.2}$$

[1]Используемое ниже обозначение res происходит от английского слова residue — вычет, остаток.

где $r \in \mathbb{R}_+$ — любое достаточно малое число. Если же $a = \infty$, то полагаем

$$\operatorname*{res}_{\infty} f := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\, dz\,, \tag{28.3}$$

где $R \in \mathbb{R}_+$ — любое достаточно большое число. В обоих случаях интегрирование по окружности ведется в направлении против часовой стрелки.

Так как a — изолированная особая точка функции f, то в некоторой проколотой окрестности точки a функцию f можно представить в виде суммы ряда Лорана. Оказывается, что вычет функции f в точке a можно просто выразить через коэффициенты этого ряда Лорана.

Теорема 57. (a) *Если $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то $\operatorname*{res}_{a} f = c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $(z-a)^{-1}$ в лорановском разложении $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot (z-a)^n$.*

(b) *Если ∞ — изолированная особая точка функции f, то $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при z^{-1} в лорановском разложении $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot z^n$ функции f в окрестности точки ∞.*

◀ (a) Подставляя лорановское разложение $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot (z-a)^n$ в равенство (28.2) и почленно интегрируя, получим

$$\operatorname*{res}_{a} f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot (z-a)^n\, dz =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} (z-a)^n\, dz = c_{-1}\,,$$

так как в последней сумме равны нулю все интегралы, кроме одного, соответствующего значению $n = -1$.

(b) Подставляя лорановское разложение $f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot z^n$ в равенство (28.3) и почленно интегрируя, получим

$$\operatorname*{res}_{\infty} f := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=R} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot z^n\,dz =$$

$$= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=R} z^n\,dz = -c_{-1}\,,$$

так как в последней сумме равны нулю все интегралы, кроме одного, соответствующего значению $n = -1$. ▶

Примеры. 1) Если f аналитична в точке $a \in \mathbb{C}$ или имеет в ней устранимую особую точку, то $\operatorname*{res}_{a} f = 0$, так как в этом случае ряд Лорана вырождается в ряд Тейлора $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n$, и потому $c_{-1} = 0$.

2) Если f аналитична в точке ∞ или имеет в ней устранимую особую точку, то ее разложение в ряд Лорана в окрестности точки ∞ имеет вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots\,.$$

Применяя теорему 57 (b), имеем $\operatorname*{res}_{\infty} f = -c_{-1}$.

3) Разложение

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$$

сходится в кольце $\mathbb{C}^* = \{0 < |z| < +\infty\}$, и потому его можно считать лорановским разложением как в окрестности точки 0, так и в окрестности точки ∞. На основании теоремы 57 имеем

$$\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z} = 1\,, \quad \operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -1\,.$$

Если изолированная особая точка аналитической функции является полюсом, то для вычета в такой точке возможны другие выражения, о которых идет речь в следующей теореме.

Теорема 58. (a) *Если точка $a \in \mathbb{C}$ является полюсом порядка n функции f, то*

$$\operatorname*{res}_{a} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right]\,. \tag{28.4}$$

(b) *Если точка ∞ является полюсом порядка n функции f, то*

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{n+2} f^{(n+1)}(z) \right] . \tag{28.5}$$

◀ (a) Разложим функцию f в ряд Лорана в окрестности точки a

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 \cdot (z-a) + \ldots . \tag{28.6}$$

Искомым вычетом является коэффициент c_{-1}, и нам надо его выразить через f. С этой целью умножим равенство (28.6) на $(z-a)^n$

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1} \cdot (z-a) + \ldots + c_{-1} \cdot (z-a)^{n-1} + c_0 \cdot (z-a)^n + \ldots .$$

Дифференцируя это равенство $(n-1)$ раз, получим

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right] = (n-1)! c_{-1} + n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot c_0 \cdot (z-a) + \ldots .$$

Переходя здесь к пределу при $z \to a$ и деля на $(n-1)!$, получим равенство (28.4).

(b) Разложим функцию f в ряд Лорана в окрестности точки ∞

$$f(z) = a_n z^n + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots . \tag{28.7}$$

Искомым вычетом является число $(-a_{-1})$. Чтобы его вычислить, продифференцируем равенство(28.7) $(n+1)$ раз

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{z^{n+2}} \cdot a_{-1} + \frac{A}{z^{n+3}} + \frac{B}{z^{n+4}} + \ldots , \tag{28.8}$$

где A, B — некоторые числа. Умножая равенство (28.8) на z^{n+2} и переходя к пределу при $z \to \infty$, получим

$$\lim_{z\to\infty} \left[z^{n+2} f^{(n+1)}(z) \right] = (-1)^{n+1}(n+1)! \cdot a_{-1} .$$

Отсюда находим

$$-a_{-1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{n+2} f^{(n+1)}(z) \right] ,$$

что в силу теоремы 57(b) равносильно равенству (28.5). ►

Замечания. 1. В случае, когда функция f имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ простой полюс, равенство (28.4) упрощается и принимает вид

$$\operatorname*{res}_a f = \lim_{z\to a} [(z-a)f(z)] .$$

2. Если в точке ∞ функция f — аналитическая, т. е. если в окрестности точки ∞ имеет место разложение

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots , \tag{28.9}$$

то

$$\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1} = \lim_{z\to\infty} \left[z^2 f'(z)\right] .$$

Это равенство является частным случаем равенства (28.5) при $n=0$.

3. Если в равенстве (28.9) $c_0 = 0$, то вычет вычисляется еще проще

$$\operatorname*{res}_\infty f = -c_{-1} = -\lim_{z\to\infty} [zf(z)] .$$

Это же равенство получится, если в (28.5) положить $n=-1$.

2. Основная теорема о вычетах и ее следствие

Теорема 59 (основная теорема о вычетах). *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладким краем ∂D, а функция f удовлетворяет условиям применимости интегральной теоремы Коши всюду в $D \sqcup \partial D$, кроме конечного числа изолированных особых точек, лежащих в D. Тогда*[2]

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{z\in D} \operatorname*{res}_a f . \tag{28.10}$$

◄ Предположим сначала, что $\infty \notin D$, и пусть $\{z_1, \dots, z_n\} \subset D \cap \mathbb{C}$ — множество всех изолированных особых точек функции f. Выберем число $r \in \mathbb{R}_+$ настолько малым, чтобы все круги $K_\mu := \{|z-z_0| \leqslant r\}$, $\mu = 1, \dots, n$, лежали внутри области D и не пересекались между собой (см. рис. 19). Обозначая $D_r := D \setminus (K_1 \cup \ldots \cup K_n)$, заключаем, что

[2]Так как в точках аналитичности функции f ее вычеты равны нулю, то сумма в правой части равенства (28.10) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

к функции f в области с краем $D_r \sqcup \partial D_r$ применима интегральная теорема Коши. Применяя ее и используя определение вычета, получим

$$0 = \int\limits_{\partial D_r} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{\partial K_\mu} f(z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - 2\pi i \sum_{\mu=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_\mu} f\,,$$

что равносильно равенству (28.10).

Предположим теперь, что $\infty \in D$. Значит, в этом случае к множеству всех конечных особых точек $\{z_1, \ldots, z_n\}$ функции f надо добавить точку ∞. Выберем $R \in \mathbb{R}_+$ настолько большим, чтобы все конечные особые точки функции f и весь край ∂D лежали в области $D_R := D \cap \{|z| < R\}$. Применив к этой области доказанную часть теоремы, будем иметь

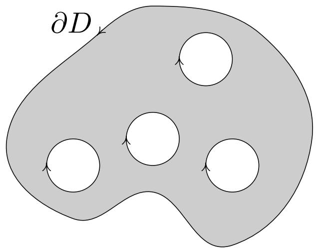

Рис. 19. Область D_r

$$2\pi i \sum_{\mu=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_\mu} f = \int\limits_{\partial D_R} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz + \int\limits_{|z|=R} f(z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} f\,.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mu=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_\mu} f + 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} f\,,$$

что равносильно равенству (28.10). ►

Следствие. *Если функция f аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме конечного множества точек, то*

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z} f + \operatorname*{res}_{\infty} f = 0\,. \qquad (28.11)$$

◀ Возьмем произвольный замкнутый круг $K \subset \mathbb{C}$, не пересекающийся с множеством особых точек функции f. Применяя интегральную теорему Коши и теорему 59, будем иметь

$$0 = \int\limits_{\partial K} f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z} f - 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} f\,.$$

Сокращая полученное равенство на $(-2\pi i)$, получим равенство (28.11). ▶

§ 2. Применение вычетов к вычислению некоторых типов определенных интегралов

Вычисление интегралов с помощью вычетов базируется, вообще говоря, на применении основной теоремы о вычетах. Однако для некоторых частных классов интегралов основанные на этой теореме вычисления и формулы допускают соответствующую конкретизацию.

1. Интегрирование функций, рационально зависящих от cos и sin

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi\,, \tag{28.12}$$

предполагая, что $R(\cdot,\cdot)$ — рациональная функция от своих аргументов, притом такая, что подынтегральная функция интеграла (28.12) ограничена на отрезке $[0, 2\pi]$.

Для вычисления интеграла (28.12) преобразуем его в криволинейный интеграл по окружности $|t| = 1$, полагая

$$t = e^{i\varphi}\,, \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\,, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right)\,, \quad dt = it\, d\varphi\,.$$

Тогда получим

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = \int\limits_{|t|=1} R\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right); \frac{1}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dt}{it} = \\ = \int\limits_{|t|=1} R_1(t)\, dt\,,$$

где $t \longmapsto R_1(t)$ — некоторая рациональная функция, не имеющая полюсов на окружности $|t| = 1$. Применяя, далее, теорему 59 и ее следствие, найдем

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\, d\varphi = 2\pi i \sum_{|z|<1} \operatorname*{res}_z R_1(z) = \\ = -2\pi i \sum_{1<|z|\leqslant+\infty} \operatorname*{res}_z R_1(z)\,. \quad (28.13)$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2}\,, \quad \text{где} \quad p \in (0,1)\,.$$

◀ Полагая $t = e^{i\varphi}$, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2} = \int\limits_{|t|=1} \frac{dt}{\left[1-p\left(t+\dfrac{1}{t}\right)+p^2\right]it}\,.$$

Преобразуем знаменатель подынтегрального выражения

$$\left[1-p\left(t+\frac{1}{t}\right)+p^2\right]it = \left[(1+p^2)t-(1+t^2)p\right]i = i(1-pt)(t-p)\,.$$

Используя это разложение, окончательно имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2p\cos\varphi+p^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{t=p} \frac{1}{i(1-pt)(t-p)} = \frac{2\pi}{1-p^2}\,. \quad ▶$$

2. Вычисление некоторых интегралов по вещественной оси

Теорема 60. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, аналитически продолжима на верхнюю полуплоскость, кроме конечного числа изолированных особых точек, и пусть*

$$\lim_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} [z\cdot f(z)] = 0\,. \tag{28.14}$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname*{res}_z f\,, \tag{28.15}$$

причем интеграл существует по крайней мере в смысле главного значения.

◀ Выберем $R \in \mathbb{R}$ настолько большим, чтобы все особые точки функции f лежали в полукруге $P := \{|z| < R\,;\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Применяя к этой области основную теорему о вычетах, получим

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname*{res}_z f = \int\limits_{\partial P} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)\,dz\,. \tag{28.16}$$

Полагая $z = Re^{i\theta}$, оценим сверху модуль последнего интеграла

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \pi R\cdot \max_{\theta\in[0,\pi]} \left|f(Re^{i\theta})\right| \to 0$$

при $R \to +\infty$. Учитывая это и переходя к пределу в (28.16) при $R \to +\infty$, получим (28.15). ▶

Примеры. 1) Частными случаями интегралов вида (28.15), к которому применима теорема 60, являются сходящиеся интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\,, \tag{28.17}$$

где P и Q — многочлены. Условие (28.14) в данном случае означает, что

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty\,,$$

т. е. что степень многочлена Q по крайней мере на две единицы больше степени многочлена P. При этих ограничениях имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname*{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)} = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname*{res}_z \frac{P(z)}{Q(z)}\,.$$

2) Тем же способом решим более конкретный пример

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n} =$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \left[(-n)(-n-1)\dots(-2n+2)(z+i)^{1-2n}\right] = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2}\,.$$

Вычисление еще одного типа интегралов по вещественной оси основан на применении следующей леммы К. Жордана.

Теорема 61 (лемма Жордана). *Пусть функция* Φ *непрерывна в замкнутой области* $\{|z| \geqslant R_0\,,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ *при некотором* $R_0 \in \mathbb{R}_+$, *и* $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \Phi(z) = 0$. *Тогда при* $\mu > 0$ *имеем*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \Phi(z)\cdot e^{i\mu z} dz = 0\,. \tag{28.18}$$

◀ Обозначим $M(R) := \max\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} |f(R\cdot e^{i\varphi})|$. Из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$. Полагая в интеграле (28.18) $z = Re^{i\varphi}$, получим

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \Phi(z)\cdot e^{i\mu z}dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi \Phi(Re^{i\varphi})\cdot e^{i\mu R(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\cdot iRe^{i\varphi}d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\pi |\Phi(Re^{i\varphi})|\cdot R\,d\varphi \leqslant R\cdot M(R)\int\limits_0^\pi e^{-\mu R\sin\varphi}d\varphi =$$

$$= 2R\cdot M(R)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\mu R\sin\varphi}d\varphi \leqslant 2R\cdot M(R)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\mu R\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\varphi} =$$

$$= \frac{2R\cdot M(R)\cdot\pi}{-2\mu R}\cdot e^{-\mu R\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\varphi}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{\pi}{\mu}\cdot M(R)\cdot\left(1-e^{-\mu R}\right). \quad (28.19)$$

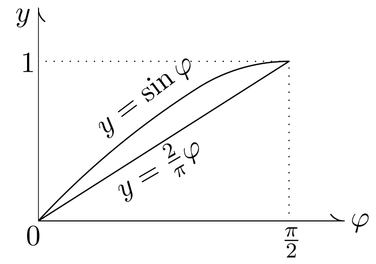

Рис. 20. К лемме Жордана

Здесь использовано неравенство

$$\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\varphi,$$

справедливое при $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ и выражающее свойство выпуклости вверх графика функции $y=\sin\varphi$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ (см. рис. 20). Таким образом, из (28.19) имеем

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \Phi(z)\cdot e^{i\mu z}dz\right| \leqslant \frac{\pi}{\mu}\cdot M(R)\cdot\left(1-e^{-\mu R}\right).$$

Переходя здесь к пределу при $R\to+\infty$, получим равенство, равносильное равенству (28.18). ▶

Теорема 62. *Предположим, что функция* Φ *аналитична в верхней полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z>0\}$*, кроме конечного числа изолированных особых точек, непрерывно продолжима на вещественную ось,* *и* $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \Phi(z) = 0$. *Тогда при* $\mu > 0$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\cdot e^{i\mu x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname*{res}_z \left[\Phi(z)e^{i\mu z}\right], \tag{28.20}$$

причем интеграл существует по крайней мере в смысле главного значения.

◀ Выберем число $R_0 \in \mathbb{R}$ настолько большим, чтобы все особые точки функции Φ лежали в полукруге $\{|z| < R_0\,;\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда $\forall\ R > R_0$ по основной теореме о вычетах будем иметь

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname*{res}_z \left[\Phi(z)e^{i\mu z}\right] = \int\limits_{-R}^{R} \Phi(x)e^{i\mu x}dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \Phi(z)\cdot e^{i\mu z}dz\,.$$

Переходя здесь к пределу при $R \to +\infty$ и используя лемму Жордана, заключаем, что интеграл в (28.20) существует в смысле главного значения, и выполняется равенство (28.20). ▶

Замечание. Интегралы вида (28.20) можно аналогичным образом вычислять и при $\mu < 0$, но тогда для функции Φ условия теоремы, аналогичной теореме 62, должны выполняться *в нижней полуплоскости* $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. В этом случае будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\cdot e^{i\mu x}dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname*{res}_z \left[\Phi(z)e^{i\mu z}\right].$$

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos \mu x}{x^2+a^2}\,dx$, предполагая, что $a\,,\ \mu \in \mathbb{R}_+$.

◀ Применяя равенство (28.20), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\mu x}}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=ai} \frac{e^{i\mu z}}{z^2+a^2} = 2\pi i\cdot \frac{e^{i\mu a i}}{2ai} = \frac{\pi}{a}\cdot e^{-\mu a}\,.$$

Выделяя здесь вещественные части и учитывая четность подынтегральной функции вычисляемого интеграла, находим $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos \mu x}{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2a}\cdot e^{-\mu a}$. ▶

2) Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\sin\mu x}{x^2+a^2}\,dx$, предполагая, что $a\,,\ \mu\in\mathbb{R}_+$.

◀ Применяя равенство (28.20), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\mu x}}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=ai}\frac{ze^{i\mu z}}{z^2+a^2} = 2\pi i\cdot\frac{aie^{i\mu ai}}{2ai} = \pi i\cdot e^{-\mu a}\,.$$

Выделяя здесь мнимые части и учитывая четность подынтегральной функции вычисляемого интеграла, находим $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x\sin\mu x}{x^2+a^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2}\cdot e^{-\mu a}$. ▶

3. Вычисление некоторых интегралов по разомкнутым кривым

Теорема 63. *Пусть* $0<a<1$, *а* Q *— рациональная функция, не имеющая полюсов на луче* $[0,+\infty)$, *причем* $Q(\infty)=0$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}\cdot Q(x)\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi ia}}{\sin\pi a}\sum_{z\in\mathbb{C}}\operatorname*{res}_z\left[z^{a-1}\cdot Q(z)\right]\,. \tag{28.21}$$

◀ Сходимость интеграла (28.21) обеспечивается непрерывностью подынтегральной функции на $\mathbb{R}_+$ и надлежащей асимптотикой ее при $x\to 0$ и при $x\to+\infty$. Для вычисления интеграла применим основную теорему о вычетах в области $D:=\mathbb{C}\diagdown[0,+\infty)$ с краем ∂D, каковым в данном случае являются объединение двух берегов разреза по неотрицательному лучу. Будем считать, что подынтегральная функция интеграла (28.21) задана на верхнем берегу разреза по лучу $\mathbb{R}_+$. Для аналитического продолжения ее на нижний берег представим нужную нам ветвь степенной функции в виде

$$z^{a-1} = e^{(a-1)(\ln r + i\varphi)}\,, \tag{28.22}$$

где $z=re^{i\varphi}$, $r\in\mathbb{R}_+$, $\ln r\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Сужение функции на верхний берег получается из (28.22) при $\varphi=0$, а на нижний — при

$\varphi = 2\pi$. Итак, имеем

$$2\pi i \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z} \left[z^{a-1}\cdot Q(z)\right] = \int\limits_{\partial D} z^{a-1}\cdot Q(z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1}\cdot Q(x)\,dx + \int\limits_{+\infty}^{0} e^{(a-1)(\ln r + 2\pi i)}\cdot Q(r)\,dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1}\cdot Q(x)\,dx - e^{2\pi i(a-1)} \int\limits_{0}^{+\infty} r^{a-1}\cdot Q(r)\,dr =$$

$$= \left(1 - e^{2\pi i a}\right) \int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1}\cdot Q(x)\,dx\,.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^{a-1}\cdot Q(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i a}} \sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_{z} \left[z^{a-1}\cdot Q(z)\right]\,. \tag{28.23}$$

Учитывая, что

$$e^{2\pi i a} - 1 = e^{\pi i a}(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}) = 2ie^{\pi i a}\sin \pi a\,,$$

из равенства (28.23) легко получается равенство (28.21). ▶

Пример. Доказать формулу дополнения гамма-функции $\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin \pi a}$ при $0 < a < 1$.

◀ Используя зависимость между гамма-функцией и бета-функцией, а также второе интегральное представление бета-функции, имеем

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \mathrm{B}(a, 1-a) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx\,.$$

Вычисляя последний интеграл по формуле (28.21), имеем

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin \pi a}\cdot \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{z^{a-1}}{1+z} = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin \pi a}\cdot (-1)^{a-1} =$$

$$= -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin \pi a}\cdot e^{(a-1)\pi i} = \frac{\pi}{\sin \pi a}\,. \quad ▶$$

Теорема 64. *Пусть Q — рациональная функция, не имеющая полюсов на луче $[0,+\infty)$, причем $Q(z)=O(z^{-2})$ при $z\to\infty$. Тогда*

$$\int\limits_0^{+\infty} Q(x)\,dx = -\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_z\,[Q(z)\cdot\ln z]\,, \tag{28.24}$$

где $\ln z := \ln r + i\varphi$, $z=re^{i\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

◀ Применяя тот же метод, что и в предыдущей теореме, имеем

$$2\pi i\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_z\,[Q(z)\cdot\ln z] = \int\limits_0^{+\infty} Q(x)\ln x\,dx + \int\limits_{+\infty}^{0} Q(x)\,[\ln x + 2\pi i]\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} Q(x)\ln x\,dx - \int\limits_0^{+\infty} Q(x)\ln x\,dx - 2\pi i\int\limits_0^{+\infty} Q(x)\,dx = -2\pi i\int\limits_0^{+\infty} Q(x)\,dx\,.$$

Сокращая полученное равенство на $(-2\pi i)$, приходим к равенству (28.24). ▶

Замечание. Пусть $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}_+$, а Q — рациональная функция, не имеющая полюсов на отрезке $[a\,,\,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b Q(x)\,dx = -\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname*{res}_z\left[Q(z)\ln\frac{z-a}{b-z}\right]\,,$$

где под $\ln\dfrac{z-a}{b-z}$ понимается непрерывная на $\mathbb{C}\diagdown[a,b]$ ветвь, которая на верхнем берегу разреза $(a\,,\,b)$ принимает вещественные значения. Доказательство этого равенства также основано на применении основной теоремы о вычетах.

§ 3. Применение вычетов к разложению мероморфных функций на простейшие дроби

1. Общий подход

Пусть функция f мероморфна в $\mathbb{C}$. По определению это означает, что данная функция аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме конечного или счетного множества полюсов, которые могут сгущаться только к точке ∞. Если множество всех полюсов функции f — конечное, то очевидно, что эта функция представима в виде суммы всех ее главных частей в полюсах и некоторой целой функции. Если же множество всех полюсов функции f — бесконечное, то возникает проблема представимости ее в виде суммы главных частей. Ниже будет показано, что при некоторых ограничениях эта проблема решается в положительном смысле. При этом будем использовать определяемое ниже понятие *исчерпания*.

Определение 36. *Исчерпанием плоскости* $\mathbb{C}$ *называется последовательность односвязных областей* $(D_n)_{n=1}^{\infty}$, *обладающую следующими свойствами*:

(a) $0 \in D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots; \quad \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{C}$;

(b) *граница каждой области* D_n *— простая кусочно-гладкая кривая* ∂D_n;

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N} \ : \ D_n \sqcup \partial D_n \subset D_{n+1}$.

Теорема 65. *Пусть* f *мероморфная в* $\mathbb{C}$ *функция, а исчерпание* $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ *выбрано так, что на множестве* $\bigsqcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \partial D_n$ *нет полюсов функции* f. *Тогда* $\forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\forall z \in D_n$ *справедливо равенство*

$$f(z) = \sum_{a\in D_n} G_a(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \tag{28.25}$$

где $G_a(z)$ *— главная часть лорановского разложения функции* f *в проколотой окрестности точки* a.

◀ Входящая в равенство (28.25) сумма конечна, так как $G_a(z) \equiv 0$, если точка a не является полюсом функции f. Если же a — полюс функции f, то

$$G_a(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при} \quad z \to \infty\,,$$

где N, c_{-N}, …, c_{-1} зависят от a. Применяя интегральную формулу

Коши, а затем интегральную теорему Коши, при $z \in D_n$ имеем

$$f(z) - \sum_{a \in D_n} G_a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \left[f(\zeta) - \sum_{a \in D_n} G_a(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \sum_{a \in D_n} G_a(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \sum_{a \in D_n} \int\limits_{\partial D_n} G_a(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot d\zeta \,,$$

поскольку

$$\forall a \in D_n \;\; \forall z \in D_n \;:\; \int\limits_{\partial D_n} G_a(\zeta) \cdot \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0$$

в силу интегральной теоремы Коши, примененной к области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_n$. ►

Замечание. Если окажется, что при $n \to \infty$ интеграл, входящий в равенство (28.25), стремится к нулю, то в пределе из равенства (28.25) получим представление мероморфной функции f в виде суммы ее главных частей. В следующем пункте даются достаточные условия для этого и примеры.

2. Применение общего подхода к некоторым классам мероморфных функций

Теорема 66. *Пусть f мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, а исчерпание $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ плоскости $\mathbb{C}$ можно выбрать так, что выполняется условие*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \int\limits_{\partial D_n} |f(\zeta)\, d\zeta| \leqslant K \,. \tag{28.26}$$

Тогда

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{a \in D_n} G_a(z) \tag{28.27}$$

где $G_a(z)$ — главная часть лорановского разложения функции f в окрестности точки a.

◀ Для оценки интеграла из (28.25) сначала произведем следующую оценку:

$$\int\limits_{\partial D_n} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta\in\partial D_n}\left|\frac{1}{\zeta}\right| \cdot \int\limits_{\partial D_n} |f(\zeta)\,d\zeta| \leqslant \frac{K}{\min\limits_{\zeta\in\partial D_n}|\zeta|} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Используя ее, оценим интеграл из (28.25)

$$\left|\int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \leqslant \left|\int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right| + \left|\int\limits_{\partial D_n} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta}\right]\,d\zeta\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right| + \left|\int\limits_{\partial D_n} \frac{z f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[1 + \max_{\zeta\in\partial D_n}\left|\frac{z}{\zeta - z}\right|\right] \cdot \int\limits_{\partial D_n} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,. \quad ▶$$

В качестве **примера** на применение теоремы 66 разложим на простейшие дроби мероморфную функцию $\sec z := \dfrac{1}{\cos z}$, имеющую простые полюсы в точках $\pm(2\nu-1)\pi/2$, $\nu\in\mathbb{N}$. Для нахождения главных частей функции sec достаточно найти вычеты в полюсах. Имеем

$$\operatorname*{res}_{(2\nu-1)\frac{\pi}{2}} \sec = \lim_{z\to(2\nu-1)\frac{\pi}{2}} \frac{z-(2\nu-1)\frac{\pi}{2}}{\cos z} = -\lim_{z\to(2\nu-1)\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin z} = \frac{-1}{\sin(2\nu-1)\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sin(\nu\pi - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \nu\pi)} = \frac{1}{\cos\nu\pi} = (-1)^\nu.$$

Отсюда заключаем, что главные части функции sec в окрестностях точек $z = \pm(2\nu-2)\frac{\pi}{2}$ соответственно равны

$$\pm\frac{(-1)^\nu}{z\mp(2\nu-2)\frac{\pi}{2}}\,.$$

Выберем теперь исчерпание плоскости, беря в качестве края области D_n квадрат со стороной, равной $2\pi n$, с центром в точке $z=0$, со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 21). Желая проверить для функции sec выполнение условия (28.26), вычислим сначала значения этой функции на сторонах n-го квадрата. На вертикальных сторонах имеем $z=\pm n\pi+iy$ и, значит,

$$|\sec z|=\frac{1}{|\cos(n\pi+iy)|}=\frac{1}{|\cos iy|}=\frac{1}{\operatorname{ch} y}\,,\qquad |y|\leqslant\pi\,.$$

На горизонтальных сторонах имеем $z=x\pm in\pi$ и, значит,

$$|\sec z|=\frac{1}{|\cos(x\pm in\pi)|}=\frac{2}{|e^{ix\mp n\pi}+e^{-ix\pm n\pi}|}\leqslant\frac{2}{|e^{n\pi}-e^{-n\pi}|}=\frac{1}{|\operatorname{sh} n\pi|}\,.$$

Используя эти оценки, получим

$$\int\limits_{\partial D_n}|\sec\zeta\cdot d\zeta|\leqslant 2\int\limits_{-n\pi}^{n\pi}\frac{dy}{\operatorname{ch} y}+\frac{2}{\operatorname{sh} n\pi}\int\limits_{-n\pi}^{n\pi}dx=4\int\limits_{0}^{n\pi}\frac{dy}{\operatorname{ch} y}+\frac{4n\pi}{\operatorname{sh} n\pi}=$$

$$=8\int\limits_{0}^{n\pi}\frac{de^y}{e^{2y}+1}+\frac{4n\pi}{\operatorname{sh} n\pi}\to 4\pi\quad\text{при}\quad n\to\infty\,.$$

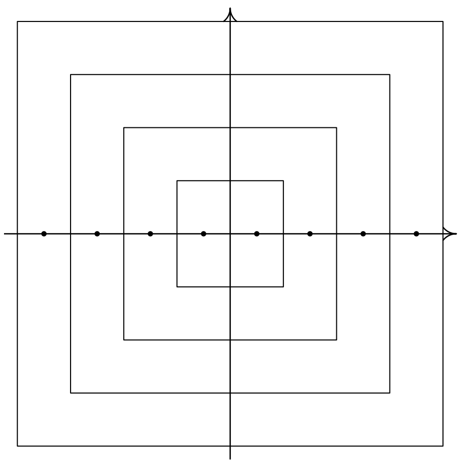

Рис. 21. Исчерпание для sec

Отсюда следует, что для функции sec выполнено условие (28.26). Учитывая, далее, что вовнутрь n-го квадрата попадают полюсы $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\ldots$, $\pm(2\nu-1)\pi/2$ и применяя к функции sec равенство (28.27), имеем

$$\sec z=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^\nu}{z-\frac{(2\nu-1)\pi}{2}}-\frac{(-1)^\nu}{z+\frac{(2\nu-1)\pi}{2}}\right\}=$$
$$=\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(2\nu-1)}{z^2-(2\nu-1)^2\pi^2/4}\,,$$

причем этот ряд сходится условно во всей области определения функции sec и равномерно по z на компактах, лежащих в области аналитичности этой функции.

Построим теперь разложение мероморфной функции при ограничениях, меньших, чем в теореме 66.

Теорема 67. *Пусть f мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, а исчерпание $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ плоскости $\mathbb{C}$ можно выбрать так, что выполняется условие*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists\, p \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \; : \int\limits_{\partial D_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^p}\, d\zeta \right| \leqslant K\,. \tag{28.28}$$

Тогда существует последовательность $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ многочленов степеней не выше $(p-1)$, такая, что функция f представима в виде

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \left[P_n(z) + \sum_{a \in D_n} G_a(z) \right], \tag{28.29}$$

где $G_a(z)$ — главная часть лорановского разложения функции f в окрестности точки a.

