Э. И. Зверович

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
в шести частях

Часть 4
Функциональные последовательности и ряды.
Интегралы, зависящие от параметра

Минск

БГУ

2004

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в третьем семестре. Его содержание составляют элементы теории функциональных последовательносей, функциональных рядов, степенных рядов, тригонометрических рядов и интегралов Фурье, интегралов, зависящих от параметра, и эйлеровых интегралов.

В этом томе излагается теоретический материал, который преподается студентам математических специальностей университетов в третьем семестр. Его содержание составляют элементы теории функциональных последовательносей, функциональных рядов, степенных рядов, тригонометрических рядов и интегралов Фурье, интегралов, зависящих от параметра, и эйлеровых интегралов.

Глава 17
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

В этой главе будут изучаться последовательности и ряды, все члены которых — числовые функции одного переменного (вещественного или комплексного). Условимся через z (возможно, с инексами) обозначать переменные, которые считаются, вообще говоря, комплексными. Через x (возможно, с индексами) будем обозначать вещественные переменные.

§ 1. Функциональные последовательнсти и ряды. Их поточечная сходимость

Определение 1. *Функциональной последовательностью называется последовательность, все члены которой — функции. Функциональным рядом называется ряд, все члены которого — функции.*

Понятия и обозначения, связанные с функциональными последовательностями и рядами, по форме не отличаются от соответствующих понятий и обозначений, связанных с числовыми последовательностями и рядами, поэтому на них не останавливаемся. Различия начинаются тогда, когда речь заходит о сходимости. Это связано прежде всего с тем, что одна и та же последовательность (или ряд) может сходиться при одних значениях аргумента и расходиться — при других.

Определение 2. *Говорят, что функциональная последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно на множестве $E \subset \mathbb{C}$ к функции $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, если все функции f_n определены на множестве E и $\forall z \in E$ числовая последовательность $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(z)$.*

Записывается этот факт так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{или} \quad f_n(z) \to f(z) \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,\ z \in E\,.$$

Определение 3. *Говорят, что функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится поточечно на множестве* $E \subset \mathbb{C}$ *к сумме* $f\ :\ E \longrightarrow \mathbb{C}$, *если последовательность его частичных сумм сходится поточечно к функции* f *на множестве* E.

Записывается этот факт так: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ при $z \in E$.

Напомним, что сходимость последовательностей и сходимость рядов — понятия равносильные в том смысле, что одно из них сводится к другому. Именно, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_n$ определяется как сходимость последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм $s_n := f_1 + \ldots + f_n$. Обратно, сходимость последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ можно определить как сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, где

$$f_1 = s_1\ ,\ f_2 = s_2 - s_1\ ,\ \ldots\ ,\ f_n = s_n - s_{n-1}\ .$$

Учитывая это замечание, мы в дальнейшем (в зависимости от удобства формулировок) некоторые вопросы будем излагать только для функциональных последовательностей, другие — только для функциональных рядов, а часть вопросов — и для последовательностей, и для рядов.

При изучении функциональных последовательностей и рядов целесообразно ввести понятие области сходимости.

Определение 4. *Областью сходимости функциональной последовательности* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *или функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *называется множество всех значений аргумента* $z \in \mathbb{C}$, *для которых сходится числовая последовательность* $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ *или соответственно числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Рассмотрим простые **примеры** на нахождение областей сходимости.

1) Пусть $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\forall x \in \mathbb{R}\ :\ 0 \leqslant \frac{1}{x^2+n} \leqslant \frac{1}{n}\ , \quad \text{то} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}$. Поэтому областью сходимости данной последовательности является множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

2) Пусть $f_n(z) = n \cdot z$, где $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Так как $f(0) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. При $z \neq 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = z \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Таким образом, область сходимости данной последовательности состоит из одной точки $z = 0$.

3) Пусть $f_n(x) = \dfrac{n!}{x^2+n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x^2+n} = +\infty\,,$$

то областью сходимости данной последовательности является пустое множество $\varnothing$.

Основные проблемы теории функциональных последовательносей и рядов можно сформулировать следующим образом. Пусть все члены функциональной последовательности или ряда обладают некоторым свойством (например, непрерывны, интегрируемы, дифференцируемы и т. п. Обладает ли предельная функция иди сумма ряда соответствующим свойством? Если да, то каковы соотношения между f'_n и f', между интегралами от f_n и f, и т. п.?

Пусть, например, $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$, где все функции f_n непрерывны в точке x. Непрерывность функции f_n в точке x означает, что $\lim\limits_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)$. Задаваясь вопросом о непрерывности предельной функции f в точке x, мы должны проверить равенство $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$. Выражая теперь f через f_n и используя непрерывность функции f_n в точке x, получим

$$\lim_{t\to x}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{t\to x} f_n(t)\right]\,.$$

Таким образом, *вопрос о непрерывности предельной функции f в точке x сводится к вопросу о том, справедливо ли равенство*

$$\lim_{t\to x}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{t\to x} f_n(t)\right]\,, \tag{17.1}$$

т. е. важен ли порядок, в котором осуществляются предельные переходы?

Мы покажем сейчас на **примерах**, что, вообще говоря, равенства типа (17.1) неверны. Первый, самый простой пример связан с рассмотрением «двойной последовательности».

1) Положим $s_{mn} := \dfrac{m}{m+n}$, где m, $n \in \mathbb{N}$. При каждом фиксированном n имеем

$$\lim_{m\to\infty} s_{mn} = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{m+n} = 1\,,$$

и значит,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty} s_{mn}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,.$$

Если же фиксировать m, то получим

$$\lim_{n\to\infty} s_{mn} = \lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n} = 0\,,$$

и значит,

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} s_{mn}\right] = \lim_{m\to\infty} 0 = 0\,.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{mn} \neq \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{mn}\,.$$

2) Все функциии $f_n(x) := \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на $\mathbb{R}$ и образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\dfrac{1}{1+x^2}\right| < 1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится. Его сумма $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x=0\,,\\ 1+x^2 & \text{при } x\neq 0\,,\end{cases}$ разрывна в точке $x = 0$. Таким образом, сходящийся ряд, все члены которого — непрерывные функции, может иметь разрывную сумму.

3) Рассмотрим семейство функций $\left\{f_{mn} \mid m\,,\, n\in\mathbb{N}\right\}$, где

$$f_{mn}(x) = |\cos(n!\pi x)|^m\ .$$

Все эти функции, очевидно, непрерывны на $\mathbb{R}$. Однако предел

$$f_n(x) := \lim_{m\to\infty} f_{mn}(x) = \lim_{m\to\infty}|\cos(n!\pi x)|^m = \begin{cases} 1 & \text{при } \ x = \dfrac{k}{n!}\,,\\ 0 & \text{при } \ k \neq \dfrac{k}{n!}\,,\end{cases} \tag{17.2}$$

есть функция, разрывная в точках множества $\left\{\dfrac{k}{n!}\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Таким образом, опять предел последовательности непрерывных функций оказывается разрывной функцией.

Рассмотрим теперь последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, где f_n — сужение функции (17.2) на отрезок $[0\,,\,1]$. Все эти функции интегрируемы в силу критерия Лебега[1]. Действительно, каждая из этих функций ограниче-

[1]Напоминаю критерий Лебега: *интегрируемость по Риману функции равносильна тому, что она ограничена, а множество всех ее точек разрыва имеет меру нуль. Лебег* Анри Леон (1875 — 1941) — французский математик, построивший теорию меры и интеграла, обобщающего интеграл Римана.

на и имеет конечное множество точек разрыва. Переходя к пределу по n, получим знакомую нам функцию Дирихле

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1\,, & x\in\mathbb{Q}\,, \\ 0\,, & x\notin\mathbb{Q}\,, \end{cases} \quad ,$$

которая всюду разрывна и, значит, не интегрируема по Риману.

4) Пусть $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, где $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$. В силу очевидного неравенства $0 \leqslant \dfrac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ имеем $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} = 0$. Все функции f_n и функция f, очевидно, дифференцируемы, причем $f_n'(x) = \sqrt{n}\cdot\cos nx$, $f'(x)\equiv 0$. Однако $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f'(x)$, так как уже при $x=0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty \neq 0$.

5) Пусть $f_n(x) = n^2x\cdot(1-x^2)^n$, $x\in[0\,,\,1]$, $n\in\mathbb{N}$. Обозначим $f(x) = = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Так как $f_n(0) = f_n(1) = 0$, то и $f(0) = f(1) = 0$. Далее, при $x\in(0\,,\,1)$ имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x\lim_{n\to\infty}\left[n^2\cdot(1-x^2)^n\right] = 0\,.$$

Итак, $f(x)\equiv 0$, и значит, $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Однако

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = n^2\int\limits_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{n^2}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{n^2}{2(n+1)}(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{n^2}{2(n+1)} \to +\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty\,.$$

Если же взять $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, то опять будет $f(x)\equiv 0$, откуда $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$, однако

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = n\int\limits_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac12 \qquad n\to\infty\,.$$

Таким образом, в обоих случаях имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx\,.$$

Приведенные примеры показывают, что беззаботная перестановка пределов может приводить к ошибкам. Одна из причин такого рода явлений заключается в том, что поточечная сходимость является слишком слабой для того, чтобы обеспечить выполнение нужных нам равенств. В связи с этим мы введем новый тип сходимости (равномерную сходимость) и с ее помощью получим положитнльные результаты.

§ 2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

1. Равномерная сходимость. Критерии

Определение 5. *Функциональная последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется сходящейся равномерно на множестве* E *к функции* $f\,:\,E\longrightarrow\mathbb{C}$, *если*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\quad\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\quad\forall n\geqslant n_\varepsilon\quad\forall z\in E\;:\;|f_n(z)-f(z)|\leqslant\varepsilon\,. \tag{17.3}$$

Функциональный ряд называется сходящимся равномерно на множестве E, *если этим свойством обладает последовательность его частичных сумм.*

Для равномерной сходимости последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ к функции f на множестве E иногда будем использовать следующее обозначение: $f_n\rightrightarrows f$ на E. Чтобы лучше пояснить смысл понятия равномерной сходимости, перепишем определенеие понятия поточечной сходимости последовательнсти $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ к функции f в форме, аналогичной (17.3):

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\quad\forall z\in E\quad\exists n_{\varepsilon,z}\in\mathbb{N}\quad\forall n\geqslant n_{\varepsilon,z}\;:\;|f_n(z)-f(z)|\leqslant\varepsilon\,. \tag{17.4}$$

Сравнивая (17.3) и (17.4), заключаем следующее. Если выполнено условие (17.3), то выполнено и условие (17.4), где следует положить $n_{\varepsilon,z}:=n_\varepsilon$. Предполагая, что выполнено условие (17.4), рассмотрим $\sup\limits_{z\in E}n_{\varepsilon,z}$. Если $\sup\limits_{z\in E}n_{\varepsilon,z}\in\mathbb{N}$, то, полагая $n_\varepsilon := \sup\limits_{z\in E} n_{\varepsilon,z}$, получим, что условие (17.4) переходит в условие (17.3). Если же $\sup\limits_{z\in E} n_{\varepsilon,z} = +\infty$, то из условия (17.4) не вытекает условие (17.3). Итак, из равномерной сходимости вытекает поточечная. Обратное, однако, неверно, что будет показано ниже на примерах. Эти факты иногда выражают, говоря, что *равномерная сходимость сильнее поточечной.* В тех случаях, когда поточечная сходимость имеет место, а равномерная — нет, говорят о *неравномерной сходимости.*

Рассмотрим **примеры** исследования функциональных последовательностей на равномерную сходимость.

