Э. И. Зверович

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
в шести частях

Часть 5
Кратные интегралы. Интегралы по многообразиям

Минск

БГУ

2004

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в четвертом семестре. Его содержание составляют кратные интегралы Римана, криволинейные и поверхностные интегралы. Кроме того, излагается исчисление внешних дифференциальных форм, интегралы по многообразиям и общая теорема Стокса.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в четвертом семестре. Его содержание составляют кратные интегралы Римана, криволинейные и поверхностные интегралы. Кроме того, излагается исчисление внешних дифференциальных форм, интегралы по многообразиям и общая теорема Стокса.

Изложение теории кратных интегралов — не концентрическое, т. е. сразу излагаются n-кратные интегралы (а случаи $n = 2,\ 3,\ \ldots$ рассматриваются как примеры). Сначала изучаются интегралы по брусам, поскольку их теория мало отличается от теории одномерного интеграла Римана. Затем изучаются интегралы по произвольным ограниченным множествам, измеримым по Жордану. Даются теоремы существования таких интегралов, включая критерий Лебега, и все основные свойства.

Теорема Фубини изложена в той степени общности, которая достаточна для всех приложений, важнейшие из которых приведены. Доказана теорема существования разложения единицы (известного больше под названием «разбиение единицы»), которое в дальнейшем неоднократно используется. Приведена с полным доказательством теорема о замене переменных в кратных интегралах. Формулы Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского изложены на современном уровне строгости и с минимальными ограничениями. Завершается том изложением исчисления внешних дифференциальных форм, элементов анализа на многообразиях, вложенных в $\mathbb{R}^n$, и общей теоремы Стокса на таких многообразиях.

Нумерация глав продолжает нумерацию глав предыдущих томов. Каждая глава заканчивается подборкой задач по соответствующим темам. Эти подборки задач составлены доцентом О. Б. Долгополовой.

.

Глава 20
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА

В этой главе излагается теория кратных интегралов Римана по ограниченным множествам, измеримым по Жордану.

§ 1. Некоторые прикладные задачи, приводящие к понятию кратных интегралов

Задача об объеме цилиндрического тела. Вспомним геометрический смысл интеграла от неотрицательной функции f: интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади $\mu_2(T)$ криволинейной трапеции T, показанной на рис. 1:

$$\mu_2(T) = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

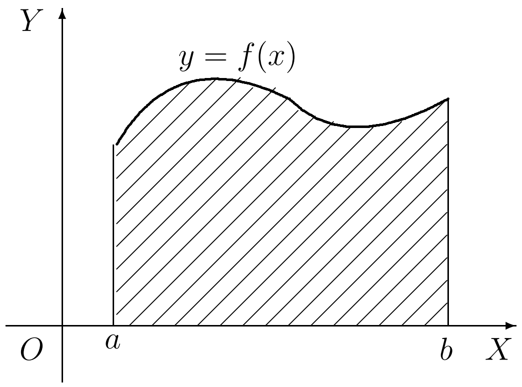

Рис. 1. Криволинейная трапеция

Трехмерными аналогами криволинейных трапеций естественно считать так называемые *цилиндрические тела* $T \subset \mathbb{R}^3$ (рис. 2). Для задания такого тела берем неотрицательную функцию от двух переменных

$$z = f(x\,,\,y) \geqslant 0\,,\ (x\,,\,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

и по определению полагаем:

$$T := \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x\,,\,y) \in D\,;\ 0 \leqslant z \leqslant f(x\,,\,y)\right\}\,. \tag{20.1}$$

Требуется определить и вычислить объем $\mu_3(T)$ цилиндрического тела (20.1). Напомним, что *определить* означает дать определение, т. е.

ответить на вопрос: что такое объем? *Вычислить* означает указать условия и процедуру, позволяющие приписать искомому объему числовое значение. При этом естественно руководствоваться следующими свойствами объема μ_3, предполагая, что он существует:

a) $\mu_3(A) \geqslant 0$ (неотрицательность);

b) $A \subset B \implies \mu_3(A) \leqslant \mu_3(B)$ (монотонность);

c) $\mu_3(A \cup B) = \mu_3(A) + \mu_3(B) - \mu_3(A \cap B)$ (аддитивность);

d) *объем прямого цилиндра с квадрируемым основанием равен произведению площади основания на высоту.*

Для решения этой задачи предположим, что множество D из (20.1) квадрируемо, и представим его в виде объединения

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots D_N$$

квадрируемых множеств, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек. Совокупность множеств $\{D_1\,, \ldots\,, D_N\}$ называется *разбиением* множества D, а наибольший из диаметров этих множеств (обозначим его через λ) — *мелкостью* этого разбиения. Выбирая произвольно точки $(\xi_k\,, \eta_k) \in D_k$, заменим приближенно каждое цилиндрическое тело

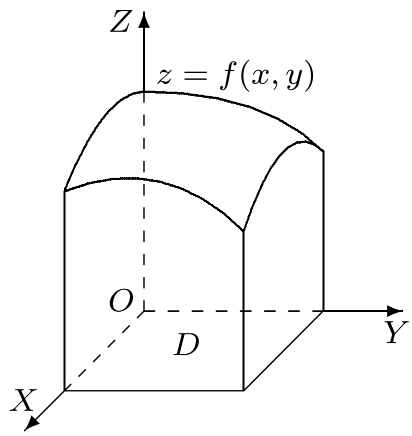

Рис. 2. Цилиндрическое тело

$$T_k := \left\{(x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x\,, y) \in D_k\,, 0 \leqslant z \leqslant f(x\,, y)\right\}$$

прямым цилиндром с основанием D_k и высотой $f(\xi_k\,, \eta_k)$. Тогда для искомого объема будет иметь место следующее приближенное равенство:

$$\mu_3(T) \approx \sum_{k=1}^{N} f(\xi_r\,, \eta_k) \cdot \mu_2(D_k)\,. \tag{20.2}$$

За точное значение объема естественно принять предел сумм (20.2) при условии, что мелкость разбиения стремится к нулю. С другой стороны, суммы вида (20.2) называются интегральными суммами двойного интеграла от функции f по множеству D. Таким образом, имеем

$$\mu_3(T) := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_l\,,\,\eta_k)\cdot\mu_2(D_k) =: \iint\limits_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

в предположении, что этот предел существует и является числом. В этом случае цилиндрическое тело называется *кубируемым* (или имеющим конечный объем).

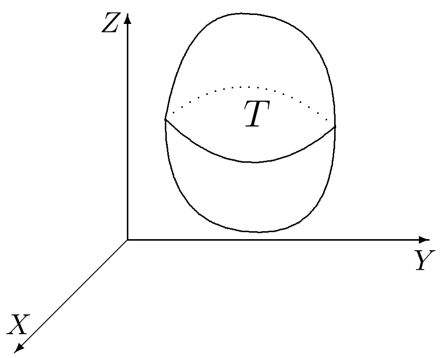

Рис. 3. Тело в $\mathbb{R}^3$

Задача о массе неоднородного тела. Пусть задано *тело*, т. е. ограниченное кубируемое множество $T\subset\mathbb{R}^3$ (рис. 3). Пусть ставится задача определить и вычислить его массу $M(T)$, если известна его объемная плотность, т. е. функция $\rho\,:\,T\longrightarrow\mathbb{R}_+$. В случае, когда плотность тела постоянна, т. е. $\rho=\rho(x,y,z)\equiv\equiv\mathrm{const}$, искомая масса равна $\rho\cdot\mu_3(T)$. Если же плотность ρ не постоянна, то представим тело T в виде объединения $T=T_1\cup T_2\cup\ldots\cup T_N$ кубируемых тел, попарно не имеющих общих внутренних точек. Обозначим через λ мелкость этого разбиения, т. е. наибольший из диаметров тел T_ν. Выбирая произвольно точки $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in T_k$, составим интегральную сумму тройного интеграла по множеству T от функции ρ

$$\sum_{k=1}^{N}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\mu_3(T_k)\,, \tag{20.3}$$

которую естественно принять за приближенное значение искомой массы. За точное значение искомой массы естественно принять предел сумм вида (20.3) при $\lambda\to 0$:

$$M(T) := \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{N}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\mu_3(T_k) =: \iiint\limits_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Считается, что масса данного тела существует, если этот предел существует и является числом.

§ 2. Кратные интегралы по брусам, их существование и свойства

1. Понятие n-кратного интеграла по брусу

Определение 1. *Замкнутым n-мерным брусом будем называть множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде*

$$\Pi := [a_1\,,\, b_1] \times [a_2\,,\, b_2] \times \ldots \times [a_n\,,\, b_n]\,, \tag{20.4}$$

где $-\infty < a_k \leqslant b_k < +\infty$ при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Брусу приписывается n-мерный объем

$$\mu_n(\Pi) := (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)\,. \tag{20.5}$$

Если $\mu_n(\Pi) > 0$, то брус Π называется невырожденным, а в случае $\mu_n(\Pi) = 0$ — вырожденным.

На рис. 4 показаны невырожденные брусы малых размерностей, допускающие наглядное геометрическое изображение.

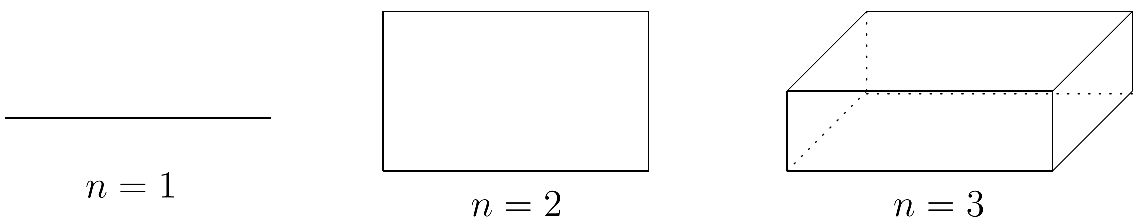

Рис. 4. Брусы малых размерностей

Желая определить понятие n-кратного интеграла по невырожденному брусу (20.4) от функции $f\ :\ \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$, построим для каждого $k = 1, \ldots, n$ разбиение $a_k = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_{n_k}^k = b_k$ отрезка $[a_k, b_k]$. Эти разбиения порождают разбиение бруса Π на меньшие брусы (условимся называть их *ячейками*):

$$U = [x^1_\mu\,,\, x^1_{\mu+1}] \times [x^2_\nu\,,\, x^2_{\nu+1}] \times \ldots \times [x^n_\sigma\,,\, x^n_{\sigma+1}]\,. \tag{20.6}$$

Объем ячейки (20.7) вычисляется по формуле (20.5):

$$\mu(U) = \mu_n(U) = (x^1_{\mu+1} - x^1_\mu) \cdot (x^2_{\nu+1} - x^2_\nu) \cdot \ldots \cdot (x^n_{\sigma+1} - x^n_\sigma)\,.$$

Пусть N — общее число ячеек (20.7). Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что они перенумерованы в каком-нибудь порядке. Множество всех ячеек (20.7)

$$T := \{U_1\,,\, U_2\,,\, \ldots\,,\, U_N\} \tag{20.7}$$

будем называть *разбиением* бруса Π. Число

$$\lambda = \lambda(T) = \max_k \{\operatorname{diam} U_k\} \tag{20.8}$$

условимся называть *мелкостью* разбиения T. Для любого разбиения имеет место очевидное равенство

$$\mu(T) = \sum_{k=1}^{N} \mu(U_k)\,.$$

Выбирая в каждой ячейке произвольную точку

$$\boldsymbol{\xi}_k = (\xi^1_k,\, \xi^2_k\ \ \ldots\,,\, \xi^n_k) \in U_k\,,\ \ k = 1, \ldots, N\,,$$

обозначим через ξ множество всех выбранных («отмеченных») точек. Пара (T, ξ) называется *разбиением с отмеченными точками.*

Определение 2. *Сумма*

$$\sigma(f; T, \xi) := \sum_{k=1}^{N} f(\boldsymbol{\xi}_k) \cdot \mu(U_k) \tag{20.9}$$

называется интегральной суммой n-кратного интеграла от функции $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ по брусу Π, соответствующей разбиению T с отмеченными точками ξ. Функция f называется интегрируемой по брусу Π, если существует конечный предел сумм (20.9) при $\lambda(T) \to 0$. Этот предел называется n-кратным интегралом по брусу Π от функции f.

Приведем здесь встречающиеся обозначения для интеграла по брусу:

$$\int\limits_{\Pi} f = \int\limits_{\Pi} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\!\!\int\limits_{\Pi}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n := \\ := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f; T, \xi)\,, \quad (20.10)$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$ — переменная интегрирования, а $d\boldsymbol{x} = dx_1 \ldots dx_n$ — элемент n-мерного объема.

Первое (самое короткое) обозначение для интеграла обычно применяется в теоретических исследованиях (т. е. когда интеграл не требуется вычислять). Третье (самое подробное) обозначение для интеграла применяется обычно при вычислениях (т. е. когда ставится задача вычислить интеграл, переходя к координатам). Существуют и другие обозначения, на которых здесь не останавливаемся.

Отметим, что необходимым условием существования интеграла от функции f по брусу Π является ограниченность функции f. Доказательство этого простого факта мы пока оставляем читателю в качестве упражнения.

2. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Дарбу

Пусть $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ — функция, заданная на брусе Π, а $T = \{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ — разбиение бруса Π. Обозначая

$$m_j := \inf_{U_j} f(\boldsymbol{x})\,, \qquad M_j := \sup_{U_j} f(\boldsymbol{x})\,, \qquad (20.11)$$

определим понятие сумм Дарбу[1].

Определение 3. *Суммы*

$$s(f, T) := \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \mu(U_j) \quad \textit{и} \quad S(f, T) := \sum_{j=1}^{N} M_j \cdot \mu(U_j) \qquad (20.12)$$

[1] *Дарбу* Жан Гастон (1842—1917) — французский математик.

называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу функции f, построенными для разбиения T.

Если функция $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на замкнутом брусе Π, то в силу теоремы Вейерштрасса о максимуме и минимуме точные границы (20.11) достигаются в некоторых точках ячейки U_j. Значит, в этом частном случае суммы Дарбу являются интегральными суммами интеграла (20.10). В общем же случае суммы Дарбу не обязаны быть интегральными суммами. Переходим к изучению свойств сумм Дарбу.

1°. *Для любой интегральной суммы $\sigma(f;T,\xi)$ справедливы следующие неравенства*:

$$s(f,T) \leqslant \sigma(f;T,\xi) \leqslant S(f,T)\,.$$

Кроме того, имеем

$$s(f,T) = \inf_{\xi} \sigma(f;T,\xi)\,; \quad S(f,T) = \sup_{\xi} \sigma(f;T,\xi)\,.$$

2°. *При измельчении разбиения верхняя сумма Дарбу может только уменьшиться, а нижняя — только увеличиться.*

◀ Измельчения данного разбиения будем строить, измельчая разбиения ребер $[a_k,\, b_k]$ основного бруса Π. Пусть $T' = \big\{U_j \;\big|\; j - \text{индекс}\big\}$ — исходное разбиение, а $T'' = \big\{U_{kj} \;\big|\; k, j - \text{индексы}\big\}$ — его измельчение. Условимся обозначать это так: $T'' \succ T'$. Пусть индексы подобраны так, что $U_j = \bigcup\limits_k U_{kj}$ для каждого j. Тогда имеем

$$S(f,T) = \sum_j M_j \cdot \mu(U_j)\,; \quad S(F,T'') = \sum_j \sum_k M_{kj} \cdot \mu(U_{kj})\,,$$

где

$$M_{kj} := \sup_{U_{kj}} f(x) \leqslant \sup_{U_j} f(x) = M_j\,.$$

Таким образом, получаем

$$S(f,T'') \;=\; \sum_j \sum_k M_{kj} \,\cdot\, \mu(U_{kj}) \;\leqslant\; \sum_j M_j \,\cdot\, \mu(U_j) \;=\; S(f,T')\,.$$

Аналогично,

$$s(f,T'') \;=\; \sum_j \sum_k m_{kj} \cdot \mu(U_{kj}) \;\geqslant\; \sum_j m_j \cdot \mu(U_j) \;=\; s(f,T')\,. \quad ►$$

3°. *Для любых двух разбиений имеем*

$$s(f,T') \leqslant S(f,T'')\,. \tag{20.13}$$

◄ Измельчая надлежащим образом ребра основного бруса Π, построим такое его разбиение T, что $T \succ T'$ и $T \succ T''$. Тогда на основании предыдущего свойства будем иметь

$$s(f,T') \leqslant s(f,T) \leqslant S(f,T) \leqslant S(f,T'')\,,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство. ►

4°. *Если функция $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена, то существуют числа*

$$I_* := \sup_T s(f,T) \qquad \text{и} \qquad I^* := \inf_T S(f,T)\,, \tag{20.14}$$

причем $I_* \leqslant I^*$.

◄ Действительно, из неравенства (20.13) очевидно, что множество всех нижних сумм Дарбу ограничено сверху, а множество всех верхних сумм Дарбу ограничено снизу. Отсюда на основании теоремы существования точных границ следует существование указанных чисел и равенства (20.14) ►

Определение 4. *Числа* (20.14) *называются соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции f по брусу Π.*

Условимся обозначать их так:

$$I_* = \int_{*\,\Pi} f\,; \qquad I^* = \int^*_{\Pi} f\,.$$

Теорема 1 (критерий Дарбу). *Существование n-кратного интеграла по брусу Π от ограниченной функции $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ равносильно выполнению следующего равенства:*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \left[S(f,T) - s(f,T)\right] = 0\,. \tag{20.15}$$

◀ Предположим, что интеграл существует. Это значит, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f; T, \xi) = \int\limits_{\Pi} f = I \in \mathbb{R}\,.$$

Запишем это «на языке ε-δ»:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall (T, \xi) \ : \ \lambda(T) \leqslant \delta \Longrightarrow I - \varepsilon \leqslant \sigma(f; T, \xi) \leqslant I + \varepsilon\,.$$

Беря здесь inf и sup по всем отмеченным точкам и используя свойство 1° сумм Дарбу, получим

$$I - \varepsilon \leqslant S(f, T) \leqslant I + \varepsilon\,,$$

$$I + \varepsilon \geqslant s(f, T) \geqslant I - \varepsilon\,.$$

Вычитая из правого верхнего неравенства правое нижнее, найдем: $0 \leqslant S(f,T) - s(f,T) \leqslant 2\varepsilon$, т. е. выполнено условие (20.15).

Обратно, пусть выполнено условие (20.15). Так как

$$s(f, T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(f, T)\,,$$

то

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(f,T) - s(f,T) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda(t) \to 0\,.$$

Отсюда следует, что $I_* = I^*$, т. е. нижний и верхний интегралы Дарбу равны. Обозначая их общее значение через I, имеем:

$$s(f, T) \leqslant I \leqslant S(f, T)\,.$$

С другой стороны,

$$S(f, T) \geqslant \sigma(F; T, \xi) \geqslant s(f, T)\,.$$

Вычитая из предпоследних неравенств последние, получим

$$|\sigma(f; T, \xi) - I| \leqslant S(f, T) - s(f, T)\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим $\int\limits_{\Pi} f = I$. ▶

Замечание. Очевидно, что условие (20.15) может быть переписано в следующем равносильном виде:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{j=1}^{N}\omega(f,U_j)\cdot\mu(U_j)=0\,, \tag{20.16}$$

где $\omega(f,U_j)$ — колебание функции f на ячейке U_j разбиения T.

Следствие. *Если функция $f:\Pi\longrightarrow\mathbb{R}$ непрерывна на замкнутом брусе Π, то она и интегрируема по Π.*

◀ Так как замкнутый брус Π компактен, то в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности выполняется следующее условие:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}\ \ \forall U\in T\ :\ \operatorname{diam}U\leqslant\delta\Longrightarrow\omega(f,U)\leqslant\frac{\varepsilon}{\mu(\Pi)}\,.$$

Возьмем теперь разбиение T бруса Π настолько мелким, чтобы выполнялось неравенство $\lambda(T)\leqslant\delta$. Для него имеем

$$S(f,T)-s(f,T)=\sum_{k=1}^{N}M_k\mu(U_k)-\sum_{k=1}^{N}m_k\mu(U_k)=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(M_k-m_k)\mu(U_k)=\sum_{k=1}^{N}\omega(f;U_k)\mu(U_k)\leqslant\frac{\varepsilon}{\mu(\Pi)}\sum_{k=1}^{N}\mu(U_k)=\varepsilon\,.$$

Итак, выполнено условие (20.15). ▶

3. Простейшие свойства интеграла по брусу

1°. *Постоянная функция $f(\boldsymbol{x})\equiv c$ интегрируема по любому брусу $\Pi\subset\mathbb{R}^n$, причем*

$$\int\limits_{\Pi}c=c\cdot\mu(\Pi)\,,$$

где $\mu(\Pi)$ — объем бруса Π.

◀ Интегральная сумма

$$\sigma(f;T,\xi)=\sum_{j=1}^{N}c\cdot\mu(U_j)=c\cdot\mu(\Pi)$$

постоянна, а предел постоянной равен этой постоянной. ►

2°. *Линейная комбинация интегрируемых по* Π *функций* f_1 *и* f_2 *интегрируема по* Π, *причем*

$$\int\limits_{\Pi}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int\limits_{\Pi} f_1 + c_2 \int\limits_{\Pi} f_2\,. \tag{20.17}$$

◄ Интегральная сумма линейной комбинации данных функций преобразуется следующим образом:

$$\sigma(c_1 f_1 + c_2 f_2; T, \xi) = \sum_{j=1}^{N}(c_1 f_1(\xi_j) + c_2 f_2(\xi_j)) \cdot \mu(U_j) =$$

$$= c_1 \sum_{j=1}^{N} f_1(\xi_j)\mu(U_j) + c_2 \sum_{j=1}^{N} f_2(\xi_j)\mu(U_j) = c_1\sigma(f_1; T, \xi) + c_2\sigma(f_2; T, \xi)\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(T) \to 0$, получим равенство (20.17). ►

3°. *Если функция* f *интегрируема по брусу* Π, *то она ограничена на* Π.

◄ Доказательство проведем методом «от противного». Если предположить, что функция $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ неограничена, то для любого разбиения $T = \{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ она будет неограниченной по меньшей мере на одной ячейке разбиения. Поэтому колебание интегральных сумм $\sigma(f; T, \xi)$ равно $+\infty$ на любом разбиении T (варьируются только отмеченные точки ξ). Значит, не может существовать и конечного предела $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f; T, \xi)$. ►

4° (монотонность). *Если* $f \leqslant g$, *то* $\int\limits_{\Pi} f \leqslant \int\limits_{\Pi} g$.

◄ Так как $\mu(U_j) > 0$, то для интегральных сумм справедливо неравенство $\sigma(f; T, \xi) \leqslant \sigma(g; T, \xi)$. Переходя здесь к пределу, получим требуемое. ►

5° (оценки интеграла). *Для любой интегрируемой функции* $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ *имеем*

$$\left|\int\limits_{\Pi} f\right| \leqslant \int\limits_{\Pi} |f|\,. \tag{20.18}$$

Кроме того,

$$m \cdot \mu(\Pi) \leqslant \int\limits_{\Pi} f \leqslant M \cdot \mu(\Pi)\,, \tag{20.19}$$

где

$$m = \inf_{\Pi} f(\boldsymbol{x})\,, \qquad M = \sup_{\Pi} f(\boldsymbol{x})\,.$$

◀ Оценка (20.18) получается, если применить свойство монотонности 4° к неравенствам $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Оценка (20.19) получается, если применить свойство монотонности 4° к неравенствам

$$m \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant M\,. \ ▶$$

6°. *Если функции* $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ *и* $g : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ *интегрируемы по* Π, *то и их произведение* $f \cdot g : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ *интегрируемо по* Π.

◀ Желая использовать условие интегрируемости в виде (20.16), оценим колебание $\omega(fg, U)$ произведения $f \cdot g$ на множестве $U \subset \Pi$. С этой целью введем обозначения

$$M_f := \sup_{\Pi} |f(\boldsymbol{x})| \in \mathbb{R}_+\,, \quad M_g := \sup_{\Pi} |g(\boldsymbol{x})| \in \mathbb{R}_+\,.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\omega(fg, U) &= \sup_{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in U} [f(\boldsymbol{x}')g(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')g(\boldsymbol{x}'')] = \\
&= \sup_{\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in U} \{f(\boldsymbol{x}')[g(\boldsymbol{x}') - g(\boldsymbol{x}'')] - g(\boldsymbol{x}'')[f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')]\} \leqslant \\
&\leqslant M_f \omega(g, U) + M_g \omega(f, U)\,.
\end{aligned}$$

Если $T = \{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ — разбиение бруса Π, то имеем

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{k=1}^{N} \omega(fg, U_k) \cdot \mu(U_k) \leqslant \\
&\leqslant M_f \sum_{k=1}^{N} \omega(g, U_k)\mu(U_k) + M_g \sum_{k=1}^{N} \omega(f, U_k)\mu(U_k) \to 0
\end{aligned}$$

при $\lambda(T) \to 0$ в силу интегрируемости функций f и g. ▶

§ 3. Критерий Лебега существования интеграла по брусу

1. Множества меры нуль в $\mathbb{R}^n$

Определение 5. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством n-мерной меры нуль, если для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует покрытие множества E конечной или счетной системой n-мерных брусов, сумма объемов которых не превосходит ε.*

В следующей лемме собраны достаточно простые факты о множествах меры нуль.

Лемма 1. (a) *Любое конечное или счетное множество точек является множеством меры нуль.*

(b) *Объединение любого конечного или счетного семейства множеств меры нуль является множеством меры нуль.*

(c) *Любое подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.*

(d) *Невырожденный n-мерный брус не является множеством n-мерной меры нуль.*

Примеры. 1) Множество $\mathbb{Q}^n$ всех рациональных точек пространства $\mathbb{R}^n$ — счетное и потому является множеством меры нуль.

2) Пусть $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, определенная на замкнутом $(n-1)$-мерном брусе $\Pi \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда ее график

$$\Gamma_f = \big\{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \boldsymbol{x} \in \Pi;\ y = f(\boldsymbol{x})\big\}$$

имеет n-мерную меру нуль.

◀ По теореме Кантора о равномерной непрерывности имеем

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \Pi : |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| \leqslant \varepsilon\,.$$

Возьмем теперь разбиение $\big\{I_\nu \;\big|\; \nu — \text{индекс}\big\}$ бруса Π так, чтобы мелкость этого разбиения не превосходила δ. Тогда колебание функции f на каждом брусе не будет превосходить ε. Фиксируя произвольно точки $\boldsymbol{x}_\nu \in I_\nu$, введем в рассмотрение n-мерные брусы $\widetilde{I}_\nu := I_\nu \times [f(\boldsymbol{x}_\nu) - \varepsilon, f(\boldsymbol{x}_\nu) + \varepsilon]$. Множество всех этих брусов $\Big\{\widetilde{I}_\nu \;\Big|\; \nu — \text{индекс}\Big\}$ покрывает график функции f. Оценим сверху сумму их объемов

$$\sum_\nu \mu_n(\widetilde{I}_\nu) \leqslant \sum_\nu 2\varepsilon\mu_{n-1}(I_\nu) = 2\varepsilon\mu_{n-1}(\Pi)\,.$$

Значит, эту сумму можно сделать сколь угодно малой. ►

Замечание. Класс множеств n-мерной меры нуль не изменится от того, какие брусы (замкнутые или открытые) брать в качестве покрытия в определении 5.

Определение 6. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством n-мерного объема нуль, если для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует покрытие множества E конечной системой n-мерных брусов $\{I_\nu \mid \nu - \text{индекс}\}$, сумма объемов которых не превосходит ε.*

Замечания. 1. Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль и компактно, то оно имеет и объем нуль.

◄ Это следует из определения компактного множества: любое открытое покрытие компактного множества E содержит конечное подпокрытие. ►

2. Очевидно, что если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет объем нуль, то оно имеет и меру нуль. Обратное, однако, неверно: например, множество $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ — счетное и, значит, имеет меру нуль. Однако оно не является множеством объема нуль, так как его вообще невозможно покрыть никаким конечным семейством брусов.

Определение 7. *Принято говорить, что некоторое свойство выполняется почти всюду, если оно выполняется всюду, кроме множества меры нуль.*

2. Критерий Лебега

Определение 8. *Колебанием функции $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $\boldsymbol{x} \in A$ называется предел*

$$\omega(f;\boldsymbol{x}) := \lim_{\delta\to+0} \omega(f;\mathcal{K}_\delta(\boldsymbol{x}))\,,$$

где символом $\mathcal{K}_\delta(\boldsymbol{x})$ обозначен шар радиуса δ с центром в точке $\boldsymbol{x}$.

Замечание. Так как при убывании δ неотрицательная величина $\omega(f;\mathcal{K}_\delta(\boldsymbol{x}))$ *не возрастает*, то колебание $\omega(f;\boldsymbol{x})$ всегда существует и неотрицательно. Равенство $\omega(f;\boldsymbol{x}) = 0$ равносильно тому, что функция f непрерывна в точке $\boldsymbol{x}$.

Лемма 2 (обобщение теоремы Кантора). *Если $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, а для функции $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ выполняется условие*

$$\forall \boldsymbol{x} \in K: \ \omega(f;\boldsymbol{x}) \leqslant \omega_0\,,$$

то

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall \boldsymbol{x} \in K \ : \ \omega(f; \mathcal{K}_\delta(\boldsymbol{x})) \leqslant \omega_0 + \varepsilon \, .$$

Замечание. При $\omega_0 = 0$ эта лемма переходит в теорему Кантора о равномерной непрерывности, а при $\omega_0 > 0$ доказательство леммы можно провести тем же методом, что и доказательство теоремы Кантора. Поэтому на нем не останавливаемся.

Теорема 2 (критерий Лебега). *Равносильны следующие утверждения*:

(a) *функция* $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ *интегрируема по брусу* Π;

(b) *функция* $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ *ограничена на* Π *и непрерывна почти всюду на* Π.

◀ (a)$\Rightarrow$(b) Ограниченность интегрируемой функции была установлена ранее. Введем обозначение $M := \sup\limits_{\Pi} |f(\boldsymbol{x})| \in \mathbb{R}_+$. Чтобы показать, что f непрерывна почти всюду на Π, предположим противное: пусть множество $E := \big\{ \boldsymbol{x} \in \Pi \bigm| \omega(f; \boldsymbol{x}) > 0 \big\}$ *не является* множеством меры нуль. Представляя это множество в виде объединения $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_k := \big\{ \boldsymbol{x} \in \Pi \bigm| \omega(f; \boldsymbol{x}) > 1/k \big\}$, мы на основании леммы 1(b) заключаем, что существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что множество E_{k_0} не является множеством меры нуль.

Пусть $P = \{I_1, \ldots, I_N\}$ произвольное разбиение бруса Π. Разобьем множество P на два подмножества: $P = A \sqcup B$, где

$$A := \left\{ I_\nu \in P \;\middle|\; I_\nu \cap E_{k_0} \neq \varnothing \, , \ \omega(f, I_\nu) \geqslant \frac{1}{2k_0} \right\} , \quad B := P \diagdown A \, .$$

Покажем, *что брусы системы* A *покрывают всё множество* E_{k_0}. В самом деле, пусть $\boldsymbol{x} \in E_{k_0}$, и пусть $I_\nu \in P$ — брус, содержащий точку $\boldsymbol{x}$. Надо показать, что $I_\nu \in A$. Если $\boldsymbol{x}$ — внутренняя точка бруса I_ν, т. е. $\boldsymbol{x} \in I_\nu^\circ$, то

$$\omega(f, I_\nu) \geqslant \omega(f, \boldsymbol{x}) > \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0} \, ,$$

т. е. $I_\nu \in A$. Если же точка $\boldsymbol{x} \in E_{k_0}$ лежит на границе нескольких брусов I_ν, то колебание функции f по меньшей мере на одном из них будет больше $1/2k_0$. Этот брус и войдет в систему A.

Выберем теперь отмеченные точки $\boldsymbol{\xi}'_\nu$, $\boldsymbol{\xi}''_\nu \in I_\nu$ так, чтобы на брусах системы B было: $\boldsymbol{\xi}'_\nu = \boldsymbol{\xi}''_\nu$, а на брусах системы A было:

$$f(\boldsymbol{\xi}') - f(\boldsymbol{\xi}'') > \frac{1}{3k_0}\,.$$

Оценим снизу разность между суммами Дарбу

$$S(f,P) - s(f,P) \geqslant |\sigma(f;P,\boldsymbol{\xi}) - \sigma(f;P,\boldsymbol{\xi})| =$$

$$= \left|\sum_{I_\nu \in A} \left[f(\boldsymbol{\xi}'_\nu) - f(\boldsymbol{\xi}''_\nu)\right] \mu(I_\nu)\right| \geqslant \frac{1}{3k_0} \cdot \sum_{I_\nu \in A} \mu(I_\nu) \geqslant c > 0\,,$$

так как брусы системы A покрывают множество E_{k_0}, которое *не является* множеством меры нуль. Значит, не выполнено условие критерия Дарбу (теоремы 1), и потому функция $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ не интегрируема.

(b)$\Rightarrow$(a) Зададим произвольно $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, и пусть

$$E_\varepsilon := \left\{\boldsymbol{x} \in \Pi \;\middle|\; \omega(f, \boldsymbol{x}) \geqslant \varepsilon\right\}\,.$$

Так как $E_\varepsilon \subset E$, то E_ε имеет меру нуль и к тому же компактно. Значит, оно имеет и объем нуль. Поэтому существует конечная система брусов $\{I_1, \ldots, I_k\}$, такая, что

$$E_\varepsilon \subset \bigcup_{\nu=1}^{k} I_\nu^\circ \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{k} \mu(I_\nu) < \varepsilon\,.$$

Положим $C_1 := \bigcup\limits_{\nu=1}^{k} I_\nu$, а через C_2 и C_3 обозначим объединения брусов, полученных из брусов I_ν гомотетиями из их центров с коэффициентами 2 и 3 соответственно. Очевидно, что E_ε лежит внутри C_1, а расстояние $d := \operatorname{dist}\{\operatorname{Fr} C_2; \operatorname{Fr} C_3\}$ положительно.

Отметим, что сумма объемов любой конечной системы брусов, которые лежат в C_3 и попарно не имеют общих внутренних точек, не превосходит $3^n\varepsilon$.

Отметим также, что любое подмножество бруса Π, диаметр которого меньше d, либо содержится в C_3, либо не лежит в C_2, т. е. лежит в компакте $K := \Pi \setminus C_2^\circ$. По построению $E_\varepsilon \subset \Pi \setminus K$, значит,

$\forall \boldsymbol{x} \in K \,:\, \omega(f, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$. По лемме 2 имеем:

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ :\ |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < 2\varepsilon\,.$$

Пусть теперь

$$P' := \left\{ I'_\nu \ \middle|\ \nu \text{ — индекс} \right\}\,, \quad P'' := \left\{ I''_\mu \ \middle|\ \mu \text{ — индекс} \right\}$$

— два разбиения бруса Π, мелкости которых меньше $\min\,[d, \delta]$, и пусть $P := \left\{ I_{\mu\nu} := I'_\nu \cap I''_\mu \ \middle|\ \mu, \nu \text{ — индексы} \right\}$. Отмеченные точки этих трех разбиений будем обозначать соответственно через ξ'_ν, ξ''_μ, $\xi_{\mu\nu}$. Учитывая, что $\mu_n(I'_\nu) = \sum\limits_\mu \mu_n(I_{\mu\nu})$, имеем

$$|\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P, \xi)| = \left| \sum_{\mu,\nu} \left[f(\boldsymbol{\xi}'_\nu) - f(\boldsymbol{\xi}_{\nu\mu)} \right] \cdot \mu_n(I_{\nu\mu}) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_1 \left| f(\boldsymbol{\xi}'_\nu) - f(\boldsymbol{\xi}_{\nu\mu)} \right| \cdot \mu_n(I_{\nu\mu}) + \sum\nolimits_2 \left| f(\boldsymbol{\xi}'_\nu) - f(\boldsymbol{\xi}_{\nu\mu)} \right| \cdot \mu_n(I_{\nu\mu})\,.$$

Здесь через $\sum_1$ обозначена сумма, в которую включены все те брусы $I_{\mu\nu}$, для которых $I_{\mu\nu} \subset I_\nu \in P'$ и которые лежат в C_3. Остальные же брусы отнесены к сумме $\sum_2$. Поскольку $|f(\boldsymbol{x})| \leqslant M$ на Π, то $\sum_1 \leqslant 2M \cdot 3^n \varepsilon$. Учитывая, что во второй сумме $\boldsymbol{\xi}'_\nu, \boldsymbol{\xi}_{\nu\mu} \in I'_\nu \subset K$ и $\lambda(P') < \delta$, имеем $|f(\boldsymbol{\xi}'_\nu) - f(\boldsymbol{\xi}_{\nu\mu})| < 2\varepsilon$ и, значит, $\sum_2 \leqslant 2\varepsilon \cdot \mu_n(P)$. Таким образом, имеем

$$|\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P, \xi)| \leqslant 2\,[3^n M + \mu_n(\Pi)] \cdot \varepsilon\,.$$

Заменяя здесь (P', ξ') на (P'', ξ''), получим

$$|\sigma(f; P'', \xi'') - \sigma(f; P, \xi)| \leqslant 2\,[3^n M + \mu_n(\Pi)] \cdot \varepsilon\,.$$

Отсюда, используя неравенство треугольника, находим

$$S(f, P) - sIf, P) \leqslant |\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P'', \xi'')| \leqslant 4\,[3^n M + \mu_n(\Pi)] \cdot \varepsilon\,,$$

т. е. выполнено условие критерия Дарбу. ▶

§ 4. Интеграл по ограниченному множеству из $\mathbb{R}^n$

1. Допустимые множества

В дальнейшем нам предстоит интегрировать функции не только по брусам, но и по другим подмножествам пространства $\mathbb{R}^n$, не слишком сложным, но достаточно сложным для большинства приложений.