◀ Разлагая ядро Коши по степеням ζ при $|\zeta| > |z|$, имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta\cdot(1-\frac{z}{\zeta})} = \frac{1}{\zeta}\left(1 + \frac{z}{\zeta} + \frac{z^2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{\zeta^{p-1}} + \ldots\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{\zeta^p}\right) + \frac{z^p}{\zeta^p}\cdot\frac{1}{\zeta - z}\,. \tag{28.30}$$

Используя это тождество, имеем при $z \in D_n$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = P_n(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_n} \frac{z^p}{\zeta^p}\cdot\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,, \tag{28.31}$$

где обозначено

$$P_n(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_n} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^3} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{\zeta^p}\right) f(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{28.32}$$

Очевидно, что это — многочлен степени не выше $(p-1)$ от z. Таким образом, равенство (28.25) приобретает следующий вид:

$$f(z) = P_n(z) + \sum_{a\in D_n} G_a(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_n} \frac{z^p}{\zeta^p}\cdot\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,, \quad z \in D_n\,. \tag{28.33}$$

Используя условие (28.28), оценим последний интеграл в (28.33)

$$\left|\int\limits_{\partial D_n} \frac{z^p}{\zeta^p} \cdot \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}\right| \leqslant \frac{|z|^p}{\min\limits_{\zeta\in\partial D_n} |\zeta - z|} \int\limits_{\partial D_n} \left|\frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^p}\right| \leqslant \frac{K \cdot |z|^p}{\min\limits_{\zeta\in\partial D_n} |\zeta - z|} \to 0$$

при $n \to \infty$ за счет стремления к бесконечности знаменателя. Таким образом, в пределе при $n \to \infty$ из равенства (28.33) получается равенство (28.29). ►

В качестве **примера** на применение теоремы 67 разложим на простейшие дроби мероморфную функцию ctg. Полюсы этой функции находятся в точках $n\pi$, где $n \in \mathbb{Z}$, а вычеты в них равны

$$\operatorname*{res}_{n\pi} \operatorname{ctg} = \lim_{z\to n\pi} \left[\frac{(z - n\pi)\cos z}{\sin z}\right] = 1\,.$$

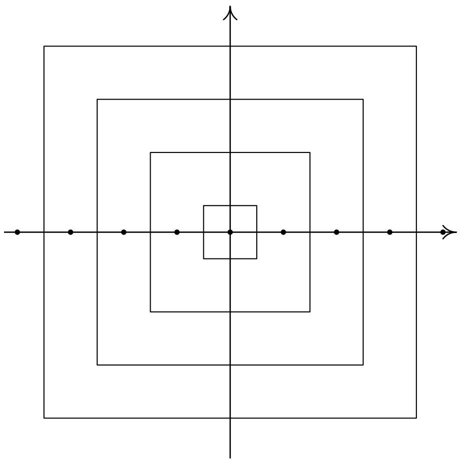

Рис. 22. Исчерпание для ctg

Выберем исчерпание плоскости квадратами с центром в начале координат, со сторонами, параллельными координатным осям, а именно

$$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\,, \quad y = \pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\,,$$

где $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ (рис. 22). Проверим, что для функции ctg выполняется условие (28.28) при $p = 1$, т. е. оценим сверху величину

$$\left|\int\limits_{\partial D_n} \frac{\operatorname{ctg} z}{z}\, dz\right|\,, \tag{28.34}$$

где ∂D_n — край n-го квадрата. На вертикальных сторонах $z = \pm\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) + iy$ n-го квадрата имеем

$$\left|\operatorname{ctg}\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) + iy\right]\right| = \left|\frac{\cos\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) + iy\right]}{\sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) + iy\right]}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(iy)}{\cos(iy)}\right| = \left|\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y}\right| = \left|\frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\right| < 1\,.$$

На горизонтальных сторонах $z = x \pm i\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ n-го квадрата имеем следующую оценку:

$$\left|\operatorname{ctg}\left[x \pm i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right]\right| = \left|\frac{\cos\left[x \pm i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right]}{\sin\left[x \pm i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right]}\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{ix}\cdot e^{\mp\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)} + e^{-ix}\cdot e^{\pm\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}}{e^{ix}\cdot e^{\mp\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)} - e^{-ix}\cdot e^{\pm\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}}\right| \leqslant \frac{e^{\frac{\pi}{2}+n\pi} + e^{-\frac{\pi}{2}-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{2}+n\pi} - e^{-\frac{\pi}{2}-n\pi}} = \operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \leqslant \operatorname{cth}\frac{\pi}{2},$$

так как функция cth убывает. Учитывая, что $\operatorname{cth}\dfrac{\pi}{2} > 1$, имеем окончательно

$$|\operatorname{ctg} z| \leqslant \operatorname{cth}\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad z \in \partial D_n\,.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\partial D_n}\left|\frac{\operatorname{ctg}\zeta\,d\zeta}{\zeta}\right| \leqslant \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\int\limits_{\partial D_n}\frac{|d\zeta|}{|\zeta|} \leqslant \frac{\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}\cdot 8\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = 8\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\,.$$

Итак, условие (28.28) выполнено, причем $p = 1$.

Вычислим теперь многочлен $P_n(z)$ по формуле (28.32). Так как $p = 1$, то в данном случае многочлен $P_n(z)$ имеет степень не выше $(p-1) = 0$, т. е. является константой. Покажем, что эта константа равна нулю. Учитывая, что функция $\dfrac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta}$ — четная, заключаем, что $\operatorname*{res}\limits_{\zeta=0}\dfrac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta} = 0$. Далее,

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_n}\frac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta}\,d\zeta = \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname*{res}_{\zeta=k\pi}\frac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta} + \operatorname*{res}_{\zeta=-k\pi}\frac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\lim_{\zeta\to k\pi}\frac{(\zeta-k\pi)\cos\zeta}{\zeta\sin\zeta} + \lim_{\zeta\to -k\pi}\frac{(\zeta+k\pi)\cos\zeta}{\zeta\sin\zeta}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k\pi} + \frac{1}{-k\pi}\right] = 0\,.$$

Итак, для функции ctg справедливо представление (28.29), где $P(z) \equiv 0$

$$\operatorname{ctg} z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{z-k\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right],$$

и можно показать, что этот ряд сходится равномерно на любом компакте, лежащем в области аналитичности функции ctg.

Перепишем последнее разложение в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2}\,. \tag{28.35}$$

Интегрируя это равенство в пределах от 0 до z, получим

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \int\limits_0^z \left[\operatorname{ctg} t - \frac{1}{t}\right] dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln(z^2 - k^2\pi^2) - \ln(-k^2\pi^2)\right] ,$$

откуда

$$\ln \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) .$$

Потенцируя полученное равенство, получим разложение функции sin в бесконечное произведение

$$\sin z = z \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) , \tag{28.36}$$

сходящееся равномерно на любом компакте.

§ 4. Применение вычетов к суммированию рядов

1. Пусть $t \in (0,1)$ — параметр. Мероморфная функция

$$f(z) := \frac{e^{2\pi i t z}}{z \cdot (e^{2\pi i z} - 1)} \tag{28.37}$$

имеет полюсы в точках множества $\mathbb{Z}$, причем в точке $z = 0$ она имеет полюс порядка 2, а все остальные ее полюсы — простые. Вычет в точке $z = 0$ вычислим по формуле (28.4)

$$\begin{aligned}
\operatorname*{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{z e^{2\pi i t z}}{e^{2\pi i z} - 1}\right) = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(e^{2\pi i t z} + 2\pi i t z e^{2\pi i t z})(e^{2\pi i z} - 1) - 2\pi i z e^{2\pi i z} e^{2\pi i t z}}{(e^{2\pi i z} - 1)^2} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(1 + 2\pi i t z)(e^{2\pi i z} - 1) - 2\pi i z e^{2\pi i z}}{(e^{2\pi i z} - 1)^2} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(1 + 2\pi i t z)(2\pi i z + \frac{(2\pi i z)^2}{2!} + \ldots) - 2\pi i z - (2\pi i z)^2 - \ldots}{(2\pi i z)^2 + \ldots} = t - \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

Вычеты в остальных целых точках вычисляются проще

$$\operatorname*{res}_{z=k} f(z) = \lim_{z\to k} \frac{e^{2\pi i t z} \cdot (z - k)}{z \cdot (e^{2\pi i z} - 1)} = \frac{e^{2\pi i t k}}{k} \cdot \lim_{z\to k} \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i z}} = \frac{e^{2\pi i t k}}{2\pi i k} .$$

Пусть D_n — прямоугольник с вершинами в точках

$$\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pm i\sqrt{n}\,, \quad \text{где} \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Применяя к функции (28.37) основную теорему о вычетах, получим

$$\int\limits_{\partial D_n} f(z)\,dz = 2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{e^{2\pi itk}}{k}\,. \tag{28.38}$$

Желая перейти к пределу в этом равенстве при $n\to\infty$, оценим интеграл. С этой целью сначала оценим подынтегральную функцию (28.37) на ∂D_n. На горизонтальных сторонах $z=x\pm i\sqrt{n}$, $|x|\leqslant n+\dfrac{1}{2}$ имеем

$$|f(z)| = \frac{\left|e^{2\pi it(x\pm i\sqrt{n})}\right|}{\left|(x\pm i\sqrt{n})(e^{2\pi i(x\pm i\sqrt{n})}-1))\right|}\leqslant\frac{e^{\mp2\pi t\sqrt{n}}}{\sqrt{x^2+n}\left|e^{\mp2\pi\sqrt{n}}-1\right|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+n}\left|e^{\mp2\pi(1-t)\sqrt{n}}-e^{\pm2\pi t\sqrt{n}}\right|}\,.$$

Отсюда

$$\left|2\int\limits_{-(n+1/2)\pm i\sqrt{n}}^{(n+1/2)\pm i\sqrt{n}} f(z)\,dz\right|\leqslant\frac{2}{\left|e^{\mp2\pi(1-t)\sqrt{n}}-e^{\pm2\pi t\sqrt{n}}\right|}\int\limits_{-(n+1/2)}^{n+1/2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+n}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2n+1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{\left|e^{\mp2\pi(1-t)\sqrt{n}}-e^{\pm2\pi t\sqrt{n}}\right|}\to 0$$

при $n\to\infty$ за счет достаточно быстрого стремления к бесконечности знаменателя последнего множителя.

На вертикальных сторонах $z = \pm(n+1/2)+iy$, $|y| \leqslant \sqrt{n}$ имеем

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{2\pi it[\pm(n+1/2)+iy]}}{[\pm(n+1/2)+iy]\cdot\big(e^{2\pi i[\pm(n+1/2)+iy]}-1\big)}\right| =$$

$$= \frac{e^{-2\pi ty}}{\sqrt{(n+1/2)^2+y^2}\cdot\big|e^{\pm 2\pi i(n+1/2)}\cdot e^{-2\pi y}-1\big|} =$$

$$= \frac{e^{-2\pi ty}}{\sqrt{(n+1/2)^2+y^2}\cdot|1+e^{-2\pi y}|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(n+1/2)^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\big(e^{2\pi ty}+e^{2\pi(t-1)y}\big)} \leqslant \frac{M}{\sqrt{(n+1/2)^2+y^2}}\,.$$

Из этой оценки получаем следующую оценку интеграла

$$\left|2\int\limits_{(n+1/2)-i\sqrt{n}}^{(n+1/2)+i\sqrt{n}} f(z)\,dz\right| \leqslant 2M\int\limits_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\frac{dy}{\sqrt{(n+1/2)+y^2}} =$$

$$= 4M\cdot\ln\left|y+\sqrt{(n+1/2)^2+y^2}\right|\Bigg|_0^{\sqrt{n}} =$$

$$= 4M\cdot\ln\frac{\left|\sqrt{n}+\sqrt{(n+1/2)^2+n}\right|}{n+1/2}\,,$$

из которой видно, что он стремится к нулю при $n\to\infty$. Переходя к пределу в равенстве (28.38) при $n\to\infty$, получаем сумму следующего ряда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus 0}\frac{e^{2\pi itk}}{k} = \pi i\cdot(1-2t)\,,\quad 0<t<1\,.$$

Используя формулу Эйлера, легко преобразовать это равенство к следующему виду:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi tk}{k} = \frac{\pi}{2}\cdot(1-2t)\,,\quad 0<t<1\,.$$

Отсюда, например, при $t = 1/4$ получаем сумму известного ряда Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

2. Пусть f — мероморфная функция, не имеющая полюсов в целых точках. Так как

$$\operatorname*{res}_{z=k} \frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = \lim_{z\to k} \frac{z-k}{e^{2\pi i z} - 1} = \frac{1}{2\pi i}\,,$$

то для любой области $D \subset \mathbb{C}$ с кусочно-гладким краем ∂D, не проходящем через целые точки и через полюсы функции f, и такой, что $m, m+1, \dots, n \in D$, имеем

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi i z} - 1} + R_1\,, \tag{28.39}$$

где R_1 — умноженная на $2\pi i$ сумма вычетов подынтегральной функции по всем лежащим в области D полюсам функции f.

Аналогично, учитывая, что

$$\operatorname*{res}_{z=k} (\pi \operatorname{ctg} \pi z) = \pi \lim_{z\to k} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \cdot (z-k) = 1\,,$$

при тех же предположениях, что и выше, получим

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} f(z) \operatorname{ctg} \pi z\, dz + R_2\,, \tag{28.40}$$

где R_2 — сумма вычетов подынтегральной функции по всем полюсам функции f, лежащим в D.

Формулы (28.39) и (28.40) могут быть использованы для суммирования рядов. Положим, например,

$$f(z) := \frac{1}{(t+z)^2}\,,$$

где $t \notin \mathbb{Z}$ — параметр. Беря исчерпание плоскости $\mathbb{C}$ кругами $|z| \leqslant n + \dfrac{1}{2}$, где $n \in \mathbb{N}$, покажем, что

$$\int\limits_{|z|=n+1/2} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{(t+z)^2}\, dz \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

◀ Оценим сначала $|\operatorname{ctg}\pi z|$, полагая $z = (n + 1/2)e^{i\varphi}$. Так как функция ctg вещественна на вещественной оси, то при замене $\varphi \longmapsto -\varphi$ величина $|\operatorname{ctg}\pi z|$ не меняется. То же самое происходит и при замене $\varphi \longmapsto \pi - \varphi$. Так как при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi$ эта функция обращается в нуль, то точка $\varphi = \pi/2$ является точкой ее максимума (при $0 < \varphi < \pi/2$ у нее нет стационарных точек). Поэтому имеем

$$|\operatorname{ctg}\left[\pi(n+1/2)e^{i\varphi}\right]| \leqslant |\operatorname{ctg}\left[\pi(n+1/2)e^{i\pi/2}\right]| = \operatorname{cth}\left[\pi(n+1/2)\right].$$

Так как $\operatorname{cth}[\pi(n+1/2)] \to 1$ при $n \to \infty$, то

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall \varphi \in [0, 2\pi] \; : \; |\operatorname{ctg}\left[\pi(n+1/2)e^{i\varphi}\right]| \leqslant M.$$

Но тогда

$$\left| \int\limits_{|z|=n+1/2} \frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z \, dz}{(z+t)^2} \right| \leqslant \pi M \int\limits_{|z|=n+1/2} \frac{|dz|}{|z+t|^2} =$$

$$= \pi M \int\limits_0^{2\pi} \frac{(n+1/2)d\varphi}{|(n+1/2)-|t||^2} = \frac{2\pi^2 M\cdot(n+1/2)}{\left[(n+1/2)-|t|\right]^2} \to 0$$

при $n \to \infty$. ▶

Применяя, далее, теорему о вычетах, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=n+1/2} \frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z\, dz}{(z+t)^2} = \operatorname*{res}_{z=-t} \frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{(z+t)^2} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(n+t)^2}. \qquad (28.41)$$

Вычисляя входящий сюда вычет, имеем

$$\operatorname*{res}_{z=-t} \frac{\pi \operatorname{ctg}\pi z}{(z+t)^2} = \lim_{z\to -t} \frac{d}{dz} \pi \operatorname{ctg}\pi z = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t}.$$

Подставляя найденное значение вычета в равенство (28.41) и переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим окончательно

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+t)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi t}.$$

Отсюда в качестве простого следствия можно получить, например, следующее известное равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

§ 5. Теорема о логарифмическом вычете и ее следствия

1. Логарифмический вычет и порядок мероморфной функции в точке

Пусть f — мероморфная в области D функция. Условимся в этом параграфе рассматривать каждую такую функцию как отображение $f\,:\,D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, считая, что в полюсах она принимает значение ∞ (т. е. продолжая ее на полюсы по непрерывности в сферической метрике).

Определение 37. *Логарифмическим вычетом мероморфной функции* $f\,:\,D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *в точке* $a \in D$ *называется число* $\operatorname*{res}_a \frac{f'}{f}$ (*т. е. вычет в точке* a *логарифмической производной функции* f).

Определение 38. *Порядком мероморфной функции* $f\,:\,D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *в точке* $a \in D$ *называется целое число* $\operatorname*{ord}_a f$, *определяемое следующим равенством*:

$$\operatorname*{ord}_a f := \begin{cases} n\,, & \text{если } a \text{ — нуль кратности } n \text{ функции } f\,,\\ -p\,, & \text{если } a \text{ — полюс кратности } p \text{ функции } f\,,\\ 0\,, & \text{если } f(a) \in \mathbb{C}\diagdown 0\,. \end{cases}$$

Замечание. Обращаю внимание читателя на то, что в этой шкале порядок функции f в ее нуле считается положительным, а порядок функции f в ее полюсе — отрицательным.

Теорема 68. *Пусть точка* $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ *является точкой аналитичности или полюсом мероморфной функции* f. *Тогда логарифмический вычет функции* f *в точке* a *равен порядку функции* f *в этой точке,* *т. е.*

$$\operatorname*{res}_a \frac{f'}{f} = \operatorname*{ord}_a f\,. \tag{28.42}$$

◀ Рассмотрим сначала случай, когда $a \in \mathbb{C}$. Если $\operatorname*{ord}_a f = 0$, то $f(a) \in \mathbb{C}\diagdown 0$. При таком предположении логарифмическая производная $\frac{f'}{f}$ аналитична в точке a (как частное аналитических функций с отличным от нуля знаменателем). Поэтому $\operatorname*{res}_a \frac{f'}{f} = 0$. Пусть a — нуль кратности n функции f. Тогда в некоторой окрестности точки a функция f представима в виде

$$f(z) = (z-a)^n \cdot \varphi(z)\,, \tag{28.43}$$

где φ — аналитическая функция, для которой $\varphi(a) \neq 0$. Дифференцируя равенство (28.43), находим

$$f'(z) = n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n\varphi'(z)\,. \tag{28.44}$$

Разделив почленно (28.44) на (28.44), получим

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,.$$

Так как $\varphi(a) \neq 0$, то $\frac{\varphi'}{\varphi}$ аналитична в точке a, и по предыдущему $\operatorname*{res}_a \frac{\varphi'}{\varphi} = 0$. Таким образом,

$$\operatorname*{res}_a \frac{f'}{f} = \operatorname*{res}_{z=a} \frac{n}{z-a} + \operatorname*{res}_{z=a} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = n + 0 = n\,.$$

Пусть теперь a — полюс кратности p функции f. Тогда в некоторой окрестности точки a функция f представима в виде

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^p}\,, \tag{28.45}$$

где ψ — аналитическая функция, для которой $\psi(a) \neq 0$. Дифференцируя равенство (28.45), получим

$$f'(z) = \frac{\psi'(z)(z-a)^p - p(z-a)^{p-1}\psi(z)}{(z-a)^{2p}} = \\ = \frac{\psi'(z)}{(z-a)^p} - \frac{p\cdot\psi(z)}{(z-a)^{p-1}}\,. \tag{28.46}$$

Разделив почленно (28.46) на (28.45), будем иметь

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{p}{z-a}\,.$$

Отсюда находим $\operatorname*{res}_a \frac{f'}{f} = -p$.

Рассмотрим теперь случай $a = \infty$. Если $f(\infty) = c_0 \neq 0$, то лорановское разложение функции f в окрестности точки ∞ имеет вид

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots\,. \tag{28.47}$$

Дифференцируя это равенство, получим лорановское разложение производной

$$f'(z) = -\frac{c_{-1}}{z^2} - \frac{2c_{-2}}{z^3} - \ldots\,. \tag{28.48}$$

Разделив (28.48) на (28.47), получим следующее представление логарифмической производной в окрестности точки ∞:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{c_{-1} + 2c_{-2}z^{-1} + \ldots}{f(z)}\,.$$

Из этого представления видно, что лорановское разложение функции $\frac{f'}{f}$ в окрестности точки ∞ не содержит члена со степенью z^{-1}, и потому $\operatorname*{res}_\infty \frac{f'}{f} = 0$. Если точка ∞ есть нуль кратности n функции f, то она представима в виде

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{z^n}\,, \quad \text{где} \quad f_1(\infty) \in \mathbb{C}^*\,.$$

Отсюда находим

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n}{z} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\,.$$

Так как по предыдущему $\operatorname*{res}_\infty \frac{f_1'}{f_1} = 0$, то $\operatorname*{res}_\infty \frac{f'}{f} = n$. Если точка ∞ есть полюс кратности p функции f, то она представима в виде

$$f(z) = z^n \cdot f_1(z)\,, \quad \text{где} \quad f_1(\infty) \in \mathbb{C}^*\,.$$

Отсюда находим

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\,.$$

Так как по предыдущему $\operatorname*{res}_\infty \frac{f_1'}{f_1} = 0$, то $\operatorname*{res}_\infty \frac{f'}{f} = -p$. ▶

2. Теорема о логарифмическом вычете и принцип аргумента

Теорема 69 (о логарифмическом вычете). *Предположим, что*:

(a) $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *— область с кусочно-гладким краем* ∂D;

(b) *функция* φ *аналитична в* D *и непрерывна на* $D \sqcup \partial D$;

(c) *функция* $f : D \sqcup \partial D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *аналитична в* D, *кроме конечного числа полюсов в точках* $b_1, \dots, b_P \in D$, *имеет конечное число нулей в точках* $a_1, \dots, a_N \in D$, *причем каждый нуль и полюс записан подряд столько раз, какова его кратность*;

(d) *производная* f' *непрерывно продолжима на* ∂D *до суммируемой по* ∂D *функции.*

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{N} \varphi(a_k) - \sum_{k=1}^{P} \varphi(b_k)\,. \tag{28.49}$$

◀ Условия теоремы обеспечивают применимость к интегралу из (28.49) основной теоремы о вычетах. Особые точки его подынтегральной функции могут находиться только в нулях и полюсах функции f. Найдем вычеты в этих особых точках.

Пусть $a \in D \cap \mathbb{C}$ — нуль кратности n функции f. Используя теорему 68, имеем в окрестности точки a следующее представление:

$$\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = [\varphi(a) + (z-a)\varphi_1(z)] \cdot \left[\frac{n}{z-a} + f_1(z)\right]\,, \tag{28.50}$$

где φ_1 и f_1 аналитичны в окрестности точки a. Из представления (28.50) очевидно, что

$$\operatorname*{res}_{z=a} \left[\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right] = n \cdot \varphi(a)\,. \tag{28.51}$$

Пусть $\infty \in D$ — нуль кратности n функции f. Используя теорему 68, имеем в окрестности точки ∞ следующее представление:

$$\varphi(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = \left[\varphi(\infty) + \frac{\varphi_1(z)}{z}\right] \cdot \left[-\frac{n}{z} + \frac{f_1(z)}{z^2}\right]\,, \tag{28.52}$$

где φ_1 и f_1 аналитичны в окрестности точки ∞. Из представления (28.52) очевидно, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\left[\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=n\cdot\varphi(\infty)\,. \tag{28.53}$$

Пусть $b\in D\cap\mathbb{C}$ — полюс кратности p функции f. Используя теорему 68, имеем в окрестности точки b следующее представление:

$$\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=[\varphi(b)+(z-b)\varphi_1(z)]\cdot\left[-\frac{p}{z-b}+f_1(z)\right]\,, \tag{28.54}$$

где φ_1 и f_1 аналитичны в окрестности точки b. Из представления (28.54) очевидно, что

$$\operatorname*{res}_{z=b}\left[\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=-p\cdot\varphi(b)\,. \tag{28.55}$$

Пусть $\infty\in D$ — полюс кратности p функции f. Используя теорему 68, имеем в окрестности точки ∞ следующее представление:

$$\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=\left[\varphi(\infty)+\frac{\varphi_1(z)}{z}\right]\cdot\left[\frac{p}{z}+\frac{f_1(z)}{z^2}\right]\,, \tag{28.56}$$

где φ_1 и f_1 аналитичны в окрестности точки ∞. Из представления (28.52) очевидно, что

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\left[\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right]=-p\cdot\varphi(\infty)\,. \tag{28.57}$$

Суммируя вычеты (28.51), (28.53), (28.55), (28.57) по всем нулям и полюсам функции f, получим правую часть равенства (28.49). ►

Теорема 70 (принцип аргумента). *Предположим, что $D\subset\widehat{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладким краем ∂D, а функция $f\,:\,D\sqcup\partial D\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ удовлетворяет условиям применимости теоремы о логарифмическом вычете и имеет в этой области N нулей и P полюсов (с учетом кратностей). Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg}f(z)\Big|_{\partial D}=N-P\,, \tag{28.58}$$

где в левой части находится приращение вдоль края ∂D ветви аргумента, непрерывной на каждой связной компоненте края, кроме, быть может, одной ее точки.

◀ Полагая в равенстве (28.49) $\varphi(z) \equiv 1$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{N} 1 - \sum_{k=1}^{P} 1 = N - P\,. \tag{28.59}$$

Осталось только преобразовать левую часть этого равенства в левую часть равенства (28.58). С этой целью введем обозначения

$$u(z) := \operatorname{Re} f(z)\,, \quad v(z) := \operatorname{Im} f(z)\,, \quad f(z) = u(z) + iv(z)$$

и преобразуем левую часть равенства (28.49) следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{du + i\,dv}{u + i\,v} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{(u - i\,v)(du + i\,dv)}{u^2 + v^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{u\,du + v\,dv}{u^2 + v^2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2} = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\partial D} d\ln(v^2 + v^2) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} d\mathrm{Arctg}\,\frac{v}{u} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\ln|f(z)|\Big|_{\partial \mathrm{D}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial \mathrm{D}} d\mathrm{Arctg}\,\frac{v}{u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} d\mathrm{Arctg}\,\frac{v}{u} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial \mathrm{D}} d\mathrm{Arg}\, f(z)\,.$$

Приращение функции $\ln|f(z)|$ вдоль края ∂D равно нулю, так как она однозначна и непрерывна на краю, а край является объединением конечного числа замкнутых кривых. Итак, равенство (28.59) переписывается в следующем виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D} d\mathrm{Arg}\, f(z) = N - P\,. \tag{28.60}$$

При вычислении этого интеграла по формуле Ньютона — Лейбница следует проявить осторожность, так как всякая первообразная должна быть однозначной и непрерывной, а функция $\mathrm{Arg}\ f(z)$ этими свойствами, вообще говоря, не обладает. Желая преодолеть эту трудность, выбросим из каждой компоненты края по одной (произвольной) точке. Оставшаяся часть этой компоненты оказывается односвязной (разомкнутой) кривой. Теорема о монодромии, которая будет установлена в следующей главе, гарантирует существование однозначной ветви функции $\operatorname{Arg} f(z)$, непрерывной на этой односвязной (разомкнутой) кривой. Беря эту ветвь в качестве первообразной функции, можно переписать равенство (28.60) в виде (28.58), где под приращением аргумента вдоль компоненты края понимается приращение выделенной ветви вдоль разомкнутой компоненты края. ►

Замечания. 1. Если в теореме 70 дополнительно предположить, что функция f аналитична в области D (т. е. не имеет там полюсов), то принцип аргумента упрощается и приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg} f(z)\big|_{\partial D} = N\,. \tag{28.61}$$

Таким образом, принцип аргумента дает информацию о количестве корней уравнения $f(z)=0$, лежащих в области D.

2. Величина $\operatorname{Arg} f(z)\big|_{\partial D}$ имеет смысл для любой непрерывной на ∂D функции, не обращающейся там в нуль (т. е. производная функция f' на ∂D может и не существовать). Принцип аргумента оказывается справедливым и в этом более общем случае. Доказательство оставляю читателю.

3. Теорема Руше, принцип сохранения области и их следствия

Теорема 71 (Руше). *Пусть $D\subset\widehat{\mathbb{C}}$ — область с кусочно-гладким краем ∂D, а функции f и g аналитичны в D, непрерывны в $D\sqcup\partial D$, и для всех $t\in\partial D$ выполняется неравенство $|f(t)|>|g(t)|$. Тогда функции f и $f+g$ имеют в области D одинаковое (притом конечное) число нулей.*

◄ Сначала установим конечность множества нулей функции f в области D. Предполагая, что это множество бесконечное, заключаем, что у него существует предельная точка t_0, принадлежащая множеству $D\sqcup\partial D$, которое компактно. Если предположить, что $t_0\in D$, то в силу теоремы 43 (единственности) должно быть $f(z)\equiv 0$, что противоречит условию теоремы. Если же предположить, что $t_0 \in \partial D$, то в силу непрерывности функции f должно быть $f(t_0) = 0$, что также противоречит условию теоремы.

Ряд $\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \ldots$ сходится в круге $|w| < 1$, и потому его сумма представляет собой однозначную аналитическую ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\,(1+w)$. Так как $\left|\frac{g(t)}{f(t)}\right| < 1$ при $t \in \partial D$, то в ряде имеем право произвести подстановку $w = \frac{g(t)}{f(t)}$. В результате подстановки получим функцию $t \longmapsto \ln\left[1 + \frac{g(t)}{f(t)}\right]$, которая непрерывна на ∂D как композиция непрерывных функций. Так как край ∂D — объединение замкнутых кривых, то

$$\ln\left[1 + \frac{g(t)}{f(t)}\right]\Bigg|_{\partial D} = 0\,. \tag{28.62}$$

Так как

$$\forall\, t \in \partial D \ : \quad f(t) + g(t) = f(t) \cdot \left[1 + \frac{g(t)}{f(t)}\right]\,,$$

то при надлежащем выборе ветвей аргумента, имеющих минимальное возможное число точек разрыва, будет иметь место тождество

$$\mathrm{Arg}\ [f(t) + g(t)] = \mathrm{Arg}\ f(t) + \arg\left[1 + \frac{g(t)}{f(t)}\right]\,.$$

Беря деленое на 2π приращение обеих частей этого равенства вдоль ∂D и учитывая (28.62), получим

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}\ [f(t) + g(t)]\Bigg|_{\partial D} = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Arg}\ f(t)\Bigg|_{\partial D}\,,$$

что в силу принципа аргумента в форме (28.61) означает равенство чисел нулей функций f и $f+g$ в области D. ▶

Следствие («основная теорема алгебры»). *Любой многочлен точной степени $n \in \mathbb{N}$ над полем $\mathbb{C}$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n нулей (с учетом кратностей).*

◀ Введем обозначение $P(z) := z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$ для многочлена точной степени n. Положим $f(z) := z^n$, $g(z) := c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$.

Так как $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{g(z)}{f(z)}=0$, то существует такое $R\in\mathbb{R}_+$, что на множестве $|t|\geqslant R$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{g(t)}{f(t)}\right|<1$, т. е. $|f(t)|>|g(t)|$. Применяя к этой ситуации теорему Руше, заключаем, что функции f и $f+g$ имеют в круге $|z|<R$ одинаковое число нулей. Так как эта ситуация сохраняется при всех достаточно больших R, то можно устремить R к $+\infty$, и мы получим, что f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей в $\mathbb{C}$. Осталось только заметить, что многочлен $f(z)=z^n$ имеет в $\mathbb{C}$ ровно n нулей (с учетом кратностей). ►

Теорема 72 (принцип сохранения области). *Если функция f аналитична в области D и отлична от тождественной постоянной, то образ $D^*=f(D)$ области D при отображении f является областью.*

◄ По определению область — открытое и связное множество. Так как аналитическая функция непрерывна (а при непрерывных отображениях связные множества переходят на связные), то множество D^* связно. Осталось только доказать его открытость.