1) Пусть $f_n(x) := \dfrac{1}{x^2+n}$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Так как

$$0 \leqslant \frac{1}{x^2+n} \leqslant \frac{1}{n},$$

то, задавая $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ и беря $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, такое, что $n_\varepsilon \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, получим при $n\geqslant n_\varepsilon$:

$$\frac{1}{x^2+n} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда заключаем, что $\dfrac{1}{x^2+n} \rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$.

2) Пусть теперь $f_n(x) = x^n$ при $x\in[0,1]$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 1, \\ 0 & \text{при } x\in[0,1). \end{cases}$$

Таким образом, данная последовательность $(x^n)_{n=0}^\infty$ сходится на $[0,1]$ поточечно к разрывной функции f. Покажем, что равномерной сходимости здесь нет. Предполагая противное и задавая $\varepsilon\in(0, 1/2)$, имеем

$$\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geqslant n_\varepsilon\ \ \forall x\in[0,1]\ :\ |x^n - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Полагая в последнем неравенстве $x = \sqrt[n]{2\varepsilon}\in(0,1)$, приходим к противоречию: $2\varepsilon\leqslant\varepsilon$.

3) Рассматривая ту же последовательность $(x^n)_{n=1}^\infty$ на отрезке $[0,r]$, где $r\in(0,1)$, получим $x^n\rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$. В самом деле, задавая $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ и беря $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ так, чтобы было $r^{n_\varepsilon}\leqslant\varepsilon$, при $n\geqslant n_\varepsilon$ получим

$$x^n \leqslant r^n \leqslant r^{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

4) Рассмотрим последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

При каждом фиксированном значении переменного $x > 0$ имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+nx} = 0$. Таким образом, f_n сходится к нулю *поточечно.* Покажем, что эта сходимость — *неравномерная.* Предполагая противное, имеем:

$$\forall \varepsilon \in (0\,,\,1)\ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall \geqslant n_\varepsilon\ \ \forall x > 0\ :\ \frac{1}{1+nx} \leqslant \varepsilon\,.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x \to +0$, получим $1 \leqslant \varepsilon$, что противоречит выбору $\varepsilon \in (0\,,\,1)$.

Переходя к изложению более содержательных фактов о равномерной сходимости, начнем с критериев.

Теорема 1 (критерий Коши). *Равномерная сходимость функциональной последовательности* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *на множестве* E *равносильна выполнению следующего условия:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall z \in E\ \ \forall m, n \geqslant n_\varepsilon\ :\ |f_m(z) - f_n(z)| \leqslant \varepsilon\,. \quad (17.5)$$

◀ Предположим, что $f_n \rightrightarrows f$ на E. Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, запишем условие (17.3) в виде

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon\ \ \forall z \in E\ :\ |f_n(z) - f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \quad (17.6)$$

Заменяя здесь n на m, получим

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall m \geqslant n_\varepsilon\ \ \forall z \in E\ :\ |f_m(z) - f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \quad (17.7)$$

Используя (17.6) и (17.7), $\forall m, n \in \mathbb{N}$ и $\forall z \in E$ имеем

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant |f_m(z) - f(z)| + |f(z) - f_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

т. е. выполняется условие (17.5).

Обратно, предположим, что выполнено условие (17.5). Оно показывает, что числовая последовательность $(f_n(z))_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию критерия Коши. Значит, существует такое число $f(z)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Соответствие $z \longmapsto f(z)$ задает функцию $f\ :\ E \longrightarrow \mathbb{C}$, такую, что f_n сходится поточечно к f. Переходя в (17.5) к пределу при $m \to \infty$, видим, что (17.5) переходит в (17.3). Поэтому $f_n \rightrightarrows f$ на E. ▶

Применительно к функциональным рядам критерий Коши формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Равномерная сходимость функционального ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *на множестве* E *равносильна выполнению следующего условия*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall z \in E \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;:\; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leqslant \varepsilon\,. \tag{17.8}$$

Иногда используется следующий критерий.

Теорема 3. *Предположим, что последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится поточечно к функции* f *на множестве* E. *Обозначим* $M_n := \sup\limits_{z\in E} |f(z) - f_n(z)|$. *Сходимость* f_n *к* f *будет равномерной тогда и только тогда, когда* $M_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

◀ Предположим, что $f_n \rightrightarrows f$ на E, т. е. выполнено условие (17.3). беря в нем sup по всем $z \in E$, получим

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;:\; 0 \leqslant M_n \leqslant \varepsilon\,, \tag{17.9}$$

что равносильно утвержлдению $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Обратно, пусть выполнено условие (17.9). Тогда получим

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall z \in E \;:\; |f_n(z) - f(z)| \leqslant M_n \leqslant \varepsilon\,,$$

т. е. выполнено условие (17.3). ▶

Сформулируем аналогичный критерий для рядов.

Теорема 4. *Предположим, что функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится поточечно на множестве* E. *Положим*

$$M_n := \sup \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(z) \right|.$$

Сходимость ряда будет равномерной на E, *если и только если* $M_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Полезными являются теоремы о равномерной сходимости тех или иных комбинаций равномерно сходящихся последовательностей (или рядов). Приведем здесь две теоремы такого рода. Доказательства опускаем ввиду их очевидности.

Теорема 5. *Если все члены равномерно сходящейся на E последовательности (или ряда) умножить на одну и ту же ограниченную на E функцию, то в результате получится равномерно сходящаяся последовательность (или ряд).*

Теорема 6. *Сумма конечного числа равномерно сходящихся последовательностей (или рядов) есть равномерно сходящаяся последовательность (или ряд).*

2. Признак Вейерштрасса и его следствие

Переходим к изложению достаточных условий равномерной сходимости, наиболее популярным из которых является *мажорантный признак Вейерштрасса.* Предварительно введем понятие мажорантного ряда.

Определение 6. *Положительный числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *называется мажорантным на множестве E для функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, *если* $\forall z \in E \;\; \forall n \in \mathbb{N} \; : \; |f_n(z)| \leqslant c_n$.

Теорема 7. *Предположим, что для функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *существует мажорантный на E сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на E.*

◀ Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Так как мажорантный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то по критерию Коши имеем

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall p \in \mathbb{N} \; : \; \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \leqslant \varepsilon . \tag{17.10}$$

Учитывая свойство мажорантности, получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \leqslant \varepsilon .$$

Итак, имеем

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in E \ : \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \leqslant \varepsilon \,,$$

т. е. выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости данного ряда. ▶

Примеры. 1) Исследовать на равномерную сходимость следующие функциональные ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \,, \tag{17.11}$$

предполагая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится.

◀ Так как

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} |a_k \cos kx| \leqslant |a_k| \,, \\ |a_k \sin kx| \leqslant |a_k| \,, \end{cases}$$

то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ есть сходящийся ряд, мажорантный для рядов (17.11). Применяя признак Вейерштрасса, заключаем, что оба ряда (17.11) сходятся равномерно на $\mathbb{R}$. ▶

2) Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ при $x \in \mathbb{R}_+$.

◀ Очевидно, что данный ряд — знакочередующийся, а модуль его n-го члена $\dfrac{1}{n+x}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, монотонно убывая. Отсюда на основании признака Лейбница заключаем, что данный ряд сходится поточечно при $x \in \mathbb{R}_+$.

Желая исследовать этот ряд на равномерную сходимость, применим признак Лейбница к его остатку:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \right| \leqslant \frac{1}{n+x} \leqslant \frac{1}{n} \,.$$

Отсюда заключаем, что

$$M_n := \sup \left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \,,$$

и значит, данный ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}_+$ в силу теоремы 17.

Так как $\dfrac{1}{n+x} \sim \dfrac{1}{n}$ при $n \to \infty$, то сходимость данного ряда — условная. Поэтому для него не существует сходящегося мажорнтного ряда, т. е. к нему невозможно применить признак Вейерштрасса.

Этот пример показывает, что неверна теорема, обратная к признаку Вейерштрасса. Иначе говоря, из равномерной сходимости функционального ряда не вытекает существование у него сходящегося мажорантного ряда.

В заключение этого пункта приведем одно очевидное следствие из признака Вейерштрасса.

Теорема 8. *Если для функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *на множестве* E *выполнены все условия признака Вейерштрасса, то* $\forall z \in E$ *числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *сходится абсолютно, а функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ *сходится равномерно на* E.

3. Признаки Дирихле и Абеля

Переходя к изложению признаков, применимых не только к абсолютно, но и к условно сходящимся функциональным рядам, станем рассматривать функциональные ряды следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cdot b_k(x) = a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x) + \ldots + a_n(x)b_n(x) + \ldots , \tag{17.12}$$

где x — вещественная переменная.

Определение 7. *Функциональная последовательность* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется равномерно ограниченной на множестве* E, *если*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in E \ : \ |\varphi_n(z)| \leqslant M .$$

Теорема 9 (признак Дирихле). *Предположим, что последовательность частичных сумм функционального ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ *равномерно ограничена на множестве* E, *а функциональная последовательность* $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *равномерно на* E *стремится* *к нулю и не возрастает при каждом* $x \in E$. *Тогда функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) \cdot b_k(x)$ *содится равномерно на* E.

◀ В доказательстве будем использовать неравенство Абеля в следующей форме:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \beta_k\right| \leqslant B \cdot \alpha_1\,, \quad \text{где} \quad \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_p > 0\,,\ B = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |\beta_1 + \ldots + \beta_k|\,.$$

По условию $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in E \quad : \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant M$. Желая применить для доказательства теоремы критерий Коши, зададим произвольно $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы было:

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall x \in E \ :\ 0 \leqslant a_n(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\,.$$

Учитывая приведенное выше неравенство Абеля и полагая в нем $\alpha_k := a_{n+k}(x)$, $\beta_k := b_{n+k}(x)$, имеем $\forall x \in E \ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \ \ \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) b_{n+k}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant a_{k+1}(x) \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \left|\sum_{k=n+1}^{n+j} b_k(x)\right| =$$

$$= a_{k+1}(x) \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \left|\sum_{k=1}^{n+j} b_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot (M + M) = \varepsilon\,.$$

Отсюда на основании критерия Коши заключаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно на E. ▶

В качестве **примера** на применение признака Дирихле снова рассмотрим функциональные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx\,, \tag{17.13}$$

в предположении[2] $a_k \searrow 0$ при $k \to \infty$, более слабом, чем выше.