Определение 9. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть допустимым, если оно ограничено, а его граница $\operatorname{Fr} E$ имеет меру нуль.*

Напомним определение *границы* множества $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{Fr} E :=$$
$$:= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall\, U \text{ — окрестности точки } \boldsymbol{x} \ : \ \begin{cases} U \cap E \neq \varnothing\,, \\ U \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \varnothing\,. \end{cases} \right\}$$

Из этого определения просто вытекает, что $\operatorname{Fr} E = \operatorname{Fr}\,(\mathbb{R}^n \setminus E)$, а также свойства, перечисляемые в следующих двух леммах.

Лемма 1. *Для любых E, E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ имеем:*

(a) $\operatorname{Fr} E$ *— замкнутое множество;*

(b) $\operatorname{Fr}\,(E_1 \cup E_2) \subset \operatorname{Fr}\,(E_1) \cup \operatorname{Fr}\,(E_2)$;

(c) $\operatorname{Fr}\,(E_1 \cap E_2) \subset \operatorname{Fr}\,(E_1) \cup \operatorname{Fr}\,(E_2)$;

(d) $\operatorname{Fr}\,(E_1 \setminus E_2) \subset \operatorname{Fr}\,(E_1) \cup \operatorname{Fr}\,(E_2)$.

Лемма 2. *Объединение и пересечение конечного числа допустимых множеств являются допустимыми множествами. Разность допустимых множеств также является допустимым множеством.*

Замечания. 1. Утверждение (a) леммы 1 следует из того, что граница является дополнением к открытому множеству. Остальные утверждения леммы 1 просто иллюстрируются на диаграмме Эйлера — Венна. Лемма 2 является следствием леммы 1. Утверждения леммы 2 выражают тот факт, что совокупность всех допустимых множеств, лежащих в $\mathbb{R}^n$, является *кольцом* относительно операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

2. Для бесконечного семейства допустимых множеств лемма 2, вообще говоря, неверна, как, впрочем, и утверждения, аналогичные утверждениям (b) и (c) леммы 1.

3. Граница допустимого множества — не только замкнутое, но и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Значит, она имеет не только меру нуль, но и объем нуль (т. е.

допускает покрытие конечным семейством брусов, сумма объемов которых сколь угодно мала).

Определение 10. *Характеристической функцией множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ *называется функция* $\chi_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *задаваемая равенством*

$$\chi_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1\,, & \boldsymbol{x} \in E\,, \\ 0\,, & \boldsymbol{x} \notin E\,. \end{cases}$$

Лемма 3. *Множество всех точек разрыва характеристической функции* χ_E *совпадает с границей* $\operatorname{Fr} E$ *множества* E.

◀ Представим множество $\mathbb{R}^n$ в виде дизъюнктного объединения следующим образом:

$$\mathbb{R}^n = E^\circ \sqcup \operatorname{Fr} E \sqcup \left(\mathbb{R}^n \diagdown \overline{E}\right)\,.$$

Так как множество E° открыто, и $E^\circ \subset E$, то

$$\forall \boldsymbol{x} \in E^\circ \,:\, \chi_E(\boldsymbol{x}) \equiv 1\,,$$

и значит, χ_E непрерывна на E°.

Так как множество $\mathbb{R}^n \diagdown \overline{E}$ открыто, и $\mathbb{R}^n \diagdown \overline{E} \subset \mathbb{R}^n \diagdown E$, то

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \diagdown \overline{E} \,:\, \chi_E(\boldsymbol{x}) \equiv 0\,,$$

и значит, χ_E непрерывна на $\mathbb{R}^n \diagdown \overline{E}$.

Если же $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Fr} E$, то в любой окрестности U точки $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Fr} E$ по определению характеристической функции имеем: $\omega(\chi_E, U) \equiv 1$, и значит, χ_E разрывна в точке $\boldsymbol{x}$. ▶

2. Интеграл по ограниченному множеству $E \subset \mathbb{R}^n$

Пусть задана функция $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$. В этом разделе нам удобно считать, что она определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ (а не только на множестве E). Желая доопределить ее нулём, станем рассматривать вместо f произведение $\chi_E f$, где χ_E — характеристическая функция множества E.

Определение 11. *Интеграл от функции f по ограниченному множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ определяется равенством*

$$\int\limits_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} := \int\limits_\Pi \chi_E(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,, \tag{20.20}$$

где Π — произвольный замкнутый брус, содержащий множество E.

Если интеграл, находящийся в правой части равенства (20.20), существует, то функция f называется *интегрируемой по множеству E в смысле Римана*, в противном случае — неинтегрируемой.

Лемма 4. *Если Π_1 и Π_2 — замкнутые брусы, содержащие множество E, то интегралы*

$$\int\limits_{\Pi_1} \chi_E(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\Pi_2} \chi_E(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{20.21}$$

либо оба не существуют, либо оба существуют и равны между собой.

◄ Введем в рассмотрение брус $\Pi := \Pi_1 \cap \Pi_2 \supset E$. Множество всех точек разрыва функции $\chi_E f$ содержится в объединении $\operatorname{Fr} E$ и множества всех точек разрыва функции f, и, значит, содержится в Π. Применяя критерий Лебега, заключаем, что оба интеграла (20.21) существуют или нет, смотря по тому, существует или нет интеграл

$$\int\limits_{\Pi} \chi_E(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\,.$$

Если они существуют, то для их вычисления мы вправе выбирать разбиения брусов Π, Π_1, Π_2 по своему усмотрению. Будем поэтому брать только такие разбиения брусов Π_1 и Π_2, которые содержат в качестве подмножеств разбиения бруса Π. Но для таких разбиений интегральные суммы по всем трем брусам Π, Π_1, Π_2 равны между собой, так как $\chi_E(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ при $\boldsymbol{x} \notin E$. Из равенства интегральных сумм вытекает и равенство интегралов. ►

Теорема 3 (критерий интегрируемости). *Пусть функция $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ определена на допустимом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Равносильны следующие утверждения:*

(a) *функция f интегрируема по множеству E;*

(b) *функция f ограничена, а множество всех ее точек разрыва имеет меру нуль.*

◀ Так как

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} := \int_\Pi \chi_E(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\ , \quad \text{где } \Pi \supset E\,,$$

то достаточно применить критерий Лебега к интегралу по Π от функции $\chi_E f$. Ограниченность функции $\chi_E f$ равносильна ограниченности функции f. Множества точек разрыва функций $\chi_E f$ и f могут отличаться самое бо́льшее на множество точек разрыва функции χ_E, которое совпадает с $\operatorname{Fr} E$. Но это множество является множеством меры нуль, так как множество E — допустимое. Таким образом, условие (b) на функцию $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ равносильно условию (b) на функцию $\chi_E f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$. ▶

3. Мера Жордана допустимого множества в $\mathbb{R}^n$

Определение 12. *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Жордану, если существует интеграл*

$$\mu(E) = \mu_n(E) := \int_E 1 \cdot d\boldsymbol{x}\ .$$

Величина этого интеграла называется мерой Жордана (или n-мерным объемом) множества E.

Лемма 5. *Измеримыми по Жордану множествами в $\mathbb{R}^n$ являются допустимые множества, и только они.*

◀ Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество, содержащееся в брусе Π. Тогда

$$\mu(E) = \int_E 1 \cdot d\boldsymbol{x} = \int_\Pi \chi_E(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\ . \tag{20.22}$$

Применяя к последнему интегралу критерий Лебега, заключаем, что граница $\mathrm{Fr}\, E$ множества E является множеством меры нуль, т. е. E — допустимое множество.

Обратно, если E — допустимое множество, то оно ограниченное, а его граница есть множество меры нуль. Поэтому интеграл в правой части (20.22) существует, значит, существует и $\mu(E)$. ►

Замечания. 1. Меру Жордана (n-мерный объем) множества E условимся обозначать символом $\mu(E)$. В тех случаях, когда необходимо явно указать, о какой размерности объема идет речь, будем использовать обозначение $\mu_n(E)$.

2. Меру Жордана[2] размерностей $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ принято называть *длиной, площадью* и *объемом* соответственно.

3. Поскольку термин «множества, измеримые по Жордану» является общепринятым, то нет необходимости в дальнейшем использовать для них термин «допустимые множества».

4. Свойства n-кратных интегралов

Все множества, по которым ведется интегрирование, здесь и всюду в дальнейшем считаются измеримыми по Жордану.

Теорема 4 (линейность). *Если функции $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы, то их линейная комбинация интегрируема, и справедливо равенство*

$$\int\limits_E [\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})] d\boldsymbol{x} = \alpha \int\limits_E f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \beta \int\limits_E g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\,. \qquad (20.23)$$

◄ Пусть $E \subset \Pi$, где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус. Используя свойство линейности интеграла по брусу, имеем:

$$\int\limits_E [\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})] d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Pi \chi_E(\boldsymbol{x}) [\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})] d\boldsymbol{x} =$$

$$= \alpha \int\limits_\Pi \chi_E(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \beta \int\limits_\Pi \chi_E(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} =$$

[2] *Жордан* Мари Энмон Камиль (1838—1922) — французский математик.

$$= \alpha \int\limits_E f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \beta \int\limits_E g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \,. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 5 (аддитивность). *Если функция f интегрируема по множеству $E_1 \cup E_2 \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема и по множествам E_1, E_2, $E_1 \cap E_2$, причем*

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int\limits_{E_1} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{E_2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int\limits_{E_1 \cap E_2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \,. \tag{20.24}$$

◀ Существование всех интегралов в правой части равенства (20.24) следует из теоремы 3 (критерия интегрируемости). Умножая, далее, очевидное равенство

$$\chi_{E_1 \cup E_2}(\boldsymbol{x}) = \chi_{E_1}(\boldsymbol{x}) + \chi_{E_2}(\boldsymbol{x}) - \chi_{E_1 \cap E_2}(\boldsymbol{x})$$

на $f(\boldsymbol{x})$, интегрируя полученное равенство по брусу $\Pi \supset E_1 \cup E_2$, используя затем предыдущую теорему, получим равенство (20.24). ▶

Теорема 6 (аддитивность). *Если в условиях предыдущей теоремы множество $E := E_1 \cap E_2$ имеет меру нуль, то*

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int\limits_{E_1} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{E_2} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \,. \tag{20.25}$$

◀ Пусть Π — брус, содержащий множество $E_1 \cup E_2$. Так как множество E имеет меру нуль, то $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует такое разбиение $\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$, что

$$\sum_{U_k \cap E \neq \varnothing} \mu(U_k) \leqslant \varepsilon \,.$$

Обозначая $M := \sup |f(\boldsymbol{x})|$, оценим сверху интегральную сумму интеграла $\int\limits_E f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$:

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \chi_E(\boldsymbol{\xi}_k) f(\boldsymbol{\xi}_k) \mu(U_k) \right| \leqslant \sum_{U_k \cap E \neq \varnothing} \chi_E(\boldsymbol{\xi}_k) |f(\boldsymbol{\xi}_k)| \mu(U_k) \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \sum_{U_k \cap E \neq \varnothing} \mu(U_k) \leqslant M \cdot \varepsilon \,.$$

Таким образом, последний интеграл в (20.24) равен нулю, и мы получаем равенство (20.25). ▶

Теорема 7 (монотонность). *Если интегрируемые функции* $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *связаны неравенством* $f \leqslant g$, *то* $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$.

◀ Эта теорема является простым следствием свойства монотонности интеграла по брусу $\Pi \supset E$, если это свойство применить к неравенству $\chi_E f \leqslant \chi_E g$. ▶

Замечание. Вообще, все оценки, установленные ранее для интегралов по брусам, с соответствующими изменениями переносятся и на интегралы по множествам, измеримым по Жордану. Сформулируем здесь еще теорему «о среднем». *Если* $E \subset \mathbb{R}^n$ *— континуум*[3], *измеримый по Жордану, а функция* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна на* E, *то существует точка* $\boldsymbol{\xi} \in E$, *такая, что*

$$\int\limits_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mu_n(E).$$

[3] *Континуумом* называется замкнутое связное множество.

Глава 21
МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В этой главе излагаются важнейшие методы вычисления кратных интегралов и решаются некоторые другие, связанные с ними, теоретические и прикладные вопросы.

§ 1. Сведение кратных интегралов к повторным

1. Теорема Фубини

В предыдущей главе шла речь об определении понятия кратного интеграла, об условиях его существования, а также о свойствах кратных интегралов. Здесь будет доказана теорема, которая наряду с теоремой о замене переменных является важнейшим средством для вычисления кратных интегралов.

Теорема 8 (Фубини[1]). *Пусть* $\Pi_m \subset \mathbb{R}^m$, $\Pi_n \subset \mathbb{R}^n$ *— замкнутые брусы размерностей* m *и* n *соответственно, а* $f : \Pi_m \times \Pi_m \longrightarrow \mathbb{R}$ *— интегрируемая функция. Пусть, далее, функция* $g_{\boldsymbol{x}} : \Pi_n \longrightarrow \mathbb{R}$ *определена равенством* $g_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, *и*

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}) := \int\limits_{\Pi_n}{}_{*} g_{\boldsymbol{x}} = \int\limits_{\Pi_n}{}_{*} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\,, \tag{21.1}$$

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{x}) := \int\limits_{\Pi_n}^{*} g_{\boldsymbol{x}} = \int\limits_{\Pi_n}^{*} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}\,. \tag{21.2}$$

---

[1] *Теорема Фубини* — общее название теорем о сводимости кратных интегралов к повторным. *Фубини* Гвидо (1879—1943) — итальянский математик, установивший в 1907 г. одну из таких теорем.

Тогда функции $\mathcal{L}$ и $\mathcal{U}$ интегрируемы по Π_m, *причем*

$$\int\limits_{\Pi_m\times\Pi_n} f = \int\limits_{\Pi_m} \mathcal{L} = \int\limits_{\Pi_m} d\boldsymbol{x} \underset{\Pi_n}{\int_*} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,, \tag{21.3}$$

$$\int\limits_{\Pi_m\times\Pi_n} f = \int\limits_{\Pi_m} \mathcal{U} = \int\limits_{\Pi_m} d\boldsymbol{x} \underset{\Pi_n}{\int^*} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\,. \tag{21.4}$$

Замечание. Интегралы, находящиеся в правых частях равенств (21.3) и (21.4), называются *повторными.* Поскольку при некоторых значениях $\boldsymbol{x}$ функция $g_{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{y} \longmapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ может оказаться неинтегрируемой по $\boldsymbol{y}$, то в правых частях равенств (21.3) и (21.4) под внутренними интегралами понимаются соответственно нижний и верхний интегралы Дарбу. На самом деле в качестве значений внутренних интегралов можно брать любые значения, заключенные между нижним и верхним интегралами Дарбу.

◀ Любое разбиение T бруса $\Pi_m\times\Pi_n$ индуцируется соответствующими разбиениями P_X и P_Y брусов Π_m и Π_n. При этом каждый брус разбиения T есть декартово произведение $X_i\times Y_j$ некоторых брусов из разбиений P_X и P_Y соответственно. По свойствам брусов имеем $\mu_{m+n}(X\times Y)=\mu_m(X)\cdot\mu_n(Y)$, где через μ_k обозначен k-мерный объем.

Используя свойство точных границ, имеем

$$\begin{aligned}
s(f;T) &= \sum_{i,j} \inf_{\substack{\boldsymbol{x}\in X_i\\ \boldsymbol{y}\in Y_j}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\mu_{m+n}(X_i\times Y_j) = \\
&= \sum_i \inf_{\boldsymbol{x}\in X_i}\left(\sum_j \inf_{\boldsymbol{y}\in Y_j} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\cdot\mu_n(Y_j)\right)\cdot\mu_m(X_i) \leqslant \\
&\leqslant \sum_i \inf_{\boldsymbol{x}\in X_i}\left(\underset{\Pi_n}{\int_*} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)\mu_m(X_i) \leqslant \\
&\leqslant \sum_i \sup_{\boldsymbol{x}\in X_i}\left(\underset{\Pi_n}{\int^*} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)\mu_m(X_i) \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_i \sup_{\boldsymbol{x}\in X_i} \left(\sum_j \sup_{\boldsymbol{y}\in Y_j} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \mu_n(Y_j) \right) \cdot \mu_m(X_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in X_i \\ \boldsymbol{y}\in Y_j}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \mu_{m+n}(X_i \times Y_j) = S(f;T)\,.$$

Отсюда, устремляя к нулю мелкость разбиения T и пользуясь критерием Дарбу

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} [S(f;T) - s(f;T)] = 0\,,$$

можно получить равенства (21.3) и (21.4). ►

2. Некоторые применения теоремы Фубини

Пусть $\Pi = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный брус, а функция $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на Π. Применяя n раз теорему Фубини, имеем:

$$\iint_{\Pi}\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n\,, \quad (21.5)$$

причем однократные интегрирования в правой части (21.5) можно производить в любом другом порядке, чем в (21.5).

Рассмотрим более сложную ситуацию.

Определение 13. *Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ будем называть элементарным (или простым) в направлении оси x'', если его можно представить в виде*

$$G = \left\{ \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x'') \;\middle|\; \boldsymbol{x}' \in G' \subset \mathbb{R}^{n-1};\, \varphi(\boldsymbol{x}') \leqslant x'' \leqslant \varphi(\boldsymbol{x}'') \right\}\,, \quad (21.6)$$

где множество G' измеримо по Жордану, а функции $\varphi, \psi : G' \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывны.

Теорема 9. *Если $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая функция, а множество G — элементарное вида* (21.6), *то*

$$\int\limits_G f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{G'} d\boldsymbol{x}' \int\limits_{\varphi(\boldsymbol{x}')}^{\psi(\boldsymbol{x}')} f(\boldsymbol{x}', x'')\,dx''\,. \tag{21.7}$$

◀ Заключим множество G в n-мерный брус $G \subset \Pi := \Pi' \times [a\,,\,b] \subset \subset \mathbb{R}^n$, где $G' \subset \Pi' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $[a\,,\,b] \supset [\varphi(\boldsymbol{x}'), \psi(\boldsymbol{x}')]$. Используя определение интеграла по G, теорему Фубини и очевидное тождество

$$\chi_G(\boldsymbol{x}', x'') = \chi_{G'}(\boldsymbol{x}') \cdot \chi_{[\varphi(x'),\psi(x')]}(x'')\,,$$

имеем

$$\int\limits_G f = \int\limits_\Pi f\chi_G = \int\limits_{\Pi'} \chi_{G'}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \int\limits_a^b f(\boldsymbol{x}', x'')\chi_{[\varphi(x'),\psi(x')]}(x'')\,dx'' =$$
$$= \int\limits_{\Pi'} \chi_{G'}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \int\limits_{\varphi(\boldsymbol{x}')}^{\psi(\boldsymbol{x}')} f(\boldsymbol{x}', x'')\,dx'' = \int\limits_{G'} d\boldsymbol{x}' \int\limits_{\varphi(\boldsymbol{x}')}^{\psi(\boldsymbol{x}')} f(\boldsymbol{x}',\, x'')\,dx''\,,$$

что и требовалось. ▶

Замечания. 1. В частности, лежащее в $\mathbb{R}^2$ элементарное множество может быть представлено в виде

$$G_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqslant x \leqslant b\,;\; \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\right\}$$

или в виде

$$G_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \leqslant y \leqslant d\,;\; \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\right\}\,.$$

В этих случаях равенство (21.7) принимает соответственно следующий вид:

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,,$$

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dx \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,.$$

2. Элементарные множества, лежащие в $\mathbb{R}^3$, имеют, естественно, бо́льшее разнообразие. Например, множество $G \subset \mathbb{R}^3$, элементарное в направлении оси z, можно представить в виде

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y) \in G_1\,;\ \varphi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y)\right\}\,.$$

В этом случае интеграл по G — тройной, а равенство (21.7) приобретает следующий вид:

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_{G_1} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)\,dx\,.$$

Таким образом, в этом случае вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению сначала однократного, а потом двойного интеграла.

Теорема 10 (принцип Кавальери[2]). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество, а отрезок $[a\,,\,b]$ — проекция этого множества на ось x_n, где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$. Пусть множество*

$$G_c := \left\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_{n-1}, c) \in G\right\}$$

измеримо по Жордану при каждом фиксированном $c \in [a\,,\,b]$. Тогда

$$\int\limits_{G} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{a}^{b} dx_n \int\limits_{G_{x_n}} f(\boldsymbol{x})\,dx_1 \ldots dx_{n-1}\,. \tag{21.8}$$

◀ Возьмем брус $\Pi := \Pi' \times [a\,,\,b] \supset G$, где $\Pi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерный брус. Так как

$$\chi_G(x_1, \ldots, x_{n-1}, c) \equiv \chi_{G_c}(x_1, \ldots, x_{n-1})\,,$$

[2] *Кавальери* Бонавентура (1598—1647) — итальянский математик.

то по теореме Фубини имеем:

$$\int\limits_G f = \int\limits_\Pi \chi_G(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \iint\limits_{\Pi' \times [a,b]} \chi_G(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_n \int\limits_{\Pi'} \chi_{G_{x_n}}(x_1, \ldots, x_{n-1}) f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_1 \ldots\, dx_{n-1} =$$

$$= \int\limits_a^b dx_n \int\limits_{G_{x_n}} f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Полагая в равенстве (21.8) $f(\boldsymbol{x}) \equiv 1$, получаем равенство

$$\mu_n(G) = \int\limits_a^b \mu_{n-1}(G_{\boldsymbol{x}_n})\, d\boldsymbol{x}_n\,,$$

выражающее n-мерный объем множества $G \subset \mathbb{R}^n$ через $(n-1)$-мерные объемы его «поперечных» сечений.

§ 2. Разложение единицы и его применение

1. Вводные замечания и вспомогательные предложения

Предположим, что поставлена задача установить для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ результат глобального характера, например, доказать утверждение типа: «Множество A обладает свойством S». Иногда бывает проще установить соответствующее утверждение локального характера, например: «Существует окрестность U каждой точки $x \in A$, обладающая свойством S». В таких случаях дело сводится к проблеме установления глобального результата, исходя из соответствующего локального результата. Для решения такого типа проблем предназначена конструкция, которая в учебной литературе обычно называется «разбиением единицы». Здесь эта конструкция изучается под названием «разложение единицы», поскольку этот последний термин более адекватно отражает существо изучаемой проблемы[3]. Предварительно установим ряд вспомогательных фактов.

Лемма 1. *Пусть $C \subset G^0 \subset \mathbb{R}^n$, где C — компактное, а G^0 — открытое множество. Существует компактное множество D, такое, что*

$$C \subset D^0 \subset D \subset G^0\,,$$

где D^0 — внутренность множества D.

◀ Для любого $\boldsymbol{x}_0 \in C$ существует замкнутый шар

$$K_r(\boldsymbol{x}_0) := \{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant r\} \subset G^0\,.$$

Семейство открытых шаров $\big\{K_r^0(\boldsymbol{x}) \bigm| \boldsymbol{x} \in C\big\}$ есть открытое покрытие множества C. Так как C — компакт, то это покрытие содержит конечное подпокрытие $\big\{K^0_{r_1}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, K^0_{r_N}(\boldsymbol{x}_N)\big\}$. Полагая

$$D^0 := \bigcup_{\nu=1}^{N} K^0_{r_\nu}(x_\nu)\,, \quad D := \bigcup_{\nu=1}^{N} K_{r_\nu}(\boldsymbol{x}_\nu)\,,$$

получаем

$$C \subset D^0 \subset D \subset G^0\,. \quad ▶$$

Определение 14. *Говорят, что функция $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, принадлежит классу $C^\infty(A)$, если в любой точке $\boldsymbol{x} \in A$ эта функция имеет частные производные любых порядков.*

Замечание. Когда ясно, о каком множестве A идет речь, указанный в определении класс обозначается символом C^∞.

Определение 15. *Носителем функции $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ называется замыкание множества всех точек, в которых $f(\boldsymbol{x}) \neq 0$.*

---

[3]Действительно, термин «разбиение» обычно относится к множествам, например, когда разбивают множества более мелкие части. Термин же «разложение» по большей части применяется к функциям, например, когда разлагают функции в функциональные ряды того или иного типа. *В рассматриваемом здесь случае речь идет именно о разложении функции, тождественно равной единице,* т. е. о представлении ее в виде суммы функций, обладающих определенными свойствами.

Приведем обозначение для носителя функции f:

$$\operatorname{supp} f := \overline{\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) \neq 0\right\}}\,.$$

Лемма 2. *Пусть A — компактное, а $\mathcal{G}^0$ — открытое множество, и $A \subset \mathcal{G}^0 \subset \mathbb{R}^n$. Существует функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, обладающая следующими свойствами:*

(a) *носитель* $\operatorname{supp} f$ *компактен, и* $A \subset \operatorname{supp} f \subset \mathcal{G}^0$*;*

(b) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$*;*

(c) $\forall \boldsymbol{x} \in A \ : \ f(\boldsymbol{x}) \equiv 1$.

◀ Функция

$$f_0(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0\,, \\ 0\,, & x \leqslant 0\,, \end{cases}$$

обладает следующими очевидными[4] свойствами:

$$f_0 \in C^\infty(\mathbb{R})\,, \quad \operatorname{supp} f_0 = [0\,, +\infty)\,.$$

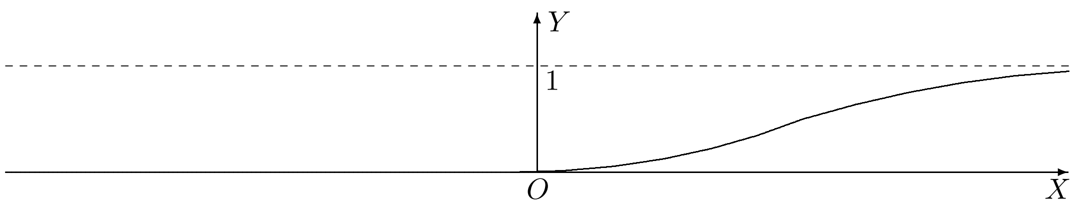

Рис. 5. График функции f_0 («склон»)

Полагая, далее

$$g(x) := \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f_0(t) f_0(1-t)\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) f_0(1-t)\,dt}\,,$$

заключаем, что $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, причем $g(x) \equiv 0$ при $x \leqslant 0$, $g(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$, $0 < g(x) < 1$ при $0 < x < 1$.

[4] Не совсем очевидно только то, что все производные справа в точке $x = 0$ равны нулю. Но это легко показать, обращаясь непосредственно к определению производной и применяя правило Лопиталя.

Вводя обозначение $h(t) := g(t+1) - g(t)$, получаем функцию $h \in \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой $\operatorname{supp} h = [-1\,,\,1]$, причем $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$.

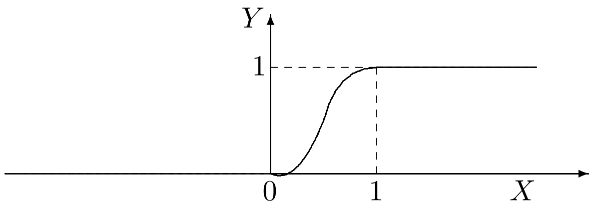

Рис. 6. График функции g («ступенька»)

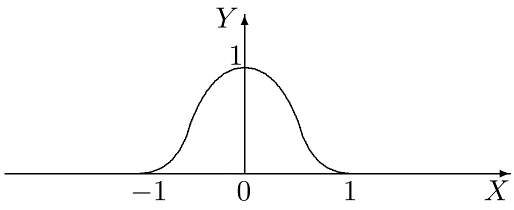

Рис. 7. График функции h («шапочка»)

Суммируя, далее, ряд, будем иметь:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(t-j) \equiv \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=-N}^{N} [g(t+1-j) - g(t-j)] \equiv$$

$$\equiv \lim_{N\to+\infty} [g(t+1+N) - g(t+N) + \ldots + g(t+1-N) - g(t-N)] \equiv$$

$$\equiv \lim_{N\to+\infty} [g(t+1+N) - g(t-N)] \equiv 1\,.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Перемножая ряды

$$\sum_{j_1\in\mathbb{Z}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_1\right) \equiv 1\,,\ \sum_{j_2\in\mathbb{Z}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_2\right) \equiv 1\,, \ldots\,,\ \sum_{j_n\in\mathbb{Z}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_n\right) \equiv 1\,,$$

получим ряд

$$\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{Z}^n} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_1\right) \cdot h\left(\frac{x_2}{\varepsilon} - j_2\right) \cdot \ldots \cdot h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - j_n\right) \equiv 1\,. \qquad (21.9)$$

Перенумеруем теперь векторы $(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ натуральными числами $j = j(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}$ и перепишем равенство (21.9) в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \equiv 1\,,\ \text{где } \varphi_j(\boldsymbol{x}) := h\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - j_1\right)\cdot h\left(\frac{x_2}{\varepsilon} - j_2\right)\cdot\ldots\cdot h\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - j_n\right)\,.$$

Каждая функция φ_j принадлежит классу C^∞, а ее носителем является куб Q_j с центром в точке $(\varepsilon j_1, \varepsilon j_2, \ldots, \varepsilon j_n)$ со стороной 2ε. Различные кубы Q_j не имеют общих внутренних точек и покрывают всё пространство $\mathbb{R}^n$.

Выберем теперь ε настолько малым, чтобы выполнялось неравенство[5] $0 < 2\varepsilon\sqrt{n} < \operatorname{dist}(A; \operatorname{Fr}\mathcal{G})$ (т. е. расстоянию от множества A до границы множества $\mathcal{G}$). Пусть

$$\mathcal{J} := \left\{ j \in \mathbb{N} \;\middle|\; A \cap \operatorname{supp}\varphi_j \neq \varnothing \right\} .$$

Тогда функция

$$f(\boldsymbol{x}) := \sum_{j\in\mathcal{J}} \varphi_j(\boldsymbol{x})$$

обладает всеми требуемыми свойствами.

Действительно, так как множество A — компактное, то семейство $\mathcal{J}$ — конечное. Поэтому $f \in C^\infty$ как сумма конечного семейства функций класса C^∞. Далее, носитель $\operatorname{supp} f \subset \bigcup\limits_{j\in\mathcal{J}} \operatorname{supp}\varphi_j$ компактен, так как содержится в объединении конечного семейства компактных множеств. Кроме того, $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{G}^0$ в силу неравенства $2\varepsilon\sqrt{n} < \operatorname{dist}(A; \operatorname{Fr}\mathcal{G})$. Далее,

$$0 \leqslant f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \equiv 1 .$$

И, наконец, если $\boldsymbol{x} \in A$, то

$$1 \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{j\in\mathcal{J}} \varphi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{j\notin\mathcal{J}} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{j\in\mathcal{J}} \varphi_j(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x}) ,$$

так как все слагаемые суммы $\sum\limits_{j\notin\mathcal{J}} \varphi_j(\boldsymbol{x})$ равны нулю ($\boldsymbol{x} \in A$, а $\operatorname{supp}\varphi_j \cap A = \varnothing$ при $j \notin \mathcal{J}$). ►

2. Теорема существования разложения единицы

Определение 16. *Семейство $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ функций $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \longrightarrow \mathbb{R}$ класса C^∞ называется разложением единицы для множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если:*

(a) $\forall \alpha \in I \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \; : \; 0 \leqslant \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$*;*

[5] Число $2\varepsilon\sqrt{n}$ — это диаметр (т. е. длина диагонали) куба Q_j.

(b) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad \exists U$ — *окрестность точки* $\boldsymbol{x}$, *такая, что лишь конечное семейство сужений* $\varphi_\alpha|_U$ *отлично от тождественного нуля.*

(c) $\forall \boldsymbol{x} \in A \ : \ \sum\limits_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) \equiv 1$.

Замечание. В силу свойства (b) сумма $\sum\limits_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})$ содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых и потому сходится. Более того, на любом компакте лишь конечное число слагаемых этой суммы отлично от нуля.

Определение 17. *Разложение единицы* $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *для множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ *называется подчиненным покрытию* $\big\{U_\beta \bigm| \beta \in J\big\}$ *множества* A, *если*

$$\forall \beta \in J \ \ \exists \alpha \in I \ : \ \operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\beta \,.$$

Теорема 11. *Пусть* $A \subset \mathbb{R}^n$ — *произвольное множество, а* $\big\{U_\beta \bigm| \beta \in J\big\}$ — *произвольное открытое покрытие множества* A. *Существует разложение единицы* $\big\{\varphi_\alpha \bigm| \alpha \in I\big\}$ *класса* C^∞ *для множества* A, *подчиненное покрытию* $\big\{U_\beta \bigm| \beta \in J\big\}$.

◄ Рассмотрим различные случаи.

1) Предположим сначала, что множество A компактное. Тогда открытое покрытие $\big\{U_\beta \bigm| \beta \in J\big\}$ содержит конечное подпокрытие $\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$, и достаточно построить разложение единицы для A, подчиненное этому конечному подпокрытию.

Построим сначала семейство компактных множеств $\{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$, где $D_\nu \subset U_\nu$ при $\nu = 1, 2, \ldots, N$, притом так, чтобы их внутренности $\Big(D_1^0, D_2^), \ldots, D_N^0\Big)$ покрывали множество A. С этой целью, учитывая включение $A \subset U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_N$, рассмотрим компакт $C_1 := A \diagdown (\cup U_2 \cup \ldots \cup U_N) \subset U_1$. В силу леммы 1 существует компакт D_1, такой, что $C_1 \subset D_1^0 \subset D_1 \subset U_1$. Следовательно, имеем: $A \subset C_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_N \subset D_1^0 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_N$. Таким образом, найден компакт $D_1 \subset U_1$, такой, что семейство $\big\{D_1^0, U_2, \ldots, U_N\big\}$ есть открытое покрытие множества A. Исходя из этого покрытия, можно аналогично найти компакт $D_2 \subset U_2$ так, чтобы семейство $\big\{D_1^0, D_2^0, U_3, \ldots, U_N\big\}$ было покрытием множества A. Продолжая этот процесс замены, получим компактные множества $D_\nu \subset U_\nu$ такие, что $\big\{D_1^0, D_2^0, \ldots, D_N^0\big\}$ будет открытым покрытием множества A.

Применяя лемму 2, для каждого $\nu = 1, 2, \ldots, N$ найдем функцию $\psi_\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ класса C^∞, такую, что

$$0 \leqslant \psi_\nu(\boldsymbol{x}) \leqslant 1\,, \quad \operatorname{supp}\psi_\nu \subset U_\nu\,, \quad \psi_\nu|_{D_\nu}(\boldsymbol{x}) \equiv 1\,.$$

Так как $D^0 := D_1^0 \cup D_2^0 \cup \ldots \cup D_N^0 \supset A$, то

$$\forall \boldsymbol{x} \in A \,:\, \psi_1(\boldsymbol{x}) + \psi_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \psi_N(\boldsymbol{x}) > 0\,.$$

Применяя опять лемму 2, найдем функцию $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ класса C^∞, такую, что

$$0 \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant 1\,,\ \operatorname{supp} f \subset D^0\,, \ \text{ а } \ \forall \boldsymbol{x} \in A \,:\, f(\boldsymbol{x}) \equiv 1\,.$$

Тогда функции

$$\varphi_\nu(\boldsymbol{x}) := \frac{\psi_\nu(\boldsymbol{x})}{\psi_1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \psi_N(\boldsymbol{x})} \cdot f(\boldsymbol{x})\,,\ \nu = 1,\, \ldots,\, N, \qquad (21.10)$$

образуют требуемое разложение единицы для A, подчиненное покрытию $\big\{U_\alpha \bigm| \alpha \in I\big\}$. Смысл введения множителя $f(\boldsymbol{x})$ заключается в том, *чтобы устранить неопределенность* (там, где числитель и знаменатель дроби в правой части (21.10) равны нулю, имеем $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ и по определению полагаем $\varphi_\nu(\boldsymbol{x}) = \dfrac{0}{0} \cdot 0 := 0$). Имеем $\varphi_\nu \in C^\infty$. Далее, $\operatorname{supp}\,\varphi_\nu = \operatorname{supp}\,\psi_\nu \subset U_\nu$. Если $\boldsymbol{x} \in A$, то

$$f(\boldsymbol{x}) \equiv 1\,,\ \psi_1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \psi_N(\boldsymbol{x}) > 0\,,$$

и потому $\varphi_1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \varphi_N(\boldsymbol{x}) \equiv 1$.