Пусть $w_0\in D^*=f(D)$. Существует точка $z_0\in D$, такая, что $w_0=f(z_0)$. Так как нули аналитических функций изолированы, то существует настолько малое $r\in\mathbb{R}_+$, что $\{|z-z_0|\leqslant r\}\subset D$, а функция $f(z)-w_0$ имеет в этом круге единственный нуль (возможно, кратный) в точке $z=z_0$. Пусть γ — окружность $\{|t-z_0|=r\}$. Так как окружность γ — компакт, то ее образ $f(\gamma)$ — тоже компакт, который притом не содержит точку w_0, и потому расстояние ρ от точки w_0 до множества $f(\gamma)$ положительно. Покажем, что круг $\{|w-w_0|<\rho\}$ содержится в D^*. Это и будет означать, что точка w_0 — внутренняя точка множества D^*, и потому это множество открытое. С этой целью возьмем произвольную точку w^*, для которой $|w_0-w^*|<\rho$. При любом $t\in\gamma$ имеем $|f(t)-w_0|\geqslant\rho>|w_0-w^*|$. Поэтому в силу теоремы Руше функция

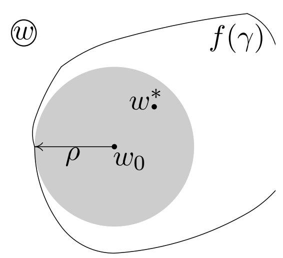

Рис. 23. К теореме 72

$$f(z)-w^*=(f(z)-w_0)+(w_0-w^*)$$

имеет в круге $\{|z - z_0| < r\}$ столько же нулей, сколько их имеет функция $f(z)-w_0$, т. е. по меньшей мере один нуль z^*. Иначе говоря, существует точка $z^* \in D$, в которой $f(z^*) = w^*$. Поэтому $\{|w - w_0| < \rho\} \subset \subset D^*$, и значит, множество D^* — открытое. ▶

Следствие 1 (принцип максимума модуля). *Если функция f аналитична в области D и отлична от тождественной постоянной, то функция $|f|$ не может достигать максимального значения во внутренних точках области D.*

◀ В силу принципа сохранения области множество $D^* := f(D)$ — область. Пусть $z_0 \in D$, тогда $w_0 := f(z_0) \in D^*$. Так как число $|w_0|$ равно расстоянию от начала координат до точки $w_0 \in D^*$, а D^* — область, то в ней существуют точки, которые находятся дальше от начала координат, чем точка $w_0 = f(z_0)$. Значит, функция $|f|$ не достигает максимума в точке z_0. ▶

Следствие 2 (принцип минимума модуля). *Если функция f аналитична в области D, отлична от тождественной постоянной и не имеет нулей в D, то функция $|f|$ не может достигать минимального значения во внутренних точках области D.*

◀ В силу принципа сохранения области множество $D^* := f(D)$ — область. Пусть $z_0 \in D$, тогда $w_0 := f(z_0) \in D^*$ и $w_0 \neq 0$. Так как число $|w_0|$ равно расстоянию от начала координат до точки $w_0 \in D^*$, а D^* — область, то в ней существуют точки, которые находятся ближе к началу координат, чем точка $w_0 = f(z_0)$. Значит, функция $|f|$ не достигает минимума в точке z_0. ▶

Замечание. Пусть функция f аналитична в области D, отлична от тождественной постоянной и непрерывна в области с краем $D \sqcup \partial D$. Так как область с краем — компакт, то по теореме Вейерштрасса о максимуме и минимуме непрерывная функция $|f|$ достигает в некоторой точке множества $D \sqcup \partial D$ своего максимального значения. В силу принципа максимума это максимальное значение не может достигаться в области D. Значит, оно достигается на краю ∂D.

Если дополнительно предположить, что функция f не имеет нулей в D, то те же соображения приводят к заключению, что функция $|f|$ достигает своего минимального значения на ∂D.

Глава 29

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Аналитическое продолжение произвольных функциональных элементов

1. Понятие аналитического продолжения, простейшие факты и примеры

Пусть на множестве $M \in \widehat{\mathbb{C}}$ задана функция $f\ :\ M \longrightarrow \mathbb{C}$.

Определение 39. *Говорят, что функция $F\ :\ D \longrightarrow \mathbb{C}$ является аналитическим продолжением функции f в область $D \supset M$, если F аналитична в D, и $F\big|_M = f$.*

Иногда вместо аналитического продолжения удобно рассматривать мероморфное продолжение, заданной функции в заданную область, которое определяется аналогично.

Определение 40. *Говорят, что функция $F\ :\ D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ является мероморфным продолжением функции f в область $D \supset M$, если F мероморфна в D, и $F\big|_M = f$.*

Очевидно, что аналитическое продолжение не всегда существует хотя бы потому, что аналитическая функция непрерывна, и значит, если $f\ :\ M \longrightarrow \mathbb{C}$ разрывна, то ее невозможно аналитически продолжить ни в какую область. Если аналитическое продолжение существует, то оно не всегда является единственным. Следующая теорема дает условия единственности аналитического продолжения.

Теорема 73. *Если $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — область, а $M \subset D$ — бесконечное множество, предельная точка которого лежит в D, то может существовать не более одного аналитического продолжения функции $f\ :\ M \longrightarrow \mathbb{C}$ в область D.*

◀ Предположим, что существует две аналитические в D функции F_1 и F_2, такие, что

$$F_1\big|_D = F_2\big|_D = f\ :\ M \longrightarrow \mathbb{C}\,.$$

Их разность $F := F_1 - F_2$ аналитична в D и обращается в нуль во всех точках бесконечного множества М, имеющего предельную точку, лежащую в области D. В силу свойства изолированности нулей аналитических функций должно быть $F = 0$, и, значит, $F_1 = F_2$. ►

Таким образом, во многих практически важных случаях, например, когда M — кривая или область, лежащая в D, аналитическое продолжение обладает свойством единственности.

Рассмотрим **примеры** аналитического продолжения.

1) Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ аналитична в $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\diagdown 0$. Разлагая ее в ряд Лорана в окрестности начала координат, получим

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots .$$

Продолжая ее в точку $z = 0$ по непрерывности, т. е. полагая $f(0) := 1$, получим функцию, аналитическую в $\mathbb{C}$.

2) Ряд $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \ldots$ сходится в круге $|z| < 1$. Суммируя его, получим

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \ldots \quad \text{при} \quad |z| < 1\,. \tag{29.1}$$

Так как левая часть аналитична в $\mathbb{C}\diagdown\{1\}$, то последнее равенство дает аналитическое продолжение суммы ряда в область $\mathbb{C}\diagdown\{1\}$. Доопределяя левую часть равенства (29.1) в точку ∞ по непрерывности (т. е. нулем), получим аналитическое продолжение в область $\widehat{\mathbb{C}}\diagdown\{1\}$. И, наконец, продолжая ее по непрерывности в точку $z = 1$ (т. е. полагая ее равной там ∞), получаем мероморфное продолжение суммы ряда $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \ldots$ на $\widehat{\mathbb{C}}$.

3) Ряды от вещественного переменного x

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\,, \\
\operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\,, \\
(1+x)^\mu &= 1 + \binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots
\end{aligned}$$

сходятся в интервале $(-1,\ 1)$ к соответствующим суммам. Заменяя вещественное переменное x на комплексное переменное z, получим аналитические продолжения сумм этих рядов в круг $|z| < 1$. Полученные таким образом равенства могут служить в качестве определений соответствующих аналитических функций комплексного переменного z

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots\,,$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$
$$(1+z)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} z + \binom{\mu}{2} z^2 + \ldots.$$

4) Криволинейные интегралы

$$\operatorname{Ln} z := \int\limits_1^z \frac{dt}{t} \quad \text{и} \quad \mathrm{Arcsin\ z} := \int\limits_0^{\mathrm{z}} \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{1-\mathrm{t}^2}}, \tag{29.2}$$

взятые по гладким кривым, лежащим в области аналитичности соответствующей подынтегральной функции, осуществляют аналитическое продолжение функций ln и arcsin, заданных первоначально на интервале $(-1,1)$, в плоскость переменного z. При достаточно малых деформациях путей интегрирования интегралы (29.2) не зависят от этих путей. Однако в общем случае пути, соединяющие пределы интегрирования можно выбирать так, что равенства (29.2) приведут к многозначным аналитическим функциям. Таким образом, мы сталкиваемся здесь с таким явлением, что при аналитическом продолжении первоначально однозначная аналитическая функция становится многозначной.

Теорема 74 (об аналитическом продолжении тождеств). *Пусть M — бесконечное множество, предельная точка которого лежит в области $D \supset M$, а функции $f_1, \ldots, f_n$ аналитичны в области D. Пусть $F(w_1, \ldots, w_n)$ — многочлен от $w_1, \ldots, w_n$ над полем $\mathbb{C}$, такой, что при всех $z \in M$ выполняется тождество $F[f_1(z), \ldots, f_n(z)] \equiv 0$. Тогда это тождество выполняется при всех $z \in D$.*

◀ Действительно, $F[f_1(z),\ \ldots,\ f_n(z)]$ аналитична в D как целая рациональная комбинация аналитических функций. Она тождественно равна нулю на множестве M, имеющем предельную точку в D. Отсюда в силу теоремы 73 заключаем, что

$$\forall z \in D \ :\ F[f_1(z),\ \ldots,\ f_n(z)] \equiv 0\,. \quad ▶$$

Замечание. Если, в частности, на M выполняется тождество

$$F[f(z),\ f'(z),\ \ldots,\ f^{(n)}(z)] \equiv 0\,,$$

то оно выполняется и на D.

Рассмотрим еще ряд **примеров** на аналитическое продолжение.

5) Ряды от вещественного переменного

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\,, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\,, \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots
\end{aligned}
$$

сходятся на всей числовой оси, а их суммы связаны многочисленными тождествами, например, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Заменяя в этих равенствах вещественное переменное x на комплексное переменное z, получим аналитические продолжения сумм этих рядов на $\mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\,, \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\,, \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\,.
\end{aligned}
$$

В силу теоремы 74 для комплексного переменного z выполняются все тождества, связывающие суммы этих рядов, например, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Далее, так как $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x + i \sin x = e^{ix}$, то по той же теореме 74 будет

$$
\forall z \in \mathbb{C} \ : \quad \cos z + i \sin z = e^{iz}\,.
$$

6) Гамма-функцию определим $\forall x \in \mathbb{R}_+$ следующим интегралом:

$$
\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt\,.
$$

Заменяя здесь вещественное переменное x на комплексное переменное z и дифференцируя по параметру z, получим интегралы

$$
\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt\,, \quad \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \ln t\, dt\,, \quad \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt\,, \dots\,.
$$

Применяя к ним признак Вейерштрасса равномерной сходимости, можно показать, что все они сходятся равномерно на компактах, лежащих в правой полуплоскости

$\{\operatorname{Re} z > 0\}$. В самом деле, полагая $z = x + iy$, имеем

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}(\ln t)^k dt\right| = \left|\int\limits_0^{+\infty} e^{(x+iy-1)\ln t}e^{-t}(\ln t)^k dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{(x-1)\ln t}e^{-t}(\ln t)^k dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^k dt\,, \quad (29.3)$$

а последний интеграл, как доказывалось в вещественном анализе, свойством равномерной сходимости на компактах обладает. Отсюда по теореме о дифференцируемости интегралов по параметру заключаем, что каждый следующий интеграл из (29.3) равен производной предыдущего. Поэтому функция

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \quad (29.4)$$

аналитична в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ и является аналитическим продолжением функции $\Gamma(x)$, заданной на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Далее, так как при $x > 0$ выполняется тождество $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, то по теореме 74 при $\operatorname{Re} z > 0$ имеем $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$. Отсюда вытекает следующее тождество:

$$\Gamma(z+n) = (z+n)\cdot(z+n-1)\cdot\ldots\cdot z\cdot\Gamma(z)\,, \quad (29.5)$$

справедливое при $\operatorname{Re} z > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Это последнее тождество можно использовать для мероморфного продолжения гамма-функции на всю плоскость $\mathbb{C}$. В самом деле, пусть $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, где $z \in \mathbb{C}$ и не является целым числом. Выберем $n \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы стало $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Тогда $\Gamma(z+n)$ можно определить интегралом, аналогичным (29.4), после чего из равенства (29.5) можно найти $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n)\cdot(z+n-1)\cdot\ldots\cdot z}\,.$$

Определенная так функция аналитична при $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, а при $\operatorname{Im} z > 0$ совпадает с $\Gamma(z)$. Таким образом, мы осуществили аналитическое продолжение гамма-функции в область $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ и даже мероморфное ее продолжение на $\mathbb{C}$.

И, наконец, отметим, что все тождества, которым удовлетворяет гамма-функция вещественного переменного, остаются справедливыми и для комплексного переменного. Например, формула дополнения

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

справедлива всюду, где она имеет смысл.

7) Приведем пример функции, аналитической в круге $|z| < 1$, которую невозможно аналитически продолжить ни в какую более широкую область. Рассмотрим функцию f, задаваемую в виде суммы следующего лакунарного[1] степенного ряда:

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2^n} + \ldots .$$

Здесь

$$c_k = \begin{cases} 1\,, & \text{если} \quad k = 2^n\,, \\ 0\,, & \text{если} \quad k \neq 2^n\,. \end{cases}$$

Поэтому $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{1} = 1$. Отсюда в силу формулы Коши — Адамара для радиуса сходимости $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}} = 1$ следует, что ряд сходится в круге $|z| < 1$.

Изучим поведение суммы этого ряда при $|z| \to 1$. При $x \in (0\,,\ 1)$ имеем

$$f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{2^n} + \ldots > 0\,.$$

Задавая произвольно $E \in \mathbb{R}_+$, положим $N = [E]$, где $[\ldots]$ означает целую часть. Тогда очевидно, что

$$f_N(x) := 1 + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots + x^{2^N} \to N + 1 \quad \text{при} \quad x \to 1\,,\ x < 1\,,$$

или

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in (1 - \delta\,,\, 1) \ : \ f_N(x) > N + 1 - \varepsilon\,.$$

Выбирая ε так, чтобы было $N + 1 - \varepsilon = [E] + 1 - \varepsilon > E$, имеем

$$\forall E \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \delta \in (0\,,\ 1) \quad \forall x \in (1 - \delta\,,\, 1) \ : \ f(x) > f_N(x) > E\,.$$

Это значит, что

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty\,.$$

Итак, точка $x = 1$ — неустранимая особая точка функции f, т. е. функцию f невозможно аналитически продолжить ни в какую область, содержащую точку $z = 1$. Далее, так как

$$f(z) \equiv z^2 + f(z^4)\,,$$

то неустранимыми особыми точками являются корни уравнения $z^2 = 1$, т. е. точки $z = \pm 1$. Далее, так как

$$f(z) \equiv z^2 + z^4 + f(z^4)\,,$$

то неустранимыми особыми точками являются корни уравнения $z^4 = 1$, т. е. точки $z = \pm 1$, $z = \pm i$. Продолжая этот процесс, заключаем, что неустранимыми особыми точками функции f являются корни всех уравнений $z^{2^n} = 1$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. А так как множество всех этих точек расположено плотно на окружности $|z| = 1$, то все точки окружности являются неустранимыми особыми точками.

[1] *Лакунарный* степенной ряд — ряд, в котором встречаются *лакуны* (пропуски) в том смысле, что присутствуют не все натуральные степени переменного z, а лишь некоторые.

2. Аналитическое продолжение через области и через кривые

Определение 41. *Пусть* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ — *функция, аналитическая в области* $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. *Пара* (D, f) *называется* (*аналитическим*) *элементом.*

Определение 42. *Говорят, что элементы* (D_1, f_1) *и* (D_2, f_2), *для которых* $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, *являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга через область* $\Delta \subset D_1 \cap D_2$, *если* $f_1\big|_\Delta = f_2\big|_\Delta$.

При этом на других компонентах пересечения $D_1 \cap D_2$ функции f_1 и f_2 могут и не совпадать. таким образом, при непосредственном аналитическом продолжении могут также возникать многозначные функции.

Определение 43. *Говорят, что элементы* (D, f) *и* (G, g) *являются аналитическим продолжением друг друга через области* $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$, *если существует последовательность элементов* $(D, f) = (D_0, f_0), (D_1, f_1), \ldots, (D_n, f_n) = (G, g)$, *такая, что*

$$\forall \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \ :\ \Delta_\nu \subset D_\nu \cap D_{\nu+1} \ \ \text{и} \ \ f_\nu\big|_{\Delta_\nu} = f_{\nu+1}\big|_{\Delta_\nu}.$$

Замечание. Понятие аналитического продолжения, о котором идет речь в определении 43, хотя и встречается, но с теоретической точки зрения является трудно обозримым. Поэтому о нем никаких теорем здесь не устанавливается. Более обозримым является понятие *аналитического продолжение через кривую*, о котором речь пойдет в остальной части этого пункта.

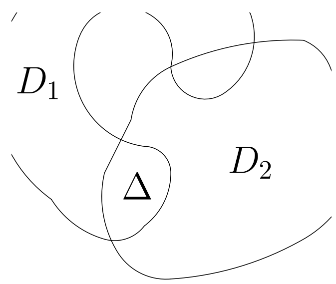

Рис. 24. К определению 42

Теорема 75 (об аналитическом продолжении через кривую). *Пусть* $D_1 \sqcup \partial D_1$ *и* $D_2 \sqcup \partial D_2$ — *области с кусочно-гладкими краями, а функции* $f_1 : D_1 \sqcup \partial D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad f_2 : D_1 \sqcup \partial D_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *аналитичны соответственно в областях* D_1, D_2 *и представимы там по интегральной формуле Коши. Предположим, что* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, *а пересечение* $\partial D_1 \cap \partial D_2$ *содержит дугу* l, *гомеоморфную интервалу* $(0\,,\,1)$ *числовой оси. Если*

$$f_1(z) \equiv f_2(z) \qquad \text{для всех} \qquad z \in l\,, \tag{29.6}$$

то функция $F\,:\,D \longrightarrow \mathbb{C}$, *определяемая равенством*

$$F(z) := \begin{cases} f_1(z)\,, & z \in D_1 \sqcup \partial D_1\,, \\ f_2(z)\,, & z \in D_2 \sqcup \partial D_2 \end{cases} \tag{29.7}$$

оказывается аналитической в области $D := D_1 \sqcup l \sqcup D_2$.

◀ Пусть $z \in D_1 \sqcup D_2$. Применяя интегральную формулу Коши, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} f_1(z) & \text{при} \quad z \in D_1\,, \\ 0 & \text{при} \quad z \in D_2\,; \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z \in D_1\,, \\ f_2(z) & \text{при} \quad z \in D_2\,. \end{cases}$$

Складывая эти равенства, учитывая определение (29.7) и то, что интегралы по дуге l взаимно уничтожаются, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{при} \quad z \in D_1\,, \\ f_2(z) & \text{при} \quad z \in D_2\,. \end{cases} \tag{29.8}$$

Таким образом, функция F, определенная равенством (29.7), представлена в области D интегралом Коши (29.8). Отсюда на основании теоремы 32 заключаем, что F аналитична в D. ▶

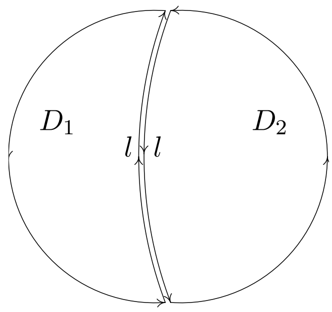

Рис. 25. К теореме 75

Замечание. Обратим внимание читателя на смысл теоремы 75. В условии этой теоремы дано, что функция F, определенная равенством (29.7), *непрерывна* на дуге l, а в ее заключении утверждается, что она *аналитична* на дуге l.

Теорема 76 (принцип симметрии Римана — Шварца). *Пусть D — такая область, что ее край содержит дугу l некоторой $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности. Пусть функция f аналитична в D, непрерывно продолжима на дугу l, а образ $L := f(l)$ дуги l также является дугой некоторой $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности. Тогда функцию f можно аналитически продолжить из области D через дугу l в область D^*, симметричную области D относительно $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности l, по закону*

$$f(z) := \left(f(z^*)\right)^* , \quad \text{где} \quad z \in D^* , \tag{29.9}$$

а индекс $*$ означает отображение симметрии относительно соответствующей $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности.

◀ Рассмотрим сначала тот частный случай, когда обе дуги l и L представляют собой отрезки вещественной оси, и что стандартная ориентация дуги l (как части края области D) совпадает с положительным направлением вещественной оси. В этом частном случае отображение симметрии сводится к операции комплексного сопряжения $z \longmapsto \overline{z}$, а равенство (29.9) приобретает вблизи дуги l следующий вид:

$$f(z) := \overline{f(\overline{z})} , \quad \text{где} \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0 . \tag{29.10}$$

Пусть $x \in l$. Если $z \to x$ снизу, то $\overline{z} \to x$ сверху, а так как $\operatorname{Im} f(x) \equiv$ $\equiv 0$, то равенство (29.6) приобретает вид очевидного тождества $f(x) \equiv f(x)$ и потому выполняется.

Покажем теперь, что из аналитичности функции $z \longmapsto f(z)$ следует аналитичность функции $z \longmapsto \overline{f(\overline{z})}$. С этой целью станем вычислять ее производную

$$\frac{d}{dz}\overline{f(\overline{z})} := \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} =$$
$$= \overline{\left(\lim_{\overline{h}\to 0} \frac{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} = \overline{f'(\overline{z})} ,$$

и тем самым аналитичность продолженной функции (29.9) установлена. Отсюда на основании теоремы 75 заключаем, что продолжение (29.9) — аналитическое.

Пусть теперь l и L — дуги произвольных $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей. Применяя следствие 1 из теоремы 18, заключаем, что существует дробно-линейное отображение $z = U(\zeta)$, реализующее конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$-круг, в границу которого входит дуга l. Аналогично, существует дробно-линейное отображение V, реализующее конформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}}$-круга, в границу которого входит дуга L, на верхнюю полуплоскость. Для композиции $V \circ f \circ U$ выполнены все условия уже доказанной части теоремы. Поэтому ее аналитическое продолжение в симметричную область определяется равенством (29.9), имеющем в данном случае следующий вид:

$$V\left(f\left(U(\zeta)\right)\right) := \overline{V\left(f\left(U(\overline{\zeta})\right)\right)}\,. \tag{29.11}$$

Вводя обозначение $z := U(\zeta)$ и применяя принцип сохранения симметричных пар точек при отображении U, заключаем, что $U(\overline{\zeta}) = z^*$, где индекс $*$ означает симметрию относительно дуги l. Тогда равенство (29.11) приобретает вид

$$V\left(f(z)\right) := \overline{V\left(f(z^*)\right)}\,.$$

Применяя теперь к отображению V тот же принцип, из последнего равенства получаем равенство (29.9), где внешний индекс $*$ означает симметрию относительно дуги L. ►

§ 2. Общие вопросы теории аналитического продолжения

1. Аналитическое продолжение канонических элементов (ростков)

С теоретической точки зрения наиболее удобно иметь дело с так называемыми *каноническими элементами* или *ростками*, определяемыми ниже.

Определение 44. *Каноническим элементом с центром в точке* $a \in \mathbb{C}$ *называется пара* $\mathcal{F} = (U_r(a)\,;\, f_a)$, *где* $f_a(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ *— сумма степенного ряда с центром в точке* a, *а* $U_r(a) = \{|z-a| < r\}$ *— круг сходимости этого ряда.*

Для простоты мы ограничимся только элементами с центрами в конечных точках, и условимся считать, что радиусы сходимости всех соответствующих степенных рядов конечны и отличны от нуля.

В случае канонических элементов понятие аналитического продолжения и аналитического продолжения через области упрощается за счет того, что пересечение любых двух кругов либо пусто, либо связно.

Лемма 1. *Если канонические элементы* $\mathcal{F} = (U_{r_a}(a)\,;\, f_a)$ *и* $\mathcal{G} = (U_{r_b}(b)\,;\,, f_g)$ *являются непосредственным аналитическим продолжением один другого, то* $|r_a - r_b| \leqslant |a-b|$.

◀ В самом деле, пересечение $\{|z-a| = r_a\} \cap \{|z-b| = r_b\}$ не пусто, иначе радиус сходимости одного из рядов можно было бы увеличить. Но тогда в силу неравенства треугольника имеем $|r_a - r_b| \leqslant |a-b|$ (см. рис. 26). ▶

Обозначая символом $\mathcal{F} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{G}$ тот факт, что элементы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга, введем на множестве всех канонических элементов топологию следующим образом.

Определение 45. *Открытым кругом радиуса* $\varepsilon \in (0\,,\, r_a]$ *с центром в точке* $\mathcal{F}_a = (U_{r_a}(a)\,;\, f_a(z))$ *назовем множество*

$$K_\varepsilon(\mathcal{F}_a) := \left\{ \mathcal{F}_\zeta \;\middle|\; |\zeta - a| < \varepsilon \quad \textit{и} \quad \mathcal{F}_\zeta \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_a \right\}.$$

Покажем, что всевозможные открытые круги образуют в совокупности базис некоторой топологии на множестве $\mathbb{T}$ всех канонических элементов.

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{F}_a = (U_{r_a}(a)\,;\, f_a(z))$ *— канонический элемент с центром в точке* a. *При любом* $\varepsilon \in (0, r]$ *отображение круга* $K_\varepsilon(\mathcal{F}_a)$ *на евклидов круг* $\{|\zeta - a| < \varepsilon\}$, *при котором каждому элементу сопоставляется его центр, является биективным.*

◀ Сопоставление $\mathcal{F}_\zeta \longmapsto \zeta$ является отображением круга $K_\varepsilon(\mathcal{F}_a)$ на евклидов круг $\{|\zeta - a| < \varepsilon\}$. Обратно, беря ζ так, чтобы было $|\zeta - a| < \varepsilon$, разложим функцию $f_a(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-\zeta)$

$$f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_a^{(k)}(\zeta)}{k!} \cdot (z-\zeta)^k = f_\zeta(z)\,.$$

Пусть r_ζ — радиус сходимости этого ряда. Тогда $\mathcal{F}_\zeta := (U_{r_\zeta}(\zeta)\,;\, f_\zeta(z))$ — элемент с центром в точке ζ, такой, что $\mathcal{F}_\zeta$ •—• $\mathcal{F}_a$. ▶

Определение 46. *Непустое множество канонических элементов назовем открытым, если его можно представить в виде некоторого объединения множеств, являющихся открытыми кругами в смысле определения 45.*

Лемма 3. *Множество $\mathbb{T}$ всех канонических элементов — топологическое пространство.*

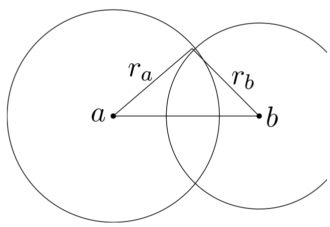

Рис. 26. К лемме 1

◀ Действительно, любой элемент $\mathcal{F}_a = (U_{r_a}(a)\,;\, f_a(z))$ является центром некоторого круга $K_\varepsilon(\mathcal{F}_a) \subset \mathbb{T}$. Значит, $\mathbb{T}$ является объединением открытых кругов и потому открыто в смысле определения 46. Множество $\varnothing$ считается открытым во всякой топологии. Выполнение остальных аксиом топологического пространства предоставляется читателю. ▶

Все виды аналитического продолжения, которые встречались ранее, имеют смысл для любых элементов, в том числе и для канонических. Однако для канонических элементов важную роль играет понятие *аналитического продолжения вдоль пути*. Чтобы это понятие определить, напомним, что путь в $\mathbb{C}$ — это непрерывное отображение $\gamma\,:\,[0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{C}$. Точки $a = \gamma(0)$ и $b = \gamma(1)$ называются соответственно начальной и концевой точками пути γ.

Определение 47. *Пусть $\gamma\ :\ [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ — путь с началом $a = \gamma(0)$ и концом $b = \gamma(1)$. Аналитическим продолжением канонического элемента $\mathcal{F}_a = (U_{r_a}(a); f_a(z))$ вдоль пути γ называется такое непрерывное отображение $t \longmapsto \mathcal{F}_t$ отрезка $[0\,,\,1]$ в топологическое пространство $\mathbb{T}$, что центр элемента $\mathcal{F}_t$ лежит в точке*

$\gamma(t)$, *и* $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_a$.

Разумеется, аналитическое продолжение данного элемента вдоль данного пути может вообще не существовать. Предполагая, что оно существует, обнаруживаем следующие интересные свойства.

Теорема 77. *Пусть* $t \longmapsto \mathcal{F}_t$ *— аналитическое продолжение элемента* $\mathcal{F}_a$ *вдоль пути* $\gamma\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{C}$. *Радиус* $r(t)$ *элемента* $\mathcal{F}_t = (U_{r(t)}(\gamma(t)); f_{\gamma(t)}(z))$ *непрерывно зависит от переменного* $t \in [0\,,\,1]$ *, и, значит,*

$$\exists m \in \mathbb{R}_+\ \ \forall t \in [0\,,\,1]\ :\ r(t) \geqslant m\,. \tag{29.12}$$

◀ Выберем точки t_1 и t_2 настолько близкими, чтобы было F_{t_1} •—• •—• F_{t_2}. Тогда по лемме 1 будем иметь $|r(t_1) - r(t_2)| \leqslant |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)|$. Отсюда и из непрерывности функции $\gamma(t)$ следует непрерывность функции $r(t)$. Далее, так как функция $t \longmapsto r(t)$ непрерывна на отрезке $[0\,,\,1]$ и положительна, то в некоторой точке она достигает своего минимума $m > 0$, и поэтому выполняется неравенство (29.12). ▶

Теорема 78. *Если канонические элементы* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{G}$ *могут быть получены один из другого аналитическим продолжением вдоль пути, то они могут быть получены один из другого и аналитическим продолжением через области.*

◀ Пусть $\gamma\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ — путь, а $t \longmapsto \mathcal{F}_t$ — аналитическое продолжение вдоль пути γ, такое, что $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, а $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}$. Так как функция γ непрерывна на отрезке $[0\,,\,1]$, то по теореме Кантора имеем

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+\ \ \forall\, t',\ t'' \in [0\,,\,1]\ :\\ |t' - t''| \leqslant \delta \Longrightarrow |\gamma(t') - \gamma(t'')| \leqslant \varepsilon\,. \tag{29.13}$$

Обозначая $\mathcal{F}_t = \big(U_{r(t)}(\gamma(t));\ f_{\gamma(t)}(z)\big)$, положим $\varepsilon := m = \min\limits_{[0\,,\,1]} r(t) > 0$, что возможно в силу теоремы 77. Возьмем разбиение

$$0 = t_1 < t_1 < \ldots < t_n = 1\,,$$

мелкость которого меньше числа δ из (29.13). Обозначим $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_{t_k}$. Тогда в последовательности элементов

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0,\ \mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n = \mathcal{G}$$

любые два соседних имеют пересекающиеся круги сходимости и обладают свойством $\mathcal{F}_k \bullet\!\!-\!\!\bullet\, \mathcal{F}_{k+1}$ (т. е. аналитическое продолжение вдоль частичного пути $\gamma_k \ :\ [t_k\,,\, t_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{C}$ сводится к непосредственному аналитическому продолжению). ▶

Теорема 79 (единственность). *Пусть $t \longmapsto \mathcal{F}_t$ и $t \longmapsto \mathcal{G}_t$ — два аналитических продолжения вдоль пути $\gamma\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, такие, что $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$. Тогда $\forall t \in [0\,,\,1]\ :\ \mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$. В частности, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}_1$.*

◀ Обозначим

$$\mathcal{F}_t = \big(U_{r(t)}(\gamma(t));\ f_{\gamma(t)}(z)\big) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_t = \big(U_{\rho(t)}(\gamma(t));\ g_{\gamma(t)}(z)\big)\ ,$$

и пусть $\inf\limits_{[0,1]} r(t) = m > 0$, $\inf\limits_{[0,1]} \rho(t) = \mu > 0$ — положительные числа, существование которых установлено в теореме 77. Положим в (29.13) $\varepsilon := \min\{m\,,\,\mu\}$, и пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — разбиение, мелкость которого меньше δ из (29.13). Тогда получим две последовательности элементов

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{t_0}\,,\, \mathcal{F}_{t_1}\,,\, \ldots\,,\, \mathcal{F}_{t_n} = \mathcal{F}_1 \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_{t_0}\,,\, \mathcal{G}_{t_1}\,,\, \ldots\,,\, \mathcal{G}_{t_n} = \mathcal{G}_1\,.$$

Центры элементов с одинаковыми номерами совпадают, а $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$ по условию. Отсюда в силу теоремы единственности вытекает, что $\mathcal{F}_{t_k} = \mathcal{G}_{t_k}$ для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. В частности, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}_1$. ▶

Определение 48. *Два пути $\gamma_0\,,\ \gamma_1\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow D$ с общими концами $a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ называются гомотопными в области D, если существует непрерывное отображение $\gamma(s\,,\,t)\ :\ [0\,,\,1] \times [0\,,\,1] \longrightarrow D$ со свойствами*

(a) $\gamma(0\,,\,t) \equiv \gamma_0(t),\ \gamma(1\,,\,t) \equiv \gamma_(t)$*;*

(b) $\gamma(s\,,\,0) \equiv a,\ \gamma(s\,,\,1) \equiv b$*.*

Теорема 80 (основная). *Предположим, что пути γ_0 и γ_1 с общими концами гомотопны в области $D \subset \mathbb{C}$, и пусть*

$$\gamma_s(t) = \gamma(s,\ t)\ :\ [0\,,\,1] \times [0\,,\,1] \longrightarrow D$$

— гомотопия. Предположим, что $\forall s \in [0\,,\,1]$ канонический элемент $\mathcal{F} = \big(U_{r(a)}(a)\,;\, f_a(z)\big)$ допускает аналитическое продолжение вдоль пути $\gamma_s\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow D$. Тогда в результате аналитического продолжения элемента $\mathcal{F}$ вдоль путей γ_0 и γ_1 получим один и тот же элемент $\mathcal{G}$.