[2] Символ $a_k \searrow 0$ означает, что $a_k \to 0$, *не возрастая.*

Рассматривая числовую последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ как функциональную (т. е. состоящую из постоянных функций $a_k(x) \equiv a_k$), заключаем, что она, не возрастая, равномерно стремится к нулю. Полагая, далее, $b_k(x) := \cos kx$ и $b_k(x) := \sin kx$ соответственно, оценим сверху частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(x)$. Предварительно произведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx &= \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin kx = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] = \\
&= \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\,,
\end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\,. \tag{17.14}$$

Аналогично предыдущему имеем

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx &= \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}\,,
\end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,. \tag{17.15}$$

Из равенств (17.14) и (17.15) находим

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \leqslant \frac{2}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leqslant \frac{2}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,.$$

Отсюда заключаем, что частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\cos kx$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin kx$ равномерно ограничены на любом компакте, не содержашем нулей функции

$\sin\dfrac{x}{2}$ т. е. точек вида $2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, на таких компактах имеет место равномерная сходимость обоих рядов (17.13).

Теорема 10 (признак Абеля). *Предположим, что функциональная последовательность $(a_k(x))_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на E и монотонна при каждом $x \in E$, а функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ сходится равномерно на E. Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E.*

◀ Так как в этой теореме нет конкретного предположения о возрастании или убывании последовательности $(a_k(x))_{k=1}^{\infty}$, то неравенство Абеля должно быть взято в такой форме:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \alpha_k\beta_k\right| \leqslant B\cdot(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|)\,, \quad \text{где} \quad B = \max_{1\leqslant k\leqslant p} |\beta_1 + \ldots + \beta_k|\,.$$

По условию нам дано, что

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall x \in E \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ : \ |a_k(x)| \leqslant M\,.$$

Желая применить критерий Коши, зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и, пользуясь равномерной сходимостью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$, найдем такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ : \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\,.$$

При тех же значениях n, p, x имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x)b_{n+k}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant p}\left|\sum_{k=1}^{j} b_{n+k}(x)\right|\cdot(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}(x)|) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant p}\left|\sum_{k=n+1}^{n+j} b_k(x)\right|\cdot(|a_{n+1}(x)|+2|a_{n+p}(x)|) \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\cdot(M+2M) = \varepsilon\,.$$

Отсюда на основании критерия Коши заключаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно на E. ▶

§ 3. Равномерная сходимость, непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость

1. Основная лемма

Теорема 11 («основная лемма»). *Предположим, что:*

(a) *функциональная последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится равномерно на множестве* E*;*

(b) *при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *существует конечный предел* $\lim\limits_{z \to z_0} f_n(z)$, *где* z_0 *— точка прикосновения множества* E.

Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\lim\limits_{z \to z_0} f_n(z)\right]$, *причем*

$$\lim_{z \to z_0} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(z)\right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{z \to z_0} f_n(z)\right] \tag{17.16}$$

◀ Вводя обозначения $f(z) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)$, $\quad A_n := \lim\limits_{z \to z_0} f_n(z)$, перепишем равенство (17.16) в следующем равносильном виде:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{n \to \infty} A_n\,. \tag{17.17}$$

Чтобы доказать это равенство, установим сначала существование конечного предела $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$. С этой целью запишем условие критерия Коши равномерной сходимости последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall z \in E \;:\; |f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \varepsilon\,. \tag{17.18}$$

Переходя здесь к пределу при $z \to z_0$, получим

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \;:\; |A_n - A_m| \leqslant \varepsilon\,, \tag{17.19}$$

т. е. числовая последовательность $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Отсюда на основании критерия Коши сходимости числовых последовательностей следует, что $\exists \lim\limits_{n \to \infty} A_n =: A \in \mathbb{C}$. Таким образом, равенство (17.17) можно переписать в следующем равносильном виде:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A\,. \tag{17.20}$$

Чтобы его доказать, воспользуемся неравенством треугольника

$$|f(z) - A| \leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - A_n| + |A_n - A|\,. \tag{17.21}$$

Задавая произвольно $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такой, что $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ и $\forall z \in E$ выполняются неравенства

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{17.22}$$

Выполнение первого из этих неравенств обеспечивается равномерной сходимосью f_n к f, а второго — сходимостью A_n к A. Учитывая, далее, что $\lim\limits_{z\to z_0} f_{n_\varepsilon}(z) = A_{n_\varepsilon}$, найдем окрестность U_ε точки z_0 такую, что

$$\forall z \in U_\varepsilon \cap E \ : \ |f_{n_\varepsilon}(z) - A_{n_\varepsilon}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{17.23}$$

Полагая в неравенстве (17.21) $n = n_\varepsilon$ и учитывая оценки (17.22) и (17.23), при $z \in U_\varepsilon$ имеем

$$|f(z) - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

что равносильно равенству (17.20). ▶

2. Равномерная сходимость и непрерывность

Теорема 12. *Предположим, что:*

(a) *функциональная последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве E к функции f;*

(b) *все функции f_n непрерывны в точке $z_0 \in E$.*

Тогда предельная функция f непрерывна в точке z_0.

◀ Условие непрерывности функции f_n в точке z_0 можно выразить равенством $\lim\limits_{z\to z_0} f_n(z) = f_n(z_0)$, которое вместе с условием (a) означает, что выполнены все условия «основной леммы». Применяя ее, заключаем, что

$$\lim_{z\to z_0}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{z\to z_0} f_n(z)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0)\,. \tag{17.24}$$

Вводя предельную функцию $f(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, из (17.24) находим $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, т. е. функция f непрерывна в точке z_0. ▶

Переформулируем теорему 12 применительно к функциональным рядам.

Теорема 13. *Предположим, что:*

(a) *функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *сходится равномерно на* E*;*

(b) *все члены ряда непрерывны в точке* $z_0 \in E$*.*

Тогда сумма ряда непрерывна в точке z_0*.*

Примеры. 1) Исследовать на равномерную сходимость при $x \in \mathbb{R}$ следующий функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0\,. \end{cases} \tag{17.25}$$

◀ Все члены данного ряда, очевидно, непрерывны на $\mathbb{R}$, а его сумма разрывна в точке $x = 0$. Если предположить, что он сходится равномерно на $\mathbb{R}$, то его сумма должна быть непрерыной на $\mathbb{R}$ в силу теоремы 13. Полученное противоречие означает, что данный ряд сходится неравномерно на $\mathbb{R}$. ▶

2) Рассмотрим последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n(x)\dfrac{1}{1+nx}$, непрерывных на $\mathbb{R}_+$. Она сходится поточечно к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$. Эта сходимость — неравномерная, так как $\sup\limits_{x>0} f_n(x) = 1$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Последний пример показывает, что непрерывность всех членов функциональной последовательности и непрерывность предельной функции еще не гарантируют равномерную сходимость функциональной последовательности. Однако при некоторых дополнительных ограничениях равномерная сходимость имеет место, как показывает следующая теорема.

Теорема 14 (Дини). *Предположим, что:*

(a) *множество* E *— компактное;*

(b) *функциональная последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *состоит из непрерывных на* E *функций и сходится поточечно к непрерывной на* E *функции* f*;*

(c) *при каждом* $x \in E$ *числовая последовательность* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *монотонна.*

Тогда f_n *сходится к* f *равномерно на* E*.*

◀ Обозначая $g_n := |f_n - f|$, имеем $\forall x \in E \;:\; g_(x) \searrow 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $g_n \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ на E. С этой целью зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В силу поточечной сходимости последовательности $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ к нулю имеем

$$\forall t \in E \;\; \exists n_{\varepsilon,t} \in \mathbb{N} \; : \; 0 \leqslant g_{n_{\varepsilon,t}}(t) < \varepsilon \, .$$

Так как функция $g_{n_{\varepsilon,t}}$ непрерывна, то по локальному свойству непрерывных функций существует открытая окрестность $U(t)$ точки t, такая, что

$$\forall x \in U(t) \cap E \; : \; 0 \leqslant g_{n_{\varepsilon,t}}(x) < \varepsilon \, .$$

Совокупность всех таких окрестностей $\{U(t) \mid t \in E\}$ является, очевидно, открытым покрытием множества E. Так как множество E компактное, то это покрытие содержит конечное подпокрытие $\{U(t_1)\,, \,\ldots\,, U(t_n)\}$, $\cup_{k=1}^{N} U(t_k) \supset E$. Теперь положим $n_\varepsilon := \max[n_{\varepsilon,t_1}\,, \,\ldots\,, n_{\varepsilon,t_N}]$. Тогда $\forall\; x \in E \;\; \exists\; U(t_k)$, такое, что $x \in U(t_k)$ и $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ в силу невозрастания функции g имеем

$$|f_n(x) - f(x)| = g_n(x) \leqslant g_{n_\varepsilon}(x) \leqslant g_{n_{\varepsilon,t_k}}(x) < \varepsilon \, ,$$

т. е.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall x \in E \; : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \, ,$$

и, значит, $f_n \rightrightarrows f$ на E. ▶

Замечание. Условие компактности множества E в теореме Дини существенно. Например, функциональная последовательность $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ монотонна и на полуиртервале $[0\,,\,1)$ сходится поточечно к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$. Эта содимость, однако, неравномерная. Причина — некомпактность полуинтервала $[0\,,\,1)$.

Сформулируем без доказательства теорему Дини для функциональных рядов.

Теорема 15 (Дини). *Предположим, что:*

(a) *множество E — компактное;*

(b) *все члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывны и неотрицательны на E, а ряд сходится поточечно к непрерывной на E сумме f.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к сумме f равномерно на E.

3. Равномерная сходимость и интегрируемость

Теорема 16. *Если последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *интегрируемых на* $[a\,,\,b]$ *функций* f_n *сходится равномерно на* $[a\,,\,b]$, *то предельная функция интегрируема на* $[a\,,\,b]$, *и справедливо равенство*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\,. \tag{17.26}$$

◀ Вводя обозначение $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, перепишем равенство (17.26) в следующем равносильном виде:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\,. \tag{17.27}$$

Чтобы установить интегрируемость предельной функции, возьмем разбиение с отмеченными точками $(T,\boldsymbol{\xi})$ отрезка $[a\,,\,b]$, где $T=\{x_0,x_1,\dots x_n\}$ — разбиение, $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ — отмеченные точки; $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$. Будем рассматривать интегральные суммы

$$\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

и суммы Дарбу

$$s(f,T)=\inf_{\boldsymbol{\xi}}\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})\,,\qquad S(f,T)=\sup_{\boldsymbol{\xi}}\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi})\,.$$

Беря две серии отмеченных точек $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\xi}''$ и применяя неравенство треугольника, имеем

$$\begin{gathered}\left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}')-\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}'')\right| \leqslant \left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}')-\sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}')\right| + \\ + \left|\sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}')-\sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}'')\right| + \left|\sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}'')-\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}'')\right|\,.\end{gathered} \tag{17.28}$$

Желая оценить сверху правую часть этого неравенства, зададим $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. Пользуясь равномерной сходимостью $f_n\rightrightarrows f$ при $n\to\infty$ на $[a\,,\,b]$, найдем номер $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, такой, что

$$\forall x\in[a\,,\,b]\;\;\forall n\geqslant n_\varepsilon\;;\;|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,. \tag{17.29}$$

Тогда при $n \geqslant n_\varepsilon$ будет

$$\left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}') - \sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}')\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k') - f_n(\xi_k')]\Delta x_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k') - f_n(\xi_k')|\Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (17.30)$$

Аналогично при $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$\left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}'') - \sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}'')\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \quad (17.31)$$

Отсюда и из (17.28) следует, что

$$\left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}') - \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}'')\right| \leqslant \left|\sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}') - \sigma(f_n;T,\boldsymbol{\xi}'')\right| + \frac{2\varepsilon}{3} \leqslant$$

$$\leqslant S(f_n,T) - s(f_n,T) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Так как f_n интегрируема, то $\exists\delta \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$\forall T \;:\; \lambda(T) \leqslant \delta \quad\Longrightarrow\quad S(f_n,T) - s(f_n,T) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

и, значит, при $\lambda(T) \leqslant \delta$ имеем

$$\left|\sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}') - \sigma(f;T,\boldsymbol{\xi}'')\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Беря здесь sup по всем $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\xi}''$, получим $S(f,T) - s(f,T) \leqslant \varepsilon$, т. е. для функции f выполнено условие критерия Дарбу интегрируемости. Значит, f интегрируема.