2) Предположим, что существует *исчерпание* множества A компактами. Это означает, что существует последовательность компактных множеств $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ со свойствами: $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и $\forall k \in \mathbb{N} \,:\, A_k \subset A_{k+1}$. Положим еще $A_{-1} = A_0 := \varnothing$ (для единообразия).

Пусть $\big\{U_\beta \bigm| \beta \in J\big\}$ — заданное открытое покрытие множества A. Для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ построим семейство открытых множеств $\big\{U_{\nu\beta} \bigm| \beta \in J\big\}$ следующим образом: $U_{\nu\beta} := U_\beta \bigcap \big(A^0_{\nu+1} \diagdown A_{\nu-2}\big)$. Так как $A^0_{\nu+1}\diagdown A_{\nu-2} \supset A_\nu\diagdown A^0_{\nu-1}$, то семейство $\bigl\{U_{\nu\beta} \bigm| \beta\in J\bigr\}$ есть открытое покрытие компакта $A_\nu\diagdown A^0_{\nu-1}$. В силу пункта 1) существует C^∞-разложение единицы для $A_\nu\diagdown A^0_{\nu-1}$, подчиненное покрытию $\bigl\{U_{\nu\beta} \bigm| \beta\in J\bigr\}$. Обозначим его так:

$$\bigl\{\psi_{\nu\beta} \bigm| \beta\in J\bigr\}\ ;\ \ \operatorname{supp}\psi_{\nu\beta}\subset U_{\nu\beta}\,;\ \ \forall \boldsymbol{x}\in \mathrm{A}_\nu\diagdown \mathrm{A}^0_{\nu-1}\ :\ \sum_{\beta\in \mathrm{J}}\psi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x})\equiv 1\,.$$

Для каждого $\boldsymbol{x}\in A$ сумма

$$\sigma(\boldsymbol{x}):=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\beta\in J}\psi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x})$$

содержит лишь конечное число слагаемых. В самом деле, пусть $\boldsymbol{x}\in$ $\in A_k$. Так как $\operatorname{supp}\psi_{\nu\beta}\subset \mathrm{U}_{\nu\beta}\subset \mathrm{A}_{\nu+1}$, то $\psi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x})\equiv 0$ при $\nu>k+$ $+1$, и при каждом ν сумма $\sum\limits_{\beta\in J}\psi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x})$ тоже содержит конечное число слагаемых. Полагая

$$\varphi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x}):=\frac{\psi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x})}{\sigma(\boldsymbol{x})}\quad\text{при}\quad \boldsymbol{x}\in A\,,$$

получаем семейство функций $\bigl\{\varphi_{\nu\beta}(\boldsymbol{x}) \bigm| \nu\in\mathbb{N}\,;\ \beta\in J\bigr\}$, которое и будет искомым разложением единицы для A, подчиненным покрытию $\bigl\{U_\beta \bigm| \beta\in J\bigr\}$.

3) Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ — открытое множество. Полагая $\forall\nu\in\mathbb{N}$:

$$A_\nu:=\left\{\boldsymbol{x}\in A\ \middle|\ |\boldsymbol{x}|\leqslant\nu\,;\ \operatorname{dist}(\boldsymbol{x},\mathrm{Fr\,A})\geqslant\frac{1}{\nu}\right\}\,,$$

получаем исчерпание множества A компактами, и дело сводится к случаю 2).

4) Пусть теперь $A\subset\mathbb{R}^n$ — произвольное множество, а $\bigl\{U_\alpha \bigm| \alpha\in I\bigr\}$ — его открытое покрытие. Полагая $U:=\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha\supset A$, получаем открытое множество, содержащее A, а семейство $\bigl\{U_\alpha \bigm| \alpha\in I\bigr\}$ — открытое покрытие множества U. По пункту 3) существует разложение единицы класса C^∞ для U, подчиненное этому покрытию. Оно будет разложением единицы и для A, подчиненное тому же самому покрытию. ►

3. Интеграл по ограниченному открытому множеству

Приведем важное приложение разложений единицы, иллюстрирующее их главную роль — получать глобальные результаты, исходя из соответствующих локальных результатов. Известно, что не всякое ограниченное множество измеримо по Жордану. Более того, существуют даже открытые множества, не измеримые по Жордану. Поэтому и интеграл $\int\limits_A f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ может не существовать, даже если функция $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ограничена на A, а множество всех ее точек разрыва имеет меру нуль. Однако любое открытое множество A обладает таким открытым покрытием $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$, что все U_α измеримы по Жордану. Примером такого покрытия является семейство $\{Q^0(\boldsymbol{x}) \subset A \mid \boldsymbol{x} \in A\}$, где $Q^0(\boldsymbol{x})$ — достаточно малый открытый куб с центром в точке $\boldsymbol{x} \in A$. Пусть $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — разложение единицы класса C^∞, подчиненное покрытию $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$, обладающему указанными свойствами. Тогда функция $\varphi_\alpha f$ интегрируема для любого $\alpha \in I$, и появляется возможность дать следующее определение.

Определение 18. *Интеграл от функции $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ по ограниченному множеству A определяется равенством*

$$\int\limits_A f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} := \sum_{\alpha\in I} \int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,, \tag{21.11}$$

где $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — разложение единицы класса C^∞ для множества A, подчиненное его открытому покрытию $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ измеримыми по Жордану множествами U_α.

Считается, что интеграл (21.11) существует, если сумма в (21.11) сходится. Эту сумму можно рассматривать как сумму обычного ряда. Если, например, множество A — открытое, то его можно исчерпать компактами[6], т. е. существует такая последовательность компактов $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, что $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Так как на любом компакте лишь конечное число функций φ_α отлично от тождественного нуля,

[6] Компакты, о которых здесь идет речь, образуют так называемое *исчерпание* множества A.

то интегралы (21.11) можно расположить в последовательность. Поскольку невозможно отдать предпочтение ни одному из таких способов упорядочивания, то речь должна идти о сходимости ряда при любом способе упорядочивания, т. е. об абсолютной сходимости.

Теорема 12. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество, а $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — ограниченная функция, множество всех точек разрыва которой имеет меру нуль. Тогда:*

(a) *сумма в* (21.11) *сходится;*

(b) *если $\{V_\beta \mid \beta \in J\}$ — другое открытое покрытие множества A, а $\{\psi_\beta \mid \beta \in J\}$ — подчиненное ему C^∞-разложение единицы, то*

$$\sum_{\alpha\in I} \int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \sum_{\beta\in J} \int\limits_A \psi_\beta(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,; \tag{21.12}$$

(c) *если множество A измеримо по Жордану, то определение 18 согласуется с прежним определением интеграла.*

◀ Введем обозначение $M := \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in A} |f(\boldsymbol{x})| \in \mathbb{R}_+$, и пусть $A \subset \Pi$, где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус. Тогда

$$\int\limits_A |\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} \leqslant M \int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Поэтому для любого конечного подсемейства $\{\varphi_{\alpha_1}, \ldots, \varphi_{\alpha_N}\}$ данного разложения единицы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left| \int\limits_A \varphi_{\alpha_\nu}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_A \varphi_{\alpha_\nu}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = M \int\limits_A \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_{\alpha_\nu}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant M \int\limits_\Pi \sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = M \int\limits_\Pi 1 \cdot d\boldsymbol{x} = M \cdot \mu_n(\Pi)\,.$$

Таким образом, ряд в (21.11) сходится абсолютно, и потому сходится.

(b) Если $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in I\}$ и $\{\psi_\beta \mid \beta \in J\}$ — два разложения единицы для A, то семейство $\{\varphi_\alpha \psi_\beta \mid \alpha \in I,\, \beta \in J\}$ также является разложением единицы для A. Но так как $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ всюду, кроме некоторого компакта C, и существует лишь конечное число функций ψ_β, отличных от тождественного нуля на компакте C, то

$$\sum_{\alpha\in I}\int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha\in I}\int\limits_A \sum_{\beta\in J}\psi_\beta(\boldsymbol{x})\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \\ = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in J}\int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\psi_\beta(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

По тем же соображениям имеем:

$$\sum_{\beta\in J}\int\limits_A \psi_\beta(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \sum_{\beta\in J}\int\limits_A \sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\psi_\beta(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \\ = \sum_{\beta\in J}\sum_{\alpha\in I}\int\limits_A \psi_\beta(\boldsymbol{x})\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Правые части последних двух равенств отличаются лишь порядком суммирования, а так как сходимость этих рядов — абсолютная, то их суммы равны. Итак,

$$\sum_{\alpha\in I}\int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \sum_{\beta\in J}\int\limits_A \psi_\beta(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

(c) Предполагая, что множество A измеримо по Жордану, заключаем, что для любого $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ существует компакт $C\subset A$, такой, что $\int\limits_{A\setminus C} 1\cdot d\boldsymbol{x} \leqslant \varepsilon$. Существует только конечное семейство функций φ_α, отличных от тождественного нуля на компакте C. Для любого содержащего их конечного семейства F функций φ_α имеем

$$\left|\int\limits_A f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} - \sum_{\varphi_\alpha\in F}\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_A \left|f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} - \sum_{\varphi_\alpha\in F}\varphi_\alpha(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\right|\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_A \left[1 - \sum_{\alpha\in F} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x})\right] d\boldsymbol{x} = M \int\limits_A \sum_{\varphi_\alpha \notin F} \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{A\setminus C} 1 \cdot d\boldsymbol{x} \leqslant M\varepsilon\,.$$

Отсюда при $\varepsilon \to +0$ получаем

$$\sum_{\alpha\in I} \int\limits_A \varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_A f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\,. \quad \blacktriangleright$$

§ 3. Формула замены переменных в кратных интегралах

Напомним сначала формулу замены переменных в определенном (однократном) интеграле. Пусть $x = g(t)$ — диффеоморфизм отрезка $[a\,,\,b]$, $a < b$, на отрезок $g([a\,,\,b])$. Тогда

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int\limits_a^b f[g(t)] \cdot g'(t)\, dt\,. \tag{21.13}$$

Учитывая, что функция g может быть как возрастающей, так и убывающей, равенство (21.13) можно переписать в такой форме:

$$\int\limits_{g([a,b])} f(x)\, dx = \int\limits_{[a,b]} f[g(t)] \cdot |g'(t)|\, dt\,, \tag{21.14}$$

где пределы интегрирования должны быть расставлены так, чтобы верхний предел интегрирования был больше нижнего. При таком соглашении равносильность формул (21.13) и (21.14) очевидна, но формула (21.14) допускает непосредственное обобщение на кратные интегралы.

Теорема 13. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, а $g : A \longrightarrow g(A)$ — ограниченный диффеоморфизм. Тогда*

$$\int\limits_{g(A)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{A} f[g(\boldsymbol{t})] \cdot |\det[g'(\boldsymbol{t})]|\, d\boldsymbol{t} \tag{21.15}$$

для любой интегрируемой функции $f : g(A) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Замечание. Перепишем равенство (21.15) в координатах. Обозначая $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_n)$, перепишем сначала уравнение $\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{t})$ в координатах. Пусть

$$g : \begin{cases} x_1 = g^1(t_1, \dots, t_n)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\,, \\ x_n = g^n(t_1, \dots, t_n)\,, \end{cases} \tag{21.16}$$

— координатная запись отображения g. Выпишем различные встречающиеся обозначения для якобиана отображения g:

$$\det[g'(\boldsymbol{t})] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g^1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial g^1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g^n}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial g^n}{\partial t_n} \end{vmatrix} = \frac{D(g^1, \dots, g^n)}{D(t_1, \dots, t_n)} = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}\,. \tag{21.17}$$

Учитывая эти обозначения, равенство (21.15) можно переписать в различных формах, например, в следующей:

$$\iint\limits_{g(A)} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$
$$= \iint\limits_{A} \cdots \int f\left[g^1(t_1, \dots, t_n), \dots, g^n(t_1, \dots, t_n)\right] \cdot \left| \frac{D(g^1, \dots, g^n)}{D(t_1, \dots, t_n)} \right| dt_1 \dots dt_n\,. \tag{21.18}$$

◀ Доказательство теоремы проведем методом индукции по числу n — размерности пространства $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$ имеем: $\det[g'(t)] = g'(t)$, и формула (21.15) совпадает с формулой (21.14), которая была установлена в главе 10.

Предположим теперь, что формула замены переменной верна для интегралов всех кратностей, меньших n. Докажем сначала формулу (21.15) для отображений, «сохраняющих координату». т. е. для отображений вида (21.16), где $g^i(t_1, \dots, t_n) \equiv t_j$ при некоторых $i, j \in$

$\in \{1, 2, \ldots, n\}$. Якобиан такого отображения равен

$$\det[g'(\boldsymbol{t})] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g^1(\boldsymbol{t})}{\partial t_1} & \ldots & \dfrac{\partial g^1(\boldsymbol{t})}{\partial t_j} & \ldots & \dfrac{\partial g^1(\boldsymbol{t})}{\partial t_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial g^n(\boldsymbol{t})}{\partial t_1} & \ldots & \dfrac{\partial g^n(\boldsymbol{t})}{\partial t_j} & \ldots & \dfrac{\partial g^n(\boldsymbol{t})}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, \widehat{t_j}, \ldots, t_n)}, \quad (21.19)$$

где элемент 1 находится на пересечении i-й строки и j-го столбца определителя, а символ $\widehat{x_i}$ означает, что из вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ надо выбросить координату x_i и получить $(n-1)$-мерный вектор, например,

$$(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Аналогичный смысл имеет и символ $\widehat{t_j}$.

Возьмем замкнутый n-мерный брус $\Pi_n = [a\,,\, b] \times \Pi_{n-1} \supset A \cup g(A)$, где $x_i = t_j \in [a\,,\, b]$. Применяя теорему Фубини и предположение индукции, имеем

$$\int\limits_{g(A)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Pi_n} \chi_{g(A)}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int\limits_a^b dx_i \int\limits_{\Pi_{n-1}} \chi_{g(A)}(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dt_j \int\limits_{\Pi_{n-1}} \chi_{g(A)}[g(\boldsymbol{t})] f[g(\boldsymbol{t})] \cdot \left| \frac{dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n}{dt_1 \ldots \widehat{dt_j} \ldots dt_n} \right| dt_1 \ldots \widehat{dt_j} \ldots dt_n =$$

$$= \int\limits_{\Pi_n} \chi_A(\boldsymbol{t}) f[g(\boldsymbol{t})] dt_1 \ldots dt_n = \int\limits_A f[g(\boldsymbol{t})] \cdot |\det[g'(\boldsymbol{t})]|\, d\boldsymbol{t}.$$

Итак, формула (21.15) доказана для отображений, сохраняющих хотя бы одну координату.

Переходя к общему случаю, возьмем произвольную точку $\boldsymbol{\tau} \in A$. Так как $\det[g'(\boldsymbol{\tau})] \neq 0$, то в этом определителе существует по меньшей мере один отличный от нуля элемент, т. е.

$$\exists\, i,\, j \in \{1, \dots, n\} \ :\ \frac{\partial g^i(\boldsymbol{\tau})}{\partial t_j} \neq 0\,.$$

Введем вспомогательное отображение $\theta_{\boldsymbol{\tau}} \ :\ \boldsymbol{t} \longmapsto \boldsymbol{y}$ со следующим координатным представлением:

$$\theta_{\boldsymbol{\tau}} \ :\ \begin{cases} y_1 = t_1\,, \\ \dots\dots\dots\,, \\ y_j = g^i(t_1, \dots, t_n)\,, \\ \dots\dots\dots\,, \\ y_n = t_n\,. \end{cases} \tag{21.20}$$

Это отображение, очевидно, сохраняет все координаты, кроме одной, а его якобиан в точке $\boldsymbol{\tau}$ легко вычисляется и равен

$$\det[\theta'_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\tau})] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g^i}{\partial t_1} & \dfrac{\partial g^i}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial g^i}{\partial t_j} & \dots & \dfrac{\partial g^i}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial g^i(\boldsymbol{\tau})}{\partial t_j} \neq 0\,,$$

так как элемент $\frac{\partial g^i(\boldsymbol{\tau})}{\partial t_j}$ находится на главной диагонали определителя. Применяя теперь теорему об обратном отображении, заключаем, что существует открытая окрестность $U_{\boldsymbol{\tau}}$ точки $\boldsymbol{\tau}$, такая, что для отображения $\theta_{\boldsymbol{\tau}} \ :\ U_{\boldsymbol{\tau}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{\tau}} := \theta_{\boldsymbol{\tau}}(U_{\boldsymbol{\tau}})$ существует единственное обратное отображение $\theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} \ :\ \Omega_{\boldsymbol{\tau}} \longrightarrow U_{\boldsymbol{\tau}}$. Из (21.20) очевидно, что его координатное представление имеет следующий вид:

$$\theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} \ : \ \begin{cases} t_1 = y_1 \,, \\ \dots\dots\dots\,, \\ t_j = h^j(y_1, \dots, y_n)\,, \\ \dots\dots\dots\,, \\ t_n = y_n\,. \end{cases}$$

Из равенства $\theta_{\boldsymbol{\tau}} \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} = \mathrm{Id}$, в частности, следует тождество

$$y_j \equiv g^i(y_1, \dots, h^j(y_1, \dots, y_n), \dots, y_n)\,.$$

Из этого тождества в свою очередь вытекает равенство

$$x_i = g^i(y_1, \dots, h^j(y_1, \dots, y_n), \dots, y_n) \equiv y_j\,,$$

которое показывает, что композиция $g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}$ сохраняет координату. Итак, отображение $g \,:\, U_{\boldsymbol{\tau}} \longrightarrow g(U_{\boldsymbol{\tau}})$ представлено в виде композиции двух отображений, сохраняющих координату: $g = (g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}) \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}$. Используя это и доказанную часть теоремы, имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{g(U_{\boldsymbol{\tau}})} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} &= \int\limits_{(g\circ\theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})(\Omega_{\boldsymbol{\tau}})} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \\ &= \int\limits_{\Omega_{\boldsymbol{\tau}}} \left(f \circ g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)(\boldsymbol{y}) \cdot \left|\det\left[(g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})'\right](\boldsymbol{y})\right|\,d\boldsymbol{y} = \\ &= \int\limits_{\theta_{\boldsymbol{\tau}}(U_{\boldsymbol{\tau}})} \left(f \circ g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\right)(\boldsymbol{y}) \cdot \left|\det\left[(g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})'\right](\boldsymbol{y})\right|\,d\boldsymbol{y} = \\ &= \int\limits_{U_{\boldsymbol{\tau}}} f[g(\boldsymbol{t})]\left|\det\left[(g \circ \theta_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})'\right](\theta_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{t}))\right| \cdot \left|\det \theta_{\boldsymbol{\tau}}'(\boldsymbol{t})\right|\,d\boldsymbol{t} = \\ &= \int\limits_{U_{\boldsymbol{\tau}}} f[g(\boldsymbol{t})] \cdot \left|\det g'(\boldsymbol{t})\right|\,d\boldsymbol{t}\,. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\int\limits_{g(U_{\boldsymbol{\tau}})} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{U_{\boldsymbol{\tau}}} f[g(\boldsymbol{t})] \cdot \left|\det g'(\boldsymbol{t})\right|\,d\boldsymbol{t}\,.$$

Семейство окрестностей $\{U_{\boldsymbol{\tau}} \mid \boldsymbol{\tau} \in A\}$ есть открытое покрытие множества A. Пусть $\{\varphi_{\boldsymbol{\tau}} \mid \boldsymbol{\tau} \in A\}$ — разложение единицы класса C^∞ для A, подчиненное этому покрытию. Тогда семейство $\left\{\varphi_{\boldsymbol{\tau}} \circ g^{-1} \mid \boldsymbol{\tau} \in A\right\}$ будет разложением единицы для множества $g(A)$, подчиненное покрытию $\{g(U_{\boldsymbol{\tau}}) \mid \boldsymbol{\tau} \in A\}$. Используя определение 18 интеграла по ограниченному открытому множеству, имеем окончательно

$$\int\limits_{g(A)} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{\tau}\in A} \int\limits_{g(U_{\boldsymbol{\tau}})} f(\boldsymbol{x})\varphi_{\boldsymbol{\tau}}[g^{-1}(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\tau}\in A} \int\limits_{U_{\boldsymbol{\tau}}} f[g(\boldsymbol{t})]\varphi_{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{t}) \cdot |\det[g'(\boldsymbol{t})]|\,d\boldsymbol{t} = \int\limits_{A} f[g(\boldsymbol{t})] \cdot |\det[g'(\boldsymbol{t})]|\,d\boldsymbol{t}\,. \quad \blacktriangleright$$

§ 4. Некоторые приложения формулы замены переменных в кратных интегралах

1. Некоторые факты, связанные с n-мерными объемами

1°. Выясним геометрический смысл якобиана. Пусть $g : D \longrightarrow G$ — диффеоморфизм области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $G \subset \mathbb{R}^n$. Возьмем точку $\boldsymbol{x}_0 \in D$, и пусть $K_r(\boldsymbol{x}_0) \subset D$ — n-мерный шар достаточно малого радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{x}_0$. В выражении для объема его образа $g(K_r(\boldsymbol{x}_0))$ сделаем сначала замену переменных, а затем применим теорему «о среднем». Тогда получим

$$\mu_n\left[g(K_r(\boldsymbol{x}_0))\right] = \int\limits_{g(K_r(\boldsymbol{x}_0))} d\boldsymbol{x} = \int\limits_{K_r(\boldsymbol{x})} |\det[g'(\boldsymbol{t})]|\;d\boldsymbol{t} =$$

$$= |\det[g'(\boldsymbol{\xi})]| \cdot \mu_n\left[K_r(\boldsymbol{x}_0)\right]\,, \quad (21.21)$$

где $\boldsymbol{\xi} \in K_r(\boldsymbol{x}_0)$ — некоторая точка. Из (21.21) находим

$$|\det[g'(\boldsymbol{\xi})]| = \frac{\mu_n\left[g(K_r(\boldsymbol{x}_0))\right]}{\mu_n\left[K_r(\boldsymbol{x}_0)\right]}\,. \quad (21.22)$$

Переходя здесь к пределу при $r \to +0$ и учитывая непрерывность функции $|\det g'|$, получим

$$|\det[g'(\boldsymbol{x}_0)]| = \lim_{r\to+0} \frac{\mu_n\left[g(K_r(\boldsymbol{x}_0))\right]}{\mu_n\left[K_r(\boldsymbol{x}_0)\right]}\,.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 14. *Пусть g — диффеоморфизм. Величина $|\det[g'(\boldsymbol{x}_0)]|$ равна коэффициенту изменения n-мерного объема бесконечно малой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ при отображении g.*

2°. Вычислим объем n-мерного параллелепипеда Π, одна из вершин которого совпадает с началом координат, а ребрами являются заданные векторы (радиусы-векторы):

$$(a_{1\nu},\, a_{2\nu},\, \ldots,\, a_{n\nu}) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{где} \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\,.$$

Сначала представим данный параллелепипед в удобной для вычислений форме. Его можно рассматривать как образ единичного n-мерного куба

$$Q_n := [0\,,\, 1]^n = \bigl\{(t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_n) \in \mathbb{R}^n \bigm| 0 \leqslant t_\nu \leqslant 1\,,\ \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\bigr\}$$

при линейном отображении

$$g\ :\ \begin{cases} x_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots a_{1n}t_n\,, \\ x_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots a_{2n}t_n\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ x_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \ldots a_{nn}t_n\,. \end{cases}$$

Применяя формулу замены переменных в n-кратном интеграле, имеем

$$\mu_n(\Pi) = \iint\limits_{g(Q_n)}\cdots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \iint\limits_{Q_n}\cdots\int |\det[g'(\boldsymbol{t})]|\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \iint\limits_{Q_n}\cdots\int \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n =$$

$$= \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^1 dt_2 \ldots \int\limits_0^1 dt_n =$$

$$= \operatorname{mod}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где символ mod означает модуль (абсолютную величину). Сформулируем полученный результат.

Теорема 15. *Объем n-мерного параллелепипеда, ребрами которого являются заданные n радиусов-векторов, равен модулю определителя, составленного из координат заданных векторов.*

3°. Установим инвариантность n-мерного объема при перемещениях. *Перемещениями в пространстве $\mathbb{R}^n$ условимся называть линейные преобразования с якобианом, равным* ± 1 (т. е. композиции параллельных переносов, поворотов и отражений). Пусть $\boldsymbol{t}$=g($\boldsymbol{x}$) — перемещение, т. е. $|\det[g'(\boldsymbol{t})]| \equiv 1$. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое по Жордану множество, то имеем

$$\mu_n(g(A)) = \int\limits_{g(A)} d\boldsymbol{t} = \int\limits_A |\det[g'(\boldsymbol{x})]|\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_A d\boldsymbol{x} = \mu_n(A)\,.$$

2. Некоторые криволинейные координаты в $\mathbb{R}^2$

После декартовых координат наиболее распространенными координатами на плоскости $\mathbb{R}^2$ являются *полярные координаты*. Связь между декартовыми $(x\,,\,y)$ и полярными координатами $(r\,,\,\varphi)$ задается с помощью следующего отображения

$$g\ :\ \begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,, \end{cases} \tag{21.23}$$

где $r \geqslant 0$ — *полярный радиус*, а $\varphi \in [0\,,\,2\pi]$ — *полярный угол*. Якобиан отображения (21.23) легко вычисляется

$$\det[g'(r,\varphi)] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r\,.$$

Поэтому имеем

$$\iint\limits_{g(D)} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi\,. \tag{21.24}$$

В качества **примера** на применение этой формулы вычислим известный интеграл Пуассона. Предварительно вычислим следующий интеграл:

$$\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy\,,$$

где $D_R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$ — четверть круга, лежащая в первом квадранте. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^R e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4} e^{-r^2}\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}\cdot(1-e^{-R^2})\,.$$

Пусть теперь $J(R) := \int\limits_0^R e^{-x^2} dx$. Тогда

$$[J(R)]^2 = \int\limits_0^R e^{-x^2} dx \int\limits_0^R e^{-y^2} dy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2} dxdy\,.$$

По свойству монотонности интеграла имеем неравенства

$$\iint\limits_{[0,\frac{R}{\sqrt{2}}]\times[0,\frac{R}{\sqrt{2}}]} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy < \iint\limits_{[0,R]\times[0,R]} e^{-x^2-y^2}dxdy\,,$$

равносильные следующим:

$$\left[J\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 < \frac{\pi}{4}\cdot(1-e^{-R^2}) < [J(R)]^2\ .$$

Переходя здесь к пределу при $R\to+\infty$, получаем равенство $[J(+\infty)]^2=\pi/4$, откуда, извлекая корень, находим значение интеграла Пуассона:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

«Математик — тот, для кого это равенство так же очевидно, как дважды два — четыре» — сказал в связи с этим лорд Кельвин[7].

Рассмотрим еще один пример на применение криволинейных координат в $\mathbb{R}^2$. Вычислим интеграл

$$I=\iint\limits_G \frac{x^2\sin(xy)}{y}dxdy\,,$$

где G — область, ограниченная четырьмя параболами

$$y=\frac{x^2}{a}\,,\ y=\frac{x^2}{b}\,,\ x=\frac{y^2}{p}\,,\ x=\frac{y^2}{q}\,,\quad \text{где}\quad 0<a<b\,,\ 0<p<q\,.$$

◄ Введем новые переменные (криволинейные координаты) u, v по формулам

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{u}\,,\ a\leqslant u\leqslant b\,,\\[2ex] x=\dfrac{y^2}{v}\,,\ p\leqslant v\leqslant q\,.\end{cases}$$

Выразим из этих уравнений (x,y) через (u,v)

$$\begin{cases} x=u^{2/3}v^{1/3}\,,\\ y=u^{1/3}v^{2/3}\,.\end{cases}$$

Отсюда находим частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3};\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3};$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3}\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\,,$$

[7]Лорд *Кельвин*, он же *Томсон* Уильям (1824—1907) — английский физик и математик.

и якобиан
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\,.$$

Теперь вычисляем данный интеграл
$$I = \iint\limits_G \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dxdy = \frac{1}{3} \iint\limits_{[a,b]\times[p,q]} \frac{u^{4/3}v^{2/3}\sin(uv)}{u^{1/3}v^{2/3}} dudv =$$
$$= \frac{1}{3}\int\limits_a^b u\,du \int\limits_p^q \sin(uv)dv \frac{1}{3}\int\limits_a^b [\cos pu - \cos qu]du = \frac{1}{3}\left[\frac{\sin pb - \sin pa}{p} - \frac{\sin qb - \sin ga}{q}\right]. \ ▶$$

3. Цилиндрические и сферические координаты в $\mathbb{R}^3$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ кроме декартовых (x, y, z) наиболее распространенными являются *цилиндрические* (r, φ, z) и *сферические* (ρ, φ, θ) координаты.

Декартовы координаты выражаются через цилиндрические с помощью следующего отображения
$$g\ :\ \begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,, \qquad r \geqslant 0\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,,\ z \in \mathbb{R}\,. \\ z = z\,, \end{cases} \tag{21.25}$$

Координатными поверхностями цилиндрической системы координат являются: плоскости $z = \mathrm{const}$, полуплоскости $\varphi = \mathrm{const}$ и цилиндры $r = \mathrm{const}$ (отсюда и название координат). Якобиан отображения (21.25) равен
$$\det[g'(r,\varphi,z)] = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,.$$

Следовательно, формула замены переменных при переходе от декартовых координат к цилиндрическим имеет следующий вид:
$$\iiint\limits_{g(D)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz\,.$$

Декартовы координаты выражаются через сферические с помощью следующего отображения

$$g\ :\ \begin{cases} x=\rho\cos\varphi\cos\theta\,,\\ y=\varrho\sin\varphi\cos\theta\,, \qquad \rho\geqslant 0\,,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,,\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\,.\\ z=\rho\sin\theta\,, \end{cases} \tag{21.26}$$

Координатными поверхностями сферической системы координат являются: полуплоскости $\varphi=\mathrm{const}$, конусы $\theta=\mathrm{const}$ и сферы $\rho=$ $=\mathrm{const}$ (отсюда и название координат). Вычислим якобиан отображения (21.26)

$$\det[g'(\rho,\varphi,\theta)]=\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\varrho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta\end{vmatrix}=$$

$$=\rho^2\cos\theta\begin{vmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{vmatrix}=\rho^2\cos\theta\,.$$

Следовательно, формула замены переменных при переходе от декартовых координат к сферическим имеет следующий вид:

$$\iiint\limits_{g(D)} f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{D} f\left[g(\rho,\varphi,\theta)\right]\rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\,.$$

4. Примеры на замену переменных в n-кратных интегралах

1. Вычислим n-кратный интеграл Пуассона

$$I:=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^t}\cdot d\boldsymbol{x}\,, \tag{21.27}$$

где

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,,\quad \boldsymbol{x}^t:=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\,.$$

Предположим, что A — симметричная $n \times n$-матрица, а $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^t$ — положительно определенная квадратичная форма.

Из алгебры известно, что любую квадратичную форму можно ортогональным преобразованием $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}H$ привести к каноническому виду (а ее матрицу — к диагональному виду):

$$\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^t = \boldsymbol{t}HAH^t\boldsymbol{t}^t = \lambda_1 t_1^2 + \ldots + \lambda_n t_n^2\,,$$

где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$ — характеристические (собственные) числа матрицы A, причем $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. Производя в интеграле (21.27) замену $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t}H$ и учитывая, что $|\det H| = 1$, получим

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 t_1^2} dt_1 \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n t_n^2} dt_n = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,.$$

Итак, окончательно имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}^t} \cdot d\boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,.$$

2. Рассмотрим теперь переход от декартовых координат к сферическим в пространстве $\mathbb{R}^n$. Декартовы координаты обозначим через $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, а сферические — через $\boldsymbol{\Phi} = (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Зависимость между декартовыми и сферическими координатами задается с помощью следующего отображения:

$$g\ :\ \begin{cases} x_1 \quad = r\cos\varphi_1\,, \\ x_2 \quad = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2\,, \\ x_3 \quad = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\,, \\ x_n \quad = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\,, \end{cases} \tag{21.28}$$

где $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \ldots, 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi$. Для вычисления якобиана этого отображения оказывается целесообразным перейти от явного задания (21.28) отображения g к его неявному заданию:

$$\begin{aligned}
&F^1 \equiv r^2 \qquad\quad - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) = 0\,,\\
&F^2 \equiv r^2 \sin^2\varphi_1 \quad - (x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) = 0\,,\\
&F^3 \equiv r^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 - (x_3^2 + \ldots + x_n^2) = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&F^n \equiv r^2 \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} - x_n^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Запишем эту систему в виде одного векторного уравнения $F(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Дифференцируя это уравнение, имеем

$$F'_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}) + F'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x}) \circ g'(\boldsymbol{\Phi}) = \mathbf{0}\,.$$

Отсюда находим производную (оператор) отображения (21.28)

$$g'(\boldsymbol{\Phi}) = -\left(F'_{\boldsymbol{x}}\right)^{-1} \circ F'_{\boldsymbol{\Phi}}\,.$$

Переходя здесь к матрицам, находим матрицу Якоби отображения (21.28): $[g'(\boldsymbol{\Phi})] = -[F'_{\boldsymbol{x}}]^{-1} \cdot \left[F'_{\boldsymbol{\Phi}}\right]$, а отсюда — искомый якобиан

$$J := \det\left[g'(\boldsymbol{\Phi})\right] = (-1)^n \cdot \frac{\det\left[F'_{\boldsymbol{\Phi}}\right]}{\det\left[F'_{\boldsymbol{x}}\right]}\,. \tag{21.29}$$

Множитель $(-1)^n$ здесь появился от того, что при переходе от матриц к определителям надо вынести множитель (-1) *из каждой строки* матрицы. Вычислим теперь якобиан J, переходя в правой части равенства

(21.29) к координатам

$$J = \det\left[g'(\mathbf{\Phi})\right] = (-1)^n \cdot \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial r} & \dfrac{\partial F^1}{\partial \varphi_1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial r} & \dfrac{\partial F^2}{\partial \varphi_1} & \cdots & \dfrac{\partial F^2}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial r} & \dfrac{\partial F^n}{\partial \varphi_1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial \varphi_{n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F^1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F^n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F^n}{\partial x_n} \end{vmatrix}} = (-1)^n \times$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} 2r & 0 & \cdots & 0 \\ 2r^2 \sin^2\varphi_1 & 2r^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 2r^2 \prod\limits_{k=1}^{n-2} \sin^2\varphi_k \cdot \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2x_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -2x_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -2x_3 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2x_n \end{vmatrix}}.$$

Оба последних определителя — треугольные, и потому каждый из них равен произведению его диагональных элементов. Перемножая в числителе и в знаменателе диагональные элементы определителей, получим после сокращений окончательное выражение для искомого якобиана:

$$J = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \cdot \sin^{n-3}\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \sin^2\varphi_{n-1} \cdot \sin\varphi_{n-2}\,. \qquad (21.30)$$

Соответствующая формула замены переменных в n-кратном интеграле имеет следующий вид:

$$\iint\limits_{g(A)}\cdots\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{A}\cdots\int f[g(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})]\cdot J\cdot dr d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}\,, \quad (21.31)$$

где якобиан J вычисляется по формуле (21.30).