◄ Через $\mathcal{F}_t^s = \mathcal{F}(s,\ t)$ обозначим элемент с центром $\gamma_s(t) = \gamma(s\,,\,t)$ радиуса $r_s(t) = r(s\,,\,t)$, такой, что при каждом фиксированном $s \in [0\,,\,1]$ отображение $t \longmapsto \mathcal{F}_t^s$ есть аналитическое продолжение вдоль пути γ_s. Фиксируя $s_0 \in [0\,,\,1]$, обозначим $\inf\limits_{[0,1]} r_{s_0}(t) = m_0 > 0$ и, пользуясь теоремой Кантора о равномерной непрерывности, найдем такое $\delta > 0$, что

$$\left.\begin{array}{l} |s' - s''| \leqslant \delta \\ |t' - t''| \leqslant \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |\gamma(s'\,,\,t') - \gamma(s''\,,\,t'')| < \frac{m_0}{2}\,. \qquad (29.14)$$

Взяв произвольное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$, мелкость которого меньше δ, на основании теоремы 78 будем иметь

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0^{s_0} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_1}^{s_0} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_2}^{s_0} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_{n-1}}^{s_0} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_1^{s_0}\,. \qquad (29.15)$$

Центр элемента $\mathcal{F}_{t_k}^{s_0}$ находится в точке $\gamma(s_0\,,\,t_k)$, радиус его меньше m_0, а расстояние между центрами соседних элементов меньше $\frac{m_0}{2}$ в силу (29.14). Значит, $\gamma_{s_0}([t_k,\ t_{k+1}]) \subset U_{r_{s_0}(t_k)}(\gamma_{s_0}(t_k))$, откуда и вытекают соотношения (29.15).

Возьмем теперь произвольное $s \in [0\,,\,1]$ так, чтобы было $|s - s_0| \leqslant \delta$, и аналогично предыдущему получим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0^{s} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_1}^{s} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_2}^{s} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_{n-1}}^{s} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_1^{s}\,. \qquad (29.16)$$

Из (29.14) следует, что при $k < n$ будет $\gamma([s_0\,,\,s] \times [t_k\,,\,t_{k+1}]) \subset U_{r_{s_0}(t_k)}(\gamma_{s_0}(t_k))$ и, значит, $\mathcal{F}_{t_{k+1}}^{s} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_k}^{s_0}$

Так как $|\gamma(s\,,\,t_{k+1}) - \gamma(s_0\,,\,t_k)| < \dfrac{m_0}{2}$, и $r_{s_0}(t_k) \geqslant m_0$, то $r_s(t_{k+1}) > \dfrac{m_0}{2}$. Но $r_s(t_0) > \dfrac{m_0}{2}$ по условию. Таким образом, $r_s(t_k) > \dfrac{m_0}{2}$ при всех $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$. Но тогда

$$\gamma_s([t_k\,,\,t_{k+1}]) \subset U_{r_s(t_k)}\left(\gamma_s(t_k)\right)\,,$$

т. е. $\mathcal{F}_{t_k}^{s_0} \bullet\!\!-\!\!\bullet \mathcal{F}_{t_{k+1}}^{s}$. Покажем, что имеет место следующая диаграмма непосредственных аналитических продолжений:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \mathcal{F}_0^{s_0} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_{t_1}^{s_0} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_{t_2}^{s_0} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \ldots & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_{t_{n-1}}^{s_0} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_1^{s_0} & \\
\mathcal{F} & \| & \searrow & \updownarrow & \searrow & \updownarrow & \searrow & \ldots & \searrow & \updownarrow & \searrow & \| & \mathcal{G} \\
 & \mathcal{F}_0^{s} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_{t_1}^{s} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_{t_2}^{s} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \ldots & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_{t_{n-1}}^{s} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \mathcal{F}_1^{s} &
\end{array}
$$

Действительно, все «горизонтальные» и «диагональные» отношения уже обоснованы. Для обоснования «вертикальных» отношений учтем, что $\mathcal{F}_0^{s_0} = \mathcal{F}_0^{s} = \mathcal{F}$. Таким образом, элементы $\mathcal{F}_{t_1}^{s_0}$ и $\mathcal{F}_{t_1}^{s}$ являются непосредственными аналитическим продолжениями одного и того же элемента, и их круги сходимости пресекаются. Отсюда следует, что $\mathcal{F}_{t_1}^{s_0} \bullet\!-\!\bullet\ \mathcal{F}_{t_1}^{s}$. Рассуждая аналогично, заключаем, что справедливы все «вертикальные» отношения. В частности, $\mathcal{F}_1^{s_0} \bullet\!-\!\bullet\ \mathcal{F}_1^{s}$, а так как центры этих элементов совпадают, то $\mathcal{F}_1^{s_0} = \mathcal{F}_1^{s}$. Таким образом, функция $s \longmapsto \mathcal{F}_1^{s}$ локально постоянна, в частности, непрерывна. Так как отрезок $[0\,,\,1]$ связен, то функция $s \longmapsto \mathcal{F}_1^{s}$ постоянна на $[0\,,\,1]$. В частности, $\mathcal{F}_1^{0} = \mathcal{F}_1^{1} = \mathcal{G}$. ▶

Определение 49. *Аналитические элементы* $(D\,,\,f)$ *и* $(G\,,\,h)$ *называются эквивалентными в точке* $a \in D \cap G$, *если существует такая окрестность* U *точки* a, *что* $U \subset D \cap G$, *и* $f\big|_U = g\big|_U$. *Ростком*[2] *аналитической функции в точке* a *называется класс эквивалентности элементов по отношению к введенному отношению эквивалентности.*

Замечания. 1. По определению росток в точке a содержит все эквивалентные между собой элементы, в том числе и канонический. Обратно, любой элемент из ростка (в том числе и канонический) однозначно определяет росток. Таким образом, между каноническими элементами и аналитическими ростками существует естественная биекция. Поэтому во всех определениях, леммах и теоремах этого пункта слова «канонический элемент» можно было бы заменить словами «аналитический росток».

2. Понятие ростка бывает удобно использовать при реальном осуществлении аналитического продолжения. Например, при аналитическом продолжении данного ростка в качестве исходного элемента не обязательно брать канонический

[2]Очевидно происхождение термина «росток»: это тот предмет, из которого с помощью всевозможных аналитических продолжений вырастает «дерево» полной аналитической функции.

элемент из ростка; гораздо практичнее взять тот его элемент, который наиболее удобно использовать в данном контексте. Покажем это на примере.

Пример. Рассмотрим аналитическое продолжение вдоль семейства гомотопных путей элемента $\mathcal{F} = (U\,,\,f)$, где

$$U = \left\{ z = re^{i\varphi} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}_+\,,\; -\pi < \varphi < \pi \right\}\,,$$

а f — аналитическая в U функция, определяемая равенствами $f(z) = \sqrt{z}$, $f(1) = 1$.

В качестве путей возьмем верхнюю и нижнюю полуокружности, т. е.

$$\gamma_0(t) = e^{\pi i t}\,,\; 0 \leqslant t \leqslant 1\,, \quad \text{и} \quad \gamma_1(t) = e^{-\pi i t}\,,\; 0 \leqslant t \leqslant 1\,.$$

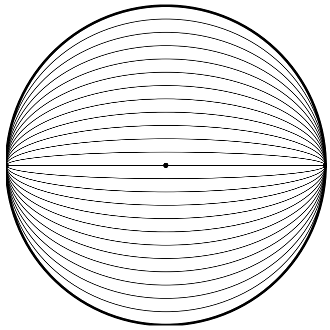

Рис. 27. Гомотопия полуокружностей

Они гомотопны, поскольку между ними есть гомотопия (см. рис. 27):

$$\gamma_s(t) = \cos \pi t + i(1-2s)\cdot \sin \pi t\,,\; (s\,,\,t) \in [0,1]\times[0,1]\,.$$

Функцию f можно представить в виде

$$f(z) = e^{\frac{1}{2}\ln z} = \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}\right)\,,$$

где путь интегрирования лежит в области U. Поскольку величина интеграла не зависит от пути, а область его сходимости может зависеть от пути, то аналитическое продолжение данного элемента можно найти, выбирая специальным образом путь интегрирования. Поэтому результат аналитического продолжения данного элемента по пути γ_0 можно представить в виде

$$f_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^z \frac{d\zeta}{\zeta}\right) = i\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^z \frac{d\zeta}{\zeta}\right)\,,$$

где путь интегрирования лежит в области $\left\{ z = re^{i\varphi} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}_+\,,\; 0 < \varphi < 2\pi \right\}$. Аналогично, результат аналитического продолжения данного элемента по пути γ_1 можно представить в виде

$$f_{-1}(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^z \frac{d\zeta}{\zeta}\right) = -i\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^z \frac{d\zeta}{\zeta}\right)\,,$$

где путь интегрирования лежит в области $\left\{ z = re^{i\varphi} \;\middle|\; r \in \mathbb{R}_+\,,\; 0 < \varphi < 2\pi \right\}$.

Таким образом, в результате аналитического продолжения вдоль путей γ_0 и γ_1 получились различные элементы $(f_{-1}(z) = -f_1(z))$, несмотря на то, что пути γ_0 и γ_1 гомотопны. Полученный результат не противоречит теореме 80, так как для данного элемента выполнены не все условия. Именно, элемент $\mathcal{F}$ невозможно аналитически продолжить вдоль пути $\gamma_{\frac{1}{2}}(t) = \cos \pi t\,,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$ (из семейства гомотопных путей), так как этот путь проходит через точку $z = 0$, в которой функция $\sqrt{z}$ имеет неустранимую особую точку.

2. Полные аналитические функции и римановы поверхности

Здесь будем изучать объекты, которые возникают при всевозможных аналитических продолжениях заданного аналитического ростка (или, что равносильно, канонического элемента) $\mathcal{F}_0$.

Определение 50. *Аналитической конфигурацией, порожденной ростком $\mathcal{F}_0$, условимся называть множество $\mathbb{T}(\mathcal{F}_0)$ всех ростков, которые можно получить в результате аналитического продолжения ростка $\mathcal{F}_0$ вдоль всевозможных путей.*

Лемма 1. *Объединение кругов сходимости всех канонических элементов $\mathcal{F} = (U_{\mathcal{F}}\,,\, f) \in \mathbb{T}(\mathcal{F}_0)$ есть область.*

◀ Обозначая $D := \bigcup\limits_{\mathcal{F}\in\mathbb{T}(\mathcal{F}_{\prime})} U_{\mathcal{F}}$, видим, что D открыто как объединение некоторого семейства открытых кругов. Осталось доказать, что D связно. С этой целью обозначим $z_0 \in D$ — центр элемента $\mathcal{F}_0$, и пусть $z_1\,,\, z_2 \in D$. Тогда $z_1\,,\, z_2$ — центры некоторых элементов $\mathcal{F}_1\,,\, \mathcal{F}_2 \in \mathbb{T}(\mathcal{F}_0)$. По определению 50 существуют пути γ_1 и γ_2 в $\mathbb{C}$, такие, что $\mathcal{F}_1$ есть результат аналитического продолжения элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль пути γ_1, а $\mathcal{F}_2$ — результат аналитического продолжения того же элемента вдоль пути γ_2. Но тогда γ_1 и γ_2 — пути в D, так как $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ — центры некоторых элементов при любом $t \in [0\,,\,1]$. Композиция $\gamma_2 * \gamma_1^{-1}$ — путь в D, соединяющий z_1 и z_2. Значит, множество D линейно связное и поэтому связное. ▶

Определение 51. *Полной аналитической функцией, задаваемой каноническим элементом* $\mathcal{F}_0$, *называется отображение* $z \longmapsto A(z)$, *которое каждому* $z \in D$, *где* D *— область из леммы 1, ставит в соответствие множество*

$$A(z) := \left\{ f_z(z) \;\middle|\; (U_z\,,\, f_z) \in \mathbb{T}(\mathcal{F}_0) \right\}\,, \quad \textit{где} \quad z \textit{ — центр круга } U_z\,.$$

Так как множество $A(z)$ может содержать более одного элемента, то полную аналитическую функцию можно рассматривать как числовую функцию, но только *многозначную.* Однако, понятие аналитичности определялось только для однозначных функций, поэтому возникает проблема, смысл которой заключается в том, чтобы сохранить у полной аналитической функции свойство однозначности. Для решения этой проблемы есть два пути:

(a) выделение однозначных ветвей;

(b) построение римановых поверхностей.

Рассмотрим сначала первый из них.

Определение 52. *Ветвью полной аналитической функции* $z \longmapsto A(z)$, $z \in D$, *называется такая однозначная аналитическая функция* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, *что* $G \subset D$, *а* $f(z) \in A(z)$. *Иначе говоря, ветвь полной аналитической функции — это произвольный элемент, который ее порождает.*

Возникает вопрос об условиях существования ветвей полных аналитических функций. Для ответа на этот используется следующая теорема.

Теорема 81 (о монодромии). *Если область* G *односвязна, а элемент* $(U\,,\, f)$, $U \subset G$, *допускает аналитическое продолжение по любому пути* $\gamma : [0\,,\,1] \longrightarrow G$, *то существует однозначная аналитическая функция* $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$, *такая, что* $F\big|_U = f$.

◀ Пусть $a \in G$ — центр элемента $(U\,,\, f)$, $z \in G$ — произвольная точка, а $\gamma : [0\,,\,1] \longrightarrow G$ — такой путь, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = z$. По условию элемент $(U\,,\, f)$ допускает аналитическое продолжение вдоль пути γ. Пусть в результате возникает элемент $(V\,,\, F)$ с центром в точке z. По теореме 80 этот элемент не меняется при гомотопных деформации пути γ. Так как область G односвязна, то в ней любые два пути с общими концами гомотопны. Значит, элемент (V, F) зависит только от точки z, поэтому есть отображение $z \longmapsto F(z)$, аналитически зависящее от z. Если $z \in U$, то по тем же соображениям будет $F(z) = f(z)$. ▶

Замечание. Слово «монодромия» переводится на русский язык как «однозначность». Теорема 81 гарантирует существование однозначных аналитических ветвей полной аналитической функции $z \longmapsto A(z)$, $z \in D$.Чтобы получить такую ветвь, надо выделить односвязную подобласть $G \subset D$, в которой некоторый элемент данной конфигурации допускает аналитическое продолжение по любому пути.

Примеры. 1) В круге $|z-1| < 1$ рассмотрим аналитическую функцию

$$\ln z = \ln[1 + (z-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k} = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Из интегрального представления видно, что данный элемент допускает аналитическое продолжение по любому пути, лежащему в двусвязной области $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\diagdown 0$. Так возникает полная аналитическая функция $\mathrm{Ln}\ z$ с областью определения $\mathbb{C}^*$. Применяя теорему о монодромии, заключаем, что однозначная ветвь функции $\mathrm{Ln}\, z$ существует в любой односвязной области $G \subset \mathbb{C}^*$. Положим, например,

$$G = \left\{ re^{i\varphi} \mid 0 < r < +\infty\,,\, |\varphi| < \pi \right\}\,.$$

Тогда ветвь выделяется следующим образом

$$\ln z = \int\limits_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^{e^{i\varphi}} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} \frac{d\zeta}{\zeta} == \int\limits_0^{\varphi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} + \int\limits_1^r \frac{dt}{t} = \ln r + i\varphi\,.$$

Так как φ можно задавать с точностью до слагаемого $2k\pi$, где k — любое целое число, то полная аналитическая функция $\mathrm{Ln}\ z$ — бесконечнозначная, и все ее значения содержатся в формуле

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad \text{где} \quad z = re^{i\varphi}\,,\, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,.$$

2) При любом фиксированном $\alpha \in \mathbb{C}\diagdown\mathbb{Z}$ в круге $|z-1| < 1$ элемент степенной функции можно задать равенством

$$z^\alpha := e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}\,.$$

Из этого равенства видно, что полная аналитическая функция z^a определена в области $\mathbb{C}\diagdown 0$, а ее однозначные ветви существуют в любой односвязной области $G \subset \mathbb{C}\diagdown 0$. Полагая, в частности,

$$G = \{re^{i\varphi} \mid 0 < r < +\infty;\ |\varphi| < \pi\}\,,$$

имеем

$$z^\alpha = e^{\alpha[\ln r + i(\varphi + 2k\pi)]}, \; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Каждому фиксированному k отвечает однозначная ветвь этой функции. Если $\alpha = 1/n$, то имеем

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot(\varphi+2k\pi)/n}\,, \; k \in \mathbb{Z}\,.$$

В этом случае имеем всего n различных однозначных ветвей, которые получаются, например, при $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$.

Рассмотрим теперь вопрос о построении римановой поверхности, соответствующей полной аналитической функции.

Определение 53. *Абстрактной римановой поверхностью* (*по Вейлю*[3]) *называется двумерное многообразие, снабженное аналитической* (*конформной*) *структурой.*

Напомним, что двумерное многообразие — это связное топологическое пространство $\mathfrak{R}$, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная открытому евклидову кругу. Структурой называется класс эквивалентных атласов, т. е. для задания структуры достаточно задать какой-нибудь атлас. *Атласом* называется множество карт $\big\{(U_\alpha\,,\,\varphi_\alpha) \;\big|\; \alpha \in I\big\}$, где U_α образуют открытое покрытие поверхности, т. е. $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha \supset \mathfrak{R}$, а $\varphi_\alpha \,:\, U_\alpha \longrightarrow \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$ — гомеоморфизмы. Атлас называется *аналитическим*, если все соотношения соседства (замены карт) $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ являются конформными гомеоморфизмами.

Определение 54. *Пусть* $\mathfrak{R}$ — *риманова поверхность. Функция* $f \,:\, \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *называется аналитической на* $\mathfrak{R}$, *если* $\forall \alpha \in I$ *функция* $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *комплексного переменного аналитична.*

Так как

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = \left(f \circ \varphi_\alpha^{-1}\right) \circ \left(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta\right)\,,$$

а композиция аналитических функций аналитична, то свойство функции быть аналитической не зависит от выбора локальных координат.

Определение 55. *Римановой поверхностью полной аналитической функции, задаваемой элементом* $\mathcal{F}_0$, *называется аналитическая конфигурация* $\mathfrak{R} := \mathbb{T}(\mathcal{F}_0)$, *снабженная топологией пространства* $\mathbb{T}$ *канонических элементов.*

[3] *Вейль* Герман (1885—1955) — немецкий математик, давший первое (1913 г.) строгое определение понятия римановой поверхности.

Теорема 82. *Риманова поверхность полной аналитической функции является абстрактной римановой поверхностью в смысле определения 53, а отображение* $(U(a)\,;\ f_a(z)) \longmapsto f_a(a)$ *есть однозначная аналитическая функция на* $\mathfrak{R}$.

◀ Атлас на $\mathfrak{R}$ зададим следующим образом:

$$\left\{(U(\mathcal{F})\,;\,\varphi_{\mathcal{F}}) \;\middle|\; \mathcal{F} \in \mathfrak{R}\right\} ,$$

где $U_\varepsilon(\mathcal{F})$ — открытый круг с центром в элементе $\mathcal{F} = (U_{r(a)}(a);\ f_a(z))$, т. е. множество

$$U_\varepsilon(\mathcal{F}) = \left\{\mathcal{F}_\zeta \;\middle|\; |\zeta - a| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_\zeta \bullet\!\!-\!\!\bullet\, \mathcal{F}\right\} ,$$

а в качестве $\varphi_{\mathcal{F}}$ возьмем естественный гомеоморфизм

$$\varphi_{\mathcal{F}} \ :\ \{|\zeta - a| < \varepsilon\} \longrightarrow U_\varepsilon(\mathcal{F}),\ \text{задаваемый так: } \varphi_{\mathcal{F}} \ :\ \zeta \longmapsto \mathcal{F}_\zeta \,.$$

Пусть $U_\varepsilon(\mathcal{F}) \cap U_\delta(G) \neq \varnothing$, где $G = (U_{\rho(b)}(b);\ g_b(z))$. Тогда $\{|\zeta - a| < \varepsilon\} \cap \{|\zeta - b| < \delta\} \neq \varnothing$, и, значит, $G \longleftrightarrow G$, и соотношение соседства сводится к отображению $\zeta = z$, которое, очевидно, биголоморфно.

Функция $(U_{r(a)}(a);\ f_a(z)) \longmapsto f_a(a)$, очевидно, однозначна. Переходя к локальным координатам в окрестности элемента $(U_{r(a)}(a);\ f_a(z))$, получим $w = f_a(z)$, т. е. мы получили однозначную аналитическую функцию. ▶

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{R} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ D \arrow[rr, "f\circ\pi^{-1}"'] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Рис. 28

Замечание. Риманова поверхность как раз и строится с той целью, чтобы на ней полная аналитическая функция стала однозначной. Изобразим сделанные построения в виде диаграммы, показанной на рис. 28. Входящее в диаграмму отображение $\pi\ :\ \mathfrak{R} \longrightarrow D$ — «проектирование» римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на область определения D полной аналитической функции. Локально оно совпадает с параметрическими гомеоморфизмами.

Рассмотрим **примеры** наглядного построения простейших римановых поверхностей.

1) При каждом фиксированном значении $k \in \mathbb{Z}$ функция

$$z = re^{i\varphi} \longmapsto \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$$

является ветвью функции $\operatorname{Ln} z$, однозначной и непрерывной в области с краем

$$\left\{(r\,,\,\varphi)\;\middle|\;0<r<+\infty\,,\;2k\pi\leqslant\varphi\leqslant 2(k+1)\pi\right\}\,,$$

которую будем называть k-ым листом (рис. 29). Ввиду очевидного равенства

$$\ln r+2(k+1)\pi i=\ln r+2k\pi i+2k\pi \tag{29.17}$$

предельные значения сверху $(k+1)$-й ветви логарифма совпадают с предельным значением снизу k-й его ветви. Для построения соответствующей римановой поверхности представим себе счетное множество листов, расположенных строго один над другим, и пусть они занумерованы снизу вверх номерами

$$k=\ldots,-2,-1,\,0,\,1,\,2,\ldots\,.$$

Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ склеим нижний берег $(k+1)$-го листа с верхним берегом k-го листа. Тогда в силу равенства (29.17) функция $\operatorname{Ln} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi)$ будет меняться непрерывно при переходе точки с одного листа на другой. В результате возникает поверхность, напоминающая винтовую лестницу (рис. 30) и гомеоморфная открытой полуплоскости:

$$\left\{(r\,,\,\varphi)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;0<r<+\infty,\;-\infty<\varphi<+\infty\right\}\,,$$

на котором функция $\operatorname{Ln} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi)$ является однозначной. Отображение проектирования в данном случае таково

$$(r\,,\,\varphi)\longmapsto re^{i\varphi}\,.$$

Отметим, что начало координат (логарифмическая точка ветвления) *не принадлежит* римановой поверхности функции Ln .

2) Рассмотрим функцию $w=\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z}$. Полагая, как и выше,

$$\operatorname{Ln} z=\ln r+i(\varphi+2k\pi)\,,$$

заключаем, что полная аналитическая функция

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\cdot(\varphi+2k\pi)/n}$$

принимает лишь n различных значений, которые получаются, например, при $k=0,\,1,\,\ldots,\,n-1$. Поэтому для построения римановой поверхности функции $\sqrt[n]{z}$ надо взять n листов, занумеровать их, например, снизу вверх числами $0,\,1,\,\ldots,\,n-1$ и склеить аналогично предыдущему. В силу очевидного равенства

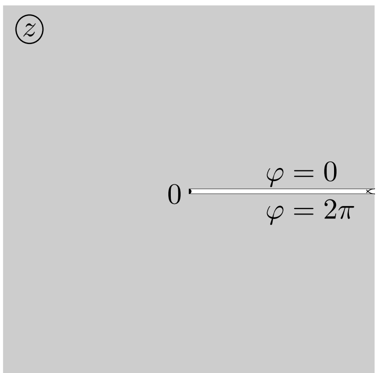

Рис. 29. Лист

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{(2\pi i/n)\cdot(n-1)+2\pi i/n}$$

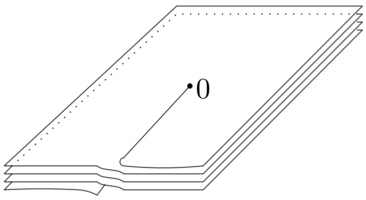

Рис. 30. Риманова поверхность логарифма

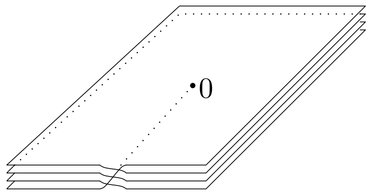

Рис. 31. Риманова поверхность корня

предельное значение сверху на разрезе нулевой ветви совпадает с предельным значением снизу на разрезе $(n-1)$-й ветви. Склеивая соответствующие берега указанных разрезов, получаем, что функция

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{(i\varphi + 2k\pi / n)},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

непрерывна на линии склеивания. Таким образом, риманова поверхность функции $\sqrt[n]{z}$ состоит из n листов, склеенных указанным образом. Отметим, что склеить листы указанным выше образом и притом так, чтобы полученная поверхность не имела самопересечений, в пространстве $\mathbb{R}^3$ невозможно. Это, однако, не означает, что римановой поверхности $\sqrt[n]{z}$ не существует, а означает лишь, что ее невозможно изобразить в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений. На самом деле она существует, лежит в $\mathbb{R}^4$, и никаких самопересечений на ней нет. Отметим также, что начало координат (алгебраическая точка ветвления) может как принадлежать, так и не принадлежать римановой поверхности корня.

3. Особые точки полных аналитических функций

Предположим, что функциональный элемент $\mathcal{F}_0 = (U, \varphi_0)$ допускает неограниченное[4] аналитическое продолжение в кольце $D = \{0 < |z-a| < r\}$.

Так как это кольцо не является односвязной областью, то функция φ, полученная в результате аналитического продолжения, не обя-

[4] т. е. по любому пути.

зательно однозначна в D. Рассмотрим односвязную область $D_1 = D \diagdown [0\,,\, r)$. По теореме о монодромии функция φ_1 допускает аналитическое продолжение до однозначной аналитической функции $\varphi_1 \; : \; D_1 \longrightarrow \mathbb{C}$. В силу аналитической продолжимости функции φ_1 по любому пути, лежащему в D, существуют ее предельные значения сверху и снизу на разрезе $(0\,,\, r)$, которые обозначим соответственно через $\varphi_1(x + 0 \cdot i)$ и $\varphi_1(x - 0 \cdot i)$. При этом возможны два случая.

Первый случай:

$$\forall\, x \in (0\,,\, r) \; : \; \varphi_1(x + 0 \cdot i) = \varphi_1(x - 0 \cdot i)\,.$$

В этом случае по теореме 75 (об аналитическом продолжении через кривую, в данном случае через интервал $(0\,,\, r)$) функция φ_1 однозначна и аналитична в кольце $D = \{0 < |z - a| < r.$. Но тогда функция φ_1 допускает разложение в ряд Лорана

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot (z - a)^k\,,$$

сходящийся в этом кольце. В этом случае точка a является изолированной особой точкой (однозначного характера) функции φ_1. В соответствии с данной ранее классификацией, здесь возможны три случая

1. $\forall k < 0 \; : \; c_k = 0 \quad (a$ — устранимая особая точка$)$;
2. $\exists n \in \mathbb{N} \; : \; c_{-n} \neq 0$ и $c_{-k} = 0$ при $k > n \quad (a$ — полюс$)$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists k > n \; : \; c_{-k} \neq 0 \quad (a$ — существенно особая точка$)$.

Второй случай

$$\varphi_1(x + 0 \cdot i) \not\equiv \varphi_1(x - 0 \cdot i)\,,\; x \in (0\,,\, r)\,.$$

Будем считать, что функция φ_1 задана на первом листе

$$\tilde{D}_1 = \bigl\{(\rho\,,\, \theta) \bigm| 0 < \rho < r;\; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\bigr\}\,.$$

Тогда равенство можно переписать в виде

$$\varphi_1(\rho \cdot e^{0 \cdot i}) \not\equiv \varphi_1(\rho \cdot e^{2\pi i})\,.$$

По условию функция φ_1 допускает аналитическое продолжение с края $x = \rho e^{2\pi i}$ листа $\tilde{D}_1$ на второй лист

$$\tilde{D}_2 = \{(\rho,\ \theta) \mid 0 < \rho < r;\ 2\pi \leqslant \theta \leqslant 4\pi\}$$

до функции φ_2, тогда на общей границе $\tilde{D}_1$ и $\tilde{D}_2$ листов будем иметь

$$\varphi_1(\rho e^{2\pi i}) \equiv \varphi_2(\rho e^{2\pi i})$$

Функция φ_2 в свою очередь допускает аналитическое продолжение с края на третий лист

$$\tilde{D}_3 = \{(\rho,\ \theta) \mid 0 < \rho < r;\ 4\pi \leqslant \theta \leqslant 6\pi\}$$

до функции φ_3, причем

$$\varphi_2(\rho e^{4\pi i}) \equiv \varphi_3(\rho e^{4\pi i})\,.$$

Продолжая этот процесс, заключаем, что возможны два случая.

1) Существует натуральное n такое, что

$$\varphi_n(\rho e^{n\cdot 2\pi i}) \equiv \varphi_1(\rho e^{0\cdot i})\,.$$

Предположим, что среди всех таких n взято наименьшее. В этом случае говорят, что a есть *алгебраическая точка ветвления с индексом ветвления* $(n-1)$. Функции

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$$

определены соответственно на листах

$$\tilde{D}_1,\ \tilde{D}_2,\ \ldots, \tilde{D}_n\,,$$

а на общих краях этих листов связаны равенствами

$$\begin{array}{l}
\varphi_1(\rho e^{2\pi i}) \equiv \varphi_2(\rho e^{2\pi i})\,,\\
\varphi_2(\rho e^{2\cdot 2\pi i}) \equiv \varphi_3(\rho e^{2\cdot 2\pi i})\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\varphi_n(\rho e^{n\cdot 2\pi i}) \equiv \varphi_1(\rho e^{0\cdot i})\,.
\end{array}$$

В этом случае говорят, что функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$ образуют в окрестности точки a *циклическую систему.* Чтобы найти аналитическое выражение для циклической системы, рассмотрим функцию $z = a + \zeta^n$ реализующую конформный гомеоморфизм кольца $\left\{0 < |\zeta| < \sqrt[n]{f(r)}\right\}$ на риманову поверхность

$$\tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \cup \ldots \cup \tilde{D}_n$$

так, что лист $\tilde{D}_\nu$ переходит на сектор

$$2\pi \cdot \frac{\nu - 1}{n} \leqslant \arg\zeta \leqslant 2\pi \cdot \frac{\nu}{n}\,, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\,.$$

Тогда функция

$$F(\zeta) = \begin{cases} \varphi_1(a+\zeta^n)\,,\ 0 \leqslant \arg\zeta \leqslant \dfrac{2\pi}{n}\,, \\ \varphi_2(a+\zeta^n)\,,\ \dfrac{2\pi}{n} \leqslant \arg\zeta \leqslant \dfrac{4\pi}{n}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ \varphi_n(a+\zeta^n),\ \dfrac{2\pi}{n}\cdot(n-1) \leqslant \arg\zeta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

аналитична в кольце $\{0 < |\zeta| < \sqrt[n]{r}\}$, и значит, допускает там разложение в ряд Лорана

$$F(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot \zeta^k$$

Если здесь перейти обратно к переменной z, то циклическая система представима в виде ряда

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left(\sqrt[n]{\zeta}\right)^k\,.$$

Здесь опять возникают три случая.