И, наконец, используя (17.29), при $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon, \quad (17.32)$$

откуда непосредственно следует равенство (17.27). ▶

Сформулируем соответствующую теорему для рядов.

Теорема 17. *Если все члены функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *интегрируемы, а ряд сходится равномерно на* $[a\,,\,b]$, *то сумма ряда интегрируема, и выполняется равенство*

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx\,.$$

Замечания. 1. Теорема 17 утверждает, таким образом, что при выполнении ее условий возможно почленное интегрирование функциональных рядов.

2. Если в теоремах 16 и 17 предположить, что все члены функциональной последовательности или ряда непрерывны на $[a\,,\,b]$, то в силу теорем 12 и 13 соответственно предельная функция или сумма ряда будет непрерывной, а значит, и интегрируемой на $[a\,,\,b]$ функцией. В этом случае из доказательства теоремы 16 можно удалить ту часть, где устанавливается интегрируемость предельной функции.

4. Равномерная сходимость и дифференцируемость

Теорема 18. *Предположим, что:*

(a) *все функции последовательности* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *дифференцируемы на отрезке* $[a\,,\,b]$;

(b) *числовая последовательность* $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ *сходится для некоторого* $x_0 \in [a\,,\,b]$;

(c) *последовательность производных функций* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *сходится равномерно на* $[a\,,\,b]$.

Тогда: функциональная последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится равномерно на* $[a\,,\,b]$, *предельная функция* $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *дифференцируема на* $[a\,,\,b]$, *и справедливо равенство*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\,. \tag{17.33}$$

◀ Используя критерии Коши сходимости числовой и функциональной последовательностей, имеем

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall t \in [a\,,\,b] \;\; : \\ \begin{cases} |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\,, \\ |f'_n(t) - f'_m(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\,. \end{cases} \tag{17.34}$$

Применяя, далее, теорему Лагранжа о конечных приращениях, при тех же значениях m , n и для любых x , $t \in [a\,,\,b]$ имеем

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))| \leqslant |x - t| \cdot \sup_{\xi} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \leqslant \\ \leqslant |x - t| \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{17.35}$$

Используя последнее неравенство, а также первое из неравенств (17.34), при тех же значениях m , n и для любого $x \in [a\,,\,b]$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + \\ + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \tag{17.36}$$

Отсюда на основании соответствующего критерия Коши заключаем, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на отрезке $[a\,,\,b]$. Введем обозначение для предельной функции $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Желая установить ее дифференцируемость в точке $x \in [a\,,\,b]$, введем в рассмотрение функции φ и φ_n, определяемые при $t \neq x$ следующими равенствами:

$$\varphi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{и} \quad \varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\,.$$

Используя предпоследнее неравенство (17.35), имеем

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \left| \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x} \right| = \\ = \frac{1}{|t - x|}\, |[f_n(t) - f_m(t)] - [f_n(x) - f_m(x)]| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Отсюда в силу критерия Коши следует, что последовательность $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на множестве $E := [a\,,\,b] \setminus \{x\}$. Далее,

$$\lim_{\substack{t\to x,\\ t\neq x}} \varphi_n(t) = \lim_{\substack{t\to x,\\ t\neq x}} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = f_n'(x)\,,$$

так как функции f_n дифференцируемы. Применяя к последовательности заданных на E функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ теорему 11 («основную лемму»), получим

$$\lim_{\substack{t\to x,\\ t\neq x}} \left[\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{\substack{t\to x,\\ t\neq x}} \varphi_n(t)\right]\,,$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{t\to x,\\ t\neq x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{\substack{t\to x,\\ t\neq x}} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\right]\,,$$

что равносильно равенству (17.33). ▶

§ 4. Использование равномерной сходимости в некоторых других вопросах анализа

1. Пример функции, всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой

Хорошо известно, что если функция дифференцируема, то она и непрерывна. Обратное неверно, т. е. существуют непрерывные функции, которые не дифференцируемы в отдельных точках. Однако вопрос, насколько мощным может быть множество всех таких точек, мы не рассматривали. Переходя к его рассмотрению, установим сначала один простой факт из дифференциального исчисления.

Лемма. *Если функция* $f\,;\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* x, *то для любых последовательностей* $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ *и* $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$, *таких,* *что* $\alpha_m \leqslant x < \beta_m$ *и* $\lim\limits_{m\to\infty}(\beta_m - \alpha_m) = 0$, *имеем*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = f'(x) \in \mathbb{R}. \tag{17.37}$$

◀ Предположим сначала, что при всех достаточно больших m выполняются строгие неравенства $\alpha_m < x < \beta_m$. Исходя из очевидных равенств

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} = \lim_{m\to\infty} \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} = f'(x),$$

получим следующее:

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} - f'(x) \right| = \\ &\qquad = \left| \left(\frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} - f'(x) \right) \frac{\beta_m - x}{\beta_m - \alpha_m} + \right. \\ &\qquad\quad \left. + \left(\frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} - f'(x) \right) \frac{x - \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} \right| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} - f'(x) \right| + \left| \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} - f'(x) \right| \to 0 \end{aligned}$$

при $m \to \infty$, откуда и вытекает равенство (17.37).

Если же существуют сколь угодно большие значения m, для которых $\alpha_m = x$, то имеем

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \begin{cases} \dfrac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}, & \alpha_m > x, \\ \dfrac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x}, & \alpha_m = x. \end{cases} \tag{17.38}$$

Согласно предыдущему, правая часть последнего равенства стремится к $f'(x)$ при $n \to \infty$. ▶

Теорема 19. *Существуют функции, непрерывные всюду на* $\mathbb{R}$, *и не дифференцируемые ни в одной точке.*

◀ Для доказательства достаточно предъявить один конкретный пример такой функции. Здесь будет приведен пример, принадлежащий голландскому алгебраисту Б. Л. ван дер Вардену.

Положим

$$\varphi(x) := \begin{cases} x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ 2-x \quad \text{при} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2\,, \end{cases}$$

и продолжим эту функцию на всю числовую ось по закону периодичности: $\varphi(x+2) \equiv \varphi(x)$. В результате получаем непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию φ, группа периодов которой совпадает с группой $2\mathbb{Z}$ всех четных чисел.

Используя функцию φ, определим новую функцию f, полагая

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \varphi\left(4^n \cdot x\right) \tag{17.39}$$

и покажем, что она обладает всеми свойствами, указанными в формулировке теоремы.

Так как $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, то функциональный ряд (17.39) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, и в силу признака Вейерштрасса сходится равномерно на $\mathbb{R}$. А так как, кроме того, все члены ряда (17.39) непрерывны на $\mathbb{R}$, то в силу теоремы 13 его сумма f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Для исследования функции f на дифференцируемость зафиксируем любое $x \in \mathbb{R}$ и определим последовательности $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ и $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$, полагая

$$\alpha_m := \frac{[4^m x]}{4^m}\,, \quad \beta_m := \frac{[4^m x]+1}{4^m}\,,$$

где $[\ldots]$ означает целую часть. Так как $[4^m x] \leqslant 4^m x < [4^m x]+1$, то $\alpha_m \leqslant x < \beta_m$, и $\beta_m - \alpha_m = \frac{1}{4^m} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, для последовательностей $(\alpha_m)_{m=1}^{\infty}$ и $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$ выполнены все условия леммы. Если бы функция f была дифференцируемой в точке x, то выполнялось бы и заключение леммы, т. е. соотношение (17.37). Однако ниже доказывается, что это соотношение выполняться не может.

Желая оценить величину (17.38), рассмотрим числа

$$4^n \alpha_m = 4^{n-m} \cdot [4^m x] \quad \text{и} \quad 4^n \beta_m = 4^{n-m} \cdot \left([4^m x]+1\right)\,, \tag{17.40}$$

где n — неотрицательное целое число.

Если $n > m$, то оба числа (17.40) — четные, а так как функция φ — периодическая с основным периодом 2, то $\varphi(4^n\beta_m) - \varphi(4^n\alpha_m) = 0$.

Если $n = m$, то $4^m\alpha_m = [4^m\alpha_m]$, $4^m\beta_m = [4^m\alpha_m] + 1$ — последовательные целые числа, поэтому $\varphi(4^m\beta_m) - \varphi(4^m\alpha_m) = \pm 1$, и на интервале $([4^m\alpha_m]\ , [4^m\alpha_m] + 1)$ нет целых чисел.

Если же $n < m$, то из предыдущего утверждения вытекает, что на интервале $(4^n\alpha_m\ , 4^n\beta_m) = \left(\frac{[4^m x]}{4^{m-n}}\ , \frac{[4^m x]+1}{4^{m-n}}\right)$ нет целых чисел, т. е. оба конца интервала лежат на линейном участке графика функции φ. Поэтому $\varphi(4^n\beta_m) - \varphi(4^n\alpha_m) = \pm\frac{1}{4^{m-n}}$, так как угловой коэффициент любого линейного участка графика функции φ равен либо $(+1)$, либо (-1). Итак,

$$|\varphi(4^n\beta_m) - \varphi(4^n\alpha_m)| = \begin{cases} 0\,, & n > m\,, \\ 4^{n-m}\,, & n \leqslant m\,. \end{cases} \tag{17.41}$$

Учитывая (17.40) и (17.41), имеем

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| = 4^m \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (\varphi(4^n\beta_m) - \varphi(4^n\alpha_m))\right| =$$

$$= 4^m \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n (\varphi(4^n\beta_m) - \varphi(4^n\alpha_m))\right| = 4^m \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n (\pm 4^{n-m})\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{m} (\pm 3^n)\right| \geqslant 3^m - (3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 1) = 3^m - \frac{3^m - 1}{2} > \frac{3^m}{2}\,.$$

Итак,

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| > \frac{3^m}{2}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\lim_{m\to\infty} \left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| = +\infty\,,$$

что противоречит соотношению (17.37). ▶

2. Теорема Стоуна — Вейерштрасса

Важной проблемой терии численных методов является проблема *табулирования функций*, т. е. проблема вычисления значений функций с любой наперед заданной точностью. Для многочленов, т. е. для функций вида $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, эту проблему можно считать решенной, т. к. разработаны достаточно эффективные алгоритмы их табулирования. Поэтому с точки зрения проблемы табулирования принципиальную важность имеет проблема приближенного представления произвольных функций многочленами. Пример такого приближения дает формула Тейлора (приближенное представление функции f ее многочленом Тейлора в окрестности данной точки). Более общую задачу о равномерном приближении многочленами заданной непрерывной на отрезке $[a\,, b]$ функции решает следующая теорема Стоуна — Вейерштрасса[3].