Пример. Вычислить n-мерный объем $\mathcal{V}_n$ n-мерного шара

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2\,.$$

◀ Переходя от декартовых координат к сферическим, используя затем равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^k\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\,,$$

будем иметь

$$\mathcal{V}_n=\int\int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant R^2}\cdots\int dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$=\int\limits_0^R r^{n-1}dr\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_2\,d\varphi_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\,d\varphi_{n-2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}=$$

$$=\frac{R^n}{n}\cdot 2\pi\cdot 2^{n-2}\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\,d\varphi_1\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_1\,d\varphi_2\ldots\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_1\,d\varphi_1=$$

$$=\frac{\pi R^n}{n}\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n-3}{2}+1\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{3}{2})}{2\,\Gamma(\frac{2}{2}+1)}\cdot\frac{\sqrt{\pi\,\Gamma(1)}}{2\,\Gamma(\frac{1}{2}+1)}=$$

$$=\frac{\pi R^n}{n}\cdot 2\pi^{n/2}\cdot\frac{1}{\Gamma(n/2)}=\frac{2\pi^{n/2}R^n}{n\Gamma(n/2)}\,.$$

Итак, имеем

$$\mathcal{V}_n=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,. \qquad (21.32)$$

Из этой формулы при $n=1,2,3$ получаются известные формулы для длины отрезка, площади круга, объема шара соответственно.

Дифференцируя равенство по параметру R, получаем формулу для $(n-1)$-мерного объема $(n-1)$-мерной сферы $S_{n-1}\ :\ x_1^2+\ldots+x_n^2=1$:

$$\mu_{n-1}(S_{n-1})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,.$$

Глава 22

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе изучаются криволинейные и поверхностные интегралы. Дается строгий вывод классических формул Грина, Стокса, Гаусса — Остроградского.

§ 1. Криволинейные интегралы

1. Длина дуги гладкой кривой в $\mathbb{R}^n$. Натуральный параметр

Определение 19. *Путём*[1] *в* $\mathbb{R}^n$ *условимся называть непрерывное отображение* $\boldsymbol{r} : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *где* $[a\,, b] \subset \mathbb{R}$. *Путь называется замкнутым, если* $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, *и разомкнутым, если* $\boldsymbol{r}(a) \neq \boldsymbol{r}(b)$. *Путь называется простым*[2], *если* $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$, *кроме случая* $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$ *для замкнутых путей. Путь называется гладким, если существует непрерывная производная* $\boldsymbol{r}'$, *причем* $\forall t \in [a\,, b] \,:\, \boldsymbol{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.

Чтобы определить понятие длины пути, возьмем разбиение $T = \{t_0\,, t_1\,, \ldots\,, t_N\}$ отрезка $[a\,, b]$, где

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\,, \quad \Delta_k := [t_k\,, t_{k+1}]\,, \quad \Delta t_k := t_{k+1} - t_k\,,$$

и вычислим сначала длину $l(T)$ ломаной линии, последовательно соединяющей точки $\boldsymbol{r}(t_0)$, $\boldsymbol{r}(t_1)$, $\ldots$, $\boldsymbol{r}(t_0)$:

$$l(T) = \sum_{k=0}^{N-1} |\boldsymbol{r}(t_{k+1}) - \boldsymbol{r}(t_k)| = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[x_j(t_{k+1}) - x_j(t_k)\right]^2}\,, \qquad (22.1)$$

---

[1] Иногда путь называют *параметризованной кривой*, поскольку он задается уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, где t — *параметр*.

[2] или *жордановым*.

где $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — координаты вектора $\boldsymbol{r}(t)$.

Определение 20. *Путь называется спрямляемым, если существует конечный предел сумм (22.1) при стремлении к нулю мелкости разбиения T, и этот предел называется длиной пути:*

$$l := \lim_{\lambda(T)\to 0} l(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{N-1} |\boldsymbol{r}(t_{k+1}) - \boldsymbol{r}(t_k)| \,. \qquad (22.2)$$

Теорема 16. *Если путь $\boldsymbol{r} \,:\, [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкий, то он — спрямляемый, а для его длины справедливо равенство*

$$l = \int\limits_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \ldots + [x_n'(t)]^2}\, dt\,. \qquad (22.3)$$

◀ Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, преобразуем правую часть равенства (22.1). Тогда получим

$$l(T) = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[x_j'(t_{\theta_{jk}})\right]^2}\, \Delta t_k\,, \qquad (22.4)$$

где $\theta_{jk} \in [t_k\,,\, t_{k+1}]$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Поскольку положение точек θ_{jk} зависит не только от k, но и от j, то сумма (22.1) не является интегральной. Для вычисления ее предела составим интегральную сумму интеграла (22.3), беря в качестве вектора отмеченных точек вектор $\boldsymbol{\theta} = (\theta_{10}, \theta_{11}, \ldots, \theta_{1,N-1})$:

$$\sigma(|\boldsymbol{r}'|; T, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left[x_j'(\theta_{1k})\right]^2}\, \Delta t_k\,. \qquad (22.5)$$

Для оценки разности между суммами (22.4) и (22.5) применим неравенство треугольника в следующей форме:

$$\left|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} - \sqrt{a_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2} \leqslant |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|\,.$$

Используя его, имеем:

$$
\begin{aligned}
&|l(T)-\sigma(|\boldsymbol{r}'|;T,\boldsymbol{\theta})| = \\
&\qquad = \left|\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'(\theta_{jk})\right)^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'(\theta_{1k})\right)^2}\right]\Delta t_k\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\left|\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'(\theta_{jk})\right)^2}-\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j'(\theta_{1k})\right)^2}\right|\Delta t_k \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=2}^{n}\sqrt{\left[x_j'(\theta_{jk})-x_j'(\theta_{1k})\right]^2}\,\Delta t_k \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=0}^{N-1}|x_j'(\theta_{jk})-x_j'(\theta_{1k})|\,\Delta t_k \leqslant \sum_{j=2}^{n}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\omega(x_j';\Delta_k)\cdot\Delta t_k\right] \to 0
\end{aligned}
$$

при $\lambda(T)\to 0$ в силу критерия Дарбу интегрируемости непрерывных функций $x_2',\dots,x_n'$. Таким образом, пределы сумм (22.4) и (22.5) равны. Поэтому верна и формула (22.3) . ►

Определение 21. *Два гладких пути* $\boldsymbol{r} : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *и* $\boldsymbol{\rho} : [\alpha\,,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *условимся называть эквивалентными, если существует диффеоморфизм* $\tau : [a\,,b] \longrightarrow [\alpha\,,\beta]$, *такой, что*

$$\forall t\in[a\,,b] \;:\; \boldsymbol{\rho}[\tau(t)] \equiv \boldsymbol{r}(t)\,.$$

Легко показать, что так определенное отношение эквивалентности обладает известными свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности.* Поэтому множество всех гладких путей распадается на попарно непересекающиеся классы, каждый из которых состоит из всех эквивалентных между собой гладких путей, и мы приходим к понятию *гладкой кривой.*

Определение 22. *Гладкими кривыми условимся называть классы эквивалентных между собой гладких путей по отношению эквивалентности, введенному в определении 21.*

В отличие от пути, где параметризация фиксируется, на одной и той же кривой могут задаваться различные параметризации.

Теорема 17. *Если гладкие пути* $\boldsymbol{r} : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *и* $\boldsymbol{\rho} : [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *эквивалентны, то их длины равны.*

◀ Пусть задана длина пути $\boldsymbol{\rho} : [\alpha\,,\,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha < \beta$:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{\rho}'(\tau)|\, d\tau\,.$$

Производя в этом интеграле замену с помощью реализующего эквивалентность диффеоморфизма $\tau = \tau(t)$ и предполагая, что этот диффеоморфизм возрастает, имеем

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{\rho}'(\tau)|\, d\tau = \int\limits_{a}^{b} |\boldsymbol{\rho}'[\tau(t)]|\, \tau'(t)\, dt = \int\limits_{a}^{b} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt\,.$$

Если же этот диффеоморфизм убывает, то

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\boldsymbol{\rho}'(\tau)|\, d\tau = -\int\limits_{b}^{a} |\boldsymbol{\rho}'[\tau(t)]| \cdot |\tau'(t)|\, dt = \int\limits_{a}^{b} |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt\,. \ ▶$$

Замечания. 1. Доказанная теорема означает, что длина кривой инвариантна, т. е. не зависит от выбора параметризации на ней (от того пути, который ее представляет).

2. Пользуясь произволом в выборе параметризации данной кривой, можно на ней выбирать параметризации, выгодные с точки зрения решения тех или иных вопросов.

Пусть, например, кривая задана в виде пути $\boldsymbol{r} : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a < b$. Покажем, что *что в качестве нового параметра, с помощью которого задается та же кривая, можно взять переменную длину дуги*

$$s = s(t) := \int\limits_{a}^{t} |\boldsymbol{r}'(u)|\, du\,, \quad 0 \leqslant s \leqslant l\,. \tag{22.6}$$

◀ Так как $s'(t) \equiv |\boldsymbol{r}'(t)| > 0$, то функция (22.6) строго возрастает. Поэтому у нее существует единственная обратная функция $t = t(s)$, которая тоже строго возрастает, причем

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|} > 0\,.$$

Поэтому отображение (22.6) — диффеоморфизм, а рассматриваемую кривую можно задать уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(s) := \boldsymbol{r}(t(s))$, $s \in [0, l]$. ►

2. Для параметризации $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(s)$ имеем $|\boldsymbol{\rho}'(s)| \equiv 1$, и в связи с этим параметр s принято называть *натуральным*.

3. В качестве примеров приведем здесь еще формулы для длин плоских и пространственных кривых:

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

2. Криволинейные интегралы 1-го рода (по длине дуги)

Пусть γ — гладкая кривая, заданная параметрически в виде отображения $\boldsymbol{r} : [a, b] \longrightarrow D$, где $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $D \subset \mathbb{R}^n$ — область. Пусть задана непрерывная функция[3] $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 23. *Криволинейный интеграл 1-го рода от функции f по кривой γ определяется равенством*

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{r})\, ds := \int_a^b f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot |\boldsymbol{r}'(t)|\, dt. \tag{22.7}$$

Запишем это определение через координаты. Если

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

то равенство (22.7) будет выглядеть так:

$$\int_\gamma f(x_1, \ldots, x_n)\, ds := \int_a^b f\,[x_1(t), \ldots, x_n(t)] \cdot \sqrt{(x_1'(t))^2 + \ldots + (x_n'(t))^2}\, dt.$$

[3] Такую функцию иногда называют *скалярным полем*, определенным в области D.

В случае плоской кривой, т. е. при $n = 2$, имеем

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y)\,ds := \int\limits_{a}^{b} f[x(t), y(t)] \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt\,.$$

В случае пространственной кривой, т. е. при $n = 3$, имеем

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)\,ds := \int\limits_{a}^{b} f[x(t), y(t)] \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt\,.$$

Существование криволинейного интеграла 1-го рода обеспечивается тем, что в правой части равенства (22.7) находится интеграл Римана от непрерывной функции. Более того, равенство (22.7) позволяет распространить бóльшую часть свойств интеграла Римана на криволинейные интегралы 1-го рода. Поэтому здесь остановимся, в основном, на различиях.

Определение 24. *Условимся считать, что два эквивалентных пути* $\boldsymbol{r}_1 : [a_1\,, b_1] \longrightarrow D$, $a_1 < b_1$, *и* $\boldsymbol{r}_2 : [a\,, b] \longrightarrow D$, $a_2 < b_2$, *ориентированы одинаково (противоположно), если диффеоморфизм* $\tau : [a_1\,, b_1] \longrightarrow [a_2\,, b_2]$, *обеспечивающий их эквивалентность, возрастает (убывает). Ориентированной кривой условимся называть класс эквивалентности одинаково ориентированных путей.*

Замечание. Образно говоря, задать ориентацию пути $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ — это значит, задать на нем направление обхода: от точки $\boldsymbol{r}(a)$ к точке $\boldsymbol{r}(b)$, или наоборот. Таким образом, на пути (а значит, и на кривой) имеются две ориентации. Одну из них считают положительной, и тогда другая оказывается отрицательной.

Переходим к изложению свойств.

1°. *Криволинейный интеграл 1-го рода по кривой γ не зависит от параметризации кривой γ. В частности, он не зависит и от ориентации кривой γ.*

◀ Исходя из определения (22.7), возьмем другое параметрическое задание кривой γ: $\boldsymbol{\rho} : [\alpha\,, \beta] \longrightarrow D$, $\alpha < \beta$, и пусть $t = t(\tau)$ — диффеоморфизм, обеспечивающий эквивалентность: $\boldsymbol{r}[t(\tau)] \equiv \boldsymbol{\rho}(\tau)$. Производя в правой части равенства (22.7) замену $t = t(\tau)$, $\tau = \tau(t)$, получим

$$\int\limits_{\gamma} f(\boldsymbol{r})\,ds := \int\limits_{a}^{b} f[\boldsymbol{r}(t)]\cdot|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt =$$

$$= \int\limits_{\tau(a)}^{\tau(b)} f[\boldsymbol{r}(t(\tau))]\cdot|\boldsymbol{r}'(t(\tau))|\cdot t'(\tau)\,d\tau = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\boldsymbol{\rho}(\tau)]\cdot|\boldsymbol{\rho}'(\tau)|\,d\tau\,,$$

причем независимо от того, возрастают функции $t = t(\tau)$, $\tau = \tau(t)$, или убывают. ▶

Замечание. Параметризуя кривую γ натуральным параметром (переменной длиной дуги), получим

$$\int\limits_{\gamma} f(\boldsymbol{r})\,ds = \int\limits_{0}^{l} f[\boldsymbol{r}(s)]\,ds\,.$$

Определение 25. *Пусть γ_1 и γ_1 — две гладкие кривые, задаваемые соответственно уравнениями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1(t)$, $a \leqslant t \leqslant c$, и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(t)$, $c \leqslant t \leqslant d$, причем выполняются условия*

$$\boldsymbol{r}_1(c) = \boldsymbol{r}_2(c)\,,\quad \boldsymbol{r}_1'(c) = \boldsymbol{r}_2'(c) \neq 0\,. \tag{22.8}$$

Их композицией назовем гладкую кривую $\gamma_1 * \gamma_2$, задаваемую следующим уравнением:

$$\boldsymbol{r} = \begin{cases} \boldsymbol{r}_1(t)\,, & a \leqslant t \leqslant c\,,\\ \boldsymbol{r}_2(t)\,, & c \leqslant t \leqslant b\,. \end{cases}$$

2° (свойство аддитивности). *В обозначениях определения 25 имеем*

$$\int\limits_{\gamma_1 * \gamma_2} f(\boldsymbol{r})\,ds = \int\limits_{\gamma_1} f(\boldsymbol{r})\,ds + \int\limits_{\gamma_2} f(\boldsymbol{r})\,ds\,. \tag{22.9}$$

Замечание. Равенство (22.9) является простым следствием свойства аддитивности интеграла Римана. Оно остается справедливым и в том случае, когда равенства (22.8) (одно или оба) не выполняются. Иначе говоря, понятие криволинейного интеграла и свойство аддитивности сохраняются не только для гладких, но и для кусочно-гладких (и даже не обязательно свя́зных) кривых.

2° (оценка). *Если* $|f(\boldsymbol{r})| \leqslant M$, *то* $|\int\limits_\gamma f(\boldsymbol{r})\,ds| \leqslant M\cdot l$, *где* l *— длина кривой* γ.

◀ Используя (22.7), имеем

$$\left|\int\limits_\gamma f(\boldsymbol{r})\,ds\right| := \left|\int\limits_a^b f[\boldsymbol{r}(t)]\cdot|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt\right| \leqslant M\int\limits_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = M\cdot l\,. \ \blacktriangleright$$

Рассмотрим одно приложение криволинейных интегралов 1-го рода. Пусть кривая γ представляет собой криволинейный тонкий неоднородный стержень. Обозначим через $\rho(\boldsymbol{x})$ линейную плотность стержня в точке $\boldsymbol{x}$. Пусть требуется определить и вычислить массу M стержня. С этой целью мысленно произведем разбиение стержня на малые части $\gamma_0\,,\ \gamma_,\,,\ \ldots\,,\ \gamma_{N-1}$. На каждой части выберем по точке $P_0\,,\ P_1\,,\ \ldots\,,\ P_{N-1}$ и будем приближенно считать каждую часть γ_k однородным стержнем с постоянной плотностью, равной $\rho(P_k)$. Тогда искомая масса будет приблизительно равной

$$M \approx \sum_{k=0}^{N-1}\rho(P_k)\cdot\Delta s_k\,, \tag{22.10}$$

где Δs_k — длина кривой γ_k. Переходя в (22.10) к пределу при стремлении к нулю мелкости разбиения, при некоторых ограничениях получим точное значение искомой массы

$$M = \int\limits_\gamma \rho(\boldsymbol{x})\,ds\,.$$

3. Криволинейные интегралы 2-го рода (по координатам)

Пусть снова γ — гладкая кривая, заданная параметрически в виде отображения $\boldsymbol{r}\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow D$, где $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}$, $a<b$, $D\subset\mathbb{R}^n$ — область. Будем считать кривую γ ориентированной направлением от a

к b. Пусть $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение[4] с координатными функциями $\boldsymbol{F} = (P_1, \ldots, P_n)$.

Определение 26. *Криволинейный интеграл 2-го рода по ориентированной кривой γ от отображения $\boldsymbol{F}$ определяется равенством*

$$\int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F} | d\boldsymbol{r} \rangle = \int\limits_\gamma [P_1(\boldsymbol{x})dx_1 + \ldots + P_n(\boldsymbol{x})dx_n] := \int\limits_a^b \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \,|\, \boldsymbol{r}'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_a^b \{P_1[\boldsymbol{r}(t)] \cdot x_1'(t) + \ldots + P_n[\boldsymbol{r}(t)] \cdot x_n'(t)\} \, dt \,. \quad (22.11)$$

Замечание. В частном случае $n = 2$ имеем определение криволинейного интеграла 2-го рода по плоской кривой

$$\int\limits_\gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy] := \int\limits_a^b \{P[x(t),y(t)] \cdot x'(t) + Q[x(t),y(t)] \cdot y'(t)\} \, dt \,.$$

В другом частном случае $n = 3$ имеем определение криволинейного интеграла 2-го рода по пространственной кривой

$$\int\limits_\gamma [P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz] =:$$

$$:= \int\limits_a^b \big\{P\,[x(t),y(t),z(t)]\; x'(t) + Q\,[x(t),y(t),z(t)]\; y'(t) + R\,[x(t),y(t),z(t)]\; z'(t)\big\} dt \,.$$

Существование криволинейного интеграла 2-го рода обеспечивается тем, что в правой части равенства (22.11) находится интеграл Римана от непрерывной функции. Более того, равенство (22.11) позволяет перенести основные свойства интеграла Римана на криволинейные интегралы 2-го рода. Поэтому здесь остановимся только на сходствах и различиях, существующих между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Важнейшим отличием криволинейного интеграла 2-го рода

[4]Такое отображение иногда называют *векторным полем*, определенным в области D.

от криволинейного интеграла 1-го рода является то, что при изменении ориентации кривой интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак. Сформулируем это следующим образом.

1°. *Криволинейные интегралы 2-го рода, взятые по двум эквивалентным путям, равны, если эти пути ориентированы одинаково, и отличаются знаком, если эти пути ориентированы противоположно.*

◄ Пусть γ_1 — путь, эквивалентный пути γ, а $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, — его параметрическое задание. Пусть $t = t(\tau)$ диффеоморфизм, такой, что $\boldsymbol{r}[t(\tau)] \equiv \boldsymbol{\rho}(\tau)$. Производя в интеграле (22.11) замену переменного $t = t(\tau)$, $\tau = \tau(t)$, получим

$$\int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle = \int\limits_a^b \langle \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)] \,|\, \boldsymbol{r}'(t) \rangle \, dt = \int\limits_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t(\tau))] \,|\, \boldsymbol{r}'(t(\tau)) \rangle t'(\tau) \, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tau(a)}^{\tau(b)} \langle \boldsymbol{F}[\boldsymbol{\rho}(\tau))] \,|\, \boldsymbol{\rho}'(\tau) \rangle \, d\tau = \pm \int\limits_{\gamma_1} \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{\rho} \rangle \,,$$

где знак «+» берется в случае $\alpha = \tau(a)$, $\beta = \tau(b)$, что соответствует сохранению ориентации, а знак «-» берется в случае $\alpha = \tau(b)$, $\beta = \tau(a)$, что соответствует изменению ориентации. ►

2°. *Пусть $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t)$ — единичный вектор касательного направления к кривой γ в точке $\boldsymbol{r}(t)$. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle = \int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{\tau} \rangle \, ds \,, \tag{22.12}$$

где ds — дифференциал длины дуги.

◄ Из равенства

$$\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}'(t) \cdot \Delta t + o(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0$$

следует, что вектор $\boldsymbol{r}'(t)$ — касательный к кривой γ в точке $\boldsymbol{r}(t)$. Так как $ds = |\boldsymbol{r}'(t)| \cdot dt$, то, вводя обозначение $\boldsymbol{\tau}(t) := \boldsymbol{r}'(t) / |\boldsymbol{r}'(t)|$, имеем $|\boldsymbol{\tau}(t)| \equiv 1$, а из равенства (22.11) следует равенство (22.12). ►

Замечание. Равенство (22.12) выражает зависимость между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода. Исходя из него, можно получить другие свойства криволинейных интегралов 2-го рода (например, свойство аддитивности, определение криволинейного интеграла 2-го рода по кусочно-гладкой кривой и др.)

Рассмотрим одно приложение криволинейных интегралов 2-го рода. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^3$ задана напряженность силового поля, т. е. отображение $\boldsymbol{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, где

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}\,,$$

и гладкая кривая γ, задаваемая как отображение $\boldsymbol{r} \ : \ [a\,,\, b] \longrightarrow D$, ориентированная от a к b. Требуется найти работу A поля $\boldsymbol{F}$ на пути γ. Исходим из того, что если сила $\boldsymbol{F}$ — постоянная, а путь γ — прямолинейный вектор $\boldsymbol{\Delta s}$, то работа равна скалярному произведению $\langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{\Delta s} \rangle$. Если это не так, то производим разбиение пути γ на малые участки, каждый из которых заменяем прямолинейным отрезком, а силу на нем приближенно считаем постоянной. Тогда для искомой работы получим следующее приближенное равенство типа

$$A \approx \sum_{k=0}^{N-1} \langle \boldsymbol{F}(P_k) \,|\, \Delta \boldsymbol{r}_k \rangle\,.$$

Из этого равенства в пределе при стремлении к нулю мелкости разбиения можно получить точное значение искомой работы

$$A = \int\limits_{\gamma} \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle\,.$$

Если кривая γ — замкнутая, то работа обозначается символом

$$A = \oint\limits_{\gamma} \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle$$

и называется иногда *циркуляцией*.

§ 2. Формула Грина

Определение 27. *Поверхностью с краем называется компактное топологическое пространство* G*, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную либо кругу* $\{x^2+y^2<1\}$*, либо полукругу* $\{x^2+y^2<1\,;\ y\geqslant 0\}$*.*

Точки, окрестности которых гомеоморфны кругам, называются внутренними. Множество всех внутренних точек поверхности G *называется ее внутренностью и обозначается символом* G^0*. Точки, окрестности которых гомеоморфны полукругам, называются точками края поверхности* G*. Множество всех таких точек называется краем поверхности* G *и обозначается символом* ∂G*.*

Таким образом, имеем $G=G^0\sqcup\partial G$.

Определение 28. *Областью с краем называется такая поверхность с краем* $G=G^0\sqcup\partial G$*, что* $G^0\subset\mathbb{R}^2$*.*

Пусть G — область с краем, $G^0\subset\mathbb{R}^2$ — ее внутренность, $\overline{G}\subset\mathbb{R}^2$ — ее замыкание. Тогда имеем

$$\overline{G}=G^0\sqcup\mathrm{Fr\,G}\,,$$

где $\mathrm{Fr\,G}$ — граница области G. Возникает вопрос: граница $\mathrm{Fr\,G}$ и край ∂G — это одно и то же множество или разные? Ответ такой: это, вообще говоря, различные множества, и потому смешивать их недопустимо. Покажем это на примере.

Пример. Пусть $G^0=\{z=r\cdot e^{i\varphi}\mid 0<r<1\,,\ 0<\varphi<2\pi\}\subset\mathbb{R}^2$ — открытый круг, из которого выброшен полуинтервал $[0\,,\,1)$. Тогда $\overline{G}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leqslant 1\}$ — замкнутый круг, а $G^0\sqcup\partial G=\{(r\,,\,\varphi)\mid 0\leqslant r\leqslant 1\,,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, причем точки $(r\,,\,0)$ и $(r\,,\,2\pi)$ при $0<r\leqslant 1$ считаются различными, а все точки вида $(0\,,\,\varphi)$ считаются за одну (отождествляются). Таким образом, граница $\mathrm{Fr\,G}$ — объединение окружности и радиуса, а край ∂G — замкнутая жорданова кривая, составленная из двух «берегов» разреза по отрезку $[0\,,\,1]$ и окружности, соединяющей точку 1 верхнего берега с точкой 1 нижнего берега (см. рис. 10).

Однако в том частном случае, когда граница области G представляет собой дизъюнктное объединение конечного числа замкнутых жордановых кривых, эти понятия совпадают, т. е. $\mathrm{Fr\,G}=\partial\mathrm{G}$.

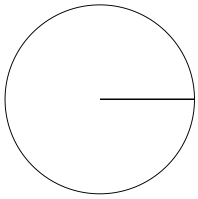

Рис. 8. Область

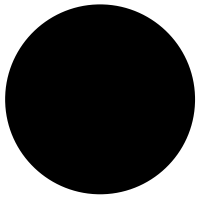

Рис. 9. Замкнутая область

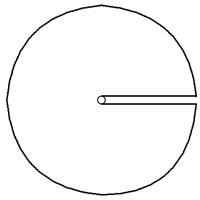

Рис. 10 Область с краем

Зафиксируем конечное число окрестностей, гомеоморфных полукругам и покрывающих край ∂G, вместе с их гомеоморфизмами на верхние полукруги. Будем считать, что эти окрестности и гомеоморфизмы образуют *ориентирующий дифференцируемый атлас,* т. е. все отображения на верхние полукруги являются диффеоморфизмами и имеют положительные якобианы. Тогда край оказывается гладким, и его локально можно задать уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x)$, где x — абсцисса диаметра полукруга. Направление возрастания переменной x локально ориентирует край. Так как атлас — ориентирующий, то в другой локальной координате уравнение края будет иметь вид $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x(y))$, где $y \longmapsto x(y)$ — возрастающая функция. Таким способом можно продолжить ориентацию на каждую связную компоненту края. Эту ориентацию края условимся называть *стандартной.* Ее можно охарактеризовать следующим образом: *если точка движется вдоль края ∂G в направлении стандартной ориентации, то при этом область G^0 остается слева.*

Теорема 18 (формула Грина[5]). *Пусть $G = G^0 \sqcup \partial G$ — область с гладким краем ∂G, ориентированным стандартно, а $(P\,, Q)$: $G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда*

$$\int\limits_{\partial G} (P\,dx + Q\,dy) = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy\,. \tag{22.13}$$

Доказательству предшествует рассмотрение некоторых частных случаев.

[5]*Грин* Джордж (1793—1841) — английский математик и физик.

Лемма 1. *Формула Грина верна для любой выпуклой области G с кусочно-гладким краем ∂G.*

◀ Пусть $[a\,,\,b]\times\mathbb{R}$ — вертикальная полоса минимальной ширины, содержащая G. Тогда G можно представить в виде

$$G=\left\{(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;a\leqslant x\leqslant b\,;\;y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\right\}\,,$$

где $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ — некоторые кусочно-гладкие функции. Применяя теорему Фубини, имеем

$$\iint\limits_G\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\wedge dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy=\int\limits_a^b P(x\,,\,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))\right]dx=-\int\limits_{\partial G}P(x\,,\,y)\,dx\,.$$

Пусть теперь $\mathbb{R}\times[c\,,\,d]$ — горизонтальная полоса минимальной ширины, содержащая G. Тогда G можно представить в виде

$$G=\left\{(x\,,\,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;c\leqslant y\leqslant d\,;\;x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y)\right\}\,,$$

где $x=x_1(t)$ и $x=x_2(t)$ — некоторые кусочно-гладкие функции. Применяя теорему Фубини, имеем

$$\iint\limits_G\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy=\int\limits_c^d y\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx=\int\limits_c^d Q(x\,,\,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}dy=$$

$$=\int\limits_c^d\left[Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y)\right]dy=\int\limits_{\partial G}Q(x\,,\,y)\,dy\,.$$

Итак, имеем

$$\iint\limits_G\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\wedge dy=-\int\limits_{\partial G}P\,dx\,,$$

$$\iint\limits_G\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\wedge dy=\int\limits_{\partial G}Q\,dy\,.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим формулу Грина (22.13). ▶

Лемма 2. *Пусть G и D — области с кусочно-гладкими краями, а*

$$\Phi\ :\ \begin{cases} x = x(u\,,\,v)\,, \\ y = y(u\,,\,v)\,, \end{cases}$$

— сохраняющий ориентацию диффеоморфизм D на G, для которого верна теорема о смешанных производных. Если формула Грина верна для области D, то она верна и для области G.

◀ Желая установить равенство (22.13), произведем в криволинейном интеграле из (22.13) замену переменных, полагая

$$\widetilde{P}(u\,,\,v) := (P\circ\Phi)(u\,,\,v)\,,\ \ \widetilde{Q}(u\,,\,v) := (Q\circ\Phi)(u\,,\,v)\,.$$

Тогда подынтегральное выражение криволинейного интеграла преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} P\,dx + Q\,dy = \widetilde{P}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) + \widetilde{Q}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) = \\ = \left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv\,. \end{aligned}$$

Так как по предположению формула Грина верна для области D, то имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\partial D}\left[\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv\right] = \\ &\quad = \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]du\wedge dv\,. \end{aligned} \tag{22.14}$$

Используя, далее, теорему о смешанных производных (согласно ей все смешанные производные взаимно уничтожатся), преобразуем подынтегральную функцию двойного интеграла из (22.14):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-$$

$$-\left(\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}-\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=$$

$$=\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial y}\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

Таким образом, равенство (22.14) приобретает следующий вид:

$$\int\limits_{\partial D}\left[\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\widetilde{P}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\widetilde{Q}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv\right]=$$

$$=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial\widetilde{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial y}\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}du\wedge dv\,.$$

Переходя здесь обратно к переменным x, y, получим формулу Грина (22.13). ►

Теперь переходим к доказательству теоремы 18.

◄ Итак, пусть G — произвольная область с гладким краем ∂G. Так как G — компакт, то любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Поэтому существует открытое покрытие $\{U_1\,,\,\ldots\,,\,U_N\}$ множества G, обладающее следующими свойствами. Каждое из множеств U_ν — либо круг $\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\right\}\subset G^0$, либо та связная компонента пересечения $\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\right\}\cap G$, которая содержит точку $(x_0\,,\,y_0)\in\partial G$, и край которой состоит из дуги окружности $\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\right\}$ и дуги края, содержащей точку $(x_0\,,\,y_0)$ (см. рис.). Радиусы кругов — не обязательно одинаковые, важно лишь, чтобы они были достаточно малыми. При таком выборе

покрытия формула Грина оказывается справедливой для каждого из множеств U_ν в силу лемм 1 и 2. Действительно, для круга формула Грина верна, так как круг — выпуклое множество. Пусть теперь U_ν — множество из покрытия, которое не является кругом, а $(x_0\,,\,y_0)$ — та точка его края, которая является центром круга. Тогда U_ν можно диффеоморфно отобразить на выпуклое множество с помощью диффеоморфизмов, для которых верна теорема о смешанных производных. Действительно, сначала с помощью параллельного переноса и поворота можно добиться того, чтобы точка $(x_0\,,\,y_0)$ перешла в точку $(0\,,\,0)$, а положительный луч касательной в точке $(x_0\,,\,y_0)$ совпал с положительным лучом оси абсцисс. Поскольку при таком отображении формула Грина сохраняется, то будем считать, что множество U_ν уже занимает указанное новое положение. Пусть $y = y(x)$, $y(0) = y'(0) = 0$ — уравнение кривой $\partial G \cap \partial U_\nu$. В этих обозначениях отображение

$$\Phi^{-1}: \begin{cases} u = x\,, \\ v = \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2} - y(x)} \cdot (y - y(x))\,, \end{cases}$$

реализует диффеоморфизм класса C^∞ множества U_ν на выпуклое множество, и значит, для Φ выполняется теорема о смешанных производных.

Пусть теперь $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ — разложение единицы класса C^∞ для множества G, подчиненное покрытию $\{U_1, \ldots, U_N\}$. Используя его и доказанную часть теоремы, имеем окончательно

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu\right)\right] dx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_G \sum_{\nu=1}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q\varphi_\nu) - \frac{\partial}{\partial y}(P\varphi_\nu)\right] dx \wedge dy =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \iint\limits_{U_\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q\varphi_\nu) - \frac{\partial}{\partial y}(P\varphi_\nu)\right] dx \wedge dy =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{\partial U_\nu} [(\varphi_\nu P)\,dx + (\varphi_\nu Q)\,dy] = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{\partial G} \varphi_\nu\,(P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \int\limits_{\partial G} \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu \cdot (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\partial G} (P\,dx + Q\,dy)\ . \quad \blacktriangleright$$

Замечания. 1. Формула Грина доказана для областей с гладкими краями. Очевидно, что она остается справедливой и для областей с кусочно-гладкими краями. Действительно, любую область с кусочно-гладким краем можно приблизить областью с гладким краем, например, производя «скругление углов» и организуя соответствующий предельный переход в формуле Грина для «приближенной» области.

2. Входящий в формулу Грина символ $\wedge$ называется «символом внешнего умножения». Выражение $dx \wedge dy$ имеет глубокий смысл, но в данном случае оно не отличается от элемента площади $dx\,dy$.

3. В качестве простейшего приложения формулы Грина укажем на возможность вычисления площадей с помощью криволинейных интегралов. Пусть, например, требуется вычислить площадь области G с кусочно-гладким краем ∂G. С этой целью найдем две гладкие функции, для которых при $(x\,,\,y) \in G$ выполняется равенство

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv 0\,.$$

Применяя, далее, формулу Грина, имеем

$$\mu_2(G) = \iint\limits_G 1 \cdot dx \wedge dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int\limits_{\partial G} (P\,dx + Q\,dy)\ .$$

В частном случае $Q(x,y) \equiv x\,,\ P(x,y) \equiv 0$ имеем

$$\mu_2(G) = \int\limits_{\partial G} x\,dy\,.$$

В другом частном случае $Q(x,y) \equiv 0$, $P(x,y) \equiv -x$ получаем

$$\mu_2(G) = -\int\limits_{\partial G} y\,dx\,.$$

Беря полусумму последних двух равенств, находим

$$\mu_2(G) = \int\limits_{\partial G} \frac{-y\,dx + x\,dy}{2}\,.$$

§ 3. Некоторые приложения формулы Грина

1. Первообразная функция для дифференциальной формы в области

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — область. В области G пусть заданы функции $P, Q : G \longrightarrow \mathbb{R}$, имеющие непрерывные частные производные. Основным объектом изучения в этом параграфе будет *дифференциальная форма* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, т. е. подынтегральное выражение криволинейного интеграла 2-го рода (по плоской кривой).

Определение 29. *Дифференцируемая функция $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной для дифференциальной формы*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

в области G, если $\forall\ (x\,,\,y) \in G$ и $\forall\ (h\,,\,k) \in \mathbb{R}^2$ выполняется равенство

$$DF(x,y)(h,k) = P(x,y)\cdot h + Q(x,y)\cdot k\,. \qquad (22.15)$$

Теорема 19. *Если F — первообразная для дифференциальной формы $P\,dx + Q\,dy$ в области G, то все такие первообразные содержатся в формуле $F(x,y) + C$, где C — произвольная постоянная.*

◀ Пусть F_1 — другая первообразная для дифференциальной формы $P\,dx + Q\,dy$. Для разности $\Phi(x,y) := F_1(x,y) - F(x,y)$ имеет место тождество $D\Phi(x,y)(h,k) \equiv 0$. Отсюда в силу следствия из теоремы о конечных приращениях вытекает, что $\Phi(x,y) \equiv C$ в области G. Таким образом, $F_1(x,y) \equiv F(x,y) + C$. ▶

Теорема 20. *Пусть* F *— первообразная для формы* $P\,dx + Q\,dy$ *в области* G, *а* γ *— гладкая кривая, задаваемая уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t)\,, \\ y = y(t)\,, \end{cases} \qquad a \leqslant t \leqslant b\,, \ \ (x(t), y(t)) \in G\,,$$

ориентированная в направлении от a *к* b. *Тогда для криволинейного интеграла* $\int\limits_\gamma (P\,dx + Q\,dy)$ *справедлива формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_\gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = F\,[x(t), y(t)]\Big|_{t=a}^{t=b} = \\ = F\,[x(b), y(b)] - F\,[x(a), y(a)]\ . \quad (22.16)$$

◄ Сведем криволинейный интеграл к интегралу Римана

$$\int\limits_\gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \int\limits_a^b \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}\,dt\,. \quad (22.17)$$

Применяя цепное правило, имеем

$$\frac{d}{dt}F[x(t), y(t)] = \frac{\partial F[x(t), y(t)]}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial F[x(t), y(t)]}{\partial y} \cdot y'(t) = \\ = P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\,.$$

Отсюда видно, что композиция $F[x(t), y(t)]$ является первообразной для определенного интеграла из (22.17). Применяя к нему классическую формулу Ньютона — Лейбница, получим равенство (22.16). ►

Замечание. Из равенства (22.16) видно, что в условиях теоремы 20 интеграл $\int\limits_\gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy]$ не зависит от уравнений кривой γ, а зависит только от положения ее начальной и концевой точек. Если, в частности, кривая γ — замкнутая, то этот интеграл равен нулю.