1. $\forall k \leqslant 0\ :\ c_k = 0$. В этом случае точка ветвления a называется *критической устранимой особой точкой функции* φ.

2. $\exists m \in \mathbb{N}\ :\ c_{-m} \neq 0$ и $\forall\ k > m\ :\ c_{-k} = 0$. В этом случае точка ветвления a называется *критическим полюсом порядка* m функции φ.

3. $\forall m \in \mathbb{N} \;\; \exists k > m \;:\; c_{-k} \neq 0$. В этом случае точка ветвления a называется *критической существенно особой точкой функции* φ.

В плоскости переменного ζ точке a соответствует обычная изолированная особая точка $\zeta = 0$ функции F.

2) Предположим теперь, что не существует такого $n \in \mathbb{N}$, что

$$\varphi_n(\rho e^{n\cdot 2\pi i}) \equiv \varphi_1(\rho e^{0\cdot i})\,.$$

В этом случае в окрестности точки a существует бесконечное множество различных ветвей данной аналитической функции, а сама точка a называется *логарифмической точкой ветвления.*

Глава 30

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Теорема Римана о конформных отображениях

1. Вспомогательные предложения

Теорема 83 (лемма о последовательности однолистных функций). *Если последовательность* $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ *функций, аналитических и однолистных в области* D*, сходится равномерно внутри*[1] $D \subset \mathbb{C}$ *к функции* $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$*, то предельная функция* f *аналитична и однолистна в* D*.*

◀ Аналитичность функции f установлена в теореме 46 (Вейерштрасса), и остается установить только ее однолистность. Предположим противное, т. е. что

$$\exists z_1\,,\ z_2 \in D\ :\ \begin{cases} z_1 \neq z_2\,, \\ f(z_1) = f(z_2) = a\,. \end{cases}$$

Опишем около точек z_1 и z_2 окружности γ_1 и γ_2 настолько малых радиусов, чтобы ограниченные ими замкнутые круги лежали в области D, не пересекались, и чтобы на $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ не было нулей функции $f(z) - a$. Всё это можно сделать, так как f — аналитическая функция, которая отлична от постоянной по условию. Но тогда в силу непрерывности функции f на компакте $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ имеем

$$\exists\, m \in \mathbb{R}_+\ \ \forall\, z \in \gamma_1 \sqcup \gamma_2\ \ :\ |f(z) - a| \geqslant m\,.$$

Но так как[2] $f_n \rightrightarrows f$ на $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$, то

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall z \in \gamma_1 \sqcup \gamma_2\ :\ |f(z) - f_n(z)| < m \leqslant |f(z) - a|\,.$$

[1] Под сходимостью, *равномерной внутри области*, понимается сходимость, равномерная на любом компакте, лежащем в данной области.

[2] Напоминаю, что символом $\rightrightarrows$ обозначается равномерная сходимость.

Из этих неравенств и из равенства

$$f_n(z) - a = [f(z) - a] + [f_n(z) - f(z)]$$

на основании теоремы 71 (Руше) заключаем, что функция $f_n(z) - a$ имеет нули в обоих кругах, ограниченных окружностями γ_1 и γ_2. Однако это противоречит однолистности функции f_n. ►

Теорема 84 (принцип сгущения). *Если последовательность функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, аналитических в области D, равномерно ограничена*[3]*, то она содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D.*

◄ Пусть E — замкнутое множество, $E \subset D$. Покажем, что система функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *равностепенно непрерывна* на каждом компакте $E \subset \subset D$, т. е.

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall\, z_1\,,\; z_2 \in E \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;: \\ |z_1 - z_2| \leqslant \delta \implies |f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leqslant \varepsilon\,. \quad (30.1)$$

Пусть $\delta_1 > 0$ — расстояние от компакта E до границы $\operatorname{Fr} D$ области D. Обозначим через E_1 множество, полученное присоединением к E всех точек, расстояние которых до E не превосходит $\delta_1/2$. Очевидно, что E_1 замкнуто, и $E_1 \subset D$. На нем $f_n(z)$ равномерно ограничены, т. е. $|f_n(z)| \leqslant M \in \mathbb{R}_+$. Возьмем любую пару точек $z_1, z_2 \in E$, для которых $|z_1 - z_2| < \delta_1/4$, и круг K радиуса $\delta_1/2$ с центром в z_1. Этот круг лежит в E_1. Применив интегральную формулу Коши, получим

$$f_n(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f_n(\tau)}{\tau - z_1}\, d\tau, \;\; f_n(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f_n(\tau)}{\tau - z_2}\, d\tau\,.$$

Используя эти равенства, произведем следующую оценку:

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} f_n(\tau) \frac{z_1 - z_2}{(\tau - z_1)(\tau - z_2)}\, d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{M \cdot |z_1 - z_2|}{\dfrac{\delta_1}{2} \cdot \dfrac{\delta_1}{4}} \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{4M}{\delta_1} \cdot |z_1 - z_2|\,.$$

[3] Это означает, что все функции ограничены по модулю одной и той же константой.

Таким образом, имеем следующее неравенство:

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leqslant \frac{4M}{\delta_1} \cdot |z_1 - z_2| \,.$$

Полагая $\delta := \min\left\{\dfrac{\delta_1}{4}, \dfrac{\delta_1}{4M} \cdot \varepsilon\right\}$, получаем равностепенную непрерывность.

Итак, данное семейство функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на компактах. Отсюда на основании теоремы Арцела — Асколи[4] делаем заключение о справедливости утверждения теоремы. ►

Теорема 85 (лемма Шварца). *Пусть функция f аналитична в круге $\{|z| < R\}$ и ограничена, т. е. $|f(z)| \leqslant M < +\infty$, и пусть $f(0) = 0$. Тогда $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R} \cdot |z|$ и, кроме того, $|f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{R}$. Знаки равенства здесь (в первой оценке при $z \neq 0$) имеют место только в случае, если $f(z) \equiv \dfrac{M}{R} e^{i\theta} z$.*

◄ Так как $f(0) = 0$, то функция $z \longmapsto f(z)/z$ аналитически продолжима в круг $|z| < R$, а ее значение в нуле равно $f'(0)$. На окружности $|z| = r$, где $r \in (0, R)$, имеем $\left|\dfrac{f(z)}{z}\right| \leqslant \dfrac{M}{r}$. Отсюда на основании принципа максимума заключаем, что это неравенство имеет место и в круге $|z| \leqslant r$ и, кроме того, $|f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{r}$. В пределе при $r \to R$, $r < R$ получаем $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{R} \cdot |z|$ и, кроме того, $|f'(0)| \leqslant \dfrac{M}{R}$. Если равенство имеет место хотя бы в одной точке, то, опять применяя принцип максимума, заключаем, что $\dfrac{f(z)}{z} \equiv \mathrm{const}$, т. е. $\dfrac{f(z)}{z} \equiv \dfrac{M}{R} e^{i\theta}$ или $f(z) = \dfrac{M}{R} e^{i\theta} z$. ►

[4] *Теорема Арцела — Асколи* — критерий предкомпактности семейства непрерывных функций.

2. Общие замечания по проблеме конформного отображения

Пусть M_1 и M_2 — произвольные не пустые подмножества расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Проблема конформного отображения состоит прежде всего в том, чтобы найти условия, при которых существует конформный гомеоморфизм $f : M_1 \longrightarrow M_2$. Если существование конформного гомеоморфизма установлено, то на первый план выдвигается проблема описания множества всех таких гомеоморфизмов. Если и это сделано, то возникает проблема нахождения для них аналитических выражений. Если же аналитическое выражение отображающей функции найти не удается (а именно такая ситуация чаще всего и встречается), то возникает проблема нахождения для нее тех или иных приближений. Так как конформные гомеоморфизмы реализуются однолистными аналитическими функциями, допускающими единственный простой полюс, и, следовательно, являются частными случаями топологических гомеоморфизмов, то проблема существования распадается на две части: *топологическую и конформную.* Именно, сначала надо, вообще говоря, установить существование топологических гомеоморфизмов, а уж потом среди топологических гомеоморфизмов (если они существуют) искать конформные.

Так как для всякого гомеоморфизма справедлив принцип сохранения области, то проблему конформного отображения естественно рассматривать сначала для областей, а уж потом пытаться рассматривать ее для множеств, не являющихся областями.

По этой же причине проблема конформного отображения множеств из $\widehat{\mathbb{C}}$, не являющихся областями, не рассматривается как самостоятельная. Вместо нее естественно рассматривать проблему расширения на те или иные множества функций, реализующих конформные гомеоморфизмы областей. Например, большой интерес представляет проблема соответствия между граничными точками при конформных гомеоморфизмах областей.

По аналогии с топологической эквивалентностью (гомеоморфностью) топологических пространств можно ввести понятие конформной эквивалентности областей из $\widehat{\mathbb{C}}$. При этом обнаруживаются и свойства, аналогичные тем, которые связаны с топологической эквивалентностью.

Определение 56. *Область $D_1 \subset \mathbb{C}$ называется конформно эквивалентной области $D_2 \subset \mathbb{C}$, если существует конформный гомеоморфизм D_1 на D_2.*

Конформную эквивалентность условимся обозначать символом $\overset{k}{\sim}$.

Теорема 86. *Конформная эквивалентность областей является отношением эквивалентности на множестве всех областей. Множество всех областей распадается на попарно не пересекающиеся классы конформно эквивалентных областей.*

◀ Надо показать, что отношение $\overset{k}{\sim}$ обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности.* Докажем сначала рефлексивность, т. е. что $D \overset{k}{\sim} D$ для любой области D. В самом деле, тождественное отображение $w = z$ реализует конформный гомеоморфизм $D \longrightarrow D$.

Симметричность: если $D_1 \overset{k}{\sim} D_2$, то $D_2 \overset{k}{\sim} D_1$. В самом деле пусть $f : D_1 \longrightarrow D_2$ — конформный гомеоморфизм D_1 на D_2. Так как функция, обратная к мероморфной и однолистной, сама мероморфна и однолистна, то обратный гомеоморфизм $f^{-1} : D_2 \longrightarrow D_1$ является конформным.

Транзитивность: если $D_1 \overset{k}{\sim} D_2$, $D_2 \overset{k}{\sim} D_3$, то $D_1 \overset{k}{\sim} D_3$. В самом деле, пусть $f : D_1 \longrightarrow D_2$, $g : D_2 \longrightarrow D_3$ — конформные гомеоморфизмы. Так как композиция однолистных мероморфных функций однолистна и мероморфна, то $g \circ f : D_1 \longrightarrow D_3$ — конформный гомеоморфизм D_1 на D_3. Значит, $D_1 \overset{k}{\sim} D_3$. Второе утверждение леммы является следствием первого. ▶

С точки зрения доказанной теоремы проблема существования конформных гомеоморфизмов областей равносильна проблеме описания классов конформно эквивалентных областей.

Здесь будем использовать следующие обозначения и термины. Если M — множество точек из $\widehat{\mathbb{C}}$, то через $\overline{M}$ будем обозначать его замыкание в $\widehat{\mathbb{C}}$, т. е. множество всех его точек прикосновения. Символом M° будем обозначать его внутренность, т. е. множество всех его внутренних точек. Через $\operatorname{Fr} M$ будем обозначать его границу, т. е. $\operatorname{Fr} M := \overline{\mathrm{M}} \diagdown \mathrm{M}^{\circ}$. Следует строго различать понятия *границы* и *края*. И, наконец, дополнение $\widehat{\mathbb{C}} \diagdown \overline{M}$ будем называть множеством его внешних точек (или *внешностью*). Для любого множества M его внутренность и внешность открыты, а замыкание и граница замкнуты. Отметим, что эти множества зависят не только от множества M, но и от топологии того пространства, в которое вложено M (в данном случае мы считаем, что $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$).

Определение 57. *Область D называется односвязной, если любой замкнутый путь $\gamma : [0,1] \longrightarrow D$ гомотопен нулю в D.*

Примерами односвязных областей являются: расширенная комплексная плоскость $\widehat{\mathbb{C}}$, комплексная плоскость $\mathbb{C}$, любой открытый $\widehat{\mathbb{C}}$-круг. В частности, любая открытая полуплоскость, например, $\operatorname{Im} z > 0$, а также внутренность единичного круга: $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Односвязной является любая выпуклая область (например, конечная область, ограниченная эллипсом), а также любая область, звездная относительно некоторой точки.

Из этих примеров видно, что границы и дополнения односвязных областей связны. Для областей, лежащих в $\mathbb{C}$, эти свойства могут быть приняты за определение односвязности областей.

Определение 58. *Многосвязной областью называется область, не являющаяся односвязной.*

Многосвязную область $D \subset \mathbb{C}$ можно охарактеризовать тем, что ее D граница не связна. В простейших случаях, когда число связных компонент границы конечно (и равно n), область называется конечносвязной (точнее, n-связной).

На рисунках 32 —34 показаны двухсвязная, трехсвязная, четырехсвязная области соответственно. Очевидно, что, соединяя различные связные компоненты границы непрерывными кривыми (разрезами), затем выбрасывая эти разрезы из области, получим новую область, порядок связности которой меньше, чем у исходной области. Таким образом, соединяя между собой все связные компоненты границы многосвязной области, можно получить односвязную область.

Определение 59. *Порядком связности области $D \subset \mathbb{C}$ называется число $(k+1)$, где k — минимальное число разрезов, которые*

Рис. 32

Рис. 33

Рис. 34

необходимо провести в области D, *чтобы превратить ее в односвязную область.*

С точки зрения топологической многосвязные области на $\widehat{\mathbb{C}}$ полностью классифицированы, и единственным топологическим инвариантом многосвязной области является ее порядок связности. Это означает, что две многосвязные области гомеоморфны тогда и только тогда, когда их порядки связности равны.

Классификация областей с точки зрения конформной эквивалентности существенно сложнее их топологической классификации. Например, существуют пары областей (как односвязных так и многосвязных, причем любого порядка связности), которые гомеоморфны, но не эквивалентны конформно. Иначе говоря, есть такие пары областей, что существует топологический гомеоморфизм, но не существует конформного гомеоморфизма одной из областей на другую.

Оставляя в стороне конформную классификацию многосвязных областей, ниже ограничимся исключительно односвязными областями.

3. Решение проблемы конформного отображения односвязных областей

Граница $\operatorname{Fr} D$ односвязной области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — либо пустое, либо связное множество. Так как множество $\operatorname{Fr} D$ замкнуто, то оно есть либо пустое множество $\varnothing$, либо одноточечное множество $\{z_0\}$, где $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, либо континуум (бесконечное замкнутое связное множество). Примерами областей с такими границами являются:

$\widehat{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость;

$\mathbb{C}$ — комплексная плоскость;

$K := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ — внутренность единичного круга.

Теорема 87. *Односвязные области $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, K попарно конформно не эквавалентны.*

◀ Конформный гомеоморфизм есть частный случай гомеоморфизма, а при гомеоморфизмах образами компактных множеств всегда являются компактные множества. Так как $\widehat{\mathbb{C}}$ компактно, а множества $\mathbb{C}$ и K — не компактны, то не может существовать никаких гомеоморфизмов (в том числе и конформных) $\mathbb{C}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$ и K на $\widehat{\mathbb{C}}$.

Предположим, что существует конформный гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C}$ на круг K. Функция $w = f(z)$, реализующая этот гомеоморфизм, аналитична на всей плоскости $\mathbb{C}$. Так как ее значения лежат в круге $K = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$, то она ограничена, т. е. $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Отсюда на основании теоремы Лиувилля заключаем, что эта функция постоянна. Но постоянная функция отображает область на одну точку и потому не является гомеоморфизмом. ▶

Замечание. Области $\mathbb{C}$ и K конформно не эквивалентны, но гомеоморфны. Гомеоморфизм $\mathbb{C}$ на K можно построить, например, по формулам

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} r\,, \\ \theta = \varphi\,, \end{cases} \qquad \text{где} \quad z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}\,, \quad w = \rho e^{i\theta} \in K\,.$$

Исчерпывающая конформная классификация односвязных областей дается следующей теоремой Б. Римана.

Теорема 88 (Риман). *Любая односвязная область $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ конформно эквивалентна одной из трех областей: $\widehat{\mathbb{C}}$ (расширенная комплексная плоскость), $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, K (внутренность единичного круга).*

◀ В случае, когда $\operatorname{Fr} D = \varnothing$, имеем $D = \widehat{\mathbb{C}}$, и значит, D конформно эквивалентна $\widehat{\mathbb{C}}$.

Пусть теперь $\operatorname{Fr} D$ состоит из одной точки $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Если $z_0 = \infty$, то $D = \mathbb{C}$, и значит, D конформно эквивалентна $\mathbb{C}$. Если $z_0 \in \mathbb{C}$, то

$D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$, а функция $w = \dfrac{1}{z - z_0}$ реализует конформный гомеоморфизм $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$ на $\mathbb{C}$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда граница $\operatorname{Fr} D$ области D содержит не менее двух различных точек. Тогда $\operatorname{Fr} D$ является континуумом, и мы покажем, что в этом случае область D конформно эквивалентна внутренности единичного круга $K = \Big\{ w \in \widehat{\mathbb{C}} \;\Big|\; |w| < 1 \Big\}$.

Прежде всего установим, что *область D конформно эквивалентна области, множество внешних точек которой не пусто.* В самом деле, пусть $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} = \varnothing$. Так как $\operatorname{Fr} D$ — континуум, то существуют две различные точки $a, b \in \mathbb{C} \cap \operatorname{Fr} D$. Тогда функция

$$w = \sqrt{\frac{z - a}{z - b}} \tag{30.2}$$

неограниченно аналитически продолжима в односвязной области D, и по теореме о монодромии существует однозначная ветвь этой функции, аналитическая в D. Так как обратная к этой ветви функция

$$z = \frac{bw^2 - a}{w^2 - 1} \tag{30.3}$$

— рациональная, и значит, однозначная, то функция (30.2) — однолистная в D и потому реализует конформный гомеоморфизм области D на область D_1, множество внешних точек которой не пусто. В самом деле, множество $D_2 = \Big\{ -w \;\Big|\; w \in D_1 \Big\}$ — область, а каждая пара точек $\pm w$ переходит на одну точку z при отображении (30.3). Но так как это отображение однолистно в D, а все точки D_1 — внутренние, то все точки области D_2 должны быть внешними по отношению к D_1. Итак, множество внешних точек области D_1 не пусто.

Покажем, что область D конформно эквивалентна ограниченной области. В самом деле, по предыдущему можно считать, что множество внешних точек области D не пусто. Если ∞ — внешняя точка, то область D ограничена. Если $\infty \in \overline{D}$, т. е. не является внешней, то выберем любую точку $a \in \mathbb{C}$, которая является внешней по отношению к области D. Функция $w = \dfrac{1}{z - a}$ реализует конформный гомеоморфизм области D на область D_2, для которой точка ∞ — внешняя. Значит, область D_2 ограничена.

Далее, *область D конформно эквивалентна области, содержащей начало координат и лежащей внутри единичного круга.* В самом деле, по предыдущему можно считать, что область D ограничена. Пусть $z_0 \in D$, и $D \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < M\}$. Функция $w = \dfrac{z - z_0}{M}$ реализует конформный гомеоморфизм области D на область D_3, лежащую внутри единичного круга и содержащую начало координат.

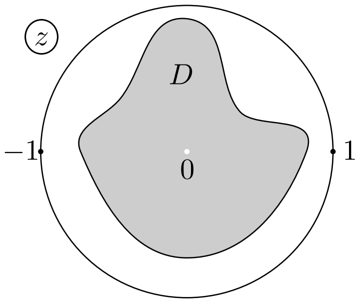

Рис. 35

Итак, не ограничивая общности, будем считать, что $0 \in D \subset K$ (рис. 35). Искомую функцию f_0, реализующую конформный гомеоморфизм области D на круг K, подчиним дополнительным условиям: $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$. Иначе говоря, разложение функции f_0 в окрестности нуля пусть имеет вид

$$f_0(z) = \alpha z + a_2 z^2 + \ldots\,, \text{ где } \alpha > 0\,.$$

Ведем в рассмотрение семейство $\mathfrak{M}$, состоящее из всех функций f, аналитических и однолистных в D, удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 0\,, \quad f'(0) > 0\,, \quad |f(z)| < 1\,.$$

Семейство $\mathfrak{M}$ не пусто, так как функции $f(z) = a \cdot z$ где $0 < a \leqslant 1$, ему принадлежат. Поставим следующую экстремальную задачу: *среди функций семейства $\mathfrak{M}$ найти ту, для которой величина $f'(0)$ принимает наибольшее значение.* Обозначим $\alpha = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}} f'(0)$. Имеем $1 \leqslant \alpha < 1/\rho$, где ρ — наибольший из радиусов кругов $\{|z| < \rho\}$, содержащихся в области D. В самом деле, оценка снизу $\alpha \geqslant 1$ следует из приведенного выше примера. Для доказательства оценки сверху возьмем $f \in \mathfrak{M}$. Функция f аналитична в D, а значит, и в круге $\{|z| < \rho\}$, кроме того, $f(0) = 0$. По лемме Шварца имеем $|f(z)| \leqslant \dfrac{|z|}{\rho}$, откуда при $z \to 0$ имеем $f'(0) \leqslant \dfrac{1}{\rho}$, и значит, $\alpha \leqslant \dfrac{1}{\rho}$. Выберем последовательность

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функций из $\mathfrak{M}$, для которой $f_n'(0) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Так как

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall z \in D \ : \ |f_n(z)| < 1\,,$$

то семейство функций $\{f_n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}$ равномерно ограничено. Отсюда по принципу сгущения заключаем, что существует подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся внутри области D. Обозначим $f_0(z) := \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(z)$. По теореме 46 (Вейерштрасса) функция f_0 аналитична в D, причем

$$f_0(0) = 0\,, \quad f_0'(0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}'(0) = \alpha\,, \quad |f_0(z)| \leqslant 1\,.$$

Поскольку производная f_0' отлична от нуля, то функция f_0 не постоянная, и потому $|f_0(z)| < 1$. На основании леммы о последовательности однолистных функций заключаем, что функция f_0 однолистна, т. е. $f_0 \in \mathfrak{M}$.

Покажем, что функция $w = f_0(z)$ реализует конформный гомеоморфизм области D *на весь круг* $\{|w| < 1\}$. Предположим, что существует значение a в круге $\{|w| < 1\}$, которое не принимается функцией f_0. Возьмем двулистный круг $\{|\xi| < 1\}$ с точкой ветвления $a \in K$ (см. рис. 36) и отобразим его конформно[5] на однолистный круг $|t| < 1$ так, чтобы точка $\xi = 0$ перешла в точку $t = 0$. Отображающая функция $t = \varphi(\xi)$ имеет следующее аналитическое выражение:

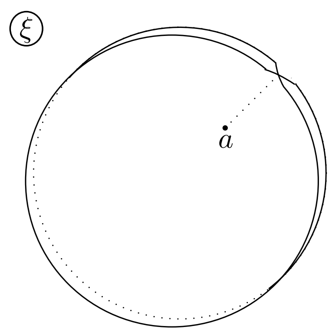

Рис. 36. Двулистный круг

$$t = \varphi(\xi) = e^{i\theta} \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{\xi - a}{1 - \overline{a}\xi}} - \sqrt{-a}}{1 - \overline{\sqrt{-a}}\sqrt{\dfrac{\xi - a}{1 - \overline{a}\xi}}}\,, \quad \varphi(0) = 0\,, \tag{30.4}$$

где параметр θ подобран так, чтобы было $\varphi'(0) > 0$. Так как значение a не принимается функцией f_0, то функция (30.4) неограниченно аналитически продолжима в области $f_0(D)$, и по теореме о монодромии

[5]В точке $\xi = a$ конформность нарушается, но в надлежаще подобранных локальных координатах она будет иметь место.

однозначна. Функция $t = \psi(\xi)$, обратная к φ, очевидно, рациональна и, значит, тоже однозначна. Таким образом, функция $\xi = \varphi(t)$ однолистна в $f_0(D)$. Далее, $\psi(0) = 0$, и ψ аналитична в круге $|t| < 1$. По лемме Шварца должно быть $\left|\dfrac{\psi(t)}{t}\right| < 1$ при $|t| < 1$, причем это неравенство строгое, так как ψ не сводится к $\mathbb{C}$-линейной функции. Поэтому $\psi'(0) < 1$, и значит, $\varphi'(0) = \dfrac{1}{\psi'(0)} > 1$. Образуем теперь композицию $F(z) := \varphi[f_0(z)]$. Она аналитична и однолистна в D, и для нее имеем $F(0) = 0$, $F \in \mathfrak{M}$, $F'(0) = \varphi'(0) \cdot f_0'(0) > \alpha$, так как $\varphi'(0) > 1$. Неравенство $F'(0) > \alpha$ противоречит экстремальному свойству функции f_0. Итак, значения функции $w = f_0(z)$ должны заполнять весь круг $|w| < 1$. Тем самым доказано существование конформного гомеоморфизма $f_0 : D \longrightarrow K$, причем $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$. ►

Замечания. 1. Покажем, что *функция f_0, реализующая конформный гомеоморфизм области D на круг K, подчиненная дополнительным условиям $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$ — единственная.*

◄ В самом деле, если $w = f_1(z)$ и $\xi = f_2(z)$ — две такие функции, то композиция $w = f_1 \circ f_2^{-1}(\xi)$ — конформный гомеоморфизм круга $|\xi| < 1$ на круг $|w| < 1$. Все такие гомеоморфизмы содержатся в формуле

$$w(\xi) = f_1 \circ f_2^{-1}(\xi) = e^{i\theta} \cdot \frac{\xi - a}{1 - \overline{a}\xi}\,.$$

Так как $w(0) = 0$, $w'(0) = \dfrac{f_1'(0)}{f_2'(0)} > 0$, то должно быть

$$a = 0\,, \quad \theta = 0\,, \quad \text{т. е.} \quad f_1 \circ f_2^{-1}(\xi) \equiv \xi \quad \text{или} \quad f_1(z) \equiv f_2(z)\,. \quad ►$$

2. Из теоремы Римана вытекает конформная эквивалентность любых двух односвязных областей $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$, граница каждой из которых содержит не менее двух точек. Единственность отображающей функции $f : D \longrightarrow G$ можно обеспечить, например, следующим образом. Зафиксировать произвольно точки $z_0 \in D$, $w_0 \in G$, задать число $\theta \in \mathbb{R}$ и потребовать, чтобы было $w_0 = f(z_0)$, $\theta = \arg f'(z_0)$.

§ 2. Дополнительные вопросы теории конформных отображений

1. Теоремы о соответствии границ при конформном отображении

Говоря о конформном гомеоморфизме, мы всегда имели ввиду соответствие между *внутренними точками* этих областей. Однако во многих вопросах бывает необходимо знать свойства отображающих функций вблизи границы области. Чтобы не усложнять изложение, мы будем изучать соответствие границ при конформном отображении *ограниченных* областей.

Теорема 89. *Если функция f реализует конформный гомеоморфизм области D на область G, то при стремлении точки $z \in D$ к границе области D точка $f(z)$ стремится к границе области G.*

◀ Чтобы не определять интуитивно ясные понятия, проведем доказательство в предположении, что $z \to t_0$, $z \in D$ и что область G есть единичный круг. Тогда утверждение теоремы можно записать в виде

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z\in D}} |f(z)| = 1\,. \tag{30.5}$$

Для доказательства этого равенства предположим противное

$$\varliminf_{\substack{z\to t_0\\ z\in D}} |f(z)| = \alpha < 1\,. \tag{30.6}$$

Равенство (30.6) означает, что существует последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точек $z_n \in D$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = t_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = \alpha < 1$. Зададим $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы было $0 < \alpha + \varepsilon < 1$. Тогда

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ |f(z_n)| \leqslant \alpha + \varepsilon\,.$$

Последнее равенство можно записать в виде $f(z_n) \in \{|w| \leqslant \alpha+\varepsilon\}$ или так $z_n \in f^{-1}(\{|w| \leqslant \alpha+\varepsilon\})$. Но это последнее множество — компакт (как полный прообраз компакта при гомеоморфизме). А так как, кроме того, $f^{-1}(\{|w| \leqslant \alpha+\varepsilon\}) \subset D$, то расстояние от этого компакта до точки t_0 — положительное. Поэтому не может выполняться стремление $z_n \to t_0$. Полученное противоречие показывает, что вместо (30.6) должно выполняться неравенство

$$\varliminf_{\substack{z\to t_0\\ z\in D}} |f(z)| \geqslant 1\,,$$

и значит,

$$1 \leqslant \varliminf_{\substack{z\to t_0\\ z\in D}} |f(z)| \leqslant \varlimsup_{\substack{z\to t_0\\ z\in D}} |f(z)| \leqslant 1\,,$$

т. е. все эти неравенства на самом деле обращаются в равенства, которые равносильны одному равенству (30.5). ►

Замечание. Утверждение теоремы 89 не означает, что при $z \to t_0$, $z \in D$ точка $w = f(z)$ стремится к определенной точке границы области G. Тем не менее это более сильное утверждение все же справедливо при некоторых довольно естественных ограничениях. Для упрощения формулировок мы всюду в дальнейшем будем рассматривать только ограниченные области.