Теорема 20 (Стоун — Вейерштрасс). *Для любой функции f, непрерывной на отрезке $[a\,, b] \subset \mathbb{R}$, существует последовательность многочленов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, которая при $n \to \infty$ сходится равномерно на $[a\,, b]$ к функции f.*

◀ Функция $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ и обратная к ней функция $x = a + (b-a)t$ реализуют линейный гомеоморфизм между отрезками $[a\,, b]$ и $[0\,, 1]$. При этом многочленам от x соответствуют многочлены от t, а непрерывным функциям от x — непрерывные функции от t. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что уже исходная функция f задана на отрезке $[0\,, 1]$.

Далее, функция g, заданная равенством

$$g(x) := f(x) - f(0) - [f(1) - f(0)] \cdot x\,,$$

отличается от функции f на многочлен $f(0) + [f(1) - f(0)]x$ и, кроме того, $g(0) = g(1) = 0$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что уже для исходной функции f выполняется равенство $f(0) = f(1) = 0$.

[3] *Стоун* Маршалл Харви (р. 1903) — американский математик. *Вейерштрасс* Карл Теодор Вильгельм (1815—1897) — знаменитый немецкий математик, впервые установивший теорему о приближении непрерывных функций многочленами и построивший первый пример фуункции, всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой.

Доопределим функцию f на всю числовую ось нулём, т. е. полагая $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [0\,,\,1] \;:\; f(x) :\equiv 0$. Доопределенная таким образом функция f, очевидно, непрерывна и, более того, равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, т. е.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \; \forall x, y \in \mathbb{R} \;:\; |x-y| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{17.42}$$

Равномерная непрерывность при $x, y \in [0\,,\,1]$ имеет место в силу теоремы Кантора, а при $x, y \in \mathbb{R}$ — в силу того, что доопределение функции f нулём не увеличивает ее колебание.

Введем в рассмотрение последовательность $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ многочленов, заданных равенствами

$$Q_n(x) := c_n \cdot (1-x^2)^n\,,$$

где постоянные c_n выбраны так, чтобы было

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1\,.$$

Нам потребуется оценка сверху для c_n. Чтобы ее найти, произведем оценку снизу следующего интеграла, используя четность, неотрицательность подынтегральной функции и неравенство Бернулли:

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^n dx \geqslant 2 \int\limits_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \geqslant$$

$$\geqslant 2 \int\limits_{0}^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)dx = 2\left(x - \frac{nx^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{n}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{n}{3n\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Используя этот результат, находим

$$1 = \int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)dx = c_n \int\limits_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n dx > \frac{c_n}{\sqrt{n}}\,,$$

откуда $c_n < \sqrt{n}$. Из этого неравенства следует, что $\forall\delta \in (0\,,\,1)$ имеем

$$\delta \leqslant |x| \leqslant 1 \implies 0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n\,.$$

Так как $\sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n \to 0$ при $n \to \infty$, то $Q_n \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ на множестве $\bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| \delta \leqslant |x| \leqslant 1\bigr\}$.

Положим теперь

$$P_n(x) := \int\limits_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt \quad \text{при} \quad x \in [0\,,\,1]\,.$$

Учитывая, что $f(x+t) \equiv 0$ вне полосы $0 \leqslant x+t \leqslant 1$, имеем

$$P_n(x) = \int\limits_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \int\limits_{0}^{1} f(\tau)Q_n(\tau - x)d\tau\,. \tag{17.43}$$

Из этого представления видно, что P_n есть многочлен от x (так как «ядро» $Q_n(\tau - x)$ последнего интеграла в (17.43) является многочленом).

Чтобы показать, что $P_n \rightrightarrows f$ на $[0\,,\,1]$, зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Найдем $\delta \in (0\,,\,1)$ так, чтобы выполнялось условие (17.42). Обозначая $M := \max|f(x)| \in \mathbb{R}$, найдем $n_\delta \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall n \geqslant n_\delta$ было: $\sqrt{n} \cdot (1-\delta^2)^n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{8M}$. Учитывая, что $Q_n(x) \geqslant 0$ при $x \in [0\,,\,1]$, произведем заключительную оценку при $n \geqslant n_\delta$:

$$|P_n(x) - f(x)| = \left|\int\limits_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt - f(x)\int\limits_{-1}^{1} Q_n(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{-1}^{1} \left[f(x+t) - f(x)\right] Q_n(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{-1}^{1} \left|f(x+t) - f(x)\right| Q_n(t)dt =$$

$$= \left(\int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1} \right) |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \leqslant$$

$$\leqslant 2M \cdot \frac{\varepsilon}{8M} + \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{8M} = \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Замечание. График многочлена $t \longmapsto Q_n(t)$ при больших значениях n имеет ярко выраженный максимум в точке $t = 0$, а вне окрестности этой точки равномерно приближается к оси абсцисс. Поэтому при больших n и малых δ выполняются следующие приближенные равенства

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)dt \approx \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) Q_n(t)dt \approx$$

$$\approx f(x) \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt \approx f(x) \int_{-1}^{1} Q_n(t)dt = f(x)\,,$$

т. е. $P_n(x) \approx f(x)$. Иначе говоря, здесь просматривается «механизм» того, что $P_n \rightrightarrows f$ на $[0\,,\,1]$.

§ 5. Степенные ряды

1. Общие свойства степенных рядов и их сумм

В этом параграфе будет продолжено изучение степенных рядов, начатое в главе 7. Сначала напомним определение понятия степенного ряда и некоторые свойства степенных рядов.

Определение 8. *Степенны́м рядом с центром в точке z_0 называется функциональный ряд следующего вида:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = c_0 + c_1 \cdot (z - z_0) + \ldots + c_n \cdot (z - z_0)^n + \ldots\,, \quad (17.44)$$

где $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ — *числовая последовательность, называемая последовательностью коэффициентов данного степенного ряда.*

Было установлено, что для каждого степенного ряда существует величина $r \in [0\,, +\infty]$ (так называемый *радиус сходимости*), вычисляемая по следующей формуле Коши — Адамара:

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{|c_n|}}\,, \tag{17.45}$$

такая, что при $|z - z_0| < r$ ряд (8) сходится абсолютно, а при $|z-z_0| > r$ — расходится. Открытое множество $\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z - z_0| < r\bigr\}$ называется *кругом сходимости* степенного ряда (17.44). Если рассматривается степенной ряд (17.44) от вещественного переменного z, то открытое множество $\bigl\{z \in \mathbb{R} \bigm| |z - z_0| < r\bigr\}$ называется *интервалом сходимости* этого степенного ряда.

Теперь применим к степенным рядам результаты, полученные в этой главе, предполагая, что радиусы сходимости всех рассматриваемых степенных рядов положительны[4].

Теорема 21. *Степенной ряд сходится равномерно на любом компакте, лежащем внутри его круга (интервала) сходимости, а его сумма непрерывна внутри круга (интервала) сходимости.*

◀ Пусть K — компакт, лежащий внутри круга (интервала) сходимости степенного ряда (17.44), а $\lambda := \max\limits_{z\in K}|z - z_0|$. Число λ существует в силу теоремы Вейерштрасса о максимуме функции, непрерывной на компакте, причем $\lambda \in (0\,, r)$. Значит, положительный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot \lambda^n$ сходится и при $z \in K$ мажорирует степенной ряд (17.44). Применяя мажорантный признак Вейерштрасса (теорему 7), заключаем, что ряд (17.44) сходится равномерно на K. Так как, кроме того, все члены ряда (17.44) непрерывны, то в силу теоремы 12 его сумма непрерывна на K, а так как компакт K взят произвольно, то непрерывность имеет место во всех точках круга (интервала) сходимости. ▶

Теорема 22. *Степенной ряд*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \cdot x^{n-1}\,, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{17.46}$$

[4] В противном случае, т. е. при $r = 0$, степенной ряд сходится только в центре z_0, а его круг (интервал) сходимости — пустое множество $\varnothing$.

можно почленно интегрировать по любому отрезку $[0\,,x]$, *лежащему внутри интервала сходимости, т. е.*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} \cdot x^n\,, \tag{17.47}$$

причем оба ряда (17.46) *и* (17.47) *имеют один и тот же радиус сходимости.*

◀ По предыдущей теореме сумма степенного ряда непрерывна, а значит, и интегрируема по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости. На основании теоремы 17 возможно почленное интегрирование, т. е. из равенства (17.46) вытекает равенство (17.47). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|c_{n-1}|}{n}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n-1}}\,,$$

а это означает равенство радиусов сходимости рядов (17.46) и (17.47). ▶

Теорема 23. *Сумма степенного ряда*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n + \ldots \tag{17.48}$$

дифференцируема во всех точках его интервала сходимости, и возможно почленное дифференцирование, т. е.

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + \ldots + nc_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots\,, \tag{17.49}$$

причем оба ряда имеют один и тот же радиус сходимости.

◀ Оба ряда (17.48) и (17.49) — степенные, а в силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ их интервалы сходимости совпадают. По теореме 21 оба ряда сходятся равномерно на любом компакте, лежащем на интервале сходимости. Дифференцируемость суммы f и равенство (17.49) имеют место в силу теоремы 18. ▶

Следствие 1. *Сумма степенного ряда* (17.48) *бесконечно дифференцируема во всех точках его интервала сходимости, и* $\forall k \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot c_n\cdot(x-x_0)^{n-k}\,, \tag{17.50}$$

причем полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (17.48).