2. Локальная первообразная и критерий ее существования

Определение 30. *Говорят, что дифференциальная форма* $P\,dx + Q\,dy$ *имеет в точке* $(a\,,\,b) \in G^0$ *локальную первообразную, если существует окрестность* $U \subset G^0$ *точки* $(a\,,\,b)$ *и функция* $F\,:\,U \longrightarrow \mathbb{R}$, *первообразная для формы* $P\,dx + Q\,dy$ *в* U.

Замечание. Иногда (для внесения бóльшей ясности) *глобальной* называют первообразную, о которой идет речь в определении 29.

Теорема 21. *Пусть функции* $P, Q\,:\,G \longrightarrow \mathbb{R}$ *имеют в области* G *непрерывные производные. Равносильны следующие утверждения:*

(a) $\forall\,(x,y) \in G\,:\,\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$;

(b) *если* $\Delta \subset G$ — *любой треугольник, то*

$$\int\limits_{\partial\Delta} [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = 0\,;$$

(c) *в каждой точке* $(x,y) \in G$ *дифференциальная форма*

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

имеет локальную первообразную.

◀ Доказательство этой теоремы будем проводить по схеме:

$$\begin{array}{ccc} & \text{(a)} & \\ \Nearrow & & \Searrow \\ \text{(c)} & \Longleftarrow & \text{(b)} \end{array}$$

(a) ⇒ (b) Пусть $\Delta \subset G$ — любой треугольник. Применяя формулу Грина и используя условие (a), имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \iint\limits_{\Delta} 0 \cdot dx \wedge dy = 0\,.$$

(b) ⇒ (c) Пусть $(a\,,\,b) \in G$ — любая точка, а $U \subset G$ — открытый круг с центром в этой точке. Определим функцию $F\,:\,U \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая $\forall\,(x\,,\,y)\in U$:

$$F(x\,,\,y) := C + \int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} [P(u,v)\,du + Q(u,v)\,dv]\;, \tag{22.18}$$

где C — произвольная постоянная, а интегрирование ведется по прямолинейному отрезку $[(a,b);(x;y)]$.

Желая показать, что функция (22.18) — первообразная, выберем приращение $(h\,,\,k)$ так, чтобы было $(x+h\,,\,y+k)\in U$. Тогда треугольник Δ с вершинами в точках $(a\,,\,b)$, $(x\,,\,y)$, $(x+h\,,\,y+k)$ будет лежать в U (см. рис.). В силу условия (b) имеем

$$0 = \int\limits_{\partial\Delta} (P\,dx + Q\,dy) = \left(\int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} + \int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y+k)} + \int\limits_{(x+h,y+k)}^{(a,b)}\right)(P\,dx + Q\,dy)\;.$$

Исходя из этого равенства, преобразуем приращение функции (22.18)

$$F(x+h\,,\,y+k) - F(x\,,\,y) = \int\limits_{(a,b)}^{(x+h,y+k)} (P\,dx + Q\,dy) - \int\limits_{(a,b)}^{(x,y)} (P\,dx + Q\,dy) = \\ = \int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y+k)} (P\,dx + Q\,dy)\;.$$

Применяя к последнему интегралу теорему «о среднем», будем иметь

$$F(x+h\,,\,y+k) - F(x\,,\,y) = \\ = \int\limits_0^1 [P(x+th, y+tk)\cdot h + Q(x+th, y+tk)\cdot k]\;dt = \\ = P(\xi\,,\,\eta)\cdot h + Q(\xi\,,\,\eta)\cdot k$$

при некотором $(\xi\,,\,\eta)\in[(x\,,\,y)\,;\,(x+h\,,\,y+k)]$. Равенство (22.15) вытекает из следующей оценки:

$$0 \leqslant \frac{|[F(x+h, y+k) - F(x,y)] - [P(x,y)\cdot h + Q(x,y)\cdot k]|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \frac{|[P(\xi\,,\,\eta)\cdot h + Q(\xi\,,\,\eta)\cdot k] - [P(x,y)\cdot h + Q(x,y)\cdot k]|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \frac{|[P(\xi\,,\,\eta) - P(x,y)]\cdot h + [Q(\xi\,,\,\eta) - Q(x,y)]\cdot k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{[P(\xi\,,\,\eta) - P(x,y)]^2 + [Q(\xi\,,\,\eta)\cdot k - Q(x,y)\cdot k]^2} \to 0$$

при $(h\,,\,k) \to (0\,,\,0)$ в силу непрерывности функций P и Q.

(c) $\Rightarrow$ (a) Предположим противное:

$$\exists\,(x_0\,,\,y_0) \in G\ :\ \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0\,.$$

Так как частные производные непрерывны, то существует круг $U \ni (x_0,y_0)$, такой, что $\forall\ (x,y) \in U$ функция $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ имеет тот же знак, что и $\dfrac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y}$. Пусть теперь $\Delta \subset U$ — любой треугольник. Применяя к нему формулу Грина и используя существование локальной первообразной $F\ :\ U \longrightarrow \mathbb{R}$, имеем

$$0 \neq \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int\limits_{\partial\Delta} (P\,dx + Q\,dy) = F(x\,,\,y)\Big|_{\partial\Delta} = 0$$

в силу однозначности локальной первообразной. Получено противоречие: $0 \neq 0$. ▶

3. Гомотопия кривых. Теорема о гомотопии

Для изучения глобальных вопросов весьма полезно ввести и использовать понятие *гомотопии кривых.*

Определение 31. *Две разомкнутые кривые* γ_0 *и* γ_1 *с общими концами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *задаваемые как отображения* $\boldsymbol{r}_0\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow G$

и $\boldsymbol{r}_1\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow G$, *называются гомотопными в области* $G \subset \subset \mathbb{R}^2$, *если существует непрерывное отображение* $\boldsymbol{r}(s,t) \equiv \boldsymbol{r}_s(t)\ :\ [0,1]\times[0,1] \longrightarrow G$, *обладающее следующими свойствами:*

$$\text{(a)}\quad \forall\, t\in[0,1]\ :\ \begin{cases} \boldsymbol{r}(0,t)\equiv \boldsymbol{r}_0(t) & \text{— кривая}\ \ \gamma_0\,;\\ \boldsymbol{r}(1,t)\equiv \boldsymbol{r}_1(t) & \text{— кривая}\ \ \gamma_1\,;\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \forall\, s\in[0,1]\ :\ \begin{cases} \boldsymbol{r}(s,0)\equiv \boldsymbol{a} & \text{— начальная точка всех кривых}\,;\\ \boldsymbol{r}(s,1)\equiv \boldsymbol{b} & \text{— концевая точка всех кривых}\,.\end{cases}$$

Определение 32. *Две замкнутые кривые* γ_0 *и* γ_1, *задаваемые как отображения* $\boldsymbol{r}_0\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow G$ *и* $\boldsymbol{r}_1\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow G$, *называются гомотопными в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *если существует непрерывное отображение* $\boldsymbol{r}(s,t) \equiv \boldsymbol{r}_s(t)\ :\ [0,1]\times[0,1] \longrightarrow G$, *обладающее следующими свойствами:*

$$\text{(a)}\quad \forall\, t\in[0,1]\ :\ \begin{cases} \boldsymbol{r}(0,t)\equiv \boldsymbol{r}_0(t) & \text{— кривая}\ \ \gamma_0\,;\\ \boldsymbol{r}(1,t)\equiv \boldsymbol{r}_1(t) & \text{— кривая}\ \ \gamma_1\,;\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \forall\, s\in[0,1]\ :\ \boldsymbol{r}(s,0)\equiv \boldsymbol{r}(s,1)\ \text{— замкнутость всех кривых.}$$

Гомотопия кривых имеет простой геометрический смысл, Чтобы его пояснить, обозначим через γ_s кривую, заданную как отображение $\boldsymbol{r}_s\ :\ [0,1] \longrightarrow G$, где $\boldsymbol{r}_s(t) \equiv \boldsymbol{r}(s,t)$. Изменение кривой γ_s при изменении параметра s можно рассматривать как непрерывную деформацию кривой γ_s. Таким образом, гомотопия кривых γ_0 и γ_1 в области G означает, что существует непрерывная деформация, преобразующая кривые γ_0 и γ_1 одна в другую, притом так, что все промежуточные кривые не выходят за пределы области G. В связи с тем, что нам предстоит интегрировать по кривым γ_s, будем считать гомотопию такой, что все промежуточные кривые γ_s являются гладкими. Такую гомотопию условимся называть *гладкой*.

Теорема 22 (о гомотопии). *Пусть функции* $P\,,\ Q\ :\ G \longrightarrow \mathbb{R}$ *имеют непрерывные производные в области* $G \subset \mathbb{R}^2$, *и*

$$\forall (x,y)\in G\ :\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,.$$

Если гладкие кривые γ_0 и γ_1 гладко гомотопны в G, то

$$\int\limits_{\gamma_0} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\gamma_1} (P\,dx + Q\,dy)\ . \tag{22.19}$$

◀ Определим функцию $J\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$J(s) := \int\limits_{\gamma_s} (P\,dx + Q\,dy)\ , \quad s \in [0\,,\,1]\,, \tag{22.20}$$

где γ_s — промежуточная кривая из определений 31 и 32. Наша цель — показать, что функция J — постоянная, откуда и будет вытекать равенство (22.19).

Пусть $\rho := \operatorname{dist}(\mathrm{Fr\,G}\,;\, \boldsymbol{r}\,([0,1]\times[0,1])) \in \mathbb{R}_+$ — расстояние от границы области G до образа квадрата $[0,1]\times[0,1]$ при отображении $\boldsymbol{r}$. Задавая $\varepsilon \in (0\,,\,\rho)$ и пользуясь равномерной непрерывностью отображения $\boldsymbol{r}$, найдем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы $\forall\ (s,t)\,,\ (\sigma,\tau)$ было:

$$\begin{cases} |t-\tau| \leqslant \delta\,, \\ |s-\sigma| \leqslant \delta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad |\boldsymbol{r}(s,t) - \boldsymbol{r}(\sigma,\tau)| < \varepsilon\,. \tag{22.21}$$

Фиксируя $\sigma \in [0,1]$, станем вычислять интеграл $J(\sigma)$. С этой целью построим разбиение отрезка $[0\,,\,1]$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1\,,$$

мелкость которого меньше δ, и построим открытые круги

$$K_0\,,\ K_1\,,\ K_2\,,\ \ldots\,,\ K_{n-1}\,,$$

радиуса ε с центрами в точках

$$\boldsymbol{r}(\sigma,t_0)\,,\ \boldsymbol{r}(\sigma,t_1)\,,\ \boldsymbol{r}(\sigma,t_2)\,,\ \ldots\,,\ \boldsymbol{r}(\sigma,t_{n-1})$$

соответственно. Так как все круги K_ν лежат в области G, то по теореме 30 в этих кругах существуют локальные первообразные

$$F_0\,,\,;F_1\,,\ F_2\,,\ \ldots\,,\ F_{n-1}\,. \tag{22.22}$$

В силу условия (22.21) имеем $\boldsymbol{r}\,(\sigma \times [t_\nu, t_{\nu+1}]) \subset K_\nu$, поэтому интеграл по кривой γ_σ^ν, задаваемой отображением $\boldsymbol{r}_\sigma \,:\, [t_\nu, t_{\nu+1}] \longrightarrow K_\nu$, можно вычислить по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int\limits_{\gamma_\sigma^\nu} (P\,dx + Q\,dy) = F_\nu\,[\boldsymbol{r}_\sigma(t_{\nu+1})] - F_\nu\,[\boldsymbol{r}_\sigma(t_\nu)]\ , \quad \nu = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n-1\,. \tag{22.23}$$

Каждая первообразная из (22.23) определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Пользуясь этим произволом, подберем первообразные $F_1\,,\ F_2\,,\ \ldots\,,\ F_{n-1}$ так, чтобы было:

$$F_{\nu+1}\,[\boldsymbol{r}\,(t_{\nu+1})] = F_\nu\,[\boldsymbol{r}\,(t_{\nu+1})] \quad \text{при} \ \ \nu = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n-2\,.$$

Учитывая эти равенства и используя (22.23), имеем

$$J(\sigma) = \int\limits_{\gamma_\sigma} (P\,dx + Q\,dy) == \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_\sigma^\nu} (P\,dx + Q\,dy) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \{F_\nu\,[\boldsymbol{r}_\sigma(t_{\nu+1})] - F_\nu\,[\boldsymbol{r}_\sigma(t_\nu)]\} = F_{n-1}\,[\boldsymbol{r}_\sigma(1)] - F_0\,[\boldsymbol{r}_\sigma(0)]\,. \tag{22.24}$$

Вычислим теперь интеграл $J(s)$ при $|\sigma - s| < \delta$. Так как при $t \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$ из (22.21) следует, что $|\boldsymbol{r}_s(t) - \boldsymbol{r}_\sigma(t_\nu)| < \varepsilon$, т. е. что $\boldsymbol{r}\,(t) \in K_\nu$, то кривая γ_s^ν имеет уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_s(t)$ и отображает отрезок $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ в круг K_ν. Это означает, что для вычисления интеграла по кривой γ_s^ν можно использовать ту же первообразную, что и для вычисления интеграла по кривой γ_σ^ν, и мы имеем

$$\int\limits_{\gamma_\sigma^\nu} (P\,dx + Q\,dy) = F_\nu\,[\boldsymbol{r}_\sigma(t_{\nu+1})] - F_\nu\,[\boldsymbol{r}_\sigma(t_\nu)]\ , \quad \nu = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,n-1\,.$$

Используя эти равенства, находим

$$J(s) = \int\limits_{\gamma_s} (P\,dx + Q\,dy) == \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_s^\nu} (P\,dx + Q\,dy) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \{F_\nu\,[\boldsymbol{r}_s(t_{\nu+1})] - F_\nu\,[\boldsymbol{r}_s(t_\nu)]\} = F_{n-1}\,[\boldsymbol{r}_s(1)] - F_0\,[\boldsymbol{r}_s(0)]\,. \tag{22.25}$$

В случае гомотопии разомкнутых кривых имеем $\boldsymbol{r}_s(0) \equiv \boldsymbol{r}_\sigma(0) \equiv \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}_s(1) \equiv \boldsymbol{r}_\sigma(1) \equiv \boldsymbol{b}$, т. е. правые части равенств (22.24) и (22.25) равны. Поэтому $J(\sigma) \equiv J(s)$ при $|\sigma - s| < \delta$.

В случае гомотопии замкнутых кривых имеем $\boldsymbol{r}_\sigma(1) \equiv \boldsymbol{r}_s(0)$, и потому первообразные F_0 и F_{n-1} отличаются на слагаемую константу. т. е. $F_{n-1}(\boldsymbol{r}) - F_0(\boldsymbol{r}) \equiv C$. Значит, и в этом случае правые части равенств (22.24) и (22.25) равны, т. е. $J(\sigma) \equiv J(s)$ при $|\sigma - s| < \delta$.

Итак, функция $J \ : \ [0\,,\,1]$ — локально постоянная, а так как отрезок $[0\,,\,1]$ связен, то она и глобально постоянная. В частности, выполняется равенство (22.19). ►

Определение 33. *Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если любая замкнутая кривая $\boldsymbol{r} \ : \ [0\,,\,1] \longrightarrow G$ гомотопна одноточечной кривой (нулю).*

Замечания. 1. Под *одноточечной кривой* понимается кривая, задаваемая уравнением вида $\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{c} \in G$ — постоянная. Это название связано, очевидно, с тем, что годограф такой кривой состоит из одной точки.

2. Односвязные области на плоскости — это области, которые в некотором смысле устроены наиболее просто. Критерием односвязности ограниченной области является связность ее границы. На рис. показаны некоторые примеры односвязных областей.

Теорема 23. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, а функции $P, Q \ : \ G \longrightarrow \mathbb{R}$ — имеют непрерывные производные. Равносильны следующие утверждения:*

(a) $\forall\ (x,y) \in G \ : \ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$;

(b) *если γ — замкнутая кривая с носителем*[6] *в G, то*

$$\int\limits_\gamma (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = 0\,;$$

(c) *если γ — разомкнутая гладкая кривая, то интеграл*

$$\int\limits_\gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy]$$

[6] Если кривая γ задана как отображение $\boldsymbol{r} \ : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, то ее носителем принято называть образ $\boldsymbol{r}([0,1])$.

не зависит от формы кривой γ, *а зависит только от положения начальной и концевой точек этой кривой;*

(d) *в области* G *существует глобальная первообразная для дифференциальной формы* $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

◀ Доказательство этой теоремы будем проводить по схеме:

$$\begin{array}{ccc} (a) & \Longrightarrow & (b) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (d) & \Longleftarrow & (c) \end{array}$$

(a) $\Rightarrow$ (b) Так как кривая γ — замкнутая, а область G — односвязная, то кривая γ гомотопна одноточечной кривой γ_0, т. е. кривой с уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{c}$. Поэтому, используя теорему 22, имеем

$$\int\limits_{\gamma} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\gamma_0} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{0}^{1} 0 \cdot\, dt = 0\,.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Пусть γ_1 и γ_2 — две кривые с общими концами и носителем в G. Тогда кривая $\gamma_* \gamma_2^{-1}$ — замкнутая. Используя условие (b) и свойство аддитивности, имеем

$$0 = \int\limits_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\gamma_1} (P\,dx + Q\,dy) - \int\limits_{\gamma_2} (P\,dx + Q\,dy)\,,$$

т. е.

$$\int\limits_{\gamma_1} (P\,dx + Q\,dy) = \int\limits_{\gamma_2} (P\,dx + Q\,dy)\,.$$

(c) $\Rightarrow$ (d) Определим функцию $F\,:\,G \longrightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$F(x\,,\,y) := C + \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} [P(u, v)\,du + Q(u, v)\,dv]\;, \tag{22.26}$$

где C — постоянная, $(x_0, y_0) \in G$ — произвольно зафиксированная точка, $(x, y) \in G$, а путь интегрирования лежит в G. Так как интеграл не зависит от пути, то равенство (22.26) задает функцию от $(x, y) \in G$.

Чтобы показать, что F — первообразная, найдем точку $(x_1, y_1) \in G$ так, чтобы было

$$[(x_0, y_0)\,;\,(x, y)] \in G \quad \text{и} \quad \mathrm{dist}\,((x_1, y_1)\,;\,(x, y)) < \mathrm{dist}\,((x_1, y_1\,;\,\mathrm{Fr}\,G)) =: \mathrm{d}\,.$$

Тогда круг с центром в точке (x_1, y_1) радиуса d будет лежать в области G и содержать внутри точку (x, y). Пользуясь тем, что интеграл в (22.26) не зависит от пути, преобразуем его к виду

$$F(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} (P\,dx + Q\,dy) + \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x,y)} (P\,dx + Q\,dy)\,, \qquad (22.27)$$

где первый интеграл берется по произвольной кривой с носителем в G, а второй — по прямолинейному отрезку, соединяющему точки (x_1, y_1) и (x, y). В правой части (22.27) первые два слагаемые — постоянные, поэтому

$$DF(x, y)(h, k) = P(x, y) \cdot h + Q(x, y) \cdot k\,,$$

что можно доказать точно так же, как и в теореме 21(c).

(d) $\Rightarrow$ (a) Пусть $F \;:\; G \longrightarrow \mathbb{R}$ — первообразная для формы $P\,dx + Q\,dy$ в области G. Тогда $\forall\;(x, y) \in G$ будет

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \equiv P(x, y)\,; \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \equiv Q(x, y)\,,$$

и по теореме о смешанных производных будем иметь

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}\,, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,. \quad \blacktriangleright$$

§ 4. Поверхностные интегралы

1. Площадь параметризованной гладкой поверхности с краем

Пусть $\mathbb{R}$ — свя́зная гладкая поверхность с гладким краем, *вложенная* в $\mathbb{R}^3$. Под вложением здесь понимается не только то, что $S \subset \mathbb{R}^3$, но еще и то, что поверхность S снабжена индуцированной топологией (т. е. базис топологии на S образуют пересечения поверхности S с шарами достаточно малых радиусов $\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\}$, где $(x_0\,, y_0\,, z_0) \in S$.

Поставим задачу определить понятие площади такой поверхности и дать вывод формул для вычисления этой площади. Здесь возникают проблемы двоякого рода: *локальные* и *глобальные*. Локальную проблему рассмотрим в этом пункте. Она заключается в том, чтобы найти площадь поверхности S, заданной уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u\,, v)$, где $(u\,, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Возникновение глобальной проблемы связано с тем, что часто поверхность вообще невозможно задать уравнением указанного вида, так как она не гомеоморфна никакой плоской области. Таковы, например, поверхности, показанные на рисунках. Все эти поверхности невозможно параметризовать по топологическим причинам. Действительно, область $D^0 \subset \mathbb{R}^2$ — не компактна, ориентируема, а любая простая замкнутая кривая разбивает ее на две связные компоненты, и все эти свойства должны сохраняться при гомеоморфизмах. Однако сфера и тор компактны, лист Мёбиуса неориентируем, а на «ручке» есть простая замкнутая кривая, дополнение которой связно.

Определение 34. *Параметризованной поверхностью будем называть график S непрерывного инъективного отображения $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) \, : \, D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, где $D \subset \mathbb{R}^2$ — область с кусочно-гладким краем ∂D. Параметризованная поверхность называется гладкой, если существуют непрерывные частные производные $\boldsymbol{r}'_u$ и $\boldsymbol{r}'_v$, причем $\forall\,(u,v) \in D \, : \, \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \neq \boldsymbol{0}$.*

Определение 35. *Гладкую параметризованную поверхность S будем называть простой, если ее проектирование по меньшей мере на одну из координатных плоскостей является диффеоморфизмом $\pi \, : \, S \longleftrightarrow \pi(S)$.*

Примерами простых поверхностей являются графики непрерывно дифференцируемых функций вида:

$$z = f(x,y)\,, \quad (x,y) \in D_{xy}\,, \tag{22.28}$$

$$x = g(y,z)\,, \quad (y,z) \in D_{yz}\,, \tag{22.29}$$

$$y = h(z,x)\,, \quad (z,x) \in D_{zx}\,, \tag{22.30}$$

Определим сначала понятие площади простой гладкой параметризованной поверхности S, заданной уравнением (22.28). С этой целью построим разбиение

$$T = \{D_1\,,\, D_2\,,\, \ldots\,,\, D_N\}\ , \quad D_{xy} = \bigcup_{k=1}^{N} D_k\,,$$

множества D_{xy} на квадрируемые подмножества $D_1\,,\, D_2\,,\, \ldots\,,\, D_N$ без общих внутренних точек. Выбирая произвольно отмеченные точки $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, заменим приближенно часть S_k поверхности S, лежащую над D_k, частью касательной плоскости к поверхности S в точке (ξ_k, η_k, ζ_k), где $\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$. Производя это построение для каждого $k = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, N$, получим так называемое «черепичное покрытие», т. е. кусочно-непрерывную поверхность, состоящую из кусков касательных плоскостей, расположенных над соответствующими множествами D_k. За приближенное значение площади данной поверхности естественно принять площадь «черепичного покрытия», несмотря на его разрывность. *За точное значение площади поверхности S принимается предел площадей «черепичных покрытий» при условии, что мелкость $\lambda(T)$ разбиений T стремится к нулю.*

Теорема 24. *Простая гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$, параметризованная уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, квадрируема, а для ее площади справедливо равенство*

$$\mu_2(S) = \iint\limits_{D} |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\; dudv\,. \tag{22.31}$$

◀ Из определения 35 следует, что любую простую поверхность можно считать графиком по крайней мере одной из функций вида (22.28) — (22.30). Для определенности предположим, что поверхность S задана уравнением (22.28), и вычислим ее площадь.

Пусть $T = \{D_1,\, D_2\ \ldots,\, D_N\}$ — разбиение множества D_{xy}, построенное так, как указано выше. Выбирая отмеченные точки $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$,

$\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$, вычислим площадь «черепичного покрытия». С этой целью возьмем уравнение касательной плоскости к поверхности S в точке (ξ_k, η_k, ζ_k):

$$z - \zeta_k = \frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial x} \cdot (x - \xi_k) + \frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial y} \cdot (y - \eta_k)\,.$$

Вектор $\boldsymbol{n} = -\dfrac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\boldsymbol{i} - \dfrac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ является вектором нормали к поверхности S в точке (ξ_k, η_k, ζ_k). Пользуясь тем, что вектор нормали можно выбирать с точностью до знака, мы выбрали его так, чтобы он образовывал острый угол с вектором $\boldsymbol{k}$. Теперь легко вычислить площадь $\mu_2(\sigma_k)$ части касательной плоскости, лежащей над множеством D_k. Учитывая, что плоская фигура D_k является проекцией плоской фигуры σ_k на плоскость xOy, имеем

$$\mu_2(D_k) = \mu_2(\sigma_k) \cdot \cos(\boldsymbol{n}_k, \boldsymbol{k}) = \mu_2(\sigma_k) \cdot \frac{\langle \boldsymbol{n}_k | \boldsymbol{k} \rangle}{|\boldsymbol{n}_k| \cdot |\boldsymbol{k}|} = \\ = \frac{\mu_2(\sigma_k)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2}}\,.$$

Отсюда находим

$$\mu_2(\sigma_k) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2} \cdot \mu_2(D_k)\,.$$

Суммируя эти площади, получим площадь «черепичного покрытия»:

$$\mu_2(S) \approx \sum_{k=1}^{N} \mu_2(\sigma_k) = \\ = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\xi_k, \eta_k)}{\partial y}\right)^2} \cdot \mu_2(D_k)\,. \quad (22.32)$$

Очевидно, что в правой части этого приближенного равенства находится интегральная сумма некоторого двойного интеграла. Поэтому в пределе при $\lambda(T) \to 0$ из приближенного равенства (22.32) получим точное равенство

$$\mu_2(S) = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,. \tag{22.33}$$

Если простая поверхность задана уравнением (22.29), то аналогично предыдущему будем иметь

$$\mu_2(S) = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\, dydz\,. \tag{22.34}$$

Если же простая поверхность задана уравнением (22.30), то аналогично предыдущему получим

$$\mu_2(S) = \iint\limits_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}\, dzdx\,. \tag{22.35}$$

Предположим теперь, что простая поверхность S задана параметрическим уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, или равносильной ему системой скалярных уравнений

$$\begin{cases} x = x(u,v)\,, \\ y = y(u,v)\,, \qquad (u,v) \in D\,. \\ z = z(u,v)\,, \end{cases} \tag{22.36}$$

По условию поверхность S является простой, т. е. биективно проектируется по крайней мере на одну из координатных плоскостей (пусть для определенности — на плоскость xOy). Тогда угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ не равен $\pi/2$, т. е. $\langle \boldsymbol{k} \big| \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \rangle \neq 0$ (и даже можно считать, что это скалярное произведение положительно). Итак, $\forall\ (x,y) \in D$ имеем

$$\langle \boldsymbol{k} \big| \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \rangle = \langle \boldsymbol{k} \Bigg| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \rangle = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} > 0\,.$$

Из этого неравенства следует, что для отображения $\begin{cases} x = x(u,v)\,, \\ y = y(u,v)\,, \end{cases}$ существует единственное обратное отображение $\begin{cases} u = u(x,y)\,, \\ v = v(x,y)\,, \end{cases}$ реализующее диффеоморфизм $D_{xy} \longleftrightarrow D$. Но тогда уравнение поверхности S можно переписать в следующем виде:

$$z = z(u,v) = z\left(u(x,y); v(x,y)\right) =: f(x,y)\,.$$

Произведем в интеграле (22.33) замену, принимая (u,v) за новые переменные. Выразим сначала градиент $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ через (u,v):

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_u & z'_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_u & z'_v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} z'_u & z'_v \end{pmatrix} \cdot \frac{\begin{pmatrix} y'_v & -x'_u \\ -y'_u & x'_u \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z'_u y'_v - z'_v y'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-z'_u x'_v + z'_v x'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}.$$

Подставляя эти выражения в (22.33), получим

$$\mu_2(S) = \iint\limits_D \left(1 + \frac{\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}^2} + \frac{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}^2} \right)^{1/2} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}^2}\, dudv = \iint\limits_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\, dudv\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. В дифференциальной геометрии доказывается, что

$$|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,,$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. Таким образом, для простой поверхности имеем

$$\mu_2(S) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv\,.$$

Определение 36. *Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется ориентируемой, если на ней существует непрерывное поле нормалей, т. е. непрерывное отображение $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x, y, z)\ :\ S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, такое, что в каждой точке $(x, y, z) \in S$ вектор $\boldsymbol{n}$ и касательная плоскость к поверхности S ортогональны. Ориентируемая поверхность вместе с фиксированным на ней непрерывным полем нормалей называется ориентированной поверхностью.*

Замечание. Простейшими примерами ориентируемых поверхностей являются: плоскость и любая лежащая на ней область. Отсюда следует, что любая параметризованная гладкая поверхность ориентируема. Из других типов гладких поверхностей простейшими ориентируемыми поверхностями являются сфера и тор. Если поверхность ориентируема, то она имеет ровно две ориентации, поскольку в этом случае на ней имеется два непрерывных поля нормалей $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{n}(x, y, z)$. Простейшим примером неориентируемой поверхности является лист Мёбиуса.

Определение 37. *Две параметризации гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)\ :\ D \longrightarrow S \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\xi, \eta)\ :\ G \longrightarrow S$$

называются эквивалентными, если существует диффеоморфизм

$$\begin{cases} \xi = \xi(u, v)\,, \\ \eta = \eta(u, v)\,, \end{cases} \quad : \quad D \longrightarrow G\,, \tag{22.37}$$

такой, что $\boldsymbol{\rho}\left(\xi(u, v)\,;\, \eta(u, v)\right) \equiv \boldsymbol{r}(u, v)$.

Замечание. Из этого определения следует, что при переходе от одной параметризации поверхности S к другой ориентация поверхности R сохраняется, если якобиан отображения (22.37) положителен, и меняется на противоположную, если этот якобиан отрицателен.

Теорема 25. *Площадь простой гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ не зависит от ее параметризации. В частности, она не зависит и от ориентации поверхности S.*

◀ Согласно теореме 24 в параметризации $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\xi, \eta) \, : \, G \longrightarrow S$ площадь поверхности S должна вычисляться по формуле

$$\mu_2(S) = \iint\limits_D \left| \boldsymbol{\rho}'_\xi \times \boldsymbol{\rho}'_\eta \right| \, d\xi d\eta \, .$$

Используя отображение (22.37), произведем в этом интеграле замену переменных $(\xi \, , \, \eta)$ на переменные $(u \, , \, v)$. Тогда получим[7]

$$\mu_2(S) = \iint\limits_D \left| \left(\frac{d}{d\xi} \boldsymbol{\rho}(\xi(u,v); \eta(u,v)) \right) \times \left(\frac{d}{d\eta} \boldsymbol{\rho}(\xi(u,v); \eta(u,v)) \right) \right| \cdot$$

$$\cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \xi'_u & \xi'_v \\ \eta'_u & \eta'_v \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left| \left(\frac{d}{d\xi} \boldsymbol{r}(u,v) \times \frac{d}{d\eta} \boldsymbol{r}(u,v) \right) \right| \times \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \xi'_u & \xi'_v \\ \eta'_u & \eta'_v \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left| \left(\boldsymbol{r}'_u \cdot u'_\xi + \boldsymbol{r}'_v \cdot v'_\xi \right) \times \left(\boldsymbol{r}'_u \cdot u'_\eta + \boldsymbol{r}'_v \cdot v'_\eta \right) \right| \cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \xi'_u & \xi'_v \\ \eta'_u & \eta'_v \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint\limits_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} u'_\xi & u'_\eta \\ v'_\xi & v'_\eta \end{vmatrix} \cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \xi'_u & \xi'_v \\ \eta'_u & \eta'_v \end{vmatrix} dudv = \iint\limits_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \, dudv \, ,$$

и мы получили правую часть равенства (24). ▶

Замечание. Из этой теоремы следует, что инвариантный (т. е. не зависящий от выбора локальных координат) смысл имеет элемент площади поверхности

$$dS := |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \, dudv \, .$$

[7] В приводимых ниже формулах символ mod означает *модуль* (абсолютную величину). Он применяется тогда, когда применение символа $|.|$ оказывается по каким-то причинам неудобным.

2. Поверхностные интегралы 1-го рода (по площади поверхности)

Пусть $G^0 \subset \mathbb{R}^3$ — область, а $f\,:\,G^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция (скалярное поле). Пусть $S \subset G^0$ — гладкая поверхность с кусочно-гладким краем.

Определение 38. *Поверхностный интеграл 1-го рода от функции f по площади параметризованной гладкой поверхности S определим равенством*

$$\iint\limits_S f(\boldsymbol{r})\cdot dS := \iint\limits_D f[\boldsymbol{r}(u,v)]\cdot|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\,dudv\,, \tag{22.38}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)\,:\,D \longrightarrow S$ — параметризация поверхности S.

Если поверхность S не допускает глобальной параметризации, то возьмем ее конечное покрытие $\{S_1\,,\,S_2\,,\,\ldots\,,\,S_N\}$ простыми поверхностями с кусочно-гладкими краями. Пусть $\{\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\,\varphi_N\}$ — разложение единицы, подчиненное этому покрытию. Пользуясь инвариантностью элемента площади поверхности $dS = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\,dudv$ по отношению к выбору локальной параметризации, естественно дать следующее определение.

Определение 39. *Поверхностный интеграл 1-го рода от функции f по площади гладкой поверхности S определим равенством*

$$\iint\limits_S f(\boldsymbol{r})\,dS := \sum_{k=1}^{N}\iint\limits_S \varphi_k(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})\,dS\,, \tag{22.39}$$

где все поверхностные интегралы в правой части существуют в силу предыдущего определения.

Если, в частности, поверхность S допускает глобальную параметризацию, то, производя ее и меняя в (**??**) порядок суммирования и интегрирования, получим определение (22.38). Отметим некоторые свойства поверхностных интегралов 1-го рода.

1° *Если функция f — непрерывная, а поверхность S — гладкая, то поверхностный интеграл 1-го рода существует, не зависит от* *выбора параметризаций (в частности, от ориентации поверхности S, если она ориентируема), и обладает свойствами линейности и аддитивности.*

2° *Поверхностный интеграл 1-го рода от функции $f(\boldsymbol{r}) \equiv 1$ равен площади поверхности S:*

$$\mu_2(S) = \iint\limits_S dS\,.$$

В качестве приложения рассмотрим неоднородную поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ («оболочку» или «крышу») с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x,y,z)$. Требуется найти массу M поверхности S. Производя разбиение поверхности S на квадрируемые части $\{S_1\,,\ S_2\,,\ \ldots\,,\ S_N\}$ без общих внутренних точек и выбирая произвольно точки $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) \in$ $\in S_k,\ k = 1,2,\ldots,N$, получим приближенное равенство

$$M \approx \sum_{k=1}^{N} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot\mu_2(S_k)\,.$$

Отсюда в пределе при стремлении к нулю мелкости разбиения можно получить точное равенство:

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,dS\,.$$

Пример. Вычислить поверхностный интеграл

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} z\cdot dS\,.$$

◀ Выражая из уравнения сферы z через x и y, получим

$$I = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}\cdot dxdy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} dxdy = \pi\,. \ ▶$$

3. Поверхностные интегралы 2-го рода (по координатам)

Пусть снова $G^0 \subset \mathbb{R}^3$ — область, $\boldsymbol{F} = P\cdot \boldsymbol{i} + Q\cdot \boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} \,:\, G^0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение (векторное поле), а $S \subset G^0$ — гладкая ориентируемая поверхность с кусочно-гладким краем.