Теорема 90. *Пусть D и G — односвязные области, границы которых ∂D и ∂G — простые (жордановы) кусочно-гладкие кривые. Тогда функцию f, реализующую конформный гомеоморфизм D на G, можно продолжить по непрерывности на $\overline{D} = D \sqcup \partial D$ до гомеоморфизма замкнутых областей $f\,:\,\overline{D} \longrightarrow \overline{G}$.*

◄ Для доказательства этой теоремы достаточно доказать, что для любой точки $z_0 \in \partial D$ существует предел $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}} f(z) = w_0 \in \partial G$. Действительно, в этом случае мы сможем доопределить функцию f в точках границы ∂D ее предельными значениями, и она станет непрерывной на $\overline{D}$, а значит, и *равномерно непрерывной*. Поскольку области D и G можно поменять местами, то и обратная функция f^{-1} будет равномерно непрерывной на $\overline{G}$. Тем самым конформный гомеоморфизм f открытых областей будет продолжен до гомеоморфизма замкнутых областей. Итак, необходимым условием для справедливости теоремы является равномерная непрерывность отображающей функции $w = f(z)$ в области D, т. е. выполнение условия

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall z', z'' \in D \;:\; |z' - z''| \leqslant \delta \Longrightarrow |w' - w''| \leqslant \varepsilon\,,$$

где обозначено $w' = f(z')$, $w'' = f(z'')$. Предполагая противное, т. е. что теорема неверна, заключаем, что вместо условия равномерной непрерывности выполняется его отрицание

$$\exists\alpha \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall\delta \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists z', z'' \in D \; : \; \begin{cases} |z' - z''| \leqslant \delta\,, \\ |w' - w''| > \alpha\,. \end{cases}$$

Фиксируя $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и задавая последовательность $\delta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, найдем последовательности точек $(z'_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z''_n)_{n=1}^{\infty}$ в области D и их обраэов $(w'_n)_{n=1}^{\infty}$, $(w''_n)_{n=1}^{\infty}$ в области G, такие, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \begin{cases} |z'_n - z''_n| \leqslant \dfrac{1}{n}\,, \\ |w'_n - w''_n| > \alpha\,. \end{cases}$$

Переходя в случае необходимости к подпоследовательностям, будем считать, что все четыре последовательности сходятся, причем (рис. 37)

$$\lim_{n\to\infty} z'_n = \lim_{n\to\infty} z''_n = z_0 \in \partial D\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} w'_n = w'_0 \in \partial G\,, \quad \lim_{n\to\infty} w''_n = w''_0 \in \partial G\,, \quad |w'_0 - w''_0| \geqslant \alpha\,.$$

Очевидно, что через точки w'_1, w'_2, … можно провести жорданову кривую Γ', а через точки $w''_1, w''_2, \ldots$ — жорданову кривую Γ'' так, чтобы расстояние между этими кривыми было не меньше некоторого числа $\beta \in (0, \alpha)$ (и чтобы обе эти кривые лежали в области G). Пусть $R = \min\{|z'_1 - z_0|\,, |z''_1 - z_0|\}$. Прообразы кривых Γ' и Γ'' в области D обозначим через L' и L'' соответственно. Ясно, что L' проходит через точки z'_1, z'_2, …, а L'' — через точки z''_1, z''_2, …. Следовательно, кривые L' и L'' пересекают все окружности $|z - z_0| = r$ при $r \leqslant R$. Первую точку пресечения кривой L' (при движении от z'_1) с окружностью $|z - z_0| = r$ обозначим символом z^*_r, а первую точку пересечения кривой L'' с окружностью $|z - z_0| = r$ — символом z^{**}_r. Образы точек z^*_r и z^{**}_r обозначим соответственно через w^*_r и w^{**}_r. Так как $w^*_r \in \Gamma'$, $w^{**}_r \in \Gamma''$, то

$$\beta \leqslant |w^{**}_r - w^*_r| = \left| \int\limits_{z^*_r}^{z^{**}_r} f'(z)\, dz \right| \leqslant \int\limits_{K_r} |f'(z)|\, ds\,,$$

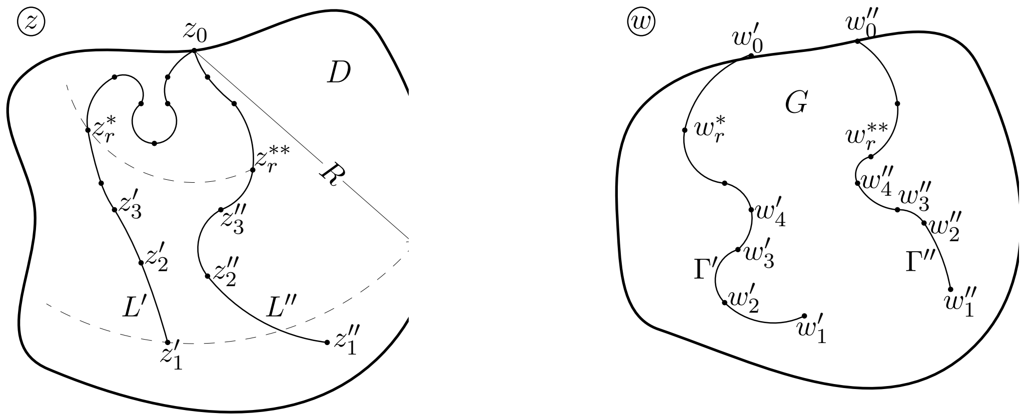

Рис. 37. К доказательству теоремы 90

где $ds = |dz| = r\,d\varphi$, а последний интеграл взят по дуге окружности $|z - z_0| = r$, лежащей в D. Для его оценки применим неравенство Коши — Буняковского — Шварца

$$\left|\int\limits_{K_r} h(z)g(z)\,ds\right|^2 \leqslant \int\limits_{K_r} |h(z)|^2 ds \cdot \int\limits_{K_r} |g(z)|^2\,ds\,,$$

полагая в нем $h(z) := |f'(z)|$, $g(z) :\equiv 1$. Тогда получим

$$\beta^2 \leqslant \int\limits_{K_r} |f'(z)|^2 ds \cdot \int\limits_{K_r} ds \leqslant 2\pi r \int\limits_{K_r} |f'(z)|^2 ds\,,$$

откуда

$$\beta^2 \leqslant 2\pi r \int\limits_{K_r} |f'(z)|^2 r\,d\varphi\,.$$

Деля это неравенство на $2\pi r$ и интегрируя по r от $\varepsilon > 0$ до R, получим

$$\frac{\beta^2}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{dr}{r} \leqslant \int\limits_{\varepsilon}^{R} \int\limits_{K_r} |f'(z)|^2\,r\,dr d\varphi \leqslant \iint\limits_{G} dudv = \mu(G)\,,$$

где произведена замена $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$, а символом $\mu(G)$ обозначена площадь области G. Итак, имеем

$$\frac{\beta^2}{2\pi} \cdot \ln \frac{R}{\varepsilon} \leqslant \mu(G) < +\infty\,.$$

Отсюда при $\varepsilon \to +0$ получаем $+\infty \leqslant \mu(G)$ — противоречие. ►

Перейдем теперь к обсуждению случаев, когда границы областей D и G устроены более сложно, чем в теореме 90. В таких случаях нуждается в уточнении сама формулировка теоремы 90. Дело в том, что теорема 90 неверна уже для весьма простых областей, границы которых не являются простыми кривыми.

Пусть, например,

$$D = \left\{ re^{i\varphi} \;\middle|\; 0 < r < 1\,,\, 0 < \varphi < 2\pi \right\}$$

— круг с разрезом (рис. 38), $G = \{|w| < 1\}$ — круг, а $f\ :\ D \longrightarrow G$ — конформный гомеоморфизм. Если бы теорема 90 в этом случае была верна, то f продолжалась бы до гомеоморфизма замкнутых областей

$$f\ :\ \{|z| \leqslant 1\} \longrightarrow \{|w| \leqslant 1\}\ .$$

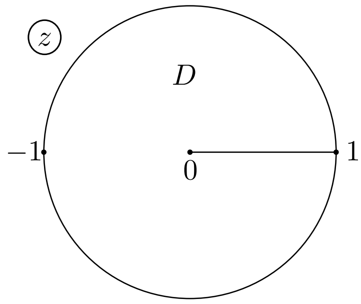

Рис. 38. Круг с разрезом

Но тогда по теореме об аналитическом продолжении функция f должна быть аналитической и на разрезе, т. е. во всем круге $|z| < 1$, и отображать его на весь круг $|w| < 1$. Однако всякая такая функция f — дробно-линейная функция вида $w = e^{i\theta} \cdot \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Но такая функция отображает все точки промежутка $[0,1)$, лежащего на вещественной оси, на внутренние (но не граничные!) точки круга $|w| < 1$.

Определение 60. *Граничная точка* t_0 *области* D *называется достижимой, если существует жорданова кривая* $\gamma\ :\ \ [0,1] \longrightarrow$ $\longrightarrow D \sqcup \{t_0\}$*, оканчивающаяся в точке* t_0*.*

Иначе говоря, точка $t_0 \in \mathrm{Fr}D$ будет достижимой, если ее можно соединить с любой точкой $z \in D$ простой кривой, лежащей в D. Примеры областей с недостижимыми граничными точками показаны на рис. 39.

Рассмотрим сначала соответствие границ при конформном отображении областей, все граничные точки которых являются достижимыми. Важным классом таких областей являются *жордановы* области, т. е. такие области, граница каждой из которых есть простая (жорданова) замкнутая кривая на плоскости. Важнейшие топологические

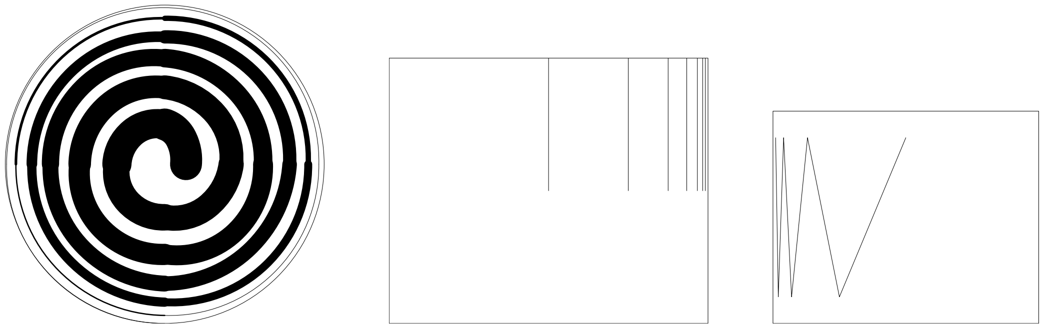

Рис. 39. Области с недостижимыми граничными точками

свойства жордановых кривых содержатся в следующей теореме, которую мы здесь примем без доказательства.

Теорема 91 (Жордан). *Замкнутая жорданова кривая* $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *разбивает сферу* $\widehat{\mathbb{C}}$ *на две односвязные области (внутреннюю, т. е. не содержащую* ∞*, и внешнюю, т. е. содержащую* ∞*), является их общей границей, причем все точки кривой* γ *достижимы как со стороны внутренней области, так и со стороны внешней области.*

Отметим только, что если кривая $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ — не жорданова, то теорема Жордана может быть и неверной. Например, контур, ограничивающий закрашенную область на правом рисунке 39, не является жордановой кривой, и мы видим, что для этого примера теорема Жордана неверна. Этот контур разбивает плоскость на три связных компоненты и не является их общей границей. Например, границей внешности круга является окружность $|t| = 1$, но не весь контур. Кроме того, все точки единичной окружности недостижимы из областей, лежащих внутри круга. Используя теорему Жордана, можно получить теорему о соответствии границ в следующей формулировке.

Теорема 92 (о соответствии границ). *Пусть* D *и* G *— области, лежащие в* $\mathbb{C}$ *и ограниченные жордановыми кривыми. Функцию* f*, реализующую конформный гомеоморфизм* D *на* G*, можно продолжить по непрерывности на* $\overline{D}$ *до гомеоморфизма замкнутых областей.*

Доказательство можно провести, опираясь на теорему Жордана и повторяя доказательство теоремы 90 о соответствии границ в случае областей с кусочно-гладкими границами.

Теорема 93 (единственность). *Пусть D и G области, лежащие в $\mathbb{C}$ и ограниченные кусочно-гладкими жордановыми кривыми, и пусть заданы произвольные точки*

$$t_1\,,\ t_2\,,\ t_3 \in \operatorname{Fr} D \quad \text{и} \quad \xi_1\ \xi_2\,,\ \xi_3 \in \operatorname{Fr} G\,,$$

расположенные на соответствующих границах в порядке положительного обхода. Функция $f\ :\ \overline{D} \longrightarrow \overline{G}$, реализующая конформный гомеоморфизм области D на область G, определяется однозначно, если потребовать, чтобы было $f(t_k) = \xi_k\,,\ k = 1\,,\,2\,,\,3\,.$

◀ Построим вспомогательные конформные гомеоморфизмы

$$\varphi\ :\ D \longrightarrow \{|w| < 1\} \quad \text{и} \quad \psi\ :\ G \longrightarrow \{|\zeta| < 1\}\ .$$

Продолжая их по непрерывности на границы, получим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\overline{D} & \xrightarrow{\ f\ } & \overline{G} \\
{\scriptstyle \varphi^{-1}}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \psi} \\
\overline{K} = \{|w| \leqslant 1\} & \xrightarrow[\psi\circ f\circ\varphi^{-1}]{} & \{|\zeta| \leqslant 1\} = \overline{E}
\end{array}$$

Отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$: $K \longrightarrow E$ — дробно-линейное, т. е.

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) = e^{i\theta} \cdot \frac{w - a}{1 - \overline{a}w}\,, \quad \text{где} \quad |a| < 1\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

При этом отображении точкам $t_1,\ t_2,\ t_3\ \in \operatorname{Fr} D$ соответствуют три точки $t_1',\ t_2',\ t_3' \in \operatorname{Fr} K$, а точкам $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in \operatorname{Fr} G$ — три точки $\xi_1',\ \xi_2',\ \xi_3' \in \operatorname{Fr} E$. Но условиями $t_k' \longmapsto \xi_k'$ при $k = 1\,,\,2\,,\,3$ дробно-линейная функция определяется однозначно. ▶

Рассмотрим теперь проблему соответствия границ при конформном отображении областей, все граничные точки которых — достижимые, но сами границы не являются жордановыми кривыми. В этом случае теоремы о соответствии границ в приведенных выше формулировках неверны, поэтому сами формулировки нуждаются в уточнениях.

Определение 61. *Расстоянием по области $D \subset \mathbb{C}$ между точками z_1, $z_2 \in D$ называется точная нижняя граница длин ломаных, лежащих в D и соединяющих точки z_1 и z_2.*

Обозначая это расстояние через $\rho_D(z_1, z_2)$, можно показать, что справедливы следующие факты:

$$1^\circ.\ \rho_D(z_1, z_2) \geqslant 0\,;\quad \rho_D(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2\,;$$
$$2^\circ.\ \rho_D(z_1, z_2) = \rho_D(z_2, z_1)\,;$$
$$3^\circ.\ \rho_D(z_1, z_2) + \rho_D(z_2, z_3) \geqslant \rho_D(z_1, z_3)\,.$$

Таким образом, пара $(D\,,\ \rho_D)$ есть метрическое пространство, в котором метрика задается с помощью расстояния по области. Эта метрика называется *метрикой Мазуркевича.* Если точки $z_1, z_2 \in D$ расположены достаточно близко одна от другой, то $\rho_D(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, т. е. в достаточно малой окрестности каждой точки области D метрика Мазуркевича совпадает с метрикой Евклида. Пусть $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная (в смысле метрики Мазуркевича) последовательность точек области D. Так как $|z_n - z_m| \leqslant \rho_D(z_n, z_m)$, то она будет фундаментальной и в смысле метрики Евклида. Ее предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ лежит либо в области D, либо на ее границе $\operatorname{Fr} D$. Таким образом, метрическое пространство $(D\,,\ \rho_D)$ не является полным. Его пополнение по метрике Мазуркевича будем называть *компактификацией Мазуркевича* области D и обозначать через $D \sqcup \partial D$, где точки из ∂D — классы эквивалентных фундаментальных последовательностей, сходящихся к точкам границы. На рис. 40 показана компактификация Мазуркевича круга, разрезанного по радиусу. Для ограниченных односвязных областей, все граничные точки которых — достижимые, справедлива следующая теорема.

Теорема 94 (о соответствии границ). *Пусть D — ограниченная односвязная область, все граничные точки которой — достижимые. Функцию f, реализующую конформный гомеоморфизм $f\ :\ \ D \longrightarrow \{|w| < 1\}$, можно продолжить по непрерывности на компактификацию Мазуркевича $D \sqcup \partial D$ до гомеоморфизма $f\ :\ D \sqcup \partial D \longrightarrow \{|w| \leqslant 1\}$. Отображающая функция определяется однозначно, если потребовать, чтобы три заданные точки t_1, t_2,*

$t_3 \in \partial D$ перешли на три заданные точки окружности ξ_1, ξ_2, ξ_3 (с учетом ориентации).

Доказательство можно провести по схеме доказательства теоремы 90, используя вместо евклидовой метрики метрику Мазуркевича. Рассмотрим теперь случай произвольной ограниченной односвязной области (т. е. такой, которая имеет недостижимые граничные точки).

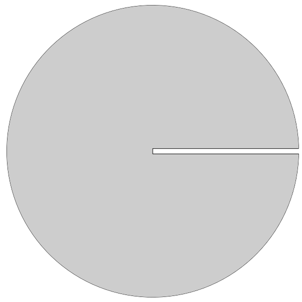

Рис. 40. Компактификация круга с разрезом

Для полного исследования соответствия границ при конформном гомеоморфизме $f : D \longrightarrow \{|w| < 1\}$ введем понятие *граничного элемента.* Пусть в области D имеется последовательность $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ *поперечных разрезов*, т. е. попарно не пересекающихся жордановых кривых, лежащих в области D, соединяющих две достижимые граничные точки, обладающая следующими свойствами. Разрез C_1 лежит в области D, соединяет две достижимые граничные точки области D и делит ее на две связные компоненты, одну из которых обозначим через B_1. Разрез C_2 лежит в области B_1, соединяет две различные достижимые граничные точки области D, отличные от концов кривой C_1 и делит область B_1 на две области. Пусть B_2 — та из этих областей, которая не имеет на своей границе точек кривой C_1. И вообще, пусть разрез C_{n+1} лежит в B_n, соединяет две различные достижимые граничные точки области D и делит B_n на две области. Пусть B_{n+1} — та из областей, которая не имеет на своей границе точек кривой C_n. Замыкания этих областей вложены одно в другое $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \ldots \supset \overline{B_n} \supset \ldots$, причем $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} \neq \varnothing$ (по теореме о вложенных компактах). Разрезы C_n считаем такими, что E содержит только граничные точки области D (т. е. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} B_n = \varnothing$). Соответствующие областям B_n области в круге $|w| < 1$ обозначим через G_n: замкнутые области $\overline{G_n}$ также имеют непустые пересечения. Если это пересечение состоит из единственной точки w_0 окружности $|w| = 1$, то множество E будем называть *элементом края* (или *простым концом*) области D. Можно показать, что элемент края, соответствующий точке w_0 окружности $|w| = 1$, не зависит от последовательности поперечных разрезов, его определяющих. И обратно, каждой точке w_0, лежащей на окружности $|w| = 1$, можно сопоставить единственный элемент края области D. Множество всех элементов края области D обозначим через ∂D, а топологию на $D \sqcup \partial D$ зададим так, чтобы указанное выше соответствие между элементами края и точками окружности было гомеоморфизмом. Полученное таким образом пространство $D \sqcup \partial D$ называется *компактификацией Каратеодори* области D. Тогда наиболее общую теорему о соответствии границ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 95. *Если $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — односвязная область, то функцию f, реализующую конформный гомеоморфизм $f : D \longrightarrow \longrightarrow \{|w| < 1\}$, можно продолжить по непрерывности до гомеоморфизма компактификации Каратеодори $D \sqcup \partial D$ на замкнутый круг $\{|w| \leqslant 1\}$.*

2. Экстремальные свойства отображающей функции

В основу доказательства теоремы 88 (Римана) было положено одно из многих экстремальных свойств функции, реализующей конформный гомеоморфизм $f : D \longrightarrow \{|w| < 1\}$. Оказывается, что некоторые из экстремальных свойств остаются справедливыми не только в классе однолистных функций, но и в классе всех аналитических в данной области функций, надлежащим образом нормированных. Ниже приводится несколько такого рода свойств. Всюду в этом пункте под областью D будем понимать односвязную область $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, граница которой содержит не менее двух различных точек. Предварительно в качестве следствия из теоремы 88 (Римана) установим теорему существования и единственности конформного отображения в следующей формулировке.

Теорема 96. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ односвязная область, граница которой содержит не менее двух различных точек. Существует единственная функция F_0, реализующая конформный гомеоморфизм области D на некоторый круг с центром в начале координат и удовлетворяю-*

щая следующим условиям: $F_0(z_0) = 0$, $F_0'(z_0) = 1$, *где* $z_0 \in D$ *— произвольно зафиксированная точка.*

◀ Действительно, такую функцию можно задать равенством $F_0(z) := \dfrac{f_0(z)}{f_0'(z_0)}$, где f_0 — отображающая функция из теоремы Римана[6]. Очевидно, что функция F_0 удовлетворяет условиям $F_0(z_0) = 0$, $F_0'(z_0) = 1$ и реализует конформный гомеоморфизм области D на круг $\{|w| < R\}$, где $R := \dfrac{1}{f_0'(z_0)}$.

Чтобы доказать единственность, предположим, что существует еще одна отображающая функция $F_1 \ : \ B \longrightarrow \{|\zeta| < R_1\}$, такая, что $F_1(z_0) = 0$, $F_1'(0) = 1$. Композиция $\zeta = f(w) := F_1[F_0^{-1}(w)]$ реализует конформный гомеоморфизм круга $\{|w| < R\}$ на круг $\{|\zeta| < R_1\}$ и удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Отсюда легко заключить, что $f = \mathrm{Id}$, т. е. $R_1 = R$ и $F_1 = F_0$. ▶

Определение 62. *Пусть* $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *односвязная область, граница которой содержит не менее двух различных точек, и* $z_0 \in D$. *Конформным радиусом области* D *относительно точки* z_0 *называется число* $R := \dfrac{1}{f_0'(z_0)}$, *где* f_0 *— отображающая функция из теоремы Римана.*

Теорема 97. *Пусть* $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *— односвязная область, и* $0 \in D$. *В семействе* $\mathfrak{N}$ *всех аналитических функций* $F \ : \ D \longrightarrow \mathbb{C}$, *таких, что* $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, *минимум функционалу*

$$F \longmapsto M(F) := \sup_{z \in D} |F(z)|$$

доставляет единственная функция F_0, *реализующая конформный гомеоморфизм* $F_0 \ : \ D \longrightarrow \{|w| < R\}$, *причем* $M(F_0) = R$.

◀ Пусть $f_0 \ : \ D \longrightarrow \{|w| < 1\}$, $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$ — отображающая функция из теоремы Римана, а $z = \varphi(\zeta)$ — обратная к ней функция. При отыскании минимума функционала $F \longmapsto M(F)$ достаточно ограничиться только такими функциями F, для которых

[6] Так для краткости условимся называть функцию, реализующую конформный гомеоморфизм области D на круг $\{|w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям $f_0(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.

$M(F) < +\infty$. Тогда функция $\psi(\zeta) := \dfrac{F[\varphi(\zeta)]}{M(F)}$ аналитична в круге $\{|\zeta| < 1\}$, причем $\psi(0) = 0$, $|\psi(\zeta)| < 1$. Отсюда на основании леммы Шварца заключаем, что $|\psi'(0)| \leqslant 1$, т. е. $\dfrac{F'(0) \cdot \varphi'(0)}{M(F)} \leqslant 1$, откуда $M(F) \geqslant \varphi'(0) = \dfrac{1}{f_0'(0)} = R$, где R — конформный радиус. Опять применяя лемму Шварца, заключаем, что равенство $\psi'(0) = 1$ имеет место только для функции $\psi_0(\zeta) \equiv \zeta$, т. е. для функции $F_0(\zeta) := \dfrac{f_0(\zeta)}{f_0'(0)}$. ►

Замечание. Из доказанного экстремального свойства вытекают некоторые свойства конформного радиуса области D относительно точки $0 \in D$. Во-первых, *от расширения области D ее конформный радиус может лишь возрасти*, поскольку от расширения области D семейство $\mathfrak{N}$ сужается. Во-вторых, так как для тождественного отображения $\mathrm{Id} : D \longrightarrow D$ величина $M(\mathrm{Id})$ равна $\max\limits_{z \in D} |z|$, то R не превосходит этого максимума. С другой стороны, предположим, что R меньше минимума $\min\limits_{z \in \overline{D}} |z|$. Тогда экстремальная функция $F_0(z) = \dfrac{f_0(z)}{f_0'(0)}$, $F_0(0) = 0$ будет аналитической в круге $\{|z| < R + \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$ и, кроме того, $|F_0(z)| < R$. Отсюда в силу леммы Шварца вытекает неравенство $|F_0'(0)| \leqslant \dfrac{R}{R+\varepsilon} < 1$, которое противоречит равенству $F_0'(0) = 1$. Это вместе с предыдущим утверждением показывает, что $\{|z| = R\} \bigcap \mathrm{Fr}\, B \neq \varnothing$, т. е. *на окружности $|z| = R$, где R — конформный радиус, обязательно имеются точки, лежащие на границе области D.* Если. в частности, D — круг, то его конформный радиус относительно его центра совпадает с обычным радиусом этого круга.

Теорема 98 (принцип Линделёфа). *Пусть функции*

$$\varphi_1 : K \longrightarrow D_1 \quad \text{и} \quad \varphi_2 : K \longrightarrow D_2$$

аналитичны в круге $K := \{|\zeta| < 1\}$, причем φ_2 однолистна, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ и $D_1 \subset D_2$. Тогда $|\varphi_1'(0)| \leqslant |\varphi_2'(0)|$, а равенство достигается только в случае $\varphi_1(\zeta) \equiv \varphi_2(\varepsilon \cdot \zeta)$, где $|\varepsilon| = 1$.

◄ Пусть $\zeta = f_2(z)$ — функция, обратная к φ_2. Композиция $w = f_2[\varphi_1(\zeta)]$ отображает круг $|\zeta| < 1$ на область, лежащую в этом круге, притом так, что $f_2[\varphi(0)] = 0$. Применяя лемму Шварца, заключаем, что $|\varphi_1'(0) / \varphi_2'(0)| \leqslant 1$, а знак равенства имеет место только для функции $f_2[\varphi_1(\zeta)] \equiv \varepsilon \cdot \zeta$, т. е. при $\varphi_1(\zeta) \equiv \varphi_2(\varepsilon \cdot \zeta)$. ►

Теорема 99 (минимизация площади). *В семействе* $\mathfrak{N}$ *всех функций* F, *аналитических в области* $D \ni 0$ *и таких. что* $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, *минимум величине*

$$\mathfrak{A}(F) := \iint\limits_D |F'(z)|^2 dxdy\,, \quad \textit{где} \quad z = x + iy\,, \tag{30.7}$$

доставляет функция $F_0(z) := \dfrac{f_0(z)}{f_0'(0)}$, *и только она.*

◄ При отыскании минимума функционала $F \longmapsto \mathfrak{A}(F)$ достаточно ограничиться только такими функциями F, для которых $\mathfrak{A}(F) < +\infty$. Взяв отображающую функцию $f_0 \ : \ D \longrightarrow \{|z| < 1\}$ с $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$, и обратную к ней функцию $z = \varphi(\zeta)$, преобразуем интеграл (30.7). Вводя обозначения $\zeta = \xi + i\eta$, $z = \varphi(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$, получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = |\varphi'(\zeta)|^2\,.$$

Производя в интеграле (30.7) замену $z = \varphi(\zeta)$, затем переходя к полярным координатам $\zeta = re^{i\varphi}$, найдем

$$\mathfrak{A}(F) := \iint\limits_D |F'(z)|^2 dxdy = \iint\limits_{|\zeta|<1} |F'[\varphi(\zeta)]| \cdot |\varphi'(\zeta)|^2 d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{r<1} \left|F'[\varphi(\zeta)] \cdot \varphi'(\zeta)\right|^2 r\, drd\varphi\,.$$

Используя разложение

$$F'[\varphi(\zeta)] \cdot \varphi'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \zeta^n \quad \text{где} \quad a_0 = F'(0) \cdot \varphi'(0) = \frac{1}{f_0'(0)}\,,$$

получим

$$\mathfrak{A}(F) = \lim_{\substack{\rho\to 1\\ \rho<1}} \iint\limits_{r\leqslant\rho} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a}_m r^{n+m+1}e^{i(n-m)\varphi}drd\varphi =$$

$$= \lim_{\substack{\rho\to 1\\ \rho<1}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a}_m \iint\limits_{r\leqslant\rho} r^{n+m+1}e^{i(n-m)\varphi}drd\varphi =$$

$$= 2\pi \lim_{\substack{\rho\to 1\\ \rho<1}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int\limits_0^{\rho} r^{2n+1}dr = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int\limits_0^1 r^{2n+1}dr =$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \geqslant \pi|a_0|^2.$$

Итак, $\mathfrak{A}(F) \geqslant \pi\cdot|a_0|^2$, причем равенство достигается только при $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, т. е. когда $F_0'[\varphi(\zeta)]\cdot\varphi'(\zeta) \equiv a_0 = \dfrac{1}{f_0'(0)}$. Интегрируя это равенство в пределах от 0 до ζ, найдем $F_0[\varphi(\zeta)] \equiv \zeta/f_0'(0)$. Полагая здесь $\varphi(\zeta) = z$, $\zeta = f_0(z)$, получим окончательно

$$F_0(z) = f_0(z)/f_0'(0)\,. \quad ►$$

Замечание. Если функция $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ однолистна, то интеграл (30.7) равен площади образа области D при отображении F.

◄ В самом деле, имеем

$$\text{площадь}\, F(D) = \iint\limits_{F(D)} dudv = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{B} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = \iint\limits_{D} |F'(z)|^2\, dxdy\,. \quad ►$$

§ 3. Конформные отображения прямолинейных многоугольников

Теорема Римана о конформных отображениях устанавливает существование функции, реализующей конформный гомеоморфизм данной односвязной области на внутренность единичного круга. Однако эта теорема является чистой теоремой существования, не дающей никаких средств для нахождения аналитического выражения отображающей функции. Проблема нахождения аналитического выражения для отображающей функции является, таким образом, самостоятельной. Решению этой проблемы для некоторых частных классов односвязных областей (а именно, многоугольников) посвящается настоящий параграф.

1. Интегральная формула Кристоффеля — Шварца

Рассмотрим задачу отыскания функции $z = \varphi(\zeta)$, реализующей конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на внутреннюю область произвольного односвязного прямолинейного многоугольника (полигона).

Итак, пусть Π — произвольный n-угольник (пока мы будем считать его ограниченным) с вершинами в точках $b_1, b_2, \ldots, b_n$, упорядоченных в направлении стандартной ориентации края $\partial\Pi$, с внутренними углами в этих точках, равными $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ соответственно[7].

В силу теоремы 90 (о соответствии границ) функцию $z = \varphi(\zeta)$ можно продолжить по непрерывности на край $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ до гомеоморфизма замкнутых областей. Точки плоскости ζ, которые при отображении $z = \varphi(\zeta)$ переходят в вершины данного n-угольника, обозначим соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причем для определенности предположим, что

$$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < +\infty .$$

Таким образом, мы считаем, что $\varphi(a_k) = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Введем

[7] В этом контексте удобно выражать углы в долях числа π.

обозначения

$$l_1 := (a_1\,,\, a_2)\,,\ l_2 := (a_2\,,\, a_3)\,,\ \ldots\,,\ l_n := (a_n, +\infty] \cup [-\infty\,,\, a_1)\,.$$

Образом каждого из этих интервалов является соответствующая сторона полигона Π, и мы обозначим $\lambda_k := \varphi(l_k)$, $k = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ n$. На каждом из интервалов l_k действительной оси функция φ принимает значения, лежащие на прямолинейном интервале λ_k — соответствующей стороне полигона Π. В силу принципа симметрии Римана — Шварца функцию φ можно аналитически продолжить через каждый из интервалов l_k в нижнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im}\zeta < 0\}$ (рис. 41). При продолжении функции φ через различные интервалы l_k получаются, вообще говоря, различные элементы аналитической функции, определенные в нижней полуплоскости. Обозначим через φ_k ту функцию, которая получается в результате аналитического продолжения функции φ через интервал l_k, и выразим ее явно через функцию φ и через уравнение стороны λ_k полигона Π. Согласно принципу симметрии Римана — Шварца значение $z = \varphi_k(\zeta)$ симметрично относительно стороны λ_k значению $z^* = \varphi(\overline{\zeta})$. Чтобы найти выражение для симметричной точки, докажем следующую лемму.

Лемма. *Если $z \longmapsto z^*$ — отображение симметрии относительно прямой $Ax + By + C = 0$, то его явное аналитическое выражение можно найти из уравнения*

$$A \cdot \frac{z^* + \overline{z}}{2} + B \cdot \frac{z^* - \overline{z}}{2i} + C = 0\,. \tag{30.8}$$

◀ Очевидно, что точка $z = x + iy$ лежит на данной прямой, если и только если выполняется равенство $A \cdot \dfrac{z + \overline{z}}{2} + B \cdot \dfrac{z - \overline{z}}{2i} + C = 0$. Значит, для точек, лежащих на данной прямой, лемма справедлива (каждая такая точка симметрична сама себе, т. е. $z^* = z$).