◀ Достаточно применить теорему 23 к равенству (17.49), затем индукцию по k. ▶

Следствие 2. *Степенной ряд с центром в точке x_0 совпадает с рядом Тейлора с центром в точке x_0 суммы этого ряда.*

◀ Пусть функция f разложена в степеной ряд (17.48). Полагая в этом равенстве $x = x_0$, получим $f(x_0) = c_0$. Полагая в равенстве (17.49) $x = x_0$, получим $f'(x_0) = c_1$. Полагая в равенстве (17.50) $x = x_0$, получим $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot c_k$, откуда $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Таким образом, коэффициенты степенного ряда (17.48) равны соответствующим коэффициентам ряда Тейлора $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$. ▶

2. Вторая теорема Абеля и ее следствия

Теорема 24 («вторая» теорема Абеля). *Если степенной ряд сходится в граничной точке его интервала сходимости, то сумма ряда непрерывна в этой точке.*

◀ Пусть радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ равен $r \in \mathbb{R}_+$, и пусть этот ряд сходится по меньшей мере в одной из точек $x^* = x_0 \pm r$. Выбирая знак так, чтобы в соответствующей точке x^* ряд сходился, вводя новую переменную $t := \dfrac{x - x_0}{(\pm r)}$ и полагая $b_n := (\pm r)^n c_n$, преобразуем данный ряд к виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Радиус сходимости полученного ряда равен 1, и он сходится в точке $t = 1$. Осталось только показать, что его сумма

$$s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot t^n \tag{17.51}$$

непрерывна в точке $t = 1$. Для этого используем теорему 10 (признак Абеля равномерной сходимости), полагая $a_n(t) :\equiv t^n$, $b_n(t) :\equiv b_n$. Последовательность $(a_n(t))_{n=0}^{\infty}$ равномерно ограничена на $[0\,,\,1]$, так как $|t^n| \leqslant 1$, и монотонна при каждом t. Так как по условию числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится, то, рассматриваемый как функциональный ряд, он сходится равномерно по t. Итак, ряд (17.51) сходится равномерно на $[0\,,\,1]$, а так как все его члены непрерывны, то и его сумма непрерывна на этом отрезке, в частности, в точке $t = 1$. ▶

Теорема 25 (об умножении числовых рядов). *Если произведение двух сходящихся числовых рядов есть сходящийся ряд, то сумма ряда-проризведения равна произведению сумм рядов-сомножителей.*

◀ Обозначим суммы трех сходящихся числовых рядов следующим образом: $s := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, $\theta := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, и пусть

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \quad \text{при} \quad n = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,.$$

Надо доказать, что $\theta = s \cdot \sigma$. С этой целью введем в рассмотрение следующие степенные ряды:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,, \quad h(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,.$$

Все эти ряды по условию сходятся при $x = 1$, причем

$$f(1) = s\,, \quad g(1) = \sigma\,, \quad h(1) = \theta\,.$$

Таким образом, радиусы сходимости введенных степенных рядов не меньше 1, и потому они сходятся абсолютно при $|x| < 1$. Применяя теорему Мертенса об умножении абсолютно сходящихся рядов, при $|x| < 1$ получим

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots = \\ = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = h(x)\,. \end{aligned}$$

Итак, $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ для всех $x \in (-1\,,\,1)$. По второй теореме Абеля функции f, g, h непрерывны в точке $x = 1$. Поэтому, переходя к пределу в равенстве $f(x) \cdot g(x) = h(x)$ при $x \to 1$, получим $f(1) \cdot g(1) = h(1)$ т. е. $s \cdot \sigma = \theta$. ▶

Примеры. 1) Геометрический ряд

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots$$

сходится при $t \in (-1\,,\,1)$. Интегрируя его почленно в пределах от 0 до x, где $x \in (-1\,,\,1)$, получим следующее разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$$

Этот ряд сходится при $x = 1$ по признаку Лейбница, значит, можно применить теорему 24. Полагая в разложении $x = 1$, получим сумму ряда Лейбница

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

2) Геометрический ряд

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots$$

сходится при $t \in (-1\,,\,1)$. Интегрируя его почленно в пределах от 0 до x, где $x \in (-1\,,\,1)$, получим следующее разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Этот ряд сходится при $x = 1$ по признаку Лейбница, значит, можно применить теорему 24. Полагая в последнем разложении $x = 1$, получим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Глава 18
РЯДЫ ФУРЬЕ

В этой главе будут изложены элементы теории тригонометрических рядов Фурье. Изложение ведется на основе теории интеграла Римана. Все функции, встречающиеся в этой главе, предполагаются суммируемыми на любом конечном отрезке, лежащем в их областях определения.

§ 1. Вводные замечания

1. Периодические явления

В науке и технике часто приходится иметь дело *с периодическими явлениями*, т. е. с такими явлениями, которые воспроизводятся в прежнем виде через определенный промежуток времени T, называемый *периодом*. Примерами таких явлений могут служить: работа моторов в установившихся режимах, вращение планет вокруг своей оси, движение их вокруг Солнца, и другие.

С математической точки зрения для периодических явлений характерно то, что все они описываются периодическими функциями от времени, т. е. такими функциями φ, которые по истечении периода времени T возвращаются к своим первоначальным значениям: $\varphi(t+T) \equiv \varphi(t)$. Таковы, например, напряжение переменного тока в сети, давление в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания, координаты небесных светил и другие величины.

Простейшими (отличными от постоянных) периодическими функциями считаются так называемые *гармонические колебания*, т. е. функции переменного t, представимые в виде

$$\varphi(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)\,, \tag{18.1}$$

где A, ω, α — постоянные. Фуцнкция (18.1) физически выражает отклонение материальной точки от начала отсчета в момент времени t. Постоянная A — *амплитуда колебаний*, (т. е. максимальное отклонение), α — *начальная фаза*, ω — *частота колебаний*. Так как функция sin имеет период 2π, то функция (18.1) имеет период $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Графиком функции (18.1) с точностью до сдвига и растяжения (сжатия) является знакомая всем синусоида.

Складывая гармонические колебания различных частот, целократных ω

$$y_0 = A_0\,,\ y_1 = A_1\sin(\omega t + \alpha_1)\,,\ y_2 = A_2\sin(2\omega t + \alpha_2)\,,\ \ldots\,, \tag{18.2}$$

получим в результате периодическую функцию с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. В самом деле, все функции (18.2) — периодические, причем одним из периодов каждой из них является число $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. График периодической функции, полученной в результате сложения различных функций (18.2), вообще говоря, существенно отличается от синусоиды. Рассмотрим, например, 2π-периодическую функцию

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\,,$$

график которой показан на рисунке. В точке $x = \pi$ (т. е. на полупериоде) выполняются равенства $y(\pi) = y'(\pi) = y''(\pi) = 0$. Аналогичные равенства для синусоиды выполняться не могут. Поэтому график рассматриваемой функции невозможно превратить в синусоиду с помощью растяжений и сдвигов. Еще в бóльшей степени это различие проявляется для функций, представимых в виде сумм рядов с членами (18.2), хотя бы потому, что сумма функционального ряда с членами (18.2) не обязана быть непрерывной, несмотря на то, что все эти функции непрерывны.

Возникает естественный вопрос: *можно ли заданную периодическую функцию φ с периодом T представить в виде суммы функций* (18.2)*?* С физической точки зрения этот вопрос звучит так: *возможно ли заданное периодическое колебание представить в виде суммы гармонических колебаний?* Под суммой здесь понимается конечная сумма или ряд. Более точная постановка этой проблемы заключается в том, чтобы найти последовательности чисел $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы почти для всех значений t выполнялось равенство

$$\varphi(t) = A_0 + A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots\,. \tag{18.3}$$

В дальнейшем будет показано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию φ, представление (18.3) действительно имеет место. Это означает, что для широкого класса колебаний дается положительный ответ на вопрос о представимости его в виде суммы гармонических колебаний. Исследование обсуждаемой проблемы и составляет основное содержание теории рядов Фурье.

Слагаемые суммы (18.3) иногда называют *гармониками.* В связи с этим теория рядов типа (18.3) называется иногда *гармоническим анализом.*

2. Преобразование суммы гармоник к стандартному виду

Чтобы лучше формализовать изучаемую проблему, введем в (18.1) — (18.3) новую независимую переменную $x := \omega t$ и положим $f(x) := \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right) = \varphi(t)$. Если $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — основной (т. е. наименьший положительный) период функции φ, то основной период функции f равен 2π. В новых обозначениях разложение (18.3) приобретает следующий вид:

$$f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + A_3 \sin(3x + \alpha_3) + \dots \quad (18.4)$$

Используя формулу для синуса суммы, преобразуем это выражение к виду

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\sin \alpha_k \cos kx + \cos \alpha_k \sin kx)\,. \quad (18.5)$$

Вводя обозначения

$$\frac{a_0}{2} := A_0\,, \quad a_k := A_k \sin \alpha_k\,, \quad b_k := A_k \cos \alpha\,,$$

перепишем равенство (18.5) окончательно в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ . \quad (18.6)$$

Полученный нами ряд называется *тригонометрическим рядом*, а его частичные суммы и отрезки — *тригонометрическими многочленами*. Последовательности $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ и $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ называются *последовательностями коэффициентов* тригонометрического ряда (18.6). Если равенство (18.6) выполняется, то говорят, что 2π-периодическая функция f представлена в виде суммы тригонометрического ряда (или, как иногда говорят, разложена в тригонометрический ряд).

Итак, мы пришли к задаче разложения 2π-периодической функции в тригонометрический ряд, исходя из периодических явлений и связанных с ними функций. Следует отметить, что подобные задачи могут возникать и при рассмотрении функций, заданных на некотором промежутке и не обязательно свзанных с какими бы то ни было периодическими явлениями.

В теоретических исследованиях, кроме тригонометрических рядов вида (18.6), рассматриваются так называемые *комплексные тригонометрические ряды*, т. е. ряды следующего вида:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}\,, \quad (18.7)$$

где $(c_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$ — бесконечная в обе стороны последовательность комплексных чисел. Сходимость ряда (18.7) понимается как сходимость двух рядов

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx} .$$

Учитывая формулы Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} , \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} ,$$

можно преобразовать ряд (18.6) к виду (18.7) и наоборот. В самом деле, полагая

$$b_0 := 0 , \; c_n := \frac{a_n - ib_n}{2} , \; c_{-n} := \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2} , \; n = 0 , 1 , 2 , \dots ,$$

имеем

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{a_0 + ib_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) =$$

$$= \frac{a_0 + ib_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{c_n} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} .$$

Проводя эти же преобразования справа налево, можно преобразовать ряд (18.7) в ряд (18.6).

§ 2. Ортогональные системы функций

1. Основные понятия

Через $\mathcal{R}[a, b]$ обозначим множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a , b]$. В силу свойства лийности интеграла Римана это множество является линейным (векторным) пространством. На этом множестве вводятся понятия, аналогичные следующим понятиям из теории векторных пространств $\mathbb{C}^n$ (в частности, $\mathbb{R}^n$): скалярное произведение функций, ортогональные функции, норма («длина») функции, среднее квадратичное отклонение («расстояние») между функциями.

Определение 9. *Скалярное произведение* $(f\,,\,g)$ *функции* $f\ :\ [a\,,\,b]\ \longrightarrow\ \mathbb{C}$ *на функцию* $g\ :\ [a\,,\,b]\ \longrightarrow\ \mathbb{C}$ *определяется равенством*

$$(f\,,\,g) := \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\,. \tag{18.8}$$

Норма $\|f\|$ *функции* $f\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *определяется равенством*

$$\|f\| := \sqrt{(f\,,\,f)} = \left[\int\limits_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}\,. \tag{18.9}$$

Расстояние (или среднеквадратичное отклонение) между функциями f *и* g *определяется как норма разности между ними, т. е. принимается равным* $\|f - g\|$.

Отметим, что скалярное произведение, норма, метрика на множестве функций обладают всеми основными свойствами скалярного произведения, нормы, метрики на множестве векторов из $\mathbb{C}^n$ (в частности, из $\mathbb{R}^n$). Например, справедливо неравенство Коши — Буняковского — Шварца

$$|(f\,,\,g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

и неравенство треугольника

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|\,.$$

Разложение функций в тригонометрические ряды основано на идее, аналогичной идее разложения вектора на составляющие по векторам ортогонального базиса. В связи с этим вводится понятие *ортогональной системы функций.*

Определение 10. *Совокупность интегрируемых на* $[a\,,\,b]$ *функций*

$$\{\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\varphi_n\,,\ldots\}$$

называется ортогональной системой функций, если

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\ :\ \begin{cases} (\varphi_n\,,\,\varphi_m) = 0 \quad \textit{при} \quad m \neq n\,, \\ (\varphi_n\,,\,\varphi_n) \neq 0\,. \end{cases}$$

Ортогональная система функций называется ортонормированной, если $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \|\varphi_n\| = 1$.