Определение 40. *Пусть $S \subset G^0 \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая ориентируемая поверхность, параметризованная отображением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) : D \longrightarrow S$. Поверхностный интеграл от вектор-функции*

$$\boldsymbol{F} = P\cdot \boldsymbol{i} + Q\cdot \boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$$

по поверхности S, ориентированной вектором нормали $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$, определим равенством

$$\iint\limits_S [P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy] :=$$
$$:= \iint\limits_D \left\langle \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(u,v)] \middle| \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \right\rangle dudv\,. \qquad (22.40)$$

В правой части этого равенства находится двойной интеграл Римана от непрерывной функции. Поэтому поверхностный интеграл 2-го рода существует и «наследует» основные свойства интеграла Римана.

Из определения (22.40) очевидно, что *при изменении ориентации поверхности S на противоположную поверхностный интеграл 2-го рода меняет знак.*

Это происходит потому, что в правой части равенства (22.40) вектор нормали $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ заменяется вектором $(-\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v)$.

Для удобства использования перепишем определение (22.40) в различных формах. Обозначая $\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$, имеем

$$\iint\limits_S [P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy] =$$

$$= \iint\limits_D \left[P\cdot\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v\end{vmatrix} + Q\cdot\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v\end{vmatrix} + R\cdot\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}\right] dudv =$$

$$= \iint\limits_D \begin{vmatrix} P[\boldsymbol{r}(u,v)] & Q[\boldsymbol{r}(u,v)] & R[\boldsymbol{r}(u,v)] \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv\,.$$

Вводя еще единичный вектор нормали

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma := \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|}\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — его направляющие косинусы $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$, получим

$$\iint\limits_S [P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy] = \iint\limits_D \langle \boldsymbol{F}|\boldsymbol{n}\rangle\cdot dS =$$

$$= \iint\limits_S [P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma]\cdot dS\,. \quad (22.41)$$

Это равенство дает выражение поверхностного интеграла 2-го рода через поверхностный интеграл 1-го рода.

Предположим теперь, что гладкая ориентируемая поверхность S не допускает глобальной параметризации. Тогда определение (22.40) неприменимо, и мы используем следующий прием. Пусть $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ — покрытие поверхности S простыми поверхностями, а $\{\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ разложение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_k(u_k, v_k)\,:\, D_k \longrightarrow S_k$ — параметризация поверхности S_k, $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Параметризации можно выбрать так, чтобы они образовывали *ориентирующий атлас*, т. е. так, чтобы было

$$\frac{D(u_k, v_k)}{D(u_j, v_j)} > 0\,,\quad \text{если}\quad S_k \cup S_j \neq \varnothing\,.$$

При таком выборе параметризаций направление вектора нормали не меняется при переходе от одних локальных координат к другим, так как

$$\boldsymbol{r}'_{u_k} \times \boldsymbol{r}'_{v_k} = \boldsymbol{r}'_{u_j} \times \boldsymbol{r}'_{v_j} \cdot \frac{D(u_k, v_k)}{D(u_j, v_j)}\,.$$

Тогда поверхностный интеграл 2-го рода можно определить следующим равенством:

$$\iint\limits_S [P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy] :=$$

$$:= \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_D \langle \varphi_k \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \rangle \cdot dudv\,. \quad (22.42)$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_S [x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy]$$

по поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ориентированной внешней нормалью.

◀ Сначала находим единичный вектор внешней нормали

$$\boldsymbol{n} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,.$$

Используя, далее, равенство (22.41), имеем

$$I = \iint\limits_S \langle \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{n} \rangle\, dS = \iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\, dS = \iint\limits_S dS = 4\pi\,. \ ▶$$

§ 5. Формулы Стокса и Гаусса — Остроградского

1. Оператор Гамильтона «набла»

Рассматривая скалярнозначные и векторнозначные непрерывно дифференцируемые функции, определенные в области $G^0 \subset \mathbb{R}^3$, называют их иногда *полями* (скалярным и векторным соответственно).

Определение 41. *Градиентом скалярного поля* $f : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ *называется векторное поле (отображение)* $\mathbf{grad}\, f : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *определяемое следующим равенством:*

$$\mathbf{grad}\, f := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \boldsymbol{k}\,. \tag{22.43}$$

Дивергенцией векторного поля $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *называется скалярное поле (функция)* $\operatorname{div} \boldsymbol{F} : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}$, *определяемое следующим равенством:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,. \tag{22.44}$$

Ротором (или вихрем) векторного поля $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *называется векторное поле (отображение)* $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *определяемое следующим равенством:*

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \boldsymbol{k}\,. \tag{22.45}$$

Все эти поля имеют реальный физический смысл, а для их удобной для запоминания записи используется так называемый *оператор Гамильтона*[8] *«набла»*.

Определение 42. *Оператором Гамильтона «набла»*[9] *называется оператор*

$$\boldsymbol{\nabla} := \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}\,, \tag{22.46}$$

действие которого на скалярные функции $(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ *совпадает с оператором дифференцирования*

$$\boldsymbol{\nabla} f := \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\,, \tag{22.47}$$

[8] *Гамильтон* (Хамилтон) Уильям Роуан (1805—1865) — ирландский математик.

[9] Термин *Набла* происходит от греческого слова $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ — арфа, которую напоминает символ ∇.

Равенство (22.47) можно рассматривать как аналог произведения вектора $\boldsymbol{\nabla}$ на скаляр f. Рассматриваются также аналоги скалярного и векторного произведений вектора $\boldsymbol{\nabla}$ на вектор $\boldsymbol{F}$. Используя эти аналогии, получим следующие выражения для градиента, дивергенции и ротора через оператор Гамильтона:

$$\mathbf{grad}\, f = \boldsymbol{\nabla}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\,; \tag{22.48}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \langle \boldsymbol{\nabla} \mid \boldsymbol{F}\rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,; \tag{22.49}$$

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{22.50}$$

С помощью оператора Гамильтона можно строить другие, более сложные дифференциальные операторы, например, широко известный оператор Лапласа

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \langle \boldsymbol{\nabla} \mid \boldsymbol{\nabla} u\rangle = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\, u\,,$$

имеющий большие приложения в математической физике.

2. Формула Стокса

Формула Стокса[10] является обобщением формулы Грина на тот случай, когда вместо области с краем берется ориентируемая поверхность с краем.

Теорема 26. *Пусть $S \subset G^0 \subset \mathbb{R}^3$ — достаточно гладкая ориентируемая поверхность с гладким краем ∂S, а $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} : G^0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_S \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{n}\rangle\, dS = \oint\limits_{\partial S} \langle \boldsymbol{F} \mid d\boldsymbol{r}\rangle\,, \tag{22.51}$$

[10] *Стокс* Джордж Габриель (1819—1903) — английский физик и математик.

где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \in S$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x,y,z)$ *— единичный вектор нормали, ориентирующий поверхность* S, *а* ∂S *— край поверхности* S, *ориентированный по отношению к ее ориентации стандартно.*

Замечание. Перепишем формулу Стокса в нескольких равносильных формах. Обозначая $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$, получим

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint\limits_{\partial S} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)\,. \qquad (22.52)$$

Раскрывая в левой части определитель, будем иметь

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS =$$
$$= \oint\limits_{\partial S} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)\,. \qquad (22.53)$$

Отсюда, учитывая зависимость между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода, получим

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\right] dS =$$
$$= \oint\limits_{\partial S} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)\,. \qquad (22.54)$$

И, наконец, сворачивая подынтегральное выражение поверхностного интеграла в определитель, получим

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint\limits_{\partial S} (P\,dx + Q\,dy + R\,dz)\,. \qquad (22.55)$$

Итак, формула Стокса переписана в пяти равносильных формах. Теперь переходим к ее доказательству.

◀ Предположим сначала, что поверхность S — параметризуемая и задается с помощью отображения $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) : D \longrightarrow S$, для которого справедлива теорема о смешанных производных. Учитывая, что в этом случае имеют место равенства

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v}{|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|}\,, \qquad dS = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|\,dudv\,,$$

мы можем переписать формулу Стокса еще в одном равносильном виде:

$$\iint\limits_{D} \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \rangle \, dudv = \oint\limits_{\partial D} \left[\langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_u \rangle \, du + \langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_v \rangle \, dv \right] . \qquad (22.56)$$

Применяя к криволинейному интегралу из (22.56) формулу Грина и учитывая терему о смешанных производных, преобразуем этот криволинейный интеграл в двойной

$$\oint\limits_{\partial D} \left[\langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_u \rangle \, du + \langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_v \rangle \, dv \right] = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial}{\partial u} \langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_v \rangle - \frac{\partial}{\partial v} \langle \boldsymbol{F} | \boldsymbol{r}'_u \rangle \right] dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} \left[\langle \boldsymbol{F}'_u \mid \boldsymbol{r}'_v \rangle - \langle \boldsymbol{F}'_v \mid \boldsymbol{r}'_u \rangle \right] dudv \, .$$

Остается только показать, что

$$\iint\limits_{D} \left[\langle \boldsymbol{F}'_u \mid \boldsymbol{r}'_v \rangle - \langle \boldsymbol{F}'_v \mid \boldsymbol{r}'_u \rangle \right] dudv = \iint\limits_{D} \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \rangle \, dudv \, , \quad (22.57)$$

т. е. что

$$\langle \boldsymbol{F}'_u \mid \boldsymbol{r}'_v \rangle - \langle \boldsymbol{F}'_v \mid \boldsymbol{r}'_u \rangle \equiv \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \rangle \, . \qquad (22.58)$$

С этой целью положим сначала $Q \equiv R \equiv 0$, т. е. $\boldsymbol{F}(x,y,z) \equiv$ $\equiv P(x,y,z)\boldsymbol{i}$. Тогда левая часть равенства (22.60) переписывается в следующем равносильном виде:

$$(P'_x \cdot x'_u + P'_y \cdot y'_u + P'_z \cdot z'_u)x'_v - (P'_x \cdot x'_v + P'_y \cdot y'_v + P'_z \cdot z'_v)x'_u =$$

$$= -P'_y \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} , \quad (22.59)$$

а правая — в виде

$$\left\langle \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} \,\middle|\, \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle P'_z \cdot \boldsymbol{j} - P'_y \cdot \boldsymbol{k} \,\middle|\, \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \right\rangle =$$

$$= -P'_y \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}. \quad (22.60)$$

Поскольку правые части равенств (22.59) и (22.60) совпадают, то равенство (22.57) доказано при $\boldsymbol{F} \equiv P\boldsymbol{i}$. Аналогично можно доказать равенство (22.57) при $\boldsymbol{F} \equiv Q\boldsymbol{j}$ и при $\boldsymbol{F} \equiv R\boldsymbol{k}$. Складывая эти три равенства, получим равенство (22.57) для любого $\boldsymbol{F}$, а значит, и равенство (22.56).

Снимем теперь ограничение о параметризуемости поверхности S. Пусть $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ — покрытие поверхности S простыми поверхностями S_k с гладкими краями. Так как поверхность S — ориентируемая, то локальные параметризации $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_k(u, v)$ поверхностей S_k можно выбрать так, чтобы они образовывали *ориентирующий атлас*. Последнее означает, что все якобианы $\dfrac{D(u,v)}{D(\xi,\eta)}$ перехода от одних локальных координат к другим положительны. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ — разложение единицы для S, подчиненное покрытию $\{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$. Используя его и доказанную часть теоремы Стокса, имеем

$$\iint\limits_S \langle \mathbf{rot}\, \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{n} \rangle \, dS = \iint\limits_S \left\langle \mathbf{rot} \left(\sum_{k=1}^N \varphi_k \boldsymbol{F} \right) \,\middle|\, \boldsymbol{n} \right\rangle dS =$$

$$= \sum_{k=1}^N \iint\limits_{S_k} \langle \mathbf{rot}\, (\varphi_k \boldsymbol{F}) \,|\, \boldsymbol{n} \rangle \, dS = \sum_{k=1}^N \oint\limits_{\partial S_k} \langle \varphi_k \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle =$$

$$= \oint\limits_{\partial S} \langle \sum_{k=1}^N \varphi_k \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle = \oint\limits_{\partial S} \langle \boldsymbol{F} \,|\, d\boldsymbol{r} \rangle \, .$$

Тем самым формула Стокса доказана для любой гладкой ориентируемой поверхности с гладким краем при дополнительном ограничении, что для параметрических представлений поверхностей S_k справедлива теорема о смешанных производных. На самом деле формула Стокса верна и без дополнительного ограничения, но этот вопрос рассматривать здесь не будем. ▶

3. Формула Гаусса — Остроградского

Здесь будет выведена формула, выражающая зависимость между тройным интегралом по трехмерной области с гладким краем и поверхностным интегралом по ориентированному краю этой области.

Определение 43. *Трехмерной областью с гладким краем будем называть компактное множество $V \subset \mathbb{R}^3$, каждая точка которого имеет окрестность, диффеоморфную либо открытому шару $\{x^2+y^2+z^2<1\}$, либо полушару $\{x^2+y^2+z^2<1\,,\ z\leqslant 0\}$. Точки первого типа называются внутренними и образуют в совокупности внутреннюю область $V^0 \subset V$. Точки второго типа называются точками края и в совокупности образуют край ∂V. Таким образом, $V = V^0 \sqcup \partial V$.*

Фиксируя в $\mathbb{R}^3$ правую систему координат, мы тем самым задаем в $\mathbb{R}^3$ (а значит, и в V^0) ориентацию. Она индуцирует ориентацию и на краю ∂V. Чтобы это показать, возьмем точку $(x_0, y_0, z_0) \in \partial V$ и отобразим ее окрестность на нижний полушар $\{x^2+y^2+z^2<1\,,\ z\leqslant 0\}$ с помощью диффеоморфизма, имеющего положительный якобиан, притом так, чтобы внешняя нормаль к ∂V в точке (x_0, y_0, z_0) перешла на положительный луч оси Oz. Все такие диффеоморфизмы образуют ориентирующий атлас края ∂V, и, таким образом, край оказывается ориентированным. Ориентацию края с помощью поля внешних нормалей условимся называть *стандартной.*

Теорема 27 (формула Гаусса — Остроградского). *Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ — область с достаточно гладким краем ∂V, ориентированным стандартно, а $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — непрерывно* *дифференцируемое отображение (векторное поле). Тогда*

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz =$$
$$= \iint\limits_{\partial V} \left(P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy\right) , \quad (22.61)$$

или, что равносильно,

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx \wedge dy \wedge dz = \iint\limits_{\partial V} \langle \boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{n} \rangle\, dS\,, \qquad (22.62)$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x, y, z)$ *— единичный вектор внешней нормали к поверхности* ∂V *.*

Доказательство проведем по той же схеме, по которой было проведено доказательство формулы Грина.

Лемма 1. *Формула Гаусса — Остроградского верна для любой выпуклой области* $V \subset \mathbb{R}^3$ *с кусочно-гладким краем* ∂V*.*

◀ Пусть $V_z \subset \mathbb{R}^3$ — наименьший замкнутый цилиндр с образующими, параллельными оси Oz, содержащий множество V. Тогда множество V можно представить в виде

$$V = \{(x, y, z) \in V_z \mid z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)\} \,,$$

где $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения частей края ∂V, ограничивающих область V^0 сверху и снизу соответственно. Используя теорему Фубини и вводя обозначение $D_z := V_z \cap \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, имеем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx \wedge dy \wedge dz = \iint\limits_{D_z} dx \wedge dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$
$$= \iint\limits_{D_z} \{R[x, y, z_2(x, y) - R[x, y, z_1(x, y)]\}\, dx \wedge dy = \iint\limits_{\partial V} R\, dx \wedge dy\,,$$

так как интеграл по боковой поверхности цилиндра равен нулю ($x = \mathrm{const}\,,\ y = \mathrm{const}$). Итак, имеем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\wedge dy\wedge dz = \iint\limits_{\partial V} R\,dx\wedge dy\,. \tag{22.63}$$

Аналогично,

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\wedge dy\wedge dz = \iint\limits_{\partial V} Q\,dz\wedge dx\,; \tag{22.64}$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial z}\,dx\wedge dy\wedge dz = \iint\limits_{\partial V} P\,dy\wedge dz\,. \tag{22.65}$$

Складывая эти три равенства, получим (22.61). ►

Лемма 2. *Пусть G и D — области с кусочно-гладкими краями, лежащие в $\mathbb{R}^3$, а*

$$\Phi\ :\ \begin{cases} x = x(u,v,w)\,,\\ y = y(u,v,w)\,,\\ z = z(u,v,w)\,,\end{cases}$$

— сохраняющий ориентацию диффеоморфизм области D на область G, для которого выполнена теорема о смешанных производных. Если формула Гаусса — Остроградского верна для области D, то она верна и для области G.

◄ Достаточно установить утверждение леммы для одной из формул (22.63) — (22.65). Установим его для формулы (22.65).

С этой целью произведем в поверхностном интеграле (22.65) замену переменных, обозначая $\widetilde{P}(u,v,w) := (P\circ\Phi)(u,v,w)$. Имеем

$$dy = y'_u du + y'_v dv + y'_w dw\,,\ dz = z'_u du + z'_v dv + z'_w dw\,. \tag{22.66}$$

Для вычисления выражения $dy\wedge dz$ воспользуемся антикоммутативностью[11] внешнего умножения дифференциальных форм (22.66). Тогда

[11]Это свойство ($dy\wedge dz = -dz\wedge dy$) наряду с другими будет установлено в следующей главе.

получим

$$dy \wedge dz = (y'_u du + y'_v dv + y'_w dw) \wedge (z'_u du + z'_v dv + z'_w dw) = \\ = \begin{vmatrix} y'_v & y'_w \\ z'_v & z'_w \end{vmatrix} dv \wedge dw + \begin{vmatrix} y'_w & y'_u \\ z'_w & z'_u \end{vmatrix} dw \wedge du + \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv\,.$$

Таким образом, поверхностный интеграл из (22.65) преобразуется к виду

$$\iint\limits_{\partial D} \widetilde{P} \cdot \left\{ \begin{vmatrix} y'_v & y'_w \\ z'_v & z'_w \end{vmatrix} dv \wedge dw + \begin{vmatrix} y'_w & y'_u \\ z'_w & z'_u \end{vmatrix} dw \wedge du + \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv \right\}.$$

Поскольку предположено,что для области D формула Гаусса — Остроградского верна, то последний интеграл преобразуется к виду

$$\iiint\limits_{D} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\widetilde{P} \begin{vmatrix} y'_v & y'_w \\ z'_v & z'_w \end{vmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\widetilde{P} \begin{vmatrix} y'_w & y'_u \\ z'_w & z'_u \end{vmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\widetilde{P} \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \right) \right\} \times \\ \times du \wedge dv \wedge dw\,. \quad (22.67)$$

В силу теоремы о смешанных производных выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\begin{vmatrix} y'_v & y'_w \\ z'_v & z'_w \end{vmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\begin{vmatrix} y'_w & y'_u \\ z'_w & z'_u \end{vmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \right) \equiv 0\,.$$

Поэтому интеграл (22.67) можно преобразовать следующим образом:

$$\iiint\limits_{D} \begin{vmatrix} \widetilde{P}'_u & \widetilde{P}'_v & \widetilde{P}'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} du \wedge dv \wedge dw = \\ = \iiint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial x}(\Phi(u,v,w)) \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} du \wedge dv \wedge dw = \iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz\,.$$

Итак, правая часть равенства (22.65) преобразована в левую. ►

Переходим к доказательству теоремы 27.

◄ Покроем множество V конечным семейством шаров

$$\{V_1\,,\ V_2\,,\ \ldots\,,\ V_N\}\,,$$

обладающих следующими свойствами. Если центр шара V_k лежит в V^0, то и $V_k \subset V^0$. Если же центр шара V_j лежит на ∂V и имеет радиус $r \in \mathbb{R}_+$, то пересечение $V_j \cap V$ диффеоморфно полушару, причем это свойство сохраняется для всех радиусов, меньших r.

Если V_k — шар, то формула Гаусса — Остроградского для него верна в силу леммы 1. Если же V_j диффеоморфна полушару, то формула Гаусса — Остроградского для нее верна в силу лемм 2 и 1. Чтобы это показать, надо предъявить достаточно гладкий диффеоморфизм множества V_j на выпуклое множество. Пусть $(x_0, y_0, z_0) \in \partial V_j$ — центр шара, где лежит V_j, а r — радиус этого шара. Так как перемещение является бесконечно гладким диффеоморфизмом, то, не ограничивая общности, будем считать, что $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$, касательная плоскость совпадает с плоскостью xOy, а внешняя нормаль направлена вдоль оси Oz вниз. Пусть $z = z(x,y)$ — уравнение края ∂V_j, причем для этой функции пусть выполняется теорема о смешанных производных[12]. При введенных обозначениях и ограничениях отображение

$$\Phi^{-1} \ : \ \begin{cases} u = x\,, \\ v = y\,, \\ w = \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} - z(x,y)} \cdot [z - z(x,y)]\,, \end{cases}$$

является диффеоморфизмом множества V_j на выпуклое множество, и для него выполняется теорема о смешанных производных.

Итак, формула Стокса установлена для всех областей из покрытия $\{V_1, V_2, \ldots, V_N\}$ множества V. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ — разложение единицы для V, подчиненное этому покрытию. Используя это разло-

[12]Это дополнительное ограничение на гладкость края, которое здесь принимается упрощения доказательства ради.

жение единицы, имеем

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx\wedge dy\wedge dz = \iiint\limits_V \operatorname{div}\left(\sum_{\nu=1}^N \varphi_\nu \boldsymbol{F}\right)\, dx\wedge dy\wedge dz =$$

$$= \sum_{\nu=1}^N \iiint\limits_{V_\nu} \operatorname{div}\left(\varphi_\nu \boldsymbol{F}\right)\, dx\wedge dy\wedge dz = \sum_{\nu=1}^N \iint\limits_{\partial V_\nu} \langle \varphi_\nu \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{n}\rangle\, dS =$$

$$= \sum_{\nu=1}^N \iint\limits_{\partial V} \langle \varphi_\nu \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{n}\rangle\, dS = \iint\limits_{\partial V} \langle \sum_{\nu=1}^N \varphi_\nu \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{n}\rangle\, dS = \iint\limits_{\partial V} \langle \boldsymbol{F} \,|\, \boldsymbol{n}\rangle\, dS\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Укажем здесь на физический смысл формул Стокса и Гаусса — Остроградского. Пусть $\boldsymbol{F}$ — поле скоростей течения несжимаемой жидкости, причем в области течения могут быть источники, стоки и вихри. Тогда левая часть формулы Стокса — поток вихря течения через поверхность S, а правая ее часть — циркуляция вектора $\boldsymbol{F}$ вдоль края ∂S. Левая часть формулы Гаусса — Остроградского (тройной интеграл) — это количество жидкости, которое появилось в области V за счет обильности источников. Правая часть — это поток вектора скорости через край ∂V. Иначе говоря, сколько жидкости появилось в области V за счет обильности источников, столько же ее просочилось через край ∂V.

Глава 23
ИСЧИСЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ИНТЕГРАЛЫ ПО МНОГООБРАЗИЯМ И ОБЩАЯ ТЕОРЕМА СТОКСА

В этой главе изучаются интегралы по многообразиям различных размерностей, вложенным в $\mathbb{R}^n$. Эти интегралы являются обобщениями криволинейных и поверхностных интегралов 2-го рода.

§ 1. Предварительные сведения из алгебры

1. Тензорное произведение полилинейных форм и его свойства

Пусть V — линейное (векторное) пространство размерности n над полем $\mathbb{R}$. Обозначим

$$V^k := \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \text{ сомножителей}}.$$

Функция $T : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *полилинейной* (k-линейной), если $\forall\ i = 1, \ldots, k$ и $\forall\ a \in \mathbb{R}$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k) =& T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k) + \\ &+ T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k); \\ T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, a \cdot \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k) =& a \cdot T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k). \end{aligned}$$

Полилинейная форма $T : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ называется *k-тензором* на V, а множество всех k-тензоров, обозначаемое через $\mathcal{T}^k(V)$, становится линейным (векторным) пространством над $\mathbb{R}$, если $\forall\ S, T \in \mathcal{T}^k(V)$ и $\forall\ a \in \mathbb{R}$ положить

$$\begin{aligned} (S + T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) &:= S(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) + T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k), \\ (a \cdot S)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) &:= a \cdot S(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k). \end{aligned}$$

Существует также операция, связывающая различные пространства $\mathcal{T}^k(V)$. А именно, пусть $S \in \mathcal{T}^k(V)$, $T \in \mathcal{T}^l(V)$; их *тензорное произведение* $S \otimes T \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ определяется следующим равенством:

$$(S\otimes T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l}) := S(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)\cdot T(\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l})\,.$$

Заметим, что порядок сомножителей здесь существен, поскольку $S\otimes T$ и $T \otimes S$ отнюдь не равны. Читателю предлагается в качестве несложных упражнений доказать следующие свойства операции тензорного умножения:

$$\begin{aligned}(S_1 + S_2) \otimes T =& S_1 \otimes T + S_2 \otimes T\,;\\ S \otimes (T_1 + T_2) =& S \otimes T_1 + S \otimes T_2\,;\\ (aS) \otimes T =& S \otimes (aT) = a \cdot (S \otimes T)\,;\\ (S \otimes T) \otimes U =& S \otimes (T \otimes U)\,.\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что имеет смысл выражение $S \otimes T \otimes U$; аналогично можно определить тензорное произведение любого конечного числа сомножителей, причем имеет смысл выражение $T_1 \otimes \ldots \otimes T_k$.

Очевидно, что $\mathcal{T}^1(V) = V^*$ (пространству, сопряженному к V). Операция $\otimes$ позволяет представить все остальные линейные пространства $\mathcal{T}^k(V)$ через $\mathcal{T}^1(V)$.

Теорема 28. *Пусть* $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ *— базис пространства* V*, а* $(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ *— биортогональный к нему базис сопряженного пространства* V^**, т. е.* $\boldsymbol{\varphi}_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$*. Тогда множество всех тензорных произведений, состоящих из* k *сомножителей*

$$\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k}\,, \quad (i_1, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

является базисом пространства $\mathcal{T}^k(V)$*, которое в силу этого имеет размерность* n^k*.*

◀ Очевидно следующее равенство

$$(\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k})(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k}) =$$
$$= \delta_{(i_1,\ldots,i_k),(j_1,\ldots,j_k)} = \begin{cases} 1 \text{ при } (i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k)\,, \\ 0 \text{ при } (i_1, \ldots, i_k) \neq (j_1, \ldots, j_k)\,. \end{cases}$$

Если даны k векторов $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$, где $\boldsymbol{w}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_j$, то для любого $T \in \mathcal{T}^k(V)$ имеем

$$T(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{kj_k} \cdot T(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k}) = \\ = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} T(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{j_k})(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k)\,.$$

Следовательно,

$$T = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} T(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k}) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{j_k})\,,$$

и потому тензоры $\boldsymbol{\varphi}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{j_k}$ порождают пространство $\mathcal{T}^k(V)$.

Предположим теперь, что $a_{i_1,\ldots,i_k}$ — числа, для которых

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_k} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k}) = 0\,.$$

Применяя обе части этого равенства к кортежу $(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k})$, получим $a_{j_1,\ldots,j_k} = 0$. Таким образом, тензорные произведения $\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k}$ линейно независимы. ▶

На тензоры можно распространить также важную конструкцию, хорошо известную в случае сопряженных пространств. Именно, всяким линейным отображением $f : V \longrightarrow W$ определяется линейное отображение $f^* : \mathcal{T}^k(W) \longrightarrow \mathcal{T}^k(V)$, действующее по формуле:

$$(f^*T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) := T(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)) \tag{23.1}$$

для любых $T \in \mathcal{T}^k(W)$ и $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$.

Лемма 1. *Справедливо равенство* $f^*(S \otimes T) = f^*(S) \otimes F^*(T)\,.$

◄ Пусть $S \in \mathcal{T}^k(V)$, $T \in \mathcal{T}^l(V)$. Имеем

$$\begin{aligned}
f^*(S \otimes T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots \boldsymbol{v}_{k+l}) = \\
&= (S \otimes T)(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k), f(\boldsymbol{v}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{k+l})) = \\
&= S(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_k)) \cdot T(f(\boldsymbol{v}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{k+l})) = \\
&= (f^*S)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) \cdot (f^*T)(\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l}) = \\
&= (f^*S) \otimes (f^*T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots \boldsymbol{v}_{k+l})\,.
\end{aligned}$$ ►

2. Антисимметрические тензоры, альтернирование, внешнее произведение и его свойства

Важным примером полилинейной (билинейной) формы является скалярное произведение векторов. Другим, для нас еще более важным примером, является форма «определитель», т. е. тензор $\det \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$, рассматриваемый как n-линейная форма от его строк. Имея в виду обобщение этой функции, вспомним, что при перестановке двух строк определитель меняет знак. Этим подсказывается следующее определение.

Определение 44. *Тензор $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$ называется антисимметрическим*[1]*, если $\forall\ i, j = 1, \ldots, k$ выполняется равенство*

$$\omega(\ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots) = -\omega(\ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots)\,,$$

где многоточиями обозначены те из векторов $\boldsymbol{v}$, которые остаются на своих местах (не переставляются).

Множество $\Lambda^k(V)$ всех антисимметрических k-тензоров является, очевидно, подпространством пространства $\mathcal{T}^k(V)$. Поскольку раскрытие определителя требует значительной работы, то естественно, что антисимметрические тензоры трудно выписывать. Существует, однако, единообразный способ записи каждого из таких тензоров, и мы переходим к его изложению.

Определение 45. *Подстановкой длины k называется биективное отображение $\sigma\ :\ \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$. Множество всех*

[1]Применяются также термины *кососимметрический* или *альтернированный*.

$k!$ подстановок длины k вместе с операцией композиции $\circ$ является группой. Она называется симметрической группой и обозначается символом S_k.

Замечание. Подстановки часто записывают в виде таблиц, например,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим их произведение

$$\sigma \cdot \tau = \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 46. *Подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(k) \end{pmatrix}$ называется четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности числа инверсий в перестановке $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k))$. Сигнатурой подстановки σ называется число*

$$\operatorname{sgn} \sigma := \begin{cases} +1, & \text{если подстановка } \sigma \text{ — четная}, \\ -1, & \text{если подстановка } \sigma \text{ — нечетная}. \end{cases}$$

Определение 47. *Операция альтернирования $\mathrm{Alt} : T \longmapsto \mathrm{Alt}\, T$ тензора $T \in \mathcal{T}^k(V)$ определяется равенством*

$$\mathrm{Alt}\, T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{v}_{\sigma(1)}).$$

Теорема 29. *Для любых $T \in \mathcal{T}^k(V)$ и $\omega \in \Lambda^k(V)$ имеем*

(a) $\mathrm{Alt}\,(T) \in \Lambda^k(V)$;

(b) $\mathrm{Alt}\,(\omega) = \omega$;

(c) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T)) = \mathrm{Alt}(T)$.

◄ (a) Пусть (i, j) — транспозиция[2], а $\sigma \in S_k$. Полагая $\sigma' := \sigma \cdot (i, j)$, $(i < j)$, учитывая групповые свойства множества S_k и нечетность

[2] *Транспозицией* называется подстановка (i, j), меняющая местами числа i и j, а все остальные числа оставляющая на своих местах.

транспозиции, имеем

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{Alt} T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \\
&\quad = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(j)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(i)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) = \\
&\quad = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma'(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma'(i)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma'(j)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma'(k)}) = \\
&\quad = -\frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma'(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma'(k)}) = -(\operatorname{Alt} T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)\,.
\end{aligned}
$$

(b) Если $\omega \in \Lambda^k(V)$, а $\sigma = (i, j)$ — транспозиция, то равенство

$$\omega(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$$

очевидным образом выполняется. Так как всякую подстановку можно представить в виде произведения транспозиций, то это равенство выполняется для всех σ. Поэтому имеем

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{Alt} \omega)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) = \\
&\quad = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k) = \frac{\omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} 1 = \\
&\quad = \omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)\,.
\end{aligned}
$$

(c) Это утверждение является очевидным следствием утверждений (a) и (b). ▶

Замечание. Для нахождения размерности и базиса пространства $\Lambda^k(V)$ было бы желательно иметь теорему, аналогичную теореме 28. Однако, если $\omega \in \Lambda^k(V)$ и $\eta \in \Lambda^l(V)$, то их тензорное произведение $\omega \otimes \eta$, вообще говоря, не принадлежит пространству $\Lambda^{k+l}(V)$. В связи с этим вводится новая операция (внешнее умножение), свободная от этого недостатка.

Определение 48. *Внешнее произведение формы $\omega \in \Lambda^k(V)$ на форму $\eta \in \Lambda^l(V)$ определяется равенством*

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \cdot \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta)\,. \tag{23.2}$$

Теорема 30. *Для любых* $\omega,\ \omega_1,\ \omega_2 \in \Lambda^k(V)$, $\eta,\ \eta_1,\ \eta_2 \in \Lambda^l(V)$, $a \in \mathbb{R}$, $f : V \longrightarrow W$ *справедливы следующие равенства:*

(a) $(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta = \omega_1\wedge\eta + \omega_2\wedge\eta$;

(b) $\omega\wedge(\eta_1+\eta_2) = \omega\wedge\eta_1 + \omega\wedge\eta_2$;

(c) $(a\omega)\wedge\eta = \omega\wedge(a\eta) = a\cdot(\omega\wedge\eta)$;

(d) $\omega\wedge\eta = (-1)^{kl}\eta\wedge\omega$;

(e) $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta)$.

◀ (a) Имеем

$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta = \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}((\omega_1+\omega_2)\otimes\eta) =$$
$$= \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega_1\otimes\eta) + \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega_2\otimes\eta) = \omega_1\wedge\eta + \omega_1\wedge\eta\,.$$

(b) Имеем

$$\omega\wedge(\eta_1+\eta_2) = \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega\otimes(\eta_1+\eta_2)) =$$
$$= \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta_1) + \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta_2) = \omega\wedge\eta_1 + \omega\wedge\eta_2\,.$$

(c) Имеем

$$(a\omega)\wedge\eta = \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}((a\omega)\otimes\eta) = \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega\otimes(a\eta)) =$$
$$= a\cdot\frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot \mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta) = \omega\wedge(a\eta) = a\cdot(\omega\wedge\eta)\,.$$

(d) Чтобы сравнить произведения $\omega\wedge\eta$ и $\eta\wedge\omega$, выпишем их значения на векторах

$$(\omega\wedge\eta)(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+l}) =$$
$$= \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot\sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega\big(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\sigma(k)}\big)\cdot\eta\big(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)}\big)\,,$$

$$(\eta\wedge\omega)(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{k+l}) =$$
$$= \frac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot\sum_{\sigma\in S_{k+l}} \operatorname{sgn}\tau\cdot\eta\big(\boldsymbol{v}_{\tau(1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\tau(l)}\big)\cdot\omega\big(\boldsymbol{v}_{\tau(l+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\tau(k+l)}\big)\,.$$

Число слагаемых в обеих суммах одинаковое. Установим между слагаемыми такое соответствие:

$$\omega(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) \cdot \eta(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)}) \equiv \\ \equiv \eta(\boldsymbol{v}_{\tau(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\tau(l)}) \cdot \omega(\boldsymbol{v}_{\tau(l+1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\tau(k+l)})\,.$$

Отсюда легко усмотреть зависимость между подстановками

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k+l \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(k+l) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k+l \\ \sigma(k+1) & \ldots & \sigma(k) \end{pmatrix}.$$

Именно, чтобы получить одну из этих подстановок из другой, надо совершить $k \cdot l$ транспозиций, после каждой из которых происходит перемена знака сигнатуры.

(e) Записывая значение тензора $f^*(\omega \wedge \eta)$ на векторах, получим

$$f^*(\omega \wedge \eta)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l}) = (\omega \wedge \eta)(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{k+l})) = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \times \\ \times \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(f(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{\sigma(k)})) \cdot \eta(f(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)})) = \\ = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \cdot \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (f^*(\omega) \otimes f^*(\eta))(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)}) = \\ = (f^*(\omega) \wedge f^*(\eta))(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l})\,. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 31. *Для любых*

$$S \in \mathcal{T}^k(V)\,,\ T \in \mathcal{T}^l(V)\,,\ \omega \in \Lambda^k(V)\,,\ \eta \in \Lambda^l(V)\,,\ \theta \in \Lambda^m(V)$$

справедливы следующие утверждения:

(a) *если* $\operatorname{Alt}(S) = 0$, *то* $\operatorname{Alt}(S \otimes T) = \operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$;

(b) $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \operatorname{Alt}(\omega \otimes \operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta))$;

(c) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \dfrac{(k+l+m)!}{k! \cdot l! \cdot m!} \cdot \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)$.