Пусть теперь точка z не лежит на данной прямой. Решая уравнение (30.8) относительно z^*, получим

$$z^* = -\frac{A + Bi}{A - Bi} \cdot \overline{z} - \frac{2C}{A - Bi}\,. \tag{30.9}$$

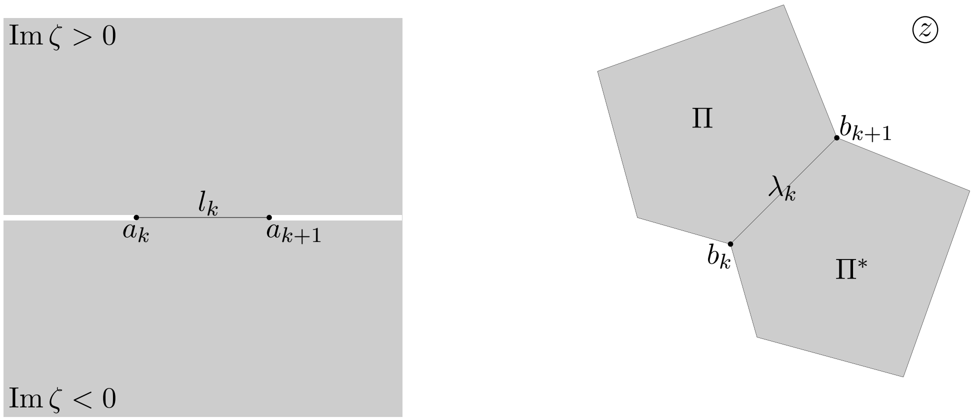

Рис. 41. Иллюстрация к аналитическому продолжению отображающей функции

Так как коэффициент при $\overline{z}$ равен по модулю единице, то уравнение (30.9) после очевидных переобозначений можно переписать в виде

$$z^* = e^{i\theta} \cdot \overline{z} + \beta\,. \tag{30.10}$$

Эта функция есть композиция отображения комплексного сопряжения $z \longmapsto \overline{z}$, поворота $\overline{z} \longmapsto e^{i\theta} \cdot \overline{z}$ и сдвига $e^{i\theta} \cdot \overline{z} \longmapsto e^{i\theta} \cdot \overline{z} + \beta$. Поэтому при отображении (30.10) сохраняются расстояния между точками и абсолютные величины углов между прямыми. Проведем через точку z перпендикуляр к данной прямой, а точку их пересечения обозначим через z_0. Так как отображение (30.9) сохраняет абсолютные величины углов, то отрезок z^*z_0 перпендикулярен к данной прямой, т. е. точки z и z^* лежат на одном перпендикуляре к данной прямой. Так как это отображение сохраняет расстояния, то $|z - z_0| = |z^* - z_0|$, то точки z и z^* равноудалены от данной прямой. И, наконец, точки z и z^* лежат по разные стороны от данной прямой, иначе было бы $z = z^*$, т. е. точка z лежала бы на данной прямой. Итак, (30.9) — отображение симметрии относительно данной прямой. ▶

Используя лемму, выразим φ_k через φ

$$\varphi_k(\zeta) = e^{i\theta_k} \cdot \overline{\varphi(\overline{\zeta})} + \beta_k\,, \quad k = 1\,, \dots\,, n\,, \tag{30.11}$$

где θ_k и β_k — некоторые константы. Функция φ_k реализует конформный гомеоморфизм нижней полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta < 0\}$ на полигон Π_k, симметричный полигону Π относительно стороны λ_k. Поэтому функция

$$\widehat{\varphi}_k(\zeta) := \begin{cases} \varphi(\zeta) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\zeta > 0\,, \\ \varphi(\zeta) = \varphi_k(\zeta) \quad \text{при} \quad \zeta \in l_k\,, \\ \varphi_k(\zeta) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\zeta < 0 \end{cases}$$

реализует конформный гомеоморфизм области

$$D_k := \{\operatorname{Im}\zeta > 0\} \sqcup l_k \sqcup \{\operatorname{Im}\zeta < 0\} \quad \text{на область} \quad \Pi \sqcup \lambda_k \sqcup \Pi_k\,,$$

а производная $\widehat{\varphi}'_k$ нигде в области $D_k \cap \mathbb{C}$ не обращается в нуль.

Теперь выясним, как связаны между собой различные элементы φ_μ и φ_ν, где $\mu \neq \nu$. Полагая в равенстве (30.11) $k = \mu$ и $k = \nu$, получим

$$\varphi_\mu(\zeta) = e^{i\theta_\mu} \cdot \overline{\varphi(\overline{\zeta})} + \beta_\mu\,, \qquad \varphi_\nu(\zeta) = e^{i\theta_\nu} \cdot \overline{\varphi(\overline{\zeta})} + \beta_\nu\,.$$

Исключая из этих равенств $\overline{\varphi(\overline{\zeta})}$, получим

$$e^{i\theta\nu}\varphi_\mu(\zeta) - e^{i\theta\mu}\varphi_\nu(\zeta) = e^{i\theta\nu}\beta_\mu - e^{i\theta\mu}\beta_\nu$$

или, обозначая $q_{\mu\nu} := \beta_\mu - e^{i(\theta\mu - \theta_\nu)}\beta_\nu$, найдем

$$\varphi_\mu(\zeta) = e^{i(\theta\mu - \theta_\nu)}\varphi_\nu(\zeta) + q_{\mu\nu}\,. \tag{30.12}$$

Отсюда видно, один элемент получается из другого с помощью движения, т. е. композиции поворота и сдвига (но без отражения). Чтобы исключить из равенства (30.12) коэффициенты, продифференцируем его дважды. Тогда получим

$$\varphi'_\mu(\zeta) = e^{i(\theta\mu - \theta_\nu)}\varphi'_\nu(\zeta) \quad \text{и} \quad \varphi''_\mu(\zeta) = e^{i(\theta\mu - \theta_\nu)}\varphi''_\nu(\zeta)\,.$$

Разделив второе из этих равенств на первое, будем иметь

$$\frac{\varphi''_\mu(\zeta)}{\varphi'_\mu(\zeta)} = \frac{\varphi''_\nu(\zeta)}{\varphi'_\nu(\zeta)}\,, \quad \mu\,, \nu = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n\,.$$

Это означает, что функция φ''/φ', как и сама функция φ, допускает аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость через любой из интервалов l_k, продолжается туда *однозначным образом* (т. е. результат аналитического продолжения не зависит от того, через какой из интервалов l_k это продолжение осуществляется). Поскольку φ' в верхней полуплоскости и на интервалах l_k не обращается в нуль, то однозначная функция φ''/φ' будет аналитической всюду в $\widehat{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, точек $a_1, \ldots, a_n$ и точки ∞.

В окрестности точки $\zeta = \infty$ имеем

$$\varphi(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \ldots ,$$

где $c_1 \neq 0$, поскольку функция φ однолистна. Поэтому будет

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{c_1}{\zeta^2} - \frac{2c_2}{\zeta^3} - \ldots , \qquad \varphi''(\zeta) = \frac{2c_1}{\zeta^3} + \frac{6c_2}{\zeta^4} + \ldots .$$

Разделив второе из этих разложений на первое, получим

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = -\frac{2}{\zeta} + \frac{\gamma}{\zeta^2} + \ldots ,$$

т. е. φ''/φ' аналитична и равна нулю в точке $\zeta = \infty$. Далее, функция φ конформно отображает полукруг $\{|\zeta - a_k| < \rho ,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ достаточно малого радиуса ρ на некоторую окрестность точки b_k, лежащую в угловой области с углом величины $\pi\alpha_k$. Поэтому функция $t = [\varphi(\zeta) - \varphi(a_k)]^{1/\alpha_k}$ реализует конформный гомеоморфизм полукруга $\{|\zeta - a_k| < \rho ,\ \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на окрестность точки $t = 0$, лежащую в некоторой полуплоскости. По принципу симметрии она продолжается до функции, реализующей конформный гомеоморфизм круга $\{|\zeta - a| < \rho\}$ на полную окрестность точки $t = 0$, и потому

$$[\varphi(\zeta) - \varphi(a_k)]^{1/\alpha_k} = (\zeta - a_k) \cdot \psi_1(\zeta) , \quad \text{где} \quad \psi_1(a_k) \neq 0 .$$

Отсюда находим

$$\varphi(\zeta) = \varphi(a_k) + (\zeta - a_k)^{\alpha_k} \cdot \psi_2(\zeta) , \quad \text{где} \quad \psi_2(a_k) \neq 0 ;$$

$$\varphi'(\zeta) = (\zeta - a_k)^{\alpha_k - 1} \cdot \psi_3(\zeta) , \quad \text{где} \quad \psi_3(a_k) \neq 0 ;$$

$$\ln \varphi'(\zeta) = (\alpha_k - 1) \cdot \ln(\zeta - a_k) + \ln \psi_3(\zeta) .$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$\frac{d}{d\zeta}\ln\varphi'(\zeta)=\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}=\frac{\alpha_k-1}{\zeta-a_k}+\frac{\psi_3'(\zeta)}{\psi_3'(\zeta)}\,,\quad k=1\,,\,\ldots\,,\,n\,.$$

Таким образом, функция $\dfrac{d}{d\zeta}\ln\varphi'(\zeta)$ аналитична всюду в $\widehat{\mathbb{C}}$, кроме точек $a_1\,,\,\ldots\,,\,a_n$, где она имеет простые полюсы с вычетами в них, равными $\alpha_1-1\,,\,\ldots\,,\,\alpha_n-1$ соответственно, и равна нулю в точке ∞. Отсюда на основании теоремы 55 (называемой обобщенной теоремой Лиувилля) заключаем, что

$$\frac{d}{d\zeta}\ln\varphi'(\zeta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k-1}{\zeta-a_k}\,. \tag{30.13}$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\ln\varphi'(\zeta)=\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k-1}{t-a_k}\,dt=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\ln(\zeta-a_k)+\ln C\,,$$

откуда, потенцируя, находим

$$\varphi'(\zeta)=C\cdot\prod_{k=1}^{n}(\zeta-a_k)^{\alpha_k-1}\,.$$

Интегрируя это равенство, имеем окончательно

$$\varphi(\zeta)=C\cdot\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}(t-a_k)^{\alpha_k-1}dt+C'\,, \tag{30.14}$$

где C и C' — произвольные постоянные, а ζ_0 — произвольно зафиксированная точка замкнутой верхней полуплоскости.

Равенство (30.14) называется *формулой Кристоффеля — Шварца*. Она дает явное аналитическое выражение функции, реализующей конформный гомеоморфизм полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta>0\}$ на ограниченный полигон.

Выясним теперь, как изменится формула Кристоффеля — Шварца, если одна из вершин полигона является образом точки $\zeta = \infty$. Пусть для определенности $a_n = \infty$, т. е. $\varphi(\infty) = b_n$. Тогда в проколотой окрестности точки $\zeta = \infty$ будут выполняться следующие равенства:

$$\varphi(\zeta) = b_n + \frac{\psi_4(\zeta)}{\zeta^{\alpha_n}}, \quad \text{где} \quad \psi_4(\infty) \neq 0,$$

$$\varphi'(\zeta) = \frac{\psi_5(\zeta)}{\zeta^{\alpha_n+1}}, \quad \text{где} \quad \psi_5(\infty) \neq 0,$$

$$\varphi''(\zeta) = \frac{\psi_6(\zeta)}{\zeta^{\alpha_n+2}}, \quad \text{где} \quad \psi_6(\infty) \neq 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = \frac{\psi_7(\zeta)}{\zeta}, \quad \text{где} \quad \psi_7(\infty) \neq 0,$$

т. е. функция $\varphi''(\zeta)/\varphi'(\zeta)$ аналитична и равна нулю в точке $\zeta = \infty$. Поэтому в случае $\varphi(\infty) = b_n$ формула Кристоффеля — Шварца будет иметь следующий вид:

$$\varphi(\zeta) = C \cdot \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^{n-1} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} dt + C', \tag{30.15}$$

где C и C' — произвольные постоянные, а ζ_0 — произвольно зафиксированная точка верхней полуплоскости.

Отметим еще, что, выбрав точки $a_1, \ldots, a_n$ не на вещественной оси, а на произвольной $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности, мы получили бы ту же самую формулу Кристоффеля — Шварца для функции, реализующей конформный гомеоморфизм ограниченного ею $\widehat{\mathbb{C}}$-круга на полигон Π. Эта формула будет отображать на полигон тот из двух $\widehat{\mathbb{C}}$-кругов, который обходится точками $a_1, \ldots, a_n$ в положительном направлении.

В силу теоремы единственности конформного отображения произвольно можно задать только три из точек $a_1, \ldots, a_n$. Остальные точки a_k, а также постоянные C и C' в формуле Кристоффеля — Шварца приходится находить из системы уравнений

$$\varphi(a_k) = b_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Можно показать, что при конечных $b_1, \ldots, b_n$ эта система разрешима.

Формула Кристоффеля — Шварца имеет смысл и в тех случаях, когда одна или несколько вершин полигона Π совпадают с точкой ∞. В таких случаях нуждается в уточнении вопрос о величинах углов в бесконечно удаленных вершинах полигона, а также усложняется вопрос о вычислении постоянных.

Пусть теперь φ — функция, реализующая конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости (или любого другого $\widehat{\mathbb{C}}$-круга) на полигон Π, содержащий внутри точку ∞, и пусть $\varphi(a) = \infty$, где a — некоторая точка верхней полуплоскости. Тогда будут иметь место следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\varphi(\zeta) &= \frac{c_{-1}}{\zeta - a} + c_0 + c_1 \cdot (\zeta - a) + \ldots, \\
\varphi'(\zeta) &= -\frac{c_{-1}}{(\zeta - a)^2} + c_1 + \ldots, \\
\varphi''(\zeta) &= \frac{2c_{-1}}{(\zeta - a)^3} + \ldots.
\end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что в окрестности точки a будет

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = -\frac{2}{\zeta - a} + \ldots,$$

т. е. в точке a имеется простой полюс с вычетом (-2). Поэтому вместо равенства (30.13) будем иметь

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{\zeta - a_k} - \frac{2}{\zeta - a},$$

из которого интегрированием и потенцированием находим

$$\varphi(\zeta) = C \cdot \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^{n} (t - a_k)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{dt}{(t - a)^2} + C'. \tag{30.16}$$

2. Функции прямолинейных треугольников

В качестве простого применения формулы Кристоффеля — Шварца рассмотрим конформный гомеоморфизм $z = \varphi(\zeta)$ полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на прямолинейный треугольник. Предположим, что прообразами вершин a_1, a_2, a_3 являются точки 0, 1, ∞ соответственно. Применяя формулу (30.15), получим

$$z = \varphi(\zeta) = C\int\limits_0^\zeta t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt + C'\,. \tag{30.17}$$

Эта функция допускает аналитическое продолжение по принципу симметрии через интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. После каждого такого продолжения получается функция, реализующая конформный гомеоморфизм нижней полуплоскости на треугольник, симметричный данному относительно соответствующей стороны. Полученные новые гомеоморфизмы в свою очередь допускают аналитическое продолжение на верхнюю полуплоскость по принципу симметрии. Этот процесс допускает неограниченное продолжение. В результате получится отображение бесконечнолистной римановой поверхности, лежащей над плоскостью переменного ζ и разветвленной над точками 0, 1, ∞, на риманову поверхность, лежащую над плоскостью переменного z и представляющую собой объединение треугольников, получающихся из основного треугольника с помощью симметрий относительно сторон треугольника и их образов при симметриях.

Здесь возникают два различных случая в зависимости от того, являются ли треугольники, которые получаются в результате зеркальных отражений, частично пересекающимися друг с другом[8], или не являются, образуя однократное покрытие плоскости («паркет»). В этом последнем случае функция, полученная из функции (30.17) в результате всевозможных аналитических продолжений, будет однолистной, а обратная к ней функция — однозначной в плоскости переменного z.

Найдем ограничения на величины $\pi\alpha_1$, $\pi\alpha_2$, $\pi\alpha_3$ углов треугольника, при которых имеет место случай «паркета». Это будет происходить

[8]Здесь имеется в виду существование общих внутренних точек.

тогда и только тогда, когда после некоторого четного числа зеркальных отражений, оставляющих на месте любую данную вершину, треугольник возвратится на место, обойдя полный круг около этой вершины. Это означает, что число 2π является четнократным величины угла в данной вершине, т. е. что числа

$$r_k := \frac{2\pi}{2 \cdot \pi\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_k}\,, \quad k = 1\,,\,2\,,\,3$$

являются целыми. Так как, кроме того, $\pi\alpha_1 + \pi\alpha_2 + \pi\alpha_3 = \pi$, т. е. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, то целые положительные числа r_1, r_2, r_3 должны удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 1\,. \tag{30.18}$$

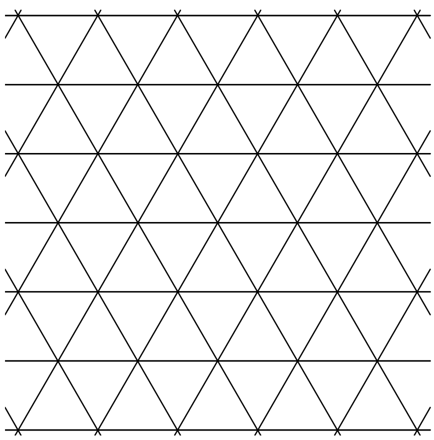

Рис. 42. «Паркет» № 1

Таким образом, все случаи возникновения «паркета» можно получить, решая диофантово уравнение (30.18). Чтобы избежать симметричных повторений, будем считать, что $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant +\infty$. Первое решение получим, полагая

$$r_1 = r_2 = r_3 = 3\,.$$

Этому решению соответствует «паркет», составленный из правильных треугольников (рис. 42). В любом другом случае должно быть $r_1 < 3$. Если $r_1 = 1$, то уравнение (30.18) приводится к виду $\dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = 0$. Оно неразрешимо в натуральных числах, но его решение можно взять в виде $r_2 = r_3 = +\infty$. Этому решению соответствует треугольник с углами π, 0, 0, т. е. полоса. Если $r_1 = 2$, то уравнение (30.18) приводится к виду $\dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{2}$. Последнее уравнение имеет три решения: $r_2 = r_3 = 4$, $r_2 = 3\,,\ r_3 = 6$ и $r_2 = 2\,,\ r_3 = +\infty$. Сведем полученные результаты в таблицу

№	r_1	r_2	r_3
1	3	3	3
2	1	$+\infty$	$+\infty$
3	2	4	4
4	2	3	6
5	2	2	$+\infty$

В «вырожденном» случае 2 отображающая функция (30.17) при надлежащем выборе констант имеет вид

$$z = \int\limits_0^\zeta \frac{dt}{1-t} = \ln\frac{1}{1-\zeta}\,,$$

что соответствует отображению полуплоскости на полосу, совершаемому логарифмической функцией. Обратная функция $\zeta = 1 - e^{-z}$ — периодическая с основным периодом $2\pi i$.

«Вырожденный» случай 5 соответствует полуполосе. Отображающая функция при надлежащем выборе констант имеет вид

$$z = \varphi(\zeta) = \int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{\pi}{2}\,.$$

Вычислив этот интеграл, получим $z = \arcsin(2\zeta - 1)$. Обратная функция $\zeta = (1+\sin z)/2$ — периодическая с основным периодом 2π.

В остальных случаях (№1, №4, №5) отображающие функции при надлежащем выборе констант имеют соответственно вид

$$z = \int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}}\,, \quad z = \int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[4]{t^2(1-t)^3}}\,, \quad z = \int\limits_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt[6]{t^3(1-t)^4}}\,.$$

Эти интегралы не являются элементарными функциями. Обратные к ним функции также не являются элементарными. Эти обратные функции относятся к классу двоякопериодических (эллиптических) функций. В следующем пункте дается пример и общее определение таких функций.

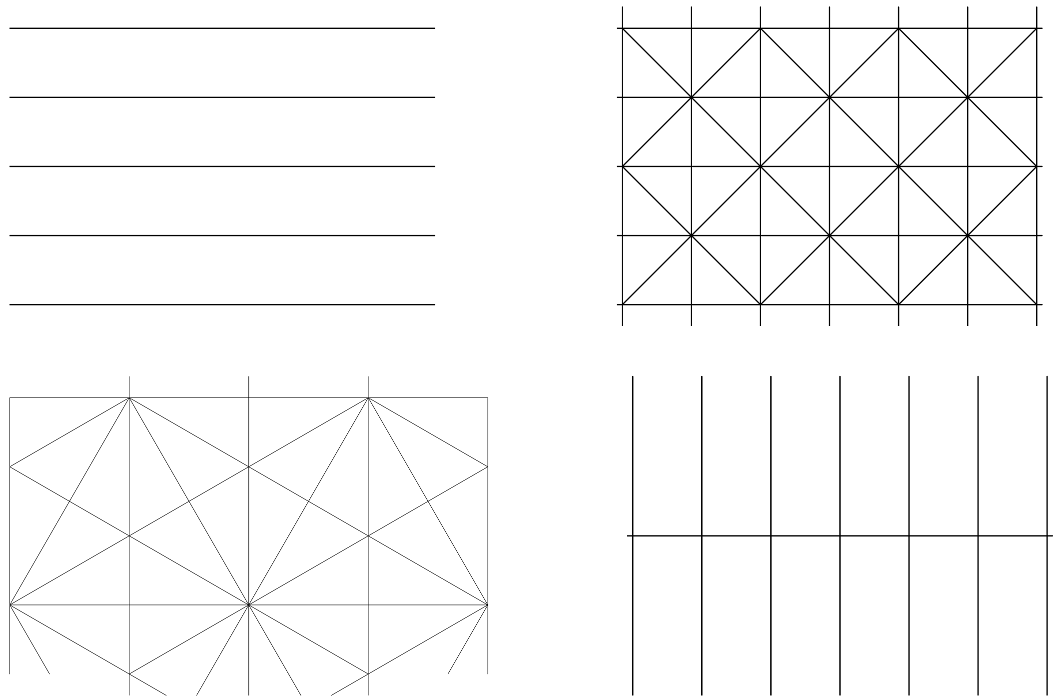

Рис. 43. «Паркеты» № 2 — № 5

3. Конформное отображение полуплоскости на прямоугольник. Понятие об эллиптических функциях

Применим теперь формулу Кристоффеля — Шварца для построения функции, реализующей конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$ на прямоугольник с вершинами в точках

$$\frac{\omega_1}{2}\,, \quad \frac{\omega_1}{2} + i\omega_2\,, \quad \frac{-\omega_1}{2} + i\omega_2\,, \quad \frac{-\omega_1}{2}\,,$$

где $\omega_1\,, \omega_2 \in \mathbb{R}_+$. Потребуем, чтобы при этом отображении точки $0,\ 1,\ \infty$ перешли бы соответственно в точки $0,\ \omega_1/2,\ i\omega_2$. Тогда точка $\dfrac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ будет образом некоторой точки $1/k$, где $0 < k < 1$. Значит, прообразами вершин прямоугольника $\dfrac{-\omega_1}{2} + i\omega_2,\ \dfrac{-\omega_1}{2},\ \dfrac{\omega_1}{2},\ \dfrac{\omega_1}{2} + i\omega_2$ будут соответственно точки $-1/k,\ -1,\ 1,\ 1/k$. Отображающая функция определяется по интегральной формуле Кристоффеля — Шварца

$$z = \varphi(\zeta) = c \cdot \int\limits_0^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,, \tag{30.19}$$

где взята та непрерывная ветвь корня, которая в точке $t = 0$ принимает значение $+1$. Так как при малых положительных значениях переменного ζ функция (30.19) должна быть положительной, то $c > 0$. Интеграл из (30.19) называется *эллиптическим интегралом первого рода в форме Лежандра.*

Постоянные c и k могут быть найдены из соответствия между граничными точками, т. е. из системы уравнений

$$\frac{\omega_1}{2} = c \cdot \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,, \quad i\omega_2 = ic \cdot \int\limits_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{|(1-t^2)(1-k^2t^2)|}}\,.$$

Отсюда легко следует равенство

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}}{\int\limits_1^{1/k} \dfrac{dt}{\sqrt{|(1-t^2)(1-k^2t^2)|}}}\,,$$

которое показывает, что параметр k зависит только от отношения ω_1/ω_2, т. е. для подобных прямоугольников параметр k принимает одно и то же значение. При возрастании k от 0 до 1 отношение ω_1/ω_2 возрастает от 0 до $+\infty$. Параметр c зависит от размеров прямоугольника. Если ω_1 и ω_2 постоянны, а параметр c изменяется, то прямоугольник подвергается преобразованию гомотетии с центром в точке $z = 0$. Можно показать, что указанное соответствие между парами (ω_1, ω_2) и (k, c) является биективным.

Продолжим отображающую функцию по принципу симметрии через интервалы

$$\left(-\infty\,,\, -\frac{1}{k}\right), \quad \left(-\frac{1}{k}\,,\, -1\right), \quad (-1\,,\,1)\,, \quad \left(1\,,\,\frac{1}{k}\right), \quad \left(\frac{1}{k}\,,\,+\infty\right).$$

В результате получим конформные гомеоморфизмы нижней полуплоскости на прямоугольники, симметричные данному относительно соответствующих сторон. К полученной таким образом функции опять можно применить принцип симметрии и продолжить ее аналитически через свободные края. Продолжая этот процесс неограниченно, мы в конечном итоге получим в плоскости переменного z множество прямоугольников, конгруэнтных данному и в совокупности образующих паркет.

Функция $\zeta = \varphi^{-1}(z)$, обратная к функции (30.19), однозначна в плоскости переменного z. Действительно, после четного числа отражений относительно вещественной оси точка ζ переходит сама на себя, поэтому значения функции $\zeta = \varphi^{-1}(z)$, полученные в результате четного числа отражений относительно сторон прямоугольника, равны между собой. Далее, имеем $\varphi^{-1}(z + 2\omega + 2i\omega') \equiv \varphi^{-1}(z)$. Действительно, прибавление к z числа $2\omega + 2i\omega'$ равносильно четырем отражениям относительно некоторых прямоугольников паркета. Таким образом, функция φ^{-1} является двоякопериодической мероморфной в $\mathbb{C}$ функцией. Функции с такими свойствами называются *эллиптическими*. Дадим общее определение таких функций.

Определение 63. *Пусть ω_1 и ω_2 — комплексные числа, линейно независимые над полем $\mathbb{R}$. Эллиптической функцией с основными периодами ω_1 и ω_2 называется любая мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая тождествам*

$$f(z + \omega_1) \equiv f(z) \quad \text{и} \quad f(z + \omega_2) \equiv f(z)\,.$$

Периоды эллиптической функцией образуют группу

$$\big\{ m \cdot \omega_1 + n \cdot \omega_2 \;\big|\; m\,,\, n \in \mathbb{Z} \big\}\ ,$$

а основные периоды являются ее образующими элементами. Для любого периода имеет место тождество $f(z + m \cdot \omega_1 + n \cdot \omega_2) \equiv f(z)$. Любой параллелограмм с вершинами в точках u_0, $u_0 + \omega_1$, $u_0 + \omega_2$, $u_0 + \omega_1 + \omega_2$ называется *параллелограммом периодов* эллиптической функции f. Для задания эллиптической функции во всей плоскости достаточно задать ее в одном каком-нибудь параллелограмме периодов.

Глава 31

ЦЕЛЫЕ И МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Разложения целых и мероморфных функций

1. Теорема Миттаг-Леффлера и ее следствие

В гл. 27, § 2, п. 4 было установлено, что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы целой рациональной функции и главных частей ее лорановских разложений во всех ее полюсах, лежащих в плоскости $\mathbb{C}$. В этом пункте аналогичный факт будет установлен для любых мероморфных в $\mathbb{C}$ функций.

Определение 64. *Функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ называется мероморфной в $\mathbb{C}$, если в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ она либо аналитична, либо имеет полюс.*

Очевидно, что мероморфная функция, не имеющая полюсов, является целой. Если мероморфная функция имеет лишь конечное число полюсов, то она представима в виде суммы всех ее главных частей и некоторой целой функции. Таким образом, интерес представляет лишь тот случай, когда данная мероморфная функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ имеет бесконечное (очевидно, счетное) множество полюсов. Это множество не может иметь конечных предельных точек, так как каждая такая точка была бы особой точкой более сложной природы, чем полюс. Но тогда функция f не была бы мероморфной в $\mathbb{C}$. В случае бесконечного множества полюсов приходится иметь дело с бесконечным рядом, составленным из главных функции f. Так как этот ряд не обязательно сходится, то для получения сходящегося ряда к главным частям приходится прибавлять некоторые многочлены. Кроме того, нуждается в уточнении понятие сходимости функционального ряда, составленного из мероморфных функций.

Определение 65. *Ряд из мероморфных функций называется сходящимся на множестве M, если лишь конечное число его членов имеют полюсы на M, и после их удаления получается ряд из ана-*

литических на M функций, сходящийся на множестве M.

Теорема 100 (Миттаг-Леффлер). *Для любых последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ различных точек $a_n \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и функций вида*

$$g_n(z) := \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{c_{-\nu n}}{(z-a_n)^{\nu}}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \tag{31.1}$$

существует мероморфная функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, которая имеет полюсы во всех точках a_n (и только в них), причем главная часть функции f в каждой из точек a_n равна $g_n(z)$.

◀ Не ограничивая общности, будем считать, что $a_1 \neq 0$, поскольку вместо функции f можно было бы искать функцию $f - g_1$, и что точки a_n занумерованы в порядке неубывания их модулей. Фиксируя число $q \in (0\,,1)$, введем в рассмотрение круги $K_n :=$ $:= \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z| \leqslant q \cdot |a_n|\big\}$, каждый из которых является компактом, лежащем в круге $\big\{|z| < |a_n|\big\}$. Поэтому главную часть g_n можно в K_n равномерно приблизить многочленами Тейлора

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} \cdot z^k\,, \tag{31.2}$$

степени которых m_n выберем так, чтобы было

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall z \in K_n \;:\; |g_n(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2^n}\,. \tag{31.3}$$

При таком выборе многочленов P_n ряд

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n)$$

сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{C}$ в смысле определения 65. В самом деле, для любого компакта K существует номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $K \subset K_n$ для всех $n \geqslant N$, а ряд

$$f_N := \sum_{n=N}^{\infty} (g_n - P_n)$$

сходится равномерно на K, так как мажорируется там сходящимся числовым (геометрическим) рядом. Значит, его сумма f_N аналитична на K. Так как

$$f = \sum_{n=1}^{N-1}(g_n - P_n) + f_N\,,$$

то f имеет в K заданные полюсы и главные части. Поскольку компакт $K \subset \mathbb{C}$ выбран произвольно, то f мероморфна и имеет в $\mathbb{C}$ заданные полюсы и главные части. ►

Следствие. *Любую мероморфную функцию* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *можно представить в виде суммы ряда*

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n - P_n)\,,$$

равномерно сходящегося на любом компакте, где h *— целая функция,* g_n *— главные части функции* f, *а* P_n *— некоторые многочлены.*

◄ Занумеруем полюсы функции f в порядке неубывания их модулей и на основании теоремы 100 построим ряд

$$f_0 := \sum_{n=1}^{\infty}(g_n - P_n)\,,$$

равномерно сходящийся на любом компакте. Функция $h := f - f_0$, очевидно, целая. ►

2. Теорема Вейерштрасса и ее следствие

Здесь рассмотрим разложения целых функций на линейные множители, соответствующие их нулям, аналогичные такому же разложению многочлена

$$P(z) = a \cdot z^m \cdot \prod_{n=1}^{l}(z - a_n) = A \cdot z^m \cdot \prod_{n=1}^{l}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\,, \tag{31.4}$$

где через a_n обозначены ненулевые корни многочлена, причем каждый корень повторен столько раз, какова его кратность, а m — кратность корня $z = 0$.