Очевидно, что любая подсистема ортогональной системы в свою очередь является ортогональной системой. Ясно также, что если $\{\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\varphi_n\,,\ldots\}$ — ортогональная система функций, то система

$$\left\{\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}\,,\,\frac{\varphi_2}{\|\varphi_2\|}\,,\,\ldots\,,\,\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\,,\ldots\right\}$$

является ортонормированной.

2. Ортогональность тригонометрических систем функций

Переходя к рассмотрению конкретных ортогональных систем функций, отметим, что на любом отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ существет бесконечно много различных ортогональных систем функций. Однако в этой главе мы ограничимся, в основном, рассмотрением только таких ортогональных систем, элементами которых являются тригонометрические функции фиксированного периода.

Определение 11. *Основной тригонометрической системой называется следующая совокупность* 2π*-периодических функций*

$$\left\{\frac{1}{2}\,,\,\cos x\,,\,\sin x\,,\,\cos 2x\,,\,\sin 2x\,,\,\ldots\,,\,\cos nx\,,\,\sin nx\,,\,\ldots\right\}.$$

Комплексной тригонометрической системой будем называть следующую систему 2π*-периодических функций*

$$\left\{e^{inx} \ \middle| \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

В силу формул Эйлера функции каждой из этих двух систем являются конечными линейными комбинациями функций другой системы.

Теорема 26. *Основная и комплексная тригонометрические системы ортогональны на любом отрезке длины* 2π.

◀ Так как все функции указанных систем — 2π-периодические, то достаточно проверить их ортогональность на отрезке $[-\pi\,,\,\pi]$. Начнем с комплексной тригонометрической системы. При $m \neq n$ имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\left(\overline{e^{inx}}\right)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx = \frac{1}{i(m-n)}\cdot e^{i(m-n)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,,$$

так как функция $e^{i(m-n)x}$ 2π-периодическая. При $m=n$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\left(\overline{e^{imx}}\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi\,.$$

Переходя к основной тригонометрической системе, при $n \neq 0$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cdot\cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{2n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cdot\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{2n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0\,.$$

При любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+m)x + \sin(n-m)x}{2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,dx = 0\,.$$

Далее, при $n \neq m$ получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n+m)x + \cos(n-m)x}{2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx = 0\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx = 0\,.$$

И, наконец,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}\,;$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}dx = \pi\,;$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx = \pi\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 27. *Системы функций*

$$\{1/2\,,\ \cos x\,,\ \cos 2x\,,\ \ldots\,,\ \cos nx\,,\ \ldots\}\,,$$
$$\{\sin x\,,\ \sin 2x\,,\ \ldots\,,\ \sin nx\,,\ \ldots\}$$

ортогональны на отрезке $[0\,,\,\pi]$.

◀ При $n\neq 0$ имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi} 1/2\cdot\cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{2n}\right|_0^{\pi} = 0\,.$$

При $n\neq m$ имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos(n+m)x+\cos(n-m)x}{2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx = 0\,.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos(n-m)x-\cos(n+m)x}{2}dx = 0\,.$$

И, наконец,

$$\int_0^\pi (1/2)^2 dx = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^\pi \cos^2 nx\, dx = \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin^2 nx\, dx = \frac{1-\cos 2nx}{2} dx = \frac{\pi}{2}. \ \blacktriangleright$$

§ 3. Ортогональные ряды. Ряды Фурье. Минимизирующее свойство и его следствия

1. Ортогональные ряды. Ряды Фурье

Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ — система функций, ортогональная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Определение 12. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ *называется ортогональным рядом по системе* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$*, а числа* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *— его коэффициентами.*

Например, ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

при произвольных коэффициентах являются ортогональными рядами по соответствующим ортогональным системам функций.

Предполагая сходимость ортогонального ряда в том или ином смысле, можно получать относительно него содержательные утверждения. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 28. *Если ортогональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ *по системе* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$*, ортогональной на отрезке* $[a, b]$*, сходится равно-*

мерно на $[a\,,\,b]$ *к сумме* f, *то для его коэффициентов справедливы следующие равенства*

$$c_k = \frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx}{\int\limits_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx}\,, \ \ k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,. \tag{18.10}$$

Если, в частности, система $\{\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\,\varphi_n\,,\,\ldots\}$ — *ортонормированная, то*

$$c_k = (f,\varphi_k) = \int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx\,, \ \ k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,. \tag{18.11}$$

◀ Так как все члены данного ортогонального ряда интегрируемы, а ряд сходится равномерно на $[a\,,\,b]$, то его сумма интегрируема на $[a\,,\,b]$. Умножая равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

на функцию $\overline{\varphi_k(x)}$, которая, будучи интегрируемой, ограничена на $[a\,,\,b]$, получим равномерно сходящийся ряд

$$f(x)\overline{\varphi_k(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\overline{\varphi_k(x)}\,. \tag{18.12}$$

Из равномерной сходимости следует возможность почленного интегрирования ряда (18.12). Производя почленное интегрирование и учитывая свойство ортогональности системы $\{\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\,\varphi_n\,,\,\ldots\}$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx = \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx = c_k \int\limits_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx = c_k \int\limits_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx\,.$$

Отсюда очевидным образом вытекает равенство (18.10), а в случае $\|\varphi_k\| = 1$ и равенство (18.11). ▶

Определение 13. *Рядом Фурье функции* f *по системе* $\{\varphi_1\,,\,\varphi_2\,,\,\ldots\,,\,\varphi_n\,,\,\ldots\}$, *ортогональной на отрезке* $[a\,,\,b]$, *называется ортогональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$, *коэффициенты которого вычисляются по формулам* (18.10).

Условимся записывать сопоставление функции f ее ряда Фурье в следующем виде:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)\,. \tag{18.13}$$

Эта запись не означает, что ряд сходится, ни тем болеее, что сумма его равна $f(x)$. *Запись* (18.13) *означает только то, что для коэффициентов ряда* (18.13) *справедливы равенства* (18.10).

Выпишем теперь ряды Фурье по введенным выше тригонометрическим системам функций. Пусть f — 2π-периодическая функция, и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{18.14}$$

— ее ряд Фурье по основной тригонометрической системею. Применяя формулы (18.10), имеем

$$a_0 = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \frac{1}{2}dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,;$$

$$a_k = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,,\ \ k = 1, 2, \dots;$$

$$b_k = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,,\ \ k = 1, 2, \dots.$$

Ряд Фурье по комплексной тригонометрической системе имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad \text{где} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{18.15}$$

Ряд Фурье по системе $\left\{\frac{1}{2}\,, \cos x\,, \cos 2x\,, \dots \cos nx\,, \dots\right\}$, ортогональной на отрезке $[0\,, \pi]$, имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\,, \quad \text{где} \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,. \tag{18.16}$$

Ряд Фурье по системе $\{\sin x\,, \sin 2x\,, \ldots \sin nx\,, \ldots\}$, ортогональной на отрезке $[0\,, \pi]$, имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\,, \quad \text{где} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,. \tag{18.17}$$

2. Минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье и его следствия

Теорема 29 (минимизирующее свойство). *Пусть*

$$\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{18.18}$$

— система функций, ортонормированная на отрезке $[a\,, b]$. *Пусть* $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ *— ряд Фурье функции* f, *а* $s_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ *— его* n*-я частичная сумма. Обозначим* $t_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k\varphi_k(x)$, *где* $\gamma_1\,, \ldots\,, \gamma_n$ *— произвольные числа. Тогда*

$$\|f_n - s_n\| \leqslant \|f_n - t_n\|\,, \tag{18.19}$$

причем равенство здесь имеет место только при $t_n(x) \equiv s_n(x)$.

◄ Имеем

$$(f, t_n) = \int_a^b f(x)\overline{t_n(x)}\,dx = \int_a^b f(x)\sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma_k \cdot \varphi_k(x)}\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma_k}\int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx = \sum_{k=0}^{n}\overline{\gamma_k}c_k\,.$$

Полагая здесь $f(x) \equiv t_n(x)$, получим

$$\|t_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\gamma_k|^2\,.$$

Учитывая полученные равенства, имеем

$$\|f-t_n\|^2 = (f-t_n; f-t_n) = (f;f) - (f;t_n) - (t_n;f) + (t_n;t_n) =$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\gamma_k} c_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \overline{c_k} + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^2 =$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k\overline{c_k} - \gamma_k\overline{c_k} - \overline{\gamma_k}c_k + \gamma_k\overline{\gamma_k}) =$$
$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \gamma_k|^2 . \quad (18.20)$$

Полагая здесь $t_n(x) \equiv s_n(x)$, получим

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 . \quad (18.21)$$

Из (18.20) и (18.21) имеем

$$\|f-t_n\|^2 = \|f-s_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k - c_k|^2 \geqslant \|f-s_n\|^2 ,$$

причем равенство здесь имеет место только если $\forall k \; : \; \gamma_k = c_k$, т. е. при $t_n(x) \equiv s_n(x)$. ►

Следствие 1 (неравенство Бесселя). *Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, а $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ — ряд Фурье функции f по ортонормированной системе* (18.18), *то справедливо следующее неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|f\|^2 . \quad (18.22)$$

◄ Так как левая часть равенства (18.21) неотрицательна, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geqslant 0$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство, равносильное неравентву (18.22). ►

Следствие 2. *Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, а $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ — ряд Фурье функции f по ортонормированной системе* (18.18), *то* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

◄ Так как f интегрируема, то и $|f|^2 = f\overline{f}$ интегрируема как произведение интегрируемых функций. Поэтому $\|f\|^2$ — число, а из неравенства

Бесселя следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$ сходится. Отсюда в силу необходимого признака сходимости рядов следует, что $|c_n|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, что равносильно равенству $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. ►

Определение 14. *Говорят, что последовательность интегрируемых на отрезке* $[a\,,\,b]$ *функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится в среднем к функции* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$, *где норма и расстояние понимаются в смысле определения 18.8.*

Определение 15. *Говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *из интегрируемых на отрезке* $[a\,,\,b]$ *функций сходится в среднем к сумме* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *если последовательность его частичных сумм сходится в среднем к функции* f.

Замечания. 1. Отметим, что сходимость в среднем представляет собой новый тип сходимости функциональных последовательностей и рядов, не сводящийся к введенным в главе 17 понятиям их поточечной и равномерной сходимости. В частности, из сходимости в среднем не вытекает ни поточечная, ни тем более равномерная сходимость.

2. Если в неравенстве Бесселя (18.22) достигается равенство, то оно называется *равенством Парсеваля.*

Теорема 30. *Пусть* $f(x) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ — *ряд Фурье функции* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *по ортонормированной системе* (18.18). *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *выполняется равенство Парсеваля* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \|f\|^2$;

(b) *ряд Фурье функции* f *сходится в среднем к сумме* f.