◀ (a) Для доказательства равенства $\operatorname{Alt}(S \otimes T) = 0$ запишем значение этого тензора на векторах:

$$\operatorname{Alt}(S \otimes T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \sigma \cdot S(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)})\,.$$

Пусть $G \subset S_{k+l}$ — подгруппа, состоящая из всех подстановок σ, оставляющих на месте числа $k+1, \ldots, k+l$. Так как подгруппа G изоморфна группе S_k, то имеем

$$\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn}\sigma \cdot S(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= \left[\sum_{\sigma' \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot S(\boldsymbol{v}_{\sigma'(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma'(k)})\right] \cdot T(\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l}) = 0\,,$$

так как выражение в квадратных скобках пропорционально числу $\operatorname{Alt}(S) = 0$.

Пусть теперь $\sigma_0 \notin G$. Образуем правый класс смежности, полагая $G\sigma_0 := \{\sigma\sigma_0 \mid \sigma \in G\}$, и введем обозначение $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}) := (\boldsymbol{v}_{\sigma_0(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma_0(k+l)})$. Тогда получим

$$\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \operatorname{sgn}\sigma \cdot S(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k)}) \cdot T(\boldsymbol{v}_{\sigma(k+1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= \left[\operatorname{sgn}\sigma_0 \cdot \sum_{\sigma' \in G} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot S(\boldsymbol{w}_{\sigma'(1)}, \ldots, \boldsymbol{w}_{\sigma'(k)})\right] \cdot T(\boldsymbol{w}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{k+l}) = 0$$

по той же причине, что и выше. Заметим теперь, что $G \cap G\sigma_0 = \varnothing$. В самом деле, если $\sigma \in G\sigma_0$, то $\sigma = \sigma' \cdot \sigma_0$ для некоторого $\sigma' \in G$, и потому $\sigma_0 = (\sigma')^{-1}\sigma \in G$ вопреки предположению. Продолжая этот процесс, можно представить группу S_{k+l} в виде дизъюнктного объединения правых классов смежности, сумма по каждому их которых равна нулю. Поэтому и сумма по всей группе S_{k+l} равна нулю.

Доказательство равенства $\operatorname{Alt}(T \otimes S) = 0$ можно провести аналогично, представляя группу S_{k+l} в виде дизъюнктного объединения левых классов смежности, сумма по каждому их которых равна нулю.

(b) Имеем

$$\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta) = \operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta) - \operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta) = 0\,.$$

Следовательно, в силу (a) получаем

$$0 = \operatorname{Alt}(\omega \otimes [\operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta) - \eta \otimes \theta]) =$$
$$= \operatorname{Alt}(\omega \otimes \operatorname{Alt}(\eta \otimes \theta)) - \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)\,,$$

Второе из равенств (b) можно доказать аналогично.

(c) Имеем

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)! \cdot m!} \cdot \mathrm{Alt}((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) = \\ = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)! \cdot m!} \cdot \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!} \cdot \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta)\,.$$

Второе из равенств (c) можно доказать аналогично. ►

Замечание. Естественно обозначить оба произведения $\omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ и $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta$ символом $\omega \wedge \eta \wedge \theta$ (без скобок) и аналогично определить внешнее произведение $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ любого конечного числа сомножителей. Взяв теперь какой-нибудь базис $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ пространства V и биортогональный к нему базис $(\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n)$ пространства $\mathcal{T}^1(V)$, можно легко построить базис пространства $\Lambda^k(V)$ для любого $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 32. *Множество всех внешних произведений вида*

$$\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i_k}\,, \quad \text{где} \;\; 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\,, \tag{23.3}$$

является базисом пространства $\Lambda^k(V)$, *которое в силу этого имеет размерность*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}\,. \tag{23.4}$$

При $k > n$ *имеем* $\Lambda^k(V) = \{0\}$.

◄ Пусть $\omega \in \Lambda^k(V) \subset \mathcal{T}^k(V)$. На основании теоремы 28 имеем

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} a_{i_1, \ldots, i_k} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k}\,.$$

Действуя на это равенство оператором альтернирования, получим

$$\omega = \mathrm{Alt}(\omega) = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} a_{i_1, \ldots, i_k} \cdot \mathrm{Alt}(\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k})\,. \tag{23.5}$$

Так как каждое $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k})$ отличается от соответствующего внешнего произведения $\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i_k}$ лишь постоянным множителем, то эти внешние произведения порождают пространство $\Lambda^k(V)$.

Если $k > n$, то среди индексов $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ есть равные, и потому все внешние произведения $\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i_k}$ равны нулю. Таким образом, $\Lambda^k(V) = 0$ при $k > n$.

Если $1 \leqslant k \leqslant n$, то, выбрасывая из суммы (23.5) все нулевые слагаемые (т. е. те, в которых среди индексов i_ν имеются равные), приведем ее к виду

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} b_{i_1,\ldots,i_k} \cdot \mathrm{Alt}(\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k}) ,$$

и, таким образом, любая форма $\omega \in \Lambda^k(V)$ представима в виде линейной комбинации форм (23.3). Осталось только показать, что эти формы линейно независимы. Пусть

$$0 = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} c_{i_1,\ldots,i_k} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i_k}) .$$

Действуя этим тензором на векторы $(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k})$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} c_{i_1,\ldots,i_k} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{\varphi}_{i_k})(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k}) = \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} c_{i_1,\ldots,i_k} \cdot \frac{(i_1 + \ldots + i_k)!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{\varphi}_{i_k})(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_k}) = \\ &= c_{j_1,\ldots,j_k} \cdot \frac{(j_1 + \ldots + j_k)!}{j_1! \cdot \ldots \cdot j_k!} , \end{aligned}$$

и, значит, все $c_{j_1,\ldots,j_k} = 0$.

Простой комбинаторный подсчет показывает, что количество различных векторов (23.3) равно числу (23.4). ►

Замечание. Из этой теоремы следует, что если пространство V имеет размерность n, то $\Lambda^n(V)$ имеет размерность 1. Таким образом, все антисимметрические n-тензоры на V отличаются лишь числовым множителем от любого ненулевого из них. Поскольку примером такого тензора является определитель n-го порядка, то не удивительно появление его в следующей теореме.

Теорема 33. *Пусть* $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ — *базис пространства* V, *а* $\omega \in \Lambda^n(V)$. *Для любых* n *векторов* $\boldsymbol{w}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}_j$ *из* V *имеем*

$$\omega(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) .$$

◀ Имеем

$$\omega(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) = \omega\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}\boldsymbol{v}_{j_n}\right) =$$
$$= \sum_{1\leqslant j_1,\ldots,j_n\leqslant n} a_{1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n}\cdot\omega(\boldsymbol{v}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{j_n}) =$$
$$= \omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\cdot\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{nj_n} =$$
$$= \omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\cdot\det(a_{ij}) ,$$

где обозначено $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$. ▶

Замечание. Теорема 33 показывает, что ненулевой тензор $\omega \in \Lambda^n(V)$ разбивает базисы пространства V на два класса: тех базисов $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$, для которых $\omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) > 0$, и тех, для которых $\omega(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) < 0$. Если $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ и $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ — два базиса, и $A = (a_{ij})$ — матрица перехода $\boldsymbol{w}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_j$, то базисы $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ и $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда $\det A > 0$. Каждый из этих классов называется *ориентацией* пространства V.

§ 2. Исчисление внешних дифференциальных форм

Определение 49. *Пространством, касательным к векторному пространству* $\mathbb{R}^n$ *в точке* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, *условимся называть пространство* $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}} := \left\{ d\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Пространство $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ можно геометрически представлять себе в виде экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$, который параллельно перенесен на вектор $\boldsymbol{x}$. Пусть $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — стандартный базис касательного пространства $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$, а $(\pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^n) = (dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$ — биортогональный к нему базис пространства $\mathcal{T}^1(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}})$, т. е. $\pi^i(\boldsymbol{e}_j) = dx^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$. Представляя вектор $d\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ через координаты, имеем

$$d\boldsymbol{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \boldsymbol{e}_1\cdot dx_1 + \boldsymbol{e}_2\cdot x_2 + \ldots + \boldsymbol{e}_n\cdot dx_n\,.$$

Действуя на это равенство тензором π^i, находим

$$\pi^i(d\boldsymbol{x}) = dx^i(d\boldsymbol{x}) = dx_i\,.$$

Определение 50. *Внешней дифференциальной формой степени k (или k-формой), определенной в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется отображение $D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \omega(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{T}^k(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}})$. Значение этого отображения в точке $\boldsymbol{x}$ можно представить в виде*

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \omega_{i_1\ldots i_k}(\boldsymbol{x})\cdot \pi^{i_1}\wedge\ldots\wedge\pi^{i_k} =$$
$$= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \omega_{i_1\ldots i_k}(\boldsymbol{x})\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\,, \quad (23.6)$$

где $\omega_{i_1\ldots i_k}(\boldsymbol{x})$ — некоторые функции, называемые коэффициентами дифференциальной формы.

Дифференциальная форма (23.6) называется непрерывной, дифференцируемой и т. п., если таковыми являются все функции $\omega_{i_1\ldots i_k}$. Всюду в этой главе будем, не оговаривая этого каждый раз, предполагать все встречающиеся ниже формы дифференцируемыми и, более того, принадлежащими классу C^∞ в своих областях определения. Это упрощающее предположение избавит нас от необходимости подсчитывать, сколько раз в процессе доказательства продифференцирована та или иная функция.

Операции суммы форм одинаковых степеней, внешнего произведения и произведения формы на функцию f определяются естественным образом, поточечно:

$$(\omega+\eta)(\boldsymbol{x}) := \omega(\boldsymbol{x}) + \eta(\boldsymbol{x})\,;$$
$$(\omega\wedge\eta)(\boldsymbol{x}) := \omega(\boldsymbol{x}) \wedge \eta(\boldsymbol{x})\,;$$
$$(f\cdot\omega)(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x})\omega(\boldsymbol{x})\,.$$

При этом вместо $f\cdot\omega$ часто пишут $f\wedge\omega$. Особый интерес представляет выражение для дифференциала функции.

Теорема 34. *Если функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, то ее дифференциалом является дифференциальная 1-форма*

$$df(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\cdot dx^1 + \ldots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\cdot dx^n\,.$$

◀ Дифференцируя функцию f, имеем

$$\begin{aligned} df(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \cdot dx_n = \\ &= \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot dx^1(d\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \cdot dx^n(d\boldsymbol{x}) = \\ &= \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot dx^1 + \ldots + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \cdot dx^n \right)(d\boldsymbol{x})\,. \end{aligned}$$ ▶

Пусть теперь задано дифференцируемое отображение $f \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Для каждого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ оно порождает линейное отображение $Df(\boldsymbol{x}) \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Несколько модифицируя его, получаем линейное отображение касательных пространств $f_* \;:\; \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}} \longrightarrow \mathbb{R}^m_{f(\boldsymbol{x})}$, определяемое равенством

$$f_*(d\boldsymbol{x}) = (Df(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x}))_{f(\boldsymbol{x})}\,.$$

Это линейное отображение индуцирует линейное отображение

$$f^* \;:\; \Lambda^k(\mathbb{R}^m_{f(\boldsymbol{x})}) \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}})\,.$$

которое сопоставляет каждой k-форме ω на $\mathbb{R}^m_{f(\boldsymbol{x})}$ k-форму $f^*(\omega)$ на $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ согласно равенству $(f^*(\omega))(\boldsymbol{x}) := f^*(\omega(\boldsymbol{x}))$, т. е.

$$(f^*(\omega))(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x}_1, \ldots, d\boldsymbol{x}_k)) := \omega(f(\boldsymbol{x}))(f_*(d\boldsymbol{x}_1), \ldots, f_*(d\boldsymbol{x}_k))$$

для любого набора векторов $d\boldsymbol{x}_1, \ldots, d\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$.

Теорема 35. *Если отображение* $f = (f^1, \ldots, f^m) \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *дифференцируемо, то*

(a) $f^*(dx^i) = \dfrac{\partial f^i}{\partial x_1} \cdot dx^1 + \ldots + \dfrac{\partial f^i}{\partial x_n} \cdot dx^n\,;$

(b) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + F^*(\omega_2)\,;$

(c) $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega)\,;$

(d) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)\,.$

◀ (a) Имеем

$$f^*(dx^i)(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x}) = dx^i(f(\boldsymbol{x}))(f_*(d\boldsymbol{x})) = dx^i(f(\boldsymbol{x}))\,(Df(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x}))_{f(\boldsymbol{x})} =$$
$$= dx^i(f(\boldsymbol{x}))\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}dx^j + \ldots + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^m(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}dx^j\right)_{f(\boldsymbol{x})} =$$
$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}dx_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}dx^j(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x})\,.$$

(b) Имеем

$$f^*(\omega_1+\omega_2)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k) = (\omega_1+\omega_2)(f(\boldsymbol{x}))(f_*(\boldsymbol{x}_1),\ldots,f_*(\boldsymbol{x}_k)) =$$
$$= \omega_1(f(\boldsymbol{x}))(f_*(\boldsymbol{x}_1),\ldots,f_*(\boldsymbol{x}_k)) + \omega_2(f(\boldsymbol{x}))(f_*(\boldsymbol{x}_1),\ldots,f_*(\boldsymbol{x}_k)) =$$
$$= f^*(\omega_1)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k) + f^*(\omega_2)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)\,.$$

(c) Для любой функции $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ имеем

$$f^*(g\cdot\omega)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k) = (g\circ f)(\boldsymbol{x})\cdot\omega(f(\boldsymbol{x}))\cdot(f_*(\boldsymbol{x}_1),\ldots,f_*(\boldsymbol{x}_k)) =$$
$$= (g\circ f)(\boldsymbol{x})\cdot(f^*(\omega))(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k)\,.$$

(d) При $\omega\in\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $\eta\in\Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$f^*(\omega\wedge\eta)(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots\boldsymbol{x}_{k+l}) = f^*(\omega(\boldsymbol{x})\wedge\eta(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x}_1,\ldots\boldsymbol{x}_{k+l}) =$$
$$= f^*(\omega(\boldsymbol{x}))\wedge f^*(\eta(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x}_1,\ldots\boldsymbol{x}_{k+l}) = (f^*(\omega)\wedge f^*(\eta))(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}_1,\ldots\boldsymbol{x}_{k+l})\,.$$ ▶

Пример. Пусть $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{t}) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — дифференцируемое отображение. Вычислим $f^*(\omega)$, где

$$\omega = P(x_1,x_2,x_3)dx^2\wedge dx^3 + Q(x_1,x_2,x_3)dx^3\wedge dx^1 + R(x_1,x_2,x_3)dx^1\wedge dx^2\,.$$

◀ Применяя теорему 35, имеем

$$f^*(\omega) = (P\circ f)(\boldsymbol{t})\wedge f^*(dx^2\wedge dx^3) + (Q\circ f)(\boldsymbol{t})\wedge f^*(dx^3\wedge dx^1) + (R\circ f)(\boldsymbol{t})\wedge f^*(dx^1\wedge dx^2) =$$
$$= (P\circ f)(\boldsymbol{t})\wedge f^*(dx^2)\wedge f^*(dx^3) + (Q\circ f)(\boldsymbol{t})\wedge f^*(dx^3)\wedge f^*(dx^1) +$$
$$+ (R\circ f)(\boldsymbol{t})\wedge f^*(dx^1)\wedge f^*(dx^2) =$$
$$= (P\circ f)(\boldsymbol{t})\cdot\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt^1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt^2 + \frac{\partial x_2}{\partial t_3}dt^3\right)\wedge\left(\frac{\partial x_3}{\partial t_1}dt^1 + \frac{\partial x_3}{\partial t_2}dt^2 + \frac{\partial x_3}{\partial t_3}dt^3\right) +$$
$$+ (Q\circ f)(\boldsymbol{t})\cdot\left(\frac{\partial x_3}{\partial t_1}dt^1 + \frac{\partial x_3}{\partial t_2}dt^2 + \frac{\partial x_3}{\partial t_3}dt^3\right)\wedge\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt^1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt^2 + \frac{\partial x_1}{\partial t_3}dt^3\right) +$$
$$+ (R\circ f)(\boldsymbol{t})\cdot\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt^1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt^2 + \frac{\partial x_1}{\partial t_3}dt^3\right)\wedge\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt^1 + \frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt^2 + \frac{\partial x_2}{\partial t_3}dt^3\right) =$$

$$= (P\circ f)(\boldsymbol{t})\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3}\\ \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3}\end{vmatrix} dt^2\wedge dt^3 + \begin{vmatrix}\frac{\partial x_2}{\partial t_3} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\\ \frac{\partial x_3}{\partial t_3} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1}\end{vmatrix} dt^3\wedge dt^1 + \begin{vmatrix}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2}\\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2}\end{vmatrix} dt^1\wedge dt^2\right) +$$

$$+ (Q\circ f)(\boldsymbol{t})\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3}\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3}\end{vmatrix} dt^2\wedge dt^3 + \begin{vmatrix}\frac{\partial x_3}{\partial t_3} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_3} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\end{vmatrix} dt^3\wedge dt^1 + \begin{vmatrix}\frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2}\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2}\end{vmatrix} dt^1\wedge dt^2\right) +$$

$$+(R\circ f)(\boldsymbol{t})\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3}\\ \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3}\end{vmatrix} dt^2\wedge dt^3 + \begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_3} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\\ \frac{\partial x_2}{\partial t_3} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\end{vmatrix} dt^3\wedge dt^1 + \begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2}\end{vmatrix} dt^1\wedge dt^2\right). \blacktriangleright$$

Полученное выражение можно еще преобразовать, собрав коэффициенты при одинаковых базисных формах $dt^2\wedge dt^3$, $dt^3\wedge dt^1$, $dt^1\wedge dt^2$, но от этого оно не станет менее громоздким. В следующей теореме рассматривается важный частный случай, когда подобное вычисление выглядит особенно эффектно.

Теорема 36. *Если* $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{t}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *— дифференцируемое отображение, то*

$$f^*(h\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n) = (h\circ f)\cdot\det[f']\cdot dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\,. \tag{23.7}$$

◀ Так как

$$f^*(h\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n) = (h\circ f)\cdot f^*(dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n)\,,$$

то достаточно показать, что

$$f^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n) = \det[f']\cdot dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\,.$$

Обозначая $f = (f^1,\ldots,f^n)$, используя теорему 35(d) и правила внешнего умножения, имеем

$$f^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)(\boldsymbol{t}) = f^*(dx^1)(\boldsymbol{t})\wedge\ldots\wedge f^*(dx^n)(\boldsymbol{t}) =$$

$$= \left(\frac{\partial f^1(\boldsymbol{t})}{\partial t_1}dt^1+\ldots+\frac{\partial f^1(\boldsymbol{t})}{\partial t_n}dt^n\right)\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial f^n(\boldsymbol{t})}{\partial t_1}dt^1+\ldots+\frac{\partial f^n(\boldsymbol{t})}{\partial t_n}dt^n\right) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_n\leqslant n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\frac{\partial f^1(\boldsymbol{t})}{\partial t_{i_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial f^n(\boldsymbol{t})}{\partial t_{i_n}}\cdot dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n =$$

$$= \det[f'(\boldsymbol{t})]\cdot dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\,,$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_m \end{pmatrix}$. ►

Замечание. Важной конструкцией, связанной с дифференциальными формами, является *оператор внешнего дифференцирования*, который является обобщением оператора d, отображающего 0-формы (функции) в 1-формы. Определим его и изучим некоторые его свойства.

Определение 51. *Пусть*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant 1} a_{i_1 \ldots i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

— дифференцируемая дифференциальная k-форма от переменного $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Ее внешним дифференциалом называется дифференциальная $(k+1)$-форма $d\omega$, определяемая следующим равенством:

$$d\omega := \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} da_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \\ = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_j} \cdot dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} . \quad (23.8)$$

Теорема 37. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) *оператор d — линейный;*

(b) *если ω — k-форма, то $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \cdot \omega \wedge d\eta$;*

(c) *$d(d\omega) = 0$, или короче, $d^2 = 0$;*

(d) *если ω — k-форма на $\mathbb{R}^m$, а отображение $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое, то $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.*

◄ (a) На 0-формах (т. е. на функциях) оператор внешнего дифференцирования совпадает с оператором обычного дифференцирования, линейность которого известна. Линейность оператора d на k-формах следует из определения (23.8) и линейности его на 0-формах.

(b) Для форм ω и η, имеющих вид

$$\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \quad \text{и} \quad \eta = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} ,$$

доказываемое равенство очевидно, так как в этом случае

$$d\omega = d\eta = d(\omega \wedge \eta) = 0 .$$

Если $\omega = a$ — нуль-форма (функция), а

$$\eta = \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_l\leqslant 1} b_{j_1\ldots j_l}\cdot dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}\,,$$

то имеем

$$d(\omega\wedge\eta) = \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_l\leqslant 1} d(a\cdot b_{j_1\ldots j_l})\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} =$$
$$= \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_l\leqslant 1} (da\wedge b_{j_1\ldots j_l} + a\wedge db_{j_1\ldots j_l})\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} =$$
$$= d\omega\wedge\eta + \omega\wedge d\eta\,.$$

В общем случае имеем

$$d(\omega\wedge\eta) = d\Bigg(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1\ldots i_k}\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge$$
$$\wedge \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_l\leqslant n} b_{j_1\ldots j_l}\cdot dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}\Bigg) =$$
$$= \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_l\leqslant n}} (da_{i_1\ldots i_k}\cdot b_{j_1\ldots j_l} + a_{i_1\ldots i_k}\cdot db_{j_1\ldots j_l})\wedge$$
$$\wedge\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} = d\omega\wedge\eta +$$
$$+ (-1)^k \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n\\ 1\leqslant j_1<\ldots<j_l\leqslant n}} a_{i_1\ldots i_k}\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge db_{j_1\ldots j_l}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l} =$$
$$= d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta\,.$$

(c) Так как

$$d\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_k}\cdot dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\,,$$

то

$$d^2\omega = d(d\omega) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_k\partial x_j}\cdot dx^j\wedge dx^k\wedge$$
$$\wedge\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\,.$$

В этой сумме все слагаемые взаимно уничтожаются в силу свойства антикоммутативности внешнего произведения и теоремы о смешанных производных, т. е. $dx^k \wedge dx^k = 0$, а при $k \neq j$ имеем

$$\frac{\partial^2 a_{i_1\dots i_k}}{\partial x_k \partial x_j} \cdot dx^j \wedge dx^k + \frac{\partial^2 a_{i_1\dots i_k}}{\partial x_j \partial x_k} \cdot dx^k \wedge dx^j = 0\,.$$

(d) Доказательство проведем методом индукции по числу k — степени формы ω. Предположим сначала, что ω — нуль-форма. Тогда, учитывая, что для функций внешний дифференциал совпадает с обычным дифференциалом, получим

$$d(f^*\omega)(\boldsymbol{x}) = d(\omega\circ f)(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial\omega(f(\boldsymbol{x}))}{\partial x_1}\cdot df^1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{\partial\omega(f(\boldsymbol{x}))}{\partial x_n}\cdot df^n(\boldsymbol{x})\,.$$

С другой стороны,

$$(f^*(d\omega))(\boldsymbol{x}) = f^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\pi^1 + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial x_n}\pi^n\right)(\boldsymbol{x}) =$$
$$= \frac{\partial(\omega(f(\boldsymbol{x}))}{\partial x_1}\cdot df^1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \frac{\partial(\omega(f(\boldsymbol{x}))}{\partial x_n}\cdot df^n(\boldsymbol{x})\,.$$

Так как правые части последних двух равенств равны, то равны и их левые части.

Применяя индукцию, предположим, что равенство $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ справедливо для k-формы ω. Достаточно убедиться в том, что оно справедливо для $(k+1)$-формы $\omega \wedge dx^i$. Имеем

$$f^*(d(\omega\wedge dx^i)) = f^*(d\omega\wedge dx^i + (-1)^k\omega\wedge d(dx^i)) = f^*(d\omega\wedge dx^i) =$$
$$= f^*(d\omega)\wedge f^*(dx^i) = d(f^*(\omega))\wedge df^i = d(f^*(\omega)\wedge df^i) = d(f^*(\omega)\wedge f^*(dx_i)) =$$
$$= d(f^*(\omega\wedge dx_i))\,. \quad \blacktriangleright$$

Определение 52. *Дифференциальная форма ω называется замкнутой, если $d\omega \equiv 0$, и точной, если существует дифференциальная форма η, такая, что $d\eta \equiv \omega$.*

Замечание. Равенство $d(d\eta) \equiv 0$ показывает, что всякая точная форма $\omega = d\eta$ является замкнутой. Обратное, однако, неверно, т. е. не всякая замкнутая форма является точной. Например, замкнутая дифференциальная форма $\omega = d\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$ не является точной. Для форм вида $P\cdot dx+Q\cdot dy$ на плоскости этот круг вопросов был исследован п предыдущей главе, в теоремах 21 и 23. Ниже дается принадлежащее А. Пуанкаре[3] достаточное условие точности произвольной замкнутой формы в $\mathbb{R}^n$.

Определение 53. *Множество $A\subset\mathbb{R}^n$ называется звёздным относительно точки $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$, если для любой точки $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ выполняется включение $[\mathbf{0},\boldsymbol{x}]\subset\mathbb{R}^n$.*

Теорема 38 (лемма Пуанкаре). *Всякая замкнутая форма ω, определенная на открытом множестве $A\subset\mathbb{R}^n$, звездном относительно точки $\mathbf{0}$, точна.*

◀ Для каждого $k\in\mathbb{N}$ мы определим оператор I, преобразующий k-форму ω в $(k-1)$-форму $I\omega$ так, что $I(0)=0$ и $\omega = I(d\omega)+d(I\omega)$ для любой формы ω. При $d\omega=0$ будем тогда иметь $\omega=d(I\omega)$. Пусть

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1\ldots i_k}(\boldsymbol{x})\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\,. \tag{23.9}$$

Так как множество A — звездное относительно точки $\mathbf{0}$, то $\forall\ \boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)\in A$ имеет смысл правая часть следующего равенства:

$$(I\omega)(\boldsymbol{x}) := \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\int\limits_0^1 t^{k-1}\cdot a_{i_1\ldots i_k}(t\boldsymbol{x})\cdot dt\right)\wedge$$
$$\wedge\, x_{i_j}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_j}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\,, \tag{23.10}$$

где «крышка» над множителем dx^{i_j} означает, что этот множитель необходимо удалить. Тождество $\omega = I(d\omega)+d(I\omega)$ доказывается прямым вычислением. Вычисляя внешний дифференциал обеих частей ра-

[3] *Пуанкаре* Жюль Анри — (1854—1912) — знаменитый французский математик и астроном.

венства (23.10), имеем

$$d(I\omega)(\boldsymbol{x}) = k \cdot \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \int\limits_0^1 t^{k-1} \cdot a_{i_1\ldots i_k}(t\boldsymbol{x})\,dt \cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} + \\ + \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\int\limits_0^1 t^k \cdot \frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(t\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\,dt\right)\cdot x_{i_j}\wedge \\ \wedge\, dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_j}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}. \quad (23.11)$$

С другой стороны, из (23.9) имеем

$$d\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\cdot dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Применяя к этой $(k+1)$-форме оператор I, имеем

$$I(d\omega)(\boldsymbol{x}) = \\ = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_0^1 t^k\cdot\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(t\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\,dt\right)\cdot x_i\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k} - \\ - \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}\left(\int\limits_0^1 t^k \cdot \frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}(t\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\,dt\right)\cdot x_{i_j}\wedge \\ \wedge\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_j}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}. \quad (23.12)$$

При сложении равенств (23.11) и (23.12) тройные суммы взаимно уничтожаются, и мы получим

$$d(I\omega) + I(d\omega) = k \cdot \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \int\limits_0^1 t^{k-1} \cdot a_{i_1 \ldots i_k}(t\boldsymbol{x})\, dt \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_0^1 t^k \cdot \frac{\partial a_{i_1 \ldots i_k}(t\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\, dt \right) \cdot x_i \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \left(\int\limits_0^1 \frac{d}{dt} [t^k \cdot a_{i_1 \ldots i_k}(t\boldsymbol{x})]\, dt \right) dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}(\boldsymbol{x})\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \omega(\boldsymbol{x})\,. \quad \blacktriangleright$$

§ 3. Теорема Стокса для сингулярных цепей

1. Предварительные сведения из геометрии

Определение 54. *Сингулярным k-мерным кубом в области $A \subset \mathbb{R}^n$ называется непрерывное отображение $c : [0\,,\,1]^k \longrightarrow A$, где $[0\,,\,1]^k := \underbrace{[0\,,\,1] \times \ldots \times [0\,,\,1]}_{k \text{ множителей}}$ — обычный k-мерный куб, $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Множества $\mathbb{R}^0$ и $[0\,,\,1]^0$ обозначим символом $\{0\}$. Тогда сингулярный нульмерный куб в A есть функция $c : \{0\} \longrightarrow A$, графиком которой является множество, состоящее из одной точки. Сингулярный[4] одномерный куб часто называют *кривой*. Особенно простым, но и особенно важным примером сингулярного n-мерного куба является *стандартный n-мерный куб* $I^n : [0\,,\,1]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, где $\forall\, \boldsymbol{x} \in [0\,,\,1]^n$: $I^n(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}$.

Определение 55. *Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех сингулярных n-мерных кубов, а $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Сингулярной*

[4]Термин *сингулярный* (особый) куб понимается в том смысле, что при отображении c образ куба $[0\,,\,1]^n$ не обязательно гомеоморфен этому кубу, а может «вырождаться».

n-мерной цепью называется такое отображение $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}$, что $f(c) = 0$ для всех $c \in \mathcal{S}$, кроме конечного их числа.

Пусть $f : c_\nu \longmapsto k_\nu \neq 0$, $\nu = 1, \ldots, N$ — поэлементная запись отображения, задающего сингулярную n-мерную цепь. Для обозначения этой цепи используется следующая «аддитивная» запись: $k_1 \cdot c_1 + k_2 \cdot c_2 + \ldots + k_N \cdot c_n$. В этих обозначениях сингулярный куб $c = 1 \cdot c$ можно рассматривать как сингулярную n-мерную цепь, принимающую на сингулярном кубе c значение 1, а на всех остальных сингулярных кубах — значение 0. Сложение (вычитание) сингулярных n-мерных цепей (как отображений) сводится к сложению (вычитанию) коэффициентов при одинаковых сингулярных кубах в аддитивной записи этих цепей. Отсюда видно, что множество всех n-мерных сингулярных цепей есть абелева группа относительно операции сложения.

Для каждой сингулярной n-мерной цепи c при $n \in \mathbb{N}$ мы определим сингулярную $(n-1)$-мерную цепь, называемую *границей* цепи c и обозначаемую символом ∂c. С этой целью определим сначала границу стандартного n-мерного куба, затем — сингулярного n-мерного куба и, наконец, границу сингулярной n-мерной цепи.

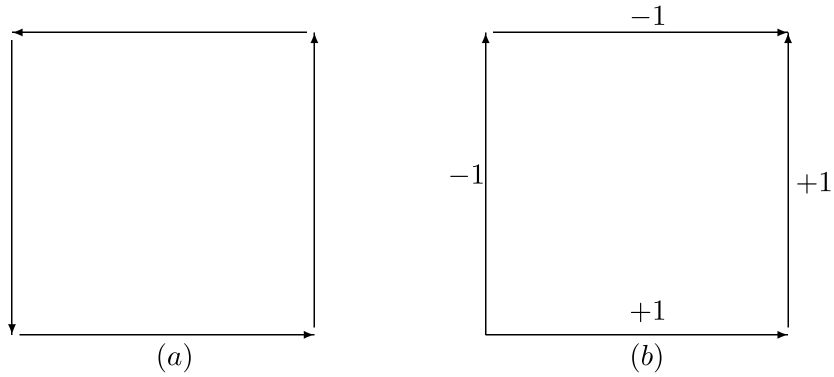

Рис. 11. К определению границы стандартного двумерного куба

Рассмотрение этого вопроса начнем с примера. На рисунке 11(a) показан квадрат (двумерный куб), край которого ориентирован стандартно (т. е. в направлении против часовой стрелки). На рисунке 11(b) показан тот же квадрат, стороны которого ориентированы так, как нам удобно (параллельные стороны квадрата ориентированы одинаково). Чтобы из этой ориентации получить стандартную, надо из сторон квадрата составить одномерную цепь, поменяв знаки перед теми сторонами квадрата, ориентация которых не совпадает со стандартной. Требуемые для этого коэффициенты указаны на рисунке 11(b) около соответствующих сторон квадрата. Именно этот последний способ удобно использовать для определения границы произвольной цепи.

Пусть $I^n : [0\,,\,1]^n \longrightarrow [0\,,\,1]^n$ — стандартный n-мерный куб (т. е. тождественное отображение). Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим два $(n-1)$-мерных сингулярных куба (две грани) $I^n_{(i,0)}$ и $I^n_{(i,1)}$ следующим образом. Для каждого $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in [0\,,\,1]^{n-1}$ положим

$$I^n_{(i,0)}(\boldsymbol{x}) := I^n(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) \equiv \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})\,,$$

$$I^n_{(i,1)}(\boldsymbol{x}) := I^n(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) \equiv \equiv (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Грань $I^n_{(i,0)}$ назовем $(i,0)$-гранью куба I^n, а грань $I^n_{(i,1)}$ — $(i,1)$-гранью этого куба (рис. 12) и по определению положим

$$\partial I^n := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{1} (-1)^{i+\nu} I^n_{(i,\nu)}\,.$$

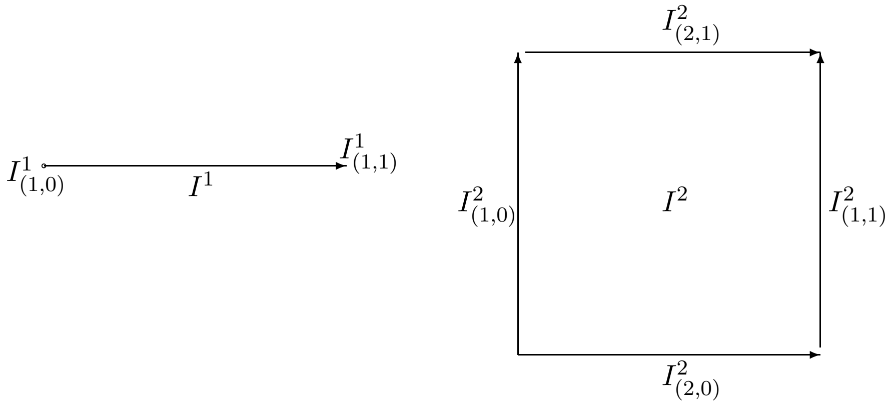

Рис. 12. Обозначения для граней одномерного и двумерного кубов

Для произвольного сингулярного n-мерного куба $c : [0\,,\,1] \longrightarrow A$ мы сначала определим (i,ν)-грань

$$c_{(i,\nu)} := c \circ (I^n_{(i,\nu)})\,,$$

а затем положим

$$\partial c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{1} (-1)^{i+\nu} c_{(i,\nu)} \,.$$

Наконец, определим границу сингулярной n-мерной цепи $\sum k_i \cdot c_i$ формулой

$$\partial \left(\sum k_i \cdot c_i \right) := \sum k_i \cdot \partial (c_i) \,.$$

В следующей теореме устанавливается наиболее характерное свойство оператора ∂.