Целые функции могут иметь бесконечное (счетное) множество нулей, и в связи с этим возникает необходимость вместо конечного произведения (31.4) вводить в рассмотрение *бесконечные произведения*. Бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + c_k) \tag{31.5}$$

называется *сходящимся*, если все его множители отличны от нуля, а частичные произведения $\Pi_n := \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + c_k)$ имеют конечный и отличный от нуля предел $\Pi = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n$, который и принимается за числовое значение бесконечного произведения (31.5). Если предел частичных произведений равен либо нулю, либо бесконечности, либо не существует, то бесконечное произведение (31.5) считается расходящимся, и ему никакого числового значения не приписывается. Легко показать, что необходимым условием сходимости бесконечного произведения (31.5) является равенство $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Критерием сходимости бесконечного произведения является сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + c_n)\,,$$

где под логарифмом понимается однозначная ветвь, определяемая неравенствами $-\pi < \arg(1 + c_n) \leqslant \pi$.

Бесконечное произведение, множителями которого являются аналитические функции, называется сходящимся *поточечно* на множестве $M \subset \mathbb{C}$, если лишь конечное число его множителей обращается на M в нуль, и после их удаления оказывается сходящимся в каждой точке множества M. По такому же принципу можно определить понятие *равномерной сходимости* бесконечного произведения на множестве. Можно показать, что если бесконечное произведение, множителями которого являются аналитические на множестве M функции, сходится равномерно на M к некоторой функции, то она тоже оказывается аналитической. Основной для дальнейшего является следующая теорема существования целых функций с наперед заданными корнями (нулями).

Теорема 101 (Вейерштрасс). *Для любой последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ точек $a_n \in \mathbb{C}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, существует целая функция f, которая имеет корни в точках a_n, и только в них, причем кратность корня функции f в каждой из точек a_n равна числу повторений значения, равного a_n, в данной последовательности.*

◀ Предположим, что значение $a_n = 0$ встречается в данной последовательности ровно m раз. Тогда искомая функция будет иметь вид $z^m \cdot f(z)$, где f — целая функция, корни которой совпадают с остальными (ненулевыми) членами данной последовательности. Учитывая это, будем считать, что уже исходная последовательность обладает свойством $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \neq 0$, причем ее члены расположены в порядке неубывания модулей

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots \leqslant |a_n| \leqslant \ldots .$$

Подберем последовательность натуральных чисел $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n+1} \tag{31.6}$$

сходился абсолютно и равномерно в любом круге $\{|z| \leqslant R\}$. Для этого достаточно положить, например, $p_n+1 = n$, и тогда радиус сходимости ряда (31.6) будет равен $+\infty$.

Выбрав последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, покажем, что бесконечное произведение

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot \exp\left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right] \tag{31.7}$$

сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathbb{C}$ и представляет целую функцию с требуемыми свойствами. Для доказательства рассмотрим функцию

$$g(\zeta, p) := (1-\zeta) \cdot \exp\left[\zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^p}{p}\right]$$

и заметим, что ее логарифм

$$\ln g(\zeta, p) = \ln(1-\zeta) + \zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^p}{p} = -\frac{\zeta^{p+1}}{p+1} - \frac{\zeta^{p+2}}{p+2} - \ldots$$

при $|\zeta| \leqslant q < 1$ допускает оценку

$$|\ln g(\zeta, p)| < |\zeta|^{p+1} \cdot (1 + |\zeta| + |\zeta|^2 + \ldots) \leqslant \frac{|\zeta|^{p+1}}{1-q}\,. \tag{31.8}$$

Вводя обозначение $K_n := \{|z| \leqslant q \cdot |a_n|\}$, видим, что для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что $K \subset K_n$ для всех $n \geqslant N$. Для всех таких значений n в силу (31.8) имеем

$$\left|\ln g\left(\frac{z}{a_n}\,,\, p_n\right)\right| \leqslant \frac{1}{1-q} \cdot \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1}$$

и, следовательно, ряд

$$g_n(z) := \sum_{n=N}^{\infty} \ln g\left(\frac{z}{a_n}\,,\, p_n\right) \tag{31.9}$$

мажорируется на множестве K равномерно сходящимся рядом

$$\frac{1}{1-q} \sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1}\,,$$

который очевидным образом связан с рядом (31.6). Таким образом, ряд (31.9) сходится равномерно на K, и потому его сумма аналитична на K. Поэтому бесконечное произведение

$$f_N(z) := e^{g_n(z)} = \prod_{n=N}^{\infty} g\left(\frac{z}{a_n}\,,\, p_n\right)$$

тоже сходится равномерно на K и представляет аналитическую и не обращающуюся в нуль на K функцию. Произведение (31.7) отличается от f_N множителем $\displaystyle\prod_{n=1}^{N-1} g\left(\frac{z}{a_n}\,,\, p_n\right)$, который обращается в нуль в точках a_1, …, a_{N-1}, и только в этих точках.

Так как компакт $K \subset \mathbb{C}$ был выбран произвольно, то f — целая функция, имеющая нули в точках заданной последовательности, и только в них. ►

Следствие. *Любую целую функцию F, имеющую бесконечное множество корней, можно представить в виде бесконечного произведения*

$$F(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \cdot e^{\left[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right]}, \qquad (31.10)$$

где m — кратность корня $z = 0$ функции F, g — некоторая целая функция, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех ненулевых корней функции F, расположенных в порядке неубывающих модулей, причем каждый корень записан подряд столько раз, какова его кратность, а $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность целых неотрицательных чисел, обеспечивающая сходимость произведения (31.10).

◄ Расположив нули функции $F(z)/z^m$ в порядке неубывающих модулей, повторяя каждый нуль столько раз подряд, какова его кратность, получим последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям применимости теоремы 101. Применив эту теорему, построим целую функцию f по формуле (31.7). Частное $F(z)/(z^m f(z))$ является целой функцией без нулей. Поэтому функциональный элемент $g(z) := \ln\left[F(z)/(z^m f(z))\right]$ допускает неограниченное аналитическое продолжение в плоскости $\mathbb{C}$ и на основании теоремы 81 (о монодромии) продолжается в $\mathbb{C}$ до целой функции. Поэтому $F(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot f(z)$, что равносильно равенству (31.10). ►

§ 2. Рост целых функций

1. Порядок и тип целой функции

Определение 66. *Характеристикой целой функции* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *называется функция* $M_f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *задаваемая равенством*

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|. \tag{31.11}$$

В силу принципа максимума модуля величина $M_f(r)$ равна также $\max |f(z)|$ в круге $\{|z| \leqslant r\}$, поэтому функция $r \longmapsto M_f(r)$ возрастает, причем строго.

Если предположить, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ имеет место асимптотическая оценка $M_f(r) = O(r^m)$ при $r \to +\infty$, то окажется, что f — многочлен степени не выше m от z. Это утверждение называется *обобщенной теоремой Лиувилля.* Его легко обосновать, используя неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$.

◄ Действительно, при $n > m$ имеем

$$|c_n| \leqslant \frac{M_f(r)}{r^n} = \frac{O(r^m)}{r^n} = O\left(\frac{1}{r^{n-m}}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +\infty\,.$$

Отсюда видно, что $c_n = 0$ при всех $n > m$, т. е. степенной ряд вырождается в многочлен $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k z^k$. ►

Отбрасывая рассмотренный здесь случай как тривиальный, мы приходим к необходимости предполагать, что *характеристика* $M_f(r)$ *при* $r \to +\infty$ *растет быстрее любой степени* r^m. Поскольку это последнее предположение является слишком общим, то для описания асимптотики функции $M_f(r)$ используют более конкретные классы быстро растущих функций. Одним из простейших классов такого рода функций является класс функций вида $r \longmapsto \exp(\nu \cdot r^{\mu})$ при $\nu, \mu \in \mathbb{R}_+$. При сравнении характеристики $M_f(r)$ с функциями этого класса возникают понятия *порядка* и *типа* целой функции f.

Определение 67. *Порядком целой функции f называется величина*

$$\rho := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}\,. \tag{31.12}$$

Очевидно, что $\rho \in [0\,,+\infty]$.

Пример. Порядки целых функций $\cos\sqrt{z}$, $\sin z$, $\exp(z^n)$ и $\exp(\exp(z))$ равны $1/2$, 1, n и $+\infty$ соответственно.

Для сравнения скоростей роста целых функций одинакового порядка вводят понятия *типа.*

Определение 68. *Типом целой функции f порядка $\rho \in \mathbb{R}_+$ называется величина*

$$\sigma := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}\,. \tag{31.13}$$

Целая функция порядка ρ называется функцией минимального, среднего или максимального типа в зависимости от того, какое из следующих трех соотношений $\sigma = 0$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ или $\sigma = +\infty$ выполняется.

Порядок и тип целой функции f можно выразить также через коэффициенты ее тейлоровского разложения

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n\,. \tag{31.14}$$

Радиус сходимости этого ряда равен $+\infty$, и потому из формулы Коши — Адамара вытекает равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Нам понадобятся две леммы; для сокращения формулировок условимся считать, что φ_1 *асимптотически меньше, чем* φ_2 (и писать $\varphi_1 \underset{\text{as}}{<} \varphi_2$), если

$$\exists r_0 \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall r \geqslant r_0 \ : \ \varphi_1(r) < \varphi_2(r)\,.$$

Лемма 1. *Если для целой функции f имеем оценку*

$$M_f(r) \underset{\text{as}}{<} \exp(\nu r^\mu)\,, \tag{31.15}$$

то для коэффициентов ее тейлоровского разложения имеем оценки

$$|c_n| \underset{\text{as}}{<} \left(\frac{e\mu\nu}{n}\right)^{n/\mu}. \tag{31.16}$$

◀ Используя неравенства Коши (27.7) для коэффициентов ряда (31.14) и оценку (31.15), имеем

$$|c_n| \underset{\text{as}}{<} \frac{e^{\nu\cdot r^\mu}}{r^n} = e^{\nu\cdot r^\mu - n\cdot\ln r}. \tag{31.17}$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от r, то оценку (31.17) можно улучшить, взяв минимум правой части по r. Приравнивая к нулю логарифмическую производную правой части по r, получаем уравнение $\mu\nu r^{\mu-1} - n/r = 0$, из которого находим единственную стационарную точку $r_n = [n/(\mu\nu)]^{1/\mu}$. Так как показатель правой части (31.17) стремится к $+\infty$ при $r \to +0$ и при $r \to +\infty$, то в стационарной точке правая часть достигает минимума. Учитывая, что $r_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, и подставляя в правую часть (31.17) вместо r найденное выше значение для r_n, получим оценку (31.16). ▶

Следующая лемма почти обратна к первой.

Лемма 2. *Если для коэффициентов тейлоровского разложения* (31.14) *функции f выполняется асимптотическое неравенство* (31.16), *то функция f — целая, и*

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;:\; M_f(r) \underset{\text{as}}{<} e^{(\nu+\varepsilon)r^\mu}\,.$$

◀ Функция f — целая, поскольку из (31.16) следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Далее, если $|z| = r$, то

$$|c_n z^n| \underset{\text{as}}{<} \left(\frac{e\mu\nu}{n}\right)^{n/\mu} r^n = \left(\frac{e\mu\nu r^\mu}{n}\right)^{n/\mu}\,.$$

Очевидно, что правая часть этого неравенства меньше $1/2^n$, если $e\mu\nu r^\mu/n < 1/2^\mu$, т. е. при $n > 2^\mu e\mu\nu r^\mu$. Поэтому, обозначая $N := [2^\mu e\mu\nu r^\mu]$, где $[.]$ — целая часть, имеем

$$|f(z)| \underset{\text{as}}{<} \sum_{n=0}^{N} |c_n| r^n + \left(\frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{N} |c_n| r^n + \frac{1}{2^N}\,.$$

Пусть $m(r) := \max\limits_n |c_n| r^n$ — максимальный член ряда (31.14) при $|z| = r$. Этот максимум достигается при некотором n, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| r^n = 0$. Но тогда из предыдущего неравенства получаем следующее

$$M_f(r) \underset{\text{as}}{<} (2^\mu e\mu\nu r^\mu + 1) \cdot m(r) + 2^{-N}. \tag{31.18}$$

Отсюда видно, что при $r \to +\infty$ будет $m(r) \to +\infty$ быстрее любой степени r. Значит, и номер максимального члена стремится к бесконечности при $r \to +\infty$, поэтому для оценки максимального члена можно воспользоваться асимптотическим неравенством (31.16):

$$m(r) \underset{\text{as}}{<} \max_n \left(\frac{e\mu\nu r^\mu}{n} \right)^{n/\mu}.$$

Желая вычислить этот максимум, введем обозначение

$$\varphi(n) := \frac{n}{\mu} \cdot \ln \frac{e\mu\nu r^\mu}{n}, \quad \text{откуда} \quad \varphi'(n) = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\ln \frac{e\mu\nu r^\mu}{n} - 1 \right).$$

Отсюда видно, что $\varphi'(n) = 0$ только при $n = \mu\nu r^\mu$. Это и будет точка максимума, и потому $m(r) \underset{\text{as}}{<} e^{\nu r^\mu}$. Подставляя это в (31.18), будем иметь

$$M_f(r) \underset{\text{as}}{<} (2^\mu e\mu\nu r^\mu + 2) \cdot e^{\nu r^\mu} \underset{\text{as}}{<} e^{(\nu+\varepsilon) r^\mu}$$

при любом $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. ►

Теорема 102. *Для порядка* (31.12) *любой целой функции* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *справедливо следующее равенство:*

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}. \tag{31.19}$$

◄ Обозначим правую часть равенства (31.19) через $\widetilde{\rho}$. Надо показать, что $\rho = \widetilde{\rho}$.

Если $\rho = +\infty$, то неравенство $\rho \geqslant \widetilde{\rho}$ очевидно. Если $0 \leqslant \rho < +\infty$, то из определения (31.12) имеем

$$\forall\, \mu > \rho \ \ \exists\, r_0 \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall\, r \geqslant r_0 \ : \ \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} < \mu,$$

что равносильно следующему асимптотическому неравенству:

$$M_f(r) \underset{\text{as}}{<} e^{r^\mu} .$$

Из него согласно лемме 1 вытекает следующее асимптотическое неравенство:

$$|c_n| \underset{\text{as}}{<} \left(\frac{e\mu}{n}\right)^{n/\mu} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{|c_n|} \underset{\text{as}}{<} \left(\frac{e\mu}{n}\right)^{1/\mu} .$$

Логарифмируя его, получим

$$\mu \underset{\text{as}}{>} \frac{\ln n - \ln(e\mu)}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} = \frac{\ln n}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} - \frac{\ln(e\mu)}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} .$$

Беря здесь верхний предел при $n \to \infty$, найдем $\mu \geqslant \widetilde{\rho}$, откуда ввиду произвольности $\mu > \rho$ получаем $\rho \geqslant \widetilde{\rho}$.

Желая установить противоположное неравенство, предположим, что $\widetilde{\rho} \in [0\,, +\infty)$. Тогда для любого $\mu > \widetilde{\rho}$ будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \dfrac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}} \underset{\text{as}}{<} \mu\,, \quad \text{откуда} \quad |c_n| \underset{\text{as}}{<} \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\mu} .$$

Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что

$$M_f(r) \underset{\text{as}}{<} \exp\left[\left(\frac{1}{e\mu} + \varepsilon\right) r^\mu\right]$$

с любым $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Отсюда следует, что $\rho \leqslant \mu$, а так как $\mu > \widetilde{\rho}$ — произвольное, то $\rho \leqslant \widetilde{\rho}$. ▶

Теорема 103. *Если* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *— целая функция порядка* $\rho \in \mathbb{R}_+$, *то для ее типа справедливо следующее равенство:*

$$\sigma = \frac{1}{e\rho} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n \sqrt[n]{|c_n|^\rho}\right) . \tag{31.20}$$

◀ Обозначим правую часть равенства (31.20) через $\widetilde{\sigma}$. Надо показать, что $\sigma = \widetilde{\sigma}$.

Если $\sigma = +\infty$, то неравенство $\sigma \geqslant \widetilde{\sigma}$ очевидно. Если $0 \leqslant \sigma < +\infty$, то из определения (31.13) имеем

$$\forall\, \mu > \sigma \;\; \exists\, r_0 \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall\, r \geqslant r_0 \;\; : \;\; \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} < \mu\,,$$

что равносильно следующему асимптотическому неравенству:

$$M_f(r) \underset{\mathrm{as}}{<} e^{\mu r^\rho}\,.$$

Отсюда на основании леммы 1 получаем

$$|c_n| \underset{\mathrm{as}}{<} \left(\frac{e\mu\rho}{n}\right)^{n/\rho} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{|c_n|^\rho} \underset{\mathrm{as}}{<} \frac{e\mu\rho}{n}\,.$$

Решая последнее неравенство относительно μ, найдем

$$\mu \underset{\mathrm{as}}{>} \frac{1}{e\rho} \cdot n\sqrt[n]{|c_n|^\rho}\,, \quad \text{и значит,} \quad \mu \geqslant \frac{1}{e\rho}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\sqrt[n]{|c_n|^\rho} = \widetilde{\sigma}\,,$$

откуда ввиду произвольности $\mu > \sigma$ находим $\sigma \geqslant \widetilde{\sigma}$.

Желая установить противоположное неравенство, предположим, что $\widetilde{\sigma} \in [0\,, +\infty)$. Тогда для любого $\mu > \widetilde{\sigma}$ будем иметь

$$\frac{1}{e\rho} n\sqrt[n]{|c_n|^\rho} \underset{\mathrm{as}}{<} \mu\,, \quad \text{откуда} \quad |c_n| \underset{\mathrm{as}}{<} \left(\frac{e\rho\mu}{n}\right)^{n/\rho}\,.$$

Отсюда на основании леммы 2 заключаем, что

$$M_f(r) \underset{\mathrm{as}}{<} e^{(\mu+\varepsilon)r^\rho} \quad \text{или} \quad \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} \underset{\mathrm{as}}{<} \mu + \varepsilon$$

с любым $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Переходя в последнем неравенстве к верхнему пределу при $r \to \infty$, получим $\sigma \leqslant \mu + \varepsilon$, откуда ввиду произвольности $\mu > \widetilde{\sigma}$ и $\varepsilon > 0$ находим $\sigma \leqslant \widetilde{\sigma}$. ▶

Замечание. Теоремы 102 и 103 позволяют строить примеры целых функций любых наперед заданных порядков и типов.

Примеры. 1) Целая функция $f(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{e\sigma\rho}{n}\right)^{n/\rho} z^n$ имеет порядок ρ и тип σ.

2) Целая функция $f(z) := \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{n/\rho} z^n$ имеет порядок ρ и максимальный тип.

3) Целая функция $f(z) := \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)^{\dfrac{n}{\rho}} \cdot z^n$ имеет порядок ρ и минимальный тип.

4) Сумма ряда $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{(\ln n)^n}$ — целая функция бесконечного порядка.

5) Сумма ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$ — целая функция нулевого порядка.

Читателю предлагается самостоятельно обосновать все эти утверждения.

2. Принцип Фрагмена — Линделёфа

Если функция f аналитична в области D и непрерывна в $D \sqcup \partial D$, то согласно принципу максимума модуля (следствие 1 из теоремы 72) из того, что $|f(z)| \leqslant M$ на ∂D, следует выполнение этого же неравенства и в области D. Однако если условие непрерывности нарушено хотя бы в одной точке края ∂D, то такой вывод уже не будет верным. Рассмотрим, например, круг $D := \{x^2 + y^2 < x\}$ и аналитическую в нем функцию $f(z) = e^{1/z}$. Она непрерывна в $D \sqcup \partial D \setminus \{0\}$, а всюду на $\partial D \setminus \{0\}$ ее модуль постоянен, так как $\left|e^{1/z}\right| \equiv e^{x/(x^2+y^2)} \equiv e$. Однако $f(z) \to \infty$, когда $z \to 0$ изнутри круга. Тем не менее вывод может быть сохранен, если сделать дополнительное предположение о том, что функция f «не слишком быстро растет» при приближении к исключительной точке края. Утверждение такого типа называется *принципом Фрагмена — Линделёфа.* Мы здесь установим его для случая функций, аналитических в угловой области

$$S_\alpha := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha \leqslant \pi\,.$$

Исключительной точкой края ∂S_α будем считать точку ∞, а рост функции $f \;:\; S_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ при приближении к ней будем характеризовать так называемыми *угловым порядком* ρ и *угловым типом* σ: если $M_f(r) := \max |f(z)|$ при $|z| = r$, $z \in S_\alpha$, то

$$\rho := \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}\,, \qquad \sigma := \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}\,.$$

Теорема 104 (Фрагмен — Линделёф). *Пусть функция f аналитична в угловой области S_α, непрерывна во всех конечных точках ее края ∂S_α и всюду в этих точках $|f(z)| \leqslant M < +\infty$. Если угловой порядок этой функции $\rho < \alpha$, то $|f(z)| \leqslant M$ всюду в области S_α.*

◀ Выберем числа $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\rho' \in (\rho\,,\,\alpha)$ и введем в рассмотрение функцию $f_\varepsilon(z) := f(z)\cdot\exp\left(-\varepsilon z^{\rho'}\right)$, где ветвь многозначной функции $z^{\rho'}$ задана условием $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$. Полагая $z = re^{i\varphi}$, имеем

$$|f_\varepsilon(z)| = |f(z)|\cdot e^{-\varepsilon r^{\rho'}\cos\rho'\varphi}\,,$$

следовательно, на сторонах угла S_α, где $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\alpha}$ и $|\rho'\varphi| = \frac{\pi\rho'}{2\alpha} < \frac{\pi}{2}$, имеем $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$. Используя, далее, определение углового порядка, имеем

$$\forall\,\mu \in (\rho\,,\,\rho')\;\;\exists r_0 \in \mathbb{R}_+\;\;\forall r \geqslant r_0\;:\;\frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} \leqslant \mu\,.$$

Отсюда следует, что при всех $r \geqslant r_0$ на дуге $\{z \in S_\alpha\,;\;|z| = r\}$ выполняется неравенство

$$|f_\varepsilon(z)| < e^{r^\mu - \varepsilon r^{\rho'}\cos\rho'\varphi}\,. \tag{31.21}$$

Так как на этой дуге $\cos\rho'\varphi \geqslant \cos\frac{\pi\rho'}{2\alpha} > 0$ и $\mu < \rho'$, то при любом $\varepsilon > 0$ правая часть неравенства (31.21) стремится к нулю при $r \to +\infty$, и потому на этой дуге будет $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$. Отсюда в силу принципа максимума следует, что $|f_\varepsilon(z)| \leqslant M$ всюду в S_α. Устремляя теперь ε к нулю, имеем $|f(z)| \leqslant M$ всюду в S_α. ▶

Замечание. Чем меньше раствор угла S_α (т. е. чем больше α), тем для функций бóльшего роста в этой угловой области сохраняется принцип максимума. Оценка роста $\rho < \alpha$ в теореме Фрагмена — Линделёфа точна: при $\rho = \alpha$ теорема 104 перестает быть верной. Это видно из примера аналитической в S_α функции $f(z) = \exp(z^\alpha)$, где $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$. Она неограничена, но ее модуль на сторонах угла S_α тождественно равен 1.

§ 3. Модулярная функция и теорема Пикара

1. Модулярная функция

Рассмотрим круговой треугольник $T_0 = \triangle ABC$, лежащий в единичном круге $\{|z| \leqslant 1\}$; вершины треугольника пусть лежат на единичной окружности $\{|t| = 1\}$, а сторонами являются дуги окружностей, ортогональных к единичной. По теореме Римана (теорема 88) существует единственный конформный гомеоморфизм $w = \mu(z)$ этого треугольника на верхнюю полуплоскость, переводящий точки A, B и C в точки 0, 1 и ∞ соответственно. По принципу симметрии (теорема 76) функцию μ можно аналитически продолжить в треугольники $T_1^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, симметричные треугольнику T_0 относительно его сторон. Точки, симметричные вершинам треугольника T_0 относительно сторон, противоположных этим вершинам, также лежат на единичной окружности.

◀ В самом деле, при отображении симметрии, например, относительно дуги BC дуга окружности $\{|t| = 1\}$, содержащая точку A, перейдет на дополнительную дугу этой же окружности. Образ A_1 точки A попадет на эту дополнительную дугу. ▶

Так как отображение симметрии обладает круговым свойством и сохраняет абсолютные величины углов, то стороны треугольников T_1^k снова будут дугами окружностей, ортогональных к единичной.

Продолженная функция μ конформно отображает каждый из треугольников $T_1^{(k)}$ на нижнюю полуплоскость так, что его стороны переходят соответственно на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$. Поэтому к μ снова можно применить принцип симметрии, и, следовательно, μ аналитически продолжается в треугольники $T_2^{(k)}$, которые получаются из $T_1^{(k)}$ отражением относительно их сторон.

Повторяя описанный процесс аналитического продолжения неограниченно, мы получим совокупность круговых треугольников без общих внутренних точек, заполняющих весь круг U (так называемую *модулярную фигуру*, показанную на рис. 43), и построим однозначную аналитическую в этом круге функцию μ, которая и называется *модуляр-*

ной функцией. Ее невозможно аналитически продолжить за пределы круга U.

◀ В самом деле, на окружности ∂U всюду плотны множества точек $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$, получающихся многократным отражением соответственно вершин A, B, C треугольника T_0. Однако, когда точка z стремится к точке A_n, оставаясь внутри соответствующего треугольника, то $\mu(z) \to 0$, а когда z так же стремится к B_n или к C_n, то $\mu(z)$ стремится к 1 или к ∞ соответственно. Итак, функцию μ невозможно продолжить на окружность ∂U не только аналитически, но даже и непрерывно. ▶

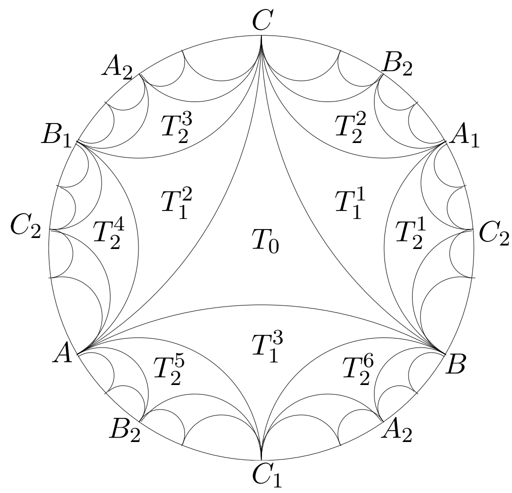

Рис. 44. Модулярная фигура

Из построения модулярной функции очевидно, что она не принимает в круге U трех значений: 0, 1 и ∞. Этим свойством мы воспользуемся в следующем пункте.

Заметим, далее, что четное число отражений (инверсий) относительно дуг окружностей является дробно-линейным отображением. Каждое из дробно-линейных отображений, получающихся четным числом отражений, описанных при определении модулярной функции, является конформным гомеоморфизмом единичного круга на себя. Множество всех таких отображений образует группу Λ_0, которая является подгруппой группы всех дробно-линейных отображений единичного круга на себя.

Легко видеть, что *модулярная функция μ инвариантна относительно преобразований группы Λ_0, т. е. для нее выполняется условие*

$$\forall\, \lambda \in \Lambda_0 \ : \ \mu[\lambda(z)] \equiv \mu(z)\,. \tag{31.22}$$

◀ В самом деле, пусть $\lambda \in \Lambda_0$ — произвольное отображение, а $z \in U$ — произвольная точка. Тогда точка z принадлежит замыканию некоторого кругового треугольника T из описанных выше. Функция μ

конформно отображает треугольник T на верхнюю или нижнюю полуплоскость так, что его вершины переходят в точки 0, 1 и ∞ соответственно. По построению функция μ отображает треугольник $\lambda(T)$ на ту же полуплоскость, причем соответствующие точки снова переходят в точки 0, 1 и ∞ соответственно. Поэтому функции μ и $\mu \circ \lambda$ конформно отображают T на одну и ту же полуплоскость с одинаковым соответствием трех граничных точек. Отсюда в силу условия единственности конформного отображения вытекает тождество (31.22). ▶

Замечание. Однозначные мероморфные функции, инвариантные относительно некоторой группы дробно-линейных преобразований аргумента, называются *автоморфными функциями*. Построенная в этом пункте модулярная функция μ является примером автоморфной функции. Другими примерами автоморфных функций являются периодические мероморфные функции с основным периодом $T \neq 0$. Примерами автоморфных функций являются также двоякопериодические (эллиптические) функции (см. определение 63).

2. Теорема Пикара

Начнем с описания многозначной (полной) аналитической функции μ^{-1}, обратной к модулярной функции μ. Для построения этой функции рассмотрим ее ветвь $z = \mu^{-1}(w)$, аналитическую в верхней полуплоскости и отображающую эту полуплоскость на круговой треугольник T_0. По принципу симметрии эта ветвь аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость через каждый из интервалов $(-\infty\,,\,0)$, $(0\,,\,1)$, $(1\,,+\infty)$. Каждую из ветвей, полученных в результате аналитического продолжения, можно снова аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость через любой из указанных интервалов. При этом, если второе продолжение происходит через другой отрезок, чем первое, то полученная ветвь будет отличаться от первоначальной (она отображает верхнюю полуплоскость на один из треугольников $T_2^{(k)}$). Этот процесс аналитического продолжения можно вести неограниченно, в результате чего и возникает полная аналитическая функция, обратная к модулярной.

Нетрудно видеть, что *полная аналитическая функция, обратная к модулярной, — бесконечнозначная, а точки* 0, 1 *и* ∞ *являются ее логарифмическими точками ветвления. Все значения этой функции лежат в единичном круге* $\{|w| < 1\}$.

На свойствах функции, обратной к модулярной, основано простое доказательство следующей теоремы, которая представляет собой далеко идущее обобщение свойства многочленов от z принимать в некоторых точках плоскости любые комплексные значения.

Теорема 105 (Пикар). *Любая непостоянная мероморфная функция* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ *принимает в некоторых точках плоскости* $\mathbb{C}$ *любые значения, лежащие в* $\widehat{\mathbb{C}}$*, кроме, быть может, двух.*

◀ Предположим противное, т. е. что существует мероморфная функция $f : \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, не принимающая трех значений a, b, $c \in \widehat{\mathbb{C}}$. Возьмем дробно-линейную функцию $F(f) = \dfrac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}$, которая отображает точки a, b, c на точки 0, 1, ∞ соответственно. Мероморфная функция $z \longmapsto F(f(z))$ не принимает значения 0, 1, ∞, поэтому имеет смысл композиция $w = \mu^{-1}(F(f(z)))$. Эта композиция неограниченно аналитически продолжима в $\mathbb{C}$, так как функция $F \circ f$ не принимает именно тех значений, которые являются точками ветвления функции μ^{-1}. Отсюда на основании теоремы 81 (о монодромии) заключаем, что аналитическая функция $w = \mu^{-1}(F(f(z)))$ однозначна в $\mathbb{C}$. Но так как она, кроме того, ограничена, то из теоремы Лиувилля (следствие 2 из теоремы 39) следует, что она тождественно равна постоянной. Получено противоречие. ▶

Замечание. Теорема Пикара является точной в том смысле, что существуют мероморфные функции, не принимающие двух значений. Например, мероморфная функция tg не принимает значений $\pm i$.

Следствие (Пикар). *Любая непостоянная целая функция* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *принимает в некоторых точках плоскости* $\mathbb{C}$ *любые значения, лежащие в* $\mathbb{C}$*, кроме, быть может, одного.*

◀ Действительно, любую целую функцию можно рассматривать как мероморфную, не принимающую значение ∞. ▶

Замечание. Это следствие также является точным. Например, целая функция $\exp$ не принимает значение 0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1976. Ч. I.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
3. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М., 1968.
4. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М., 1967—1968. Т. I—II.
5. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М., 1978.
6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., 1991.
7. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексного переменного. М., 1974.
8. *Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.*
9. *Л. И. Волковысский, Г. Л. Лунц, Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., 1970.
10. *Евграфов М. А. и др.* Сборник задач по теории аналитических функций. М., 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