Теорема 39. *Для любой сингулярной n-мерной цепи c справедливо равенство $\partial(\partial c) = 0$ или короче $\partial^2 = 0$.*

◀ Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Вычислим «грань грани» стандартного n-мерного куба I^n. При $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{n-2}) \in [0\,,\,1]^{n-2}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(I^n_{(i,\nu)} \right)_{(j,\mu)} (\boldsymbol{x}) &= I^n_{(i,\nu)} \left(I^{n-1}_{(j,\mu)} (\boldsymbol{x}) \right) = \\ &= I^n_{(i,\nu)} (x_1, \dots, x_{j-1}, \mu, x_j, \dots, x_{n-2}) = \\ &= I^n (x_1, \dots, x_{i-1}, \nu, x_i, \dots, x_{j-1}, \mu, x_j, \dots, x_{n-2}) \,. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \left(I^n_{(j+1,\mu)} \right)_{(i,\nu)} &= I^n_{(j+1,\mu)} \left(I^{n-1}_{(i,\nu)} (\boldsymbol{x}) \right) = \\ &= I^n_{(j+1,\mu)} (x_1, \dots, x_{i-1}, \nu, x_i, \dots, x_{n-2}) = \\ &= I^n (x_1, \dots, x_{i-1}, \nu, x_i, \dots, x_j, \mu, x_{j+1}, \dots, x_{n-2}) \,. \end{aligned}$$

Таким образом, $\left(I^n_{(i,\nu)} \right)_{(j,\mu)} = \left(I^n_{(j+1,\mu)} \right)_{(i,\nu)}$ при $i \leqslant j$. Действуя на это равенство отображением c, получим $\left(c_{(i,\nu)} \right)_{(j,\mu)} = \left(c_{(j+1,\mu)} \right)_{(i,\nu)}$ при $i < j$ для любого сингулярного n-мерного куба c. Вычислим теперь $\partial^2 c$:

$$\begin{aligned} \partial(\partial c) &= \partial \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{1} (-1)^{i+\nu} c_{(i,\nu)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{1} (-1)^{i+j+\nu+\mu} \left(c_{(i,\nu)} \right)_{(j,\mu)} \,. \end{aligned}$$

В эту сумму равные между собой грани $\left(c_{(i,\nu)}\right)_{(j,\mu)}$ и $\left(c_{(j+1,\mu)}\right)_{(i,\nu)}$, где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, входят с противоположными знаками и потому соответствующие слагаемые взаимно уничтожаются. Всего в сумме $4n \cdot (n-1)$ слагаемых, половина из которых содержит грани первого типа, а вторая половина — грани второго типа. Значит, все слагаемые суммы взаимно уничтожаются, и потому $\partial^2 c = 0$. Поскольку теорема верна для любого сингулярного n-мерного куба, то она верна и для любой сингулярной n-мерной цепи. ▶

Замечание. Сингулярную n-мерную цепь c, для которой $\partial c = 0$, принято называть *циклом.* Сингулярная цепь c называется *границей*, если существует цепь c_1, такая, что $c = \partial c_1$. В силу теоремы 39 имеем $\partial c = \partial(\partial c_1) = 0$, т. е. *граница любой цепи является циклом.* Возникает естественный вопрос: *всякий ли цикл является границей?* Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Можно показать, например, что в области $\mathbb{R}^2 \diagdown (0,0)$ цикл $t \longmapsto e^{2\pi i t}$, $t \in [0\,,\,1]$, не является границей.

2. Основная теорема

Тот факт, что $d^2\omega = 0$ и $\partial^2 c = 0$ наводит на мысль о том, что между дифференциальными формами ω и сингулярными цепями c существует некоторая связь. Эта связь устанавливается интегрированием дифференциальных форм по сингулярным цепям. Всюду в дальнейшем будут рассматриваться только дифференцируемые сингулярные кубы.

Пусть ω — k-форма на $[0\,,\,1]^k$. Тогда $\omega(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ с однозначно определенной функцией $f\ :\ [0\,,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. По определению полагаем

$$\int\limits_{[0,1]^k} \omega := \int\limits_{[0,1]^k} f$$

или в развернутом виде

$$\int \cdots \int\limits_{[0\,,\,1]^k} \omega(\boldsymbol{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k := \int \cdots \int\limits_{[0\,,\,1]^k} f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_k\,.$$

Пусть теперь ω — дифференциальная k-форма, определенная в области $A \subset \mathbb{R}^k$, а c — сингулярный k-мерный куб в A. В этом случае полагаем

$$\int\limits_c \omega := \int\limits_{[0,1]^k} c^*(\omega)\,.$$

Если, в частности, $c = I^k$ — стандартный k-мерный куб, то это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_{I^k} f(\boldsymbol{x})\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int\limits_{[0,1]^k} (I^k)^*(f(\boldsymbol{x})\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$
$$= \int\limits_{[0\,,\,1]^k} \!\!\cdots\!\! \int f(x_1, \ldots, x_k)\,dx_1 \ldots dx_k\,.$$

Особое определение требуется в случае $k = 0$. Всякая нуль-форма ω — это просто функция $\omega\,:\, A \longrightarrow \mathbb{R}$, а любой сингулярный нуль-куб $c\,:\, \{0\} \longrightarrow A$ — это точка $c(0) \in A$. В этом случае полагаем

$$\int\limits_c \omega := \omega(c(0))\,,$$

т. е. интегрирование функции по точке — это вычисление значения функции в точке.

Замечания. 1. Пусть $\omega = P\,dx + Q\,dy$ — дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^2$, а c — сингулярный одномерный куб (кривая) в $\mathbb{R}^2$. Интеграл

$$\int\limits_c \omega := \int\limits_0^1 c^*(P\,dx + Q\,dy)$$

изучался в предыдущей главе под названием *криволинейного интеграла 2-го рода по плоской кривой c*.

2. Аналогичное определение дается для интеграла от дифференциальной 2-формы $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ в $\mathbb{R}^3$ по сингулярному двумерному кубу $c\ [0\,,\,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\int\limits_c \omega := \iint\limits_{[0,1]^2} c^*\left(P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy\right)\,.$$

Такие интегралы изучались по названием *поверхностных интегралов 2-го рода.*

Наконец, интеграл от дифференциальной k-формы ω по сингулярной k-мерной цепи $\omega = \sum k_i \cdot c_i$ определим формулой

$$\int\limits_c \omega := \sum k_i \int\limits_{c_i} \omega\,.$$

Обобщением формул Грина и Стокса на сингулярные цепи является следующая теорема.

Теорема 40 (теорема Стокса для цепей). *Пусть ω — форма степени $(k-1)$, определенная в области $A \subset \mathbb{R}^n$, а c — сингулярная k-цепь в A. Тогда*

$$\int\limits_c d\omega = \int\limits_{\partial c} \omega\,.$$

◀ Предположим сначала, что $c = I^k$ — стандартный k-мерный куб, а ω — форма степени $(k-1)$ на кубе $[0\,,\,1]^k$. Тогда ω представима в виде суммы $(k-1)$-форм вида

$$f(\boldsymbol{x}) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \ldots \wedge dx^k\,,$$

и достаточно доказать теорему для каждой из таких форм. Этого можно достичь непосредственным вычислением, что мы сейчас и сделаем. Сначала заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\int\limits_{I^k_{(j,\nu)}} f(\boldsymbol{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\nu)})^*(f(\boldsymbol{x})\ dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^{k-1}} f(\ldots, x_{j-1}, \nu, x_{j+1}, \ldots)\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad i \neq j\,, \\ \int\limits_{[0,1]^{k-1}} f(\ldots, x_{i-1}, \nu, x_{i+1}, \ldots)\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k \quad \text{при} \quad i = j\,, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad i \neq j\,, \\ \int\limits_{[0,1]^{k}} f(\ldots, x_{i-1}, \nu, x_{i+1}, \ldots)\, dx_1 \ldots dx_k \quad \text{при} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\partial I^k} f(\boldsymbol{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mu=0}^{1} (-1)^{i+\mu} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} (I^k_{(j,\mu)})^*(f(\boldsymbol{x})\ dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$

$$= (-1)^{i+1} \int\limits_{[0,1]^k} f(\ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots)\, dx_1 \ldots dx_k +$$

$$+ (-1)^{i} \int\limits_{[0,1]^k} f(\ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots)\, dx_1 \ldots dx_k\,. \quad (23.13)$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{I^k} d\left(f(\boldsymbol{x}) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k\right) =$$

$$= \int\limits_{I^k} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \cdot dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{I^k} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{[0,1]I^k} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \cdot dx_1 \ldots dx_k\,.$$

Применяя, далее, теорему Фубини и формулу Ньютона — Лейбница, получим:

$$\int\limits_{I^k} d\Big(f(\boldsymbol{x}) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k\Big) =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx^k \int\limits_0^1 \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\, dx_i =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 [f(\ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots) -$$

$$- f(\ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots)]\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{[0,1]^k} f(\ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots)\, dx_1 \ldots dx_k +$$

$$+ (-1)^i \int\limits_{[0,1]^k} f(\ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots)\, dx_1 \ldots dx_k\,. \quad (23.14)$$

Так как правые части равенств (23.13) и (23.14) равны, то равны и их левые части, т. е. имеем

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{\partial I^k} \omega\,.$$

Если c — произвольный сингулярный $(k-1)$-мерный куб, то по определению имеем

$$\int\limits_{\partial c} \omega = \int\limits_{\partial I^k} c^*(\omega)$$

и потому

$$\int\limits_{c} d\omega = \int\limits_{I^k} c^*(d\omega) = \int\limits_{I^k} d(c^*\omega) = \int\limits_{\partial I^k} c^*(\omega) = \int\limits_{\partial c} \omega\,.$$

И, наконец, для произвольной сингулярной k-мерной цепи $c = \sum k_i \cdot c_i$ имеем

$$\int\limits_{c} d\omega = \int\limits_{\sum k_i \cdot c_i} d\omega = \sum k_i \cdot \int\limits_{c_i} d\omega =$$

$$= \sum k_i \cdot \int\limits_{\partial c_i} \omega = \int\limits_{\sum k_i \cdot \partial c_i} \omega = \int\limits_{\partial c} \omega\,. \ \blacktriangleright$$

§ 4. Интегрирование по многообразиям

1. Многообразия, лежащие в $\mathbb{R}^n$

Многообразием размерности k принято называть топологическое пространство, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная открытому подмножеству пространства $\mathbb{R}^k$. Поскольку это понятие для наших ближайших целей является слишком общим, то здесь введем понятие гладкого k-мерного многообразия, лежащего в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 56. *Непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется k-мерным многообразием, если $\forall\ \boldsymbol{x}_0 \in M$ выполняется следующее условие:*

(M) *существуют: открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку $\boldsymbol{x}_0$; открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$; диффеоморфизм*

$h\,:\,U \longrightarrow V$, *такие, что*

$$h(U\cap M) = V\cap\big(\mathbb{R}^k\times\{\mathbf{0}\}\big) = \\ = \big\{\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)\in V \;\big|\; x_{k+1}=\ldots=x_n=0\big\}\ . \quad (23.15)$$

Отметим два крайних случая. Множество $\{\boldsymbol{x}_0\}$, состоящее из одной точки $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, есть многообразие размерности нуль. Открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное многообразие.

Общеизвестным примером n-мерного многоообразия является n-мерная сфера $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$, определяемая как множество

$$S^n := \left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |\boldsymbol{x}|=1\right\}.$$

Следующая теорема дает неисчерпаемый источник примеров многообразий, лежащих в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 41. *Пусть* $A\subset\mathbb{R}^n$ *— открытое множество, а* $g\,:\,A\longrightarrow\mathbb{R}^p$, $1\leqslant p\leqslant n-1$, *— дифференцируемое отображение, такое, что во всех точках* $\boldsymbol{x}\in A$, *где* $g(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$, *выполняется равенство* $\mathrm{rang}\,[\mathrm{g}'(\boldsymbol{x})]\equiv\mathrm{p}$. *Тогда множество* $g^{-1}(\mathbf{0})\subset\mathbb{R}^n$ *является многообразием размерности* $n-p$.

◀ Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы о ранге. ▶

Теорема 42. *Пусть* $V\subset\mathbb{R}^n$ *— многообразие размерности* k. *Для любой точки* $\boldsymbol{x}_0\in M$ *выполняется следующее условие*:

(C) *существуют: открытое в* $\mathbb{R}^n$ *множество* $U\ni\boldsymbol{x}_0$, *открытое в* $\mathbb{R}^k$ *множество* W *и инъективное дифференцируемое отображение* $f\,:\,W\longrightarrow\mathbb{R}^n$, *такие, что*

(a) $f(W)=M\cap U$;

(b) $\forall\,\boldsymbol{x}\in W\ :\ \mathrm{rang}\,[\mathrm{f}'(\boldsymbol{x})]=\mathrm{k}$.

◀ Введем в рассмотрение отображение $h\,:\,U\longrightarrow V$, удовлетворяющее условию (M). Положим

$$W := \big\{\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^k \;\big|\; (\boldsymbol{a},\mathbf{0})\in h(M)\subset\mathbb{R}^n\big\}\ .$$

Определим отображение $f\,:\,W\longrightarrow\mathbb{R}^n$ равенством $f(\boldsymbol{a}) := h^{-1}(\boldsymbol{a},\mathbf{0})$. Очевидно, что $f(W)=M\cap U$. Если $H\,:\,U\longrightarrow\mathbb{R}^k$ определить равенством $H(\boldsymbol{z}) := (h^1(\boldsymbol{z}),\ldots,h^k(\boldsymbol{z}))$, то будет $H(f(\boldsymbol{y}))\equiv\boldsymbol{y}$

для всех $\boldsymbol{y} \in W$. Поэтому справедливо тождество

$$H'(f(\boldsymbol{y})) \circ f'(\boldsymbol{y}) \equiv \mathrm{Id} \,:\, \mathbb{R}^{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{k}},$$

и, значит, $\mathrm{rang}\,[\mathrm{f}'(\boldsymbol{y})] \equiv \mathrm{k}$. ►

Отметим одно следствие из теоремы 42. Для любых двух систем координат $f_1 \,:\, W_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ и $f_2 \,:\, W_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ отображение[5]

$$f_2^{-1} \circ f_1 \,:\, f_1^{-1}(f_2(W_2)) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

дифференцируемо и имеет невырожденный якобиан.

Кроме понятия k-мерного многообразия нам потребуется еще понятие *k-мерного многообразия с краем.* Чтобы его определить, введем сначала *k-мерное полупространство*

$$\mathbb{H}^k := \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; x_k \geqslant 0 \right\}.$$

Определение 57. *Подмножество $M \subset \mathbb{R}^k$ называется k-мерным многообразием с краем, если для любой точки $\boldsymbol{x}_0 \in M$ выполняется либо условие* (M)*, либо следующее условие*:

(M$'$) *существуют*: *открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащее точку $\boldsymbol{x}_0$, открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $h \,:\, U \longrightarrow V$, такие, что*

$$h(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{H}^k \times \{\mathbf{0}\}\right) = \\ = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in V \;\middle|\; x_k \geqslant 0\,,\, x_{k+1} = \ldots = x_n = 0 \right\}.$$

Отметим, что для одной и той же точки $\boldsymbol{x}_0 \in M$ может выполняться только одно из условий (M) или (M$'$). Точки, для которых выполняется условие (M), называются *внутренними* точками многообразия M. Множество всех внутренних точек многообразия M называется его *внутренностью* и обозначается символом M^0. Точки, для которых выполняется условие (M$'$), называются *точками края* многообразия M. Совокупность всех таких точек называется *краем* многообразия M и обозначается символом ∂M. Не следует смешивать понятия края и границы, так как эти понятия, вообще говоря, различные. Кроме того, очевидно, что $M = M^0 \sqcup \partial M$.

[5]Отображения $f_2^{-1} \circ f_1$ и $f_1^{-1} \circ f_2$ называются *заменами карт* или *соотношениями соседства.*

2. Векторные поля и дифференциальные формы на многообразиях

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — многообразие размерности k (без края), а $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset M$, — система координат в окрестности точки $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{a}) \in M$. Так как $\operatorname{rang}[\mathrm{f}'(\boldsymbol{x})] \equiv \mathrm{k}$, то линейное отображение $f_* : \mathbb{R}^k_{\boldsymbol{a}} \longrightarrow \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ инъективно, а потому образ $f_*\left(\mathbb{R}^k_{\boldsymbol{a}}\right)$ есть k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$. Если $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $V \subset M$, — еще одна система координат с $\boldsymbol{x} = g^{-1}(\boldsymbol{b})$, то

$$g_*\left(\mathbb{R}^k_{\boldsymbol{b}}\right) = f_*\left(\left(f^{-1} \circ g\right)_*\left(\mathbb{R}^k_{\boldsymbol{b}}\right)\right) = f_*\left(\mathbb{R}^k_{\boldsymbol{a}}\right)$$

Таким образом, k-мерное подпространство $f_*\left(\mathbb{R}^k_{\boldsymbol{a}}\right)$ не зависит от выбора системы координат в окрестности точки $\boldsymbol{x}$. Это подпространство называется *касательным пространством* к многообразию M в точке $\boldsymbol{x}$ и обозначается символом $M_{\boldsymbol{x}}$.

Предположим, что $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, содержащее M, а $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — такое дифференцируемое векторное поле на A, что $\forall\ \boldsymbol{x} \in A : F(\boldsymbol{x}) \in M_{\boldsymbol{x}}$. Для системы локальных координат $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset M$, отображение f_* — инъективное. Поэтому существует единственное дифференцируемое векторное поле $G : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, такое, что $f_*(G(\boldsymbol{a})) = F(f(\boldsymbol{a}))$ для каждого $\boldsymbol{a} \in W$.

Можно рассматривать также функцию $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, которая каждому $\boldsymbol{x} \in M$ сопоставляет вектор $F(\boldsymbol{x}) \in M_{\boldsymbol{x}}$. Такая функция называется *векторным полем, заданным на* M. По-прежнему существует единственное векторное поле G на W, такое, что $f_*(G(\boldsymbol{a})) = F(f(\boldsymbol{a}))$ для каждого $\boldsymbol{a} \in W$. Мы *по определению* будем считать, что F дифференцируемо, если дифференцируемо G. Заметим, что данное определение не зависит от выбора системы координат. Если координатное отображение $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что $g_*(H(\boldsymbol{b})) = F(\boldsymbol{b})$ для всех $\boldsymbol{b} \in V$, то координатные функции для $H(\boldsymbol{b})$ должны совпадать с координатными функциями для $G\left(f^{-1}(g(\boldsymbol{b}))\right)$, так что дифференцируемость отображения G влечет дифференцируемость отображения H.

Аналогичные рассмотрения проводятся и для дифференциальных форм. *Функция* ω*, которая каждому* $\boldsymbol{x} \in M$ *ставит в соответствие* *форму* $\omega(\boldsymbol{x}) \in \Lambda^p(M_{\boldsymbol{x}})$, *называется дифференциальной формой степени* p *на* M. Если $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — система координат в окрестности точки $\boldsymbol{x}$, то $f^*(\omega)$ будет дифференциальной p-формой на W. Форма ω называется дифференцируемой, если дифференцируемой является форма $f^*(\omega)$. Форма степени p на W может быть записана в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где функции $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ определены только на M. Прежнее определение внешнего дифференциала $d\omega$ в данном случае не имеет смысла, поскольку не определены частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\omega_{i_1 \ldots i_p}$. Тем не менее существует разумный способ определения $d\omega$.

Теорема 43. *Для любой дифференцируемой* p*-формы* ω *на* M *существует единственная* $(p+1)$*-форма на* M, *такая, что*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

для любой системы локальных координат $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

◀ Пусть $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — система локальных координат с $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{a})$, а $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{p+1} \in M_{\boldsymbol{x}}$. В пространстве $\mathbb{R}^k_{\boldsymbol{a}}$ имеются однозначно определенные векторы $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p+1}$, для которых $f_*(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{v}_i$. Положим теперь по определению

$$d\omega(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{p+1}) := d(f^*\omega)(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{p+1}).$$

Можно проверить, что это задание $d\omega(\boldsymbol{x})$ не зависит от выбора системы локальных координат, и потому $d\omega$ определено корректно. ▶

Часто возникает необходимость приписать связному многообразию $M \subset \mathbb{R}^n$ *ориентацию* (если это возможно). С этой целью сначала возьмем карту (т. е. координатный диффеоморфизм) $f : W \longrightarrow f(W) \subset M$, где $W \subset \mathbb{R}^k$ — область, и будем приписывать ориентацию множеству $f(W)$. Зафиксируем в области W какой-нибудь базис, например, стандартный $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$. Пусть $\boldsymbol{a} \in W$, а $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{a})$. Тогда $((\boldsymbol{e}_1)_a, \ldots, (\boldsymbol{e}_k)_a)$ — базис касательного пространства $W_{\boldsymbol{a}}$, а его образ $(f_*((\boldsymbol{e}_1)_a), \ldots, f_*((\boldsymbol{e}_k)_a))$ является базисом касательного пространства $M_{\boldsymbol{x}}$ к многообразию M в точке $\boldsymbol{x}$. Этот базис непрерывно зависит от точки $\boldsymbol{x} \in f(W)$, и, таким образом, ориентация на множестве

$f(W) \subset M$ построена. Желая продолжить эту ориентацию за пределы множества $f(W)$, возьмем другую карту $g \,:\, V \longrightarrow g(V) \subset M$, где область $V \subset \mathbb{R}^k$ обладает следующими свойствами: $V \cap W \neq \varnothing$ и $V \diagdown W \neq \varnothing$. Аналогично предыдущему построим ориентацию на множестве $g(V)$, затем согласуем ее с построенной ранее ориентацией множества $f(W)$. Согласование должно заключаться в том, что на пересечении $f(W) \cap g(V)$ ориентации, полученные с использованием различных карт, должны совпадать. Чтобы этого согласования достичь, достаточно взять одну точку $\boldsymbol{x} \in f(W) \cap g(V)$ и сравнить между собой базисы касательного пространства $M_{\boldsymbol{x}}$, полученные от различных карт. Если эти базисы ориентированы одинаково, то согласование достигнуто. В противном случае достаточно первоначально выбранный базис в области V заменить противоположно ориентированным, и требуемое согласование будет достигнуто.

Продолжая процесс ориентирования на другие карты, мы либо припишем ориентацию всему многообразию M (в этом случае многообразие называется *ориентируемым*), либо убедимся в том, что это сделать невозможно (в этом случае многообразие называется *неориентируемым*. Неориентируемость обнаруживается тогда, когда в процессе ориентирования появляются три карты

$$f \,:\, W \longrightarrow f(W)\,, \quad g \,:\, V \longrightarrow g(V)\,, \quad h \,:\, U \longrightarrow h(U)\,,$$

такие, что

$$f(V) \cap g(W) = \varnothing\,, \quad f(V) \cap h(U) \neq \varnothing\,, \quad g(W) \cap h(U) \neq \varnothing\,,$$

причем на первых двух картах ориентация уже определена, а на третьей — нет. После продолжения ориентаций из первых двух карт на третью может оказаться так, что полученные две ориентации множества $h(U)$ — противоположные. Это и будет означать, что многообразие M — неоринтируемое.

Данные выше определения векторных полей, дифференциальных форм и ориентаций можно распространить и на многообразия с краем. Если M есть k-мерное многообразие с краем, и $\boldsymbol{x} \in \partial M$, то $(\partial M)_{\boldsymbol{x}}$ есть $(k-1)$-мерное подпространство k-мерного векторного пространства $M_{\boldsymbol{x}}$. Поэтому существуют ровно два единичных вектора, лежащих в $M_{\boldsymbol{x}}$ и ортогональных к $(\partial M)_{\boldsymbol{x}}$. Их можно различить следующим образом. Пусть $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — карта с $\mathbf{0} \in W \subset \mathbb{H}^k$ и $f(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}$. Тогда только один из этих единичных векторов равен $f_*(\boldsymbol{v})$, где $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ с $v_k < 0$. Этот единичный вектор $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}$ называется *ортом внешней нормали.* Легко показать, что это определение не зависит от выбора карты.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — ориентированное k-мерное многообразие с краем ∂M. Для каждого $\boldsymbol{x} \in \partial M$ выберем векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in (\partial M)_{\boldsymbol{x}}$ так, чтобы последовательность векторов $(\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1})$ была базисом, одинаково ориентированным с базисом касательного пространства $M_{\boldsymbol{x}}$. Если взять другие векторы $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{k-1} \in (\partial M)_{\boldsymbol{x}}$ так, чтобы последовательность векторов $(\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{k-1})$ была базисом, одинаково ориентированным с базисом касательного пространства $M_{\boldsymbol{x}}$, то базисы $(v_1, \ldots, v_{k-1})$ и $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ касательного пространства $(\partial M)_{\boldsymbol{x}}$ оказываются ориентированными одинаково. Таким образом, ориентация многообразия M однозначно продолжается на край ∂M, и потому *край ориентируемого многообразия в свою очередь является ориентируемым многообразием*, а построенная здесь его ориентация называется *индуцированной ориентацией.*

Если применить эти определения к полупространству $\mathbb{H}_k$ с его стандартной ориентацией, то окажется, что его индуцированной ориентацией служит стандартная ориентация, умноженная на $(-1)^k$. Однако в рассматриваемых здесь вопросах индуцированная ориентация предпочтительнее, поскольку при ее использовании теорема Стокса на многообразиях выглядит наиболее просто.

В том частном случае, когда $M \subset \mathbb{R}^n$ — *ориентированное* многообразие размерности $(n-1)$, можно определить орты внешних нормалей даже тогда, когда M не является краем n-мерного многообразия. Пусть векторы $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})$ ориентируют касательное пространство $M_{\boldsymbol{x}}$. Возьмем единичный вектор $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ так, чтобы он был ортогональным к $M_{\boldsymbol{x}}$ и чтобы векторы $(\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1})$ определяли стандартную ориентацию в $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$. Взятый вектор $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}}$ назовем *вектором внешней нормали.* Очевидно, что этот вектор непрерывно зависит от точки $\boldsymbol{x} \in M$. Обратно, всякое заданное на M непрерывное поле единичных нормальных векторов $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ определяет на M ориентацию. Это показывает, например, что на листе Мёбиуса[6] не существует непрерывного поля единичных векторов нормали. Двигая вдоль листа Мёбиуса точку вместе с приложенным в этой точке вектором нормали (с соблюдением непрерывности), можно вернуться в исходную точку с противоположным вектором нормали. Это же свойство проявляется в том, что лист Мёбиуса имеет «только одну сторону»: начав красить его с одной стороны и непрерывно расширяя закрашенную часть, можно таким способом закрасить его весь (т. е. обе стороны).

3. Теорема Стокса на многообразиях

Пусть на k-мерном многообразии с краем $M \subset \mathbb{R}^n$ заданы: дифференциальная p-форма ω и сингулярный p-мерный куб $c : [0, 1]^p \longrightarrow M$. Интеграл от ω по c определяется так же, как и раньше, т. е.

$$\int\limits_c \omega := \int\limits_{[0,1]^p} c^*(\omega) .$$

Интегралы по сингулярным p-мерным цепям определяются так же, как и выше. В общем случае $0 \leqslant p \leqslant k \leqslant n$. В частном случае $p = k$ может оказаться, что существует открытое в $\mathbb{R}^k$ множество $W \supset [0, 1]^k$ и система координат (карта) $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, такие, что $\forall \boldsymbol{x} \in [0, 1]^k : c(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x})$. Будем считать, что все встречающиеся ниже сингулярные кубы принадлежат этому типу. Если многообразие M ориентировано, то будем говорить, что сингулярный k-мерный куб *сориентирован*, если отображение f сохраняет ориентацию.

Теорема 44. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — ориентированное k-мерное многообразие, $c_1, c_2 : [0,1]^k \longrightarrow M$ — два сориентированных сингулярных k-мерных куба в M, а ω — форма степени k на M, тождественно*

[6] *Мёбиус* Август Фердинанд (1790—1868) — немецкий геометр.

равная нулю вне множества $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$. *Тогда*

$$\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{c_2} \omega\,. \tag{23.16}$$

◀ Используя приведенное в формулировке теоремы ограничение на носитель $\operatorname{supp}\omega$, будем иметь

$$\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{[0,1]^k} c_1^*(\omega) = \int\limits_{[0,1]^k} (c_2 \circ c_2^{-1} \circ c_1)^*(\omega) = \int\limits_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega)\,.$$

Осталось только показать, что

$$\int\limits_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int\limits_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int\limits_{c_2} \omega\,. \tag{23.17}$$

Пусть $c_2^*(\omega) = f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Вводя обозначение $g := c_2^{-1} \circ c_1$ и используя теорему 36, получим

$$\begin{aligned}(c_2^{-1} \circ c_1)^* c_2^*(\omega) = g^*(f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) = \\ = (f \circ g) \cdot \det[g'] \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \\ = (f \circ g) \cdot |\det[g']| \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k\,,\end{aligned}$$

поскольку $\det[g'] = \det[c_2^{-1} \circ c_1] > 0$. Производя теперь в первом интеграле из (23.17) замену $\boldsymbol{t} = g(\boldsymbol{x})$, получим равенство (23.16). ▶

Пусть ω — форма степени k на ориентированном k-мерном многообразии $M \subset \mathbb{R}^n$. Если в M существует такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $\omega \equiv 0$ вне $c([0,1]^k)$, то мы по определению полагаем

$$\int\limits_{M} \omega := \int\limits_{c} \omega\,.$$

Теорема 44 означает, что интеграл $\int\limits_c \omega$ не зависит от выбора сингулярного куба c.

Пусть теперь ω — произвольная форма степени k на многообразии M, и пусть существует открытое покрытие $\mathcal{O}$ многообразия M, такое, что для каждого $U \in \mathcal{O}$ существует такой сориентированный k-мерный куб c, что $U \subset c([0,1]^k)$. Пусть Φ — разложение единицы для M, подчиненное этому покрытию. По определению полагаем

$$\int_M \omega := \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$$

в предположении, что эта сумма сходится (она во всяком случае сходится, когда M компактно). Рассуждениями, аналогичными тем, которые были применены в теории кратных интегралов, можно показать. что это определение является корректным (т. е. не зависит от выбора $\mathcal{O}$ и Φ).

Данные выше определения можно было бы дать и для k-мерного ориентированного многообразия с краем M. Пусть на краю ∂M определена индуцированная ориентация, и пусть c — такой сориентированный сингулярный k-мерный куб в M, что его грань $c_{(k,0)}$ лежит в ∂M и является единственной гранью, хотя бы одна внутренняя точка которой принадлежит ∂M. Из замечаний, сделанных после определения ориентации края, следует, что грань $c_{(k,0)}$ сориентирована, если k четно, и несориентирована, если k нечетно. Таким образом, для всякой формы $(k-1)$-й степени ω на M, равной нулю всюду вне $c([0,1]^k)$, имеем

$$\int_{c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega\,.$$

С другой стороны, грань $c_{(k,0)}$ входит с коэффициентом $(-1)^k$ в границу ∂c сингулярного куба c. Поэтому имеем

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{(-1)^k \cdot c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \cdot \int_{c_{(k,0)}} \omega = \int_{\partial M} \omega\,.$$

Выбор ориентации края был сделан выше с таким расчетом, чтобы перед интегралом в правой части последнего равенства не было множителя $(-1)^k$.

Теперь все готово для формулировки и доказательства основной теоремы этой главы.

Теорема 45 (теорема Стокса для многообразий). *Пусть $M \subset \subset \mathbb{R}^n$ — компактное ориентированное k-мерное многообразие с краем ∂M, а ω — дифференцируемая $(k-1)$-форма на M. Тогда*

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega\,, \tag{23.18}$$

где край ∂M наделен индуцированной ориентацией.

◀ Предположим сначала, что существует такой сориентированный сингулярный k-мерный куб $c\ :\ [0,1]^k \longrightarrow M \diagdown \partial M$, что $\omega = 0$ вне $c\left((0,1)^k\right)$. В силу свойств внешнего дифференциала и теоремы Стокса для цепей имеем

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_c d\omega = \int\limits_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int\limits_{[0,1]^k} dc^*(\omega) = \int\limits_{\partial I^k} c^*(\omega) = \int\limits_{\partial c} \omega = 0\,,$$

поскольку $\omega = 0$ на ∂c. С другой стороны, и $\int\limits_{\partial M} \omega = 0$, поскольку $\omega = 0$ на ∂M.

Предположим теперь, что существует такой сориентированный сингулярный k-мерный куб $c\ :\ [0,1]^k \longrightarrow M$, что единственной его гранью, лежащей на ∂M, является грань $c_{(k,0)}$, и $\omega = 0$ вне $c\left([0,1]^k\right)$. В этом случае имеем

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_c d\omega = \int\limits_{\partial c} \omega = \int\limits_{\partial M} \omega\,.$$

Обращаясь к общему случаю, замечаем, что многообразие M допускает такое открытое покрытие $\mathcal{O}$ и подчиненное ему разложение единицы Φ, что для каждого $\varphi \in \Phi$ форма $\varphi \cdot \omega$ принадлежит одному из двух уже рассмотренных типов. Так как $1 \equiv \sum\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi$, то

$$0 \equiv d(1) = d\left(\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi\right) = \sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi\,,$$

и потому

$$\sum_{\varphi\in\Phi} d\varphi \wedge \omega = 0\,.$$

Поскольку многообразие M компактно, то эта сумма конечна, и, интегрируя под знаком суммы, найдем

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int\limits_M d\varphi\wedge\omega = 0\,.$$

Используя это равенство, окончательно имеем

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_M \sum_{\varphi\in\Phi}\varphi\cdot d\omega = \sum_{\varphi\in\Phi}(d\varphi\wedge\omega+\varphi\cdot d\omega) =$$

$$= \sum_{\varphi\in\Phi}\int\limits_M d(\varphi\cdot\omega) = \sum_{\varphi\in\Phi}\int\limits_{\partial M}\varphi\cdot\omega = \int\limits_{\partial M}\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi\cdot\omega = \int\limits_{\partial M}\omega\,. \quad \blacktriangleright$$

4. Классические формулы интегрального исчисления как частные случаи общей теоремы Стокса

Подбирая специальным образом многообразия с краями и заданные на них дифференциальные формы, мы получим здесь в качестве следствий из общей формулы (23.18) доказанные ранее формулы интегрального исчисления.

Пусть $M=[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}$ — отрезок числовой оси (одномерное многообразие), ориентированный в направлении от a к b . Его краем является нуль-цепь $\partial M = +1\cdot\{b\}-1\cdot\{a\}$ (т. е. точка b, взятая с кратностью $(+1)$, и точка a, взятая с кратностью (-1)). В качестве нуль-формы возьмем дифференцируемую функцию $\omega = F\;:\;[a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, и пусть $F' =: f$. Тогда $d\omega(x)=dF(x)=f(x)\,dx$. Подставляя эти выражения в равенство (23.18), получаем формулу Ньютона — Лейбница[7]

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,.$$

Пусть $M\subset\mathbb{R}^2$ — область с гладким краем ∂M, ориентированным стандартно, а $P,\;Q\;:\;\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые

[7]Напомним, что интеграл от нуль-формы (т. е. от функции) по точке по определению равен значению данной функции в данной точке.

функции. Выражение $\omega(x,y) := P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ — дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^2$. Используя правила внешнего дифференцирования и внешнего умножения, вычислим ее внешний дифференциал

$$d\omega := dP\wedge dx + dQ\wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dx\wedge dy\,.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (23.18), получаем формулу Грина

$$\iint\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dx\wedge dy = \int\limits_{\partial M} \left(P\,dx + Q\,dy\right)\,.$$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая ориентированная поверхность с гладким краем ∂M, ориентированным стандартно, а $P,\ Q,\ R\ :\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции. Выражение

$$\omega(x,y,z) := P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

— дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^3$. Используя правила внешнего дифференцирования и внешнего умножения, вычислим ее внешний дифференциал

$$d\omega := dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx +$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz =$$
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy\,.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (23.18), получаем классическую формулу Стокса

$$\iint\limits_M \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy\right] = \int\limits_{\partial M} \left(P\,dx + Q\,dy +\ dz\right)\,.$$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная замкнутая область с гладким краем ∂M, ориентированным внешней нормалью, а P, Q, R : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции. Выражение

$$\omega(x,y,z) := P(x,y,z)\,dy \wedge dz + Q(x,y,z)\,dz \wedge dx + R(x,y,z)\,dx \wedge dy$$

— дифференциальная 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Используя правила внешнего дифференцирования и внешнего умножения, вычислим ее внешний дифференциал

$$\begin{aligned} d\omega := dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx + \\ + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy = \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz\,. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в формулу (23.18), получаем классическую формулу Гаусса — Остроградского

$$\begin{aligned} \iiint\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \\ = \iint\limits_{\partial M} \left(P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy\right)\,. \end{aligned}$$

.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 1997—1998. Ч. I—II.
2. *Толстов Г. П.* Элементы математического анализа. М., 1974. Т. I—II.
3. *Рудин У.* Основы математического анализа. М., 1966.
4. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. Волгоград, 1996.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб., 1997. Т. I—III.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. М., 1968. Т. I—II.
7. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М., 1985.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М., 1990—1991. Т. I—II.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1988—1989. Т. I—III.
10. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. С.-Пб., 1994.
11. *Демидович Б. П.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