◄ (a) ⇒ (b) Пусть $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)$ — частичная сумма ряда Фурье. Используя равенство (18.21) и равенство Парсеваля, имеем

$$\|f(x) - s_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ в смысле сходимости в среднем.

(b) ⇒ (a) Предположим, что $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ в смысле сходимости в среднем. Опять используя равенство (18.21), имеем

$$0 \leqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 = \|f(x) - s_n(x)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда очевидным образом вытекает равенство Парсеваля. ▶

Замечания. 1. Исследование поточечной (а в некоторых случаях и равномерной) сходимости ортогональных рядов будет дано в остальной части этой главы, *но только для тригонометрических рядов.*

2. Введенные выше четыре тригонометрические системы функций (основная, комплексная, косинусы, синусы) — ортогональные, но не ортонормированные. Поэтому, чтобы выписать соответствующие им неравенства Бесселя, желательно предварительно эти системы пронормировать. Если это проделать, то получим следующие результаты.

Для ряда Фурье $f(x) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ по комплексной тригонометрической системе неравенство Бесселя имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\,.$$

Для ряда Фурье $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_b \sin nx)$ по основной тригонометрической системе неравенство Бесселя имеет вид

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\,.$$

Для ряда Фурье $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ по системе косинусов неравенство Бесселя имеет вид

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |f(x)|^2 dx\,.$$

Для ряда Фурье $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ по системе синусов неравенство Бесселя имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} |f(x)|^2 dx\,.$$

§ 4. Лемма об осцилляции. Интеграл Дирихле. Принцип локализации

1. Лемма об осцилляции

В предыдущем параграфе был установлен факт стремления к нулю коэффициентов Фурье любой интегрируемой по Риману функции. Применительно к тригонометрическим рядам Фурье это означает, что при $n \to \infty$ справедливы соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \to 0\,. \tag{18.23}$$

Эти соотношения допускают геометрическую интерпретацию, состоящую в следующем. При возрастании n возраставет и количество волн функций $\cos nx$ и $\sin nx$ на отрезке $[-\pi\,,\,\pi]$ (или, как иногда говорят, растет «осцилляция»). При этом функция f изменяется сравнительно медленно. Поэтому соотношения (18.23) выполняются за счет того, что происходит частичное взаимное уничтожение площадей, ограниченных графиками подынтегральных функций и расположенных соответственно выше и ниже оси абсцисс, и этот эффект усиливается с возрастанием n. Поскольку соотношения (18.23) являются для наших целей недостаточно общими[1], то здесь мы установим их с нужной степенью общности.

Теорема 31 (лемма об осцилляции). *Если функция f суммируема на интервале $(a\,,\,b) \subset \mathbb{R}$, то*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\, dx = 0 \quad \textit{и} \quad \lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\, dx = 0\,. \tag{18.24}$$

◄ Докажем только первое из равенств (18.24) (второе можно доказать аналогично). Предполагая, что $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$, имеем

$$0 \leqslant \left|\int_a^b \cos px\, dx\right| = \left|\frac{\sin pb - \sin pa}{p}\right| \leqslant \frac{2}{|p|}\,. \tag{18.25}$$

[1]Для наших целей нужно, чтобы число n не обязательно было целым, а интегралы от $|f|$ существовали не только в смысле Римана, но и как несобственные.

Переходя здесь к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b \cos px\, dx = 0 .$$

Предположим теперь, что $a, b \in \mathbb{R}$, а функция f интегрируема по Риману на $[a\,,\,b]$. Используя критерий Дарбу интегрируемости и задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a\,,\,b]$, что $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\cdot \Delta x_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, где $\Delta_k = [x_{k+1}\,,\,x_k]$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Обозначая $m_k := \inf\limits_{\Delta_k} f(x)$ и используя (18.25), имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\, dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos px\, dx\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - m_k]\cos px\, dx + \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos px\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\cdot \Delta x_k + \frac{2}{|p|}\sum_{k=0}^{n-1} |m_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $|p| \geqslant \dfrac{4}{\varepsilon}\cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} |m_k|$. Тем самым теорема доказана для интегралов, существующих в смысле Римана.

Предполжим теперь, что интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\, dx$ не существует в смысле Римана, но сходится как несобственный (с конечным множеством особых точек). Напомним, что к числу особых точек относятся все точки отрезка $[a\,,\,b]$, в окрестности которых функция f неограничена, а также пределы интегрирования, если они бесконечные. Сходимость интеграла равносильна тому, что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ существует открытая окрестность E множества особых точек, такая, что $\int\limits_E |f(x)|\, dx \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, а интеграл $\int\limits_{[a,b]\setminus E} |f(x)|\, dx$ существует в смысле Римана. Поэтому на основании доказанной части теоремы имеем

$$\exists p_\varepsilon \in \mathbb{R} \ \ \forall p \in \mathbb{R} \ :\ |p| \geqslant |p_\varepsilon| \implies \left|\ \int\limits_{[a,b]\setminus E} f(x)\cos px\, dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

При тех же значениях p имеем окончательно

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,dx\right| \leqslant \left|\int_E f(x)\cos px\,dx\right| + \left|\int_{[a,b]\setminus E} f(x)\cos px\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_E |f(x)|\,dx + \left|\int_{[a,b]\setminus E} f(x)\cos px\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Тем самым первое равенство (18.24) полностью доказано. ▶

2. Ядро Дирихле и интеграл Дирихле

Определение 16. *Ядром Дирихле при* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *называется функция* $x \longmapsto D_n(x)$, *определяемая равенством*

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\,. \tag{18.26}$$

Установим основные свойства ядра Дирихле.

Теорема 32. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) *ядро* D_n — *непрерывная,* 2π*-периодическая, четная функция;*

(b) $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$;

(c) *при* $x \neq 0$ *имеем:* $D_n(x) = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$.

◀ (a) Функция D_n непрерывна и 2π-периодична как сумма непрерывных и 2π-периодических функций. Для проверки ее четности заменим в (18.26) сначала x на $(-x)$, а затем k на $(-k)$:

$$D_n(-x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikx} = \sum_{k=n}^{-n} e^{ikx} = D_n(x)\,.$$

(b) Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 1\,,$$

так как остальные слагаемые суммы равны нулю в силу свойства ортогональности.

(c) Суммируя геометрическую прогрессию и используя формулы Эйлера, при $x \neq 0$ имеем

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx} + e^{-inx}\cdot e^{ix} + \ldots + e^{inx} =$$
$$= \frac{e^{inx}\cdot e^{ix} - e^{-inx}}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+\frac12)x} - e^{-i(n+\frac12)x}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac12)x}{\sin\frac{x}{2}}\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 33. *Пусть f — 2π-периодическя функция, суммируемая на любом отрезке $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}$. Для n-й частичной суммы ее ряда Фурье*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

справедливы следующие интегральные представления Дирихле:

$$S_n(f;x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}D_n(t)\,dt\,. \qquad (18.27)$$

◀ Полагая $b_0 := 0\,,\ c_k := \dfrac{a_k - ib_k}{2}\,,\ c_{-k} := \overline{c_k}$, преобразуем частичную сумму ряда Фурье к комплексной форме

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} - b_k\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2}\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Используя, далее, определение (18.26), имеем

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt\,.$$

Тем самым установлено первое интегральное представление (18.27). Производя в последнем интеграле замену $x - t = \tau$, $-dt = d\tau$ и используя 2π-периодичность ядра Дирихле, получим второе интегральное представление (18.27):

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-\tau)D_n(\tau)(-d\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt\,.$$

Отсюда легко получается третье интегральное представление (18.27):

$$S_n(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}D_n(t)\,dt\,. \quad ▶$$

3. Принцип локализации

Ядро Дирихле $D_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ является частичной суммой ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$, который всюду расходится, так как последовательность его членов не стремится к нулю, поскольку $|e^{ikx}| \equiv 1$. Поэтому невозможно вычислить сумму ряда Фурье, пытаясь переходить к пределу под знаком интеграла Дирихле

$$S_n(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt\,.$$

Если же из области интегрирования этого интеграла удалить любую окрестность точки $t = 0$, то окажется, интеграл по остальной части отрезка $[-\pi\,,\,\pi]$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Этот факт известен под названием *принципа локализации*. Желая дать его точную формулировку, введем понятие *рстка*.

Определение 17. *Две функции f и g назовем эквивалентными*[2] *в точке x, если их сужения на некоторую окрестность точки x почти всюду*[3] *равны. Ростком функции f в точке x называется класс эквивалентности функции f по отношению к введенному отношению эквивалентности.*

Теорема 34 (принцип локализации). *Пусть f — 2π-периодическя функция, суммируемая на любом отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$. Ответ на вопрос о сходимости ряда Фурье функции f в точке x, а в случае его сходимости и числовое значение суммы, зависят только от ростка функции f в точке x.*

◀ Задавая произвольно малое $\delta \in (0\,,\,\pi)$, представим частичную сумму ряда Фурье функции f в следующем виде:

$$S_n(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)D_n(t)\,dt\,. \qquad (18.28)$$

Из трех интегралов правой части от ростка функции f в точке x зависит только второй интеграл. Поэтому достаточно показать, что сумма первого и третьего интегралов в правой части (18.28) стемится к нулю при $n \to \infty$. С этой целью введем вспомогательную функцию $t \longmapsto g(t)$, определив ее равенством:

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |t| < \delta\,, \\ \dfrac{f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} & \text{при} \quad \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\,. \end{cases} \qquad (18.29)$$

[2]Легко показать, что вводимое здесь отношение эквивалентности обладает стандартными свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности.*

[3]т. е. всюду, кроме множества меры нуль.

Она суммируема на $[-\pi\,,\,\pi]$ как произведение суммируемых функций. Поэтому имеем

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)D_n(t)\,dt=\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right) f(x-t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cdot\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty$$

в силу леммы об осцилляции. ▶

Замечание. Пусть f и g — 2π-периодические функции, ростки которых в точке x_0 равны. Это может означать, например, что данные функции совпадают в некоторой окрестности точки x_0, а в остальной части отрезка $[-\pi\,,\,\pi]$ могут отличаться как угодно. Поэтому и ряды Фурье этих функций — совершенно различные. Однако принцип локализации гарантирует то, что эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся, а в случае сходимости их суммы равны.

§ 5. Исследование ряда Фурье на сходимость в точке и вычисление его суммы

1. Вводные замечания

Здесь, как обычно, будем предполагать, что f — 2π-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[-\pi\,,\,\pi]$. Сопоставим ей ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\,, \tag{18.30}$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\,,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\,. \tag{18.31}$$

Если изменить значение функции f на конечном множестве точек, то в результате получим новую функцию f_1, ряд Фурье которой совпадает с рядом фурье функции f. Это следует из того, что интегралы

(18.31) не зависят от значений подынтегральных функций на любом конечном множестве точек. Таким образом, даже если ряд (18.30) сходится, то, вообще говоря, нет оснований ожидать, что его сумма равна $f(x)$.

В связи с этим мы будем исследовать ряд Фурье (18.30) на сходимость только в тех точках $x \in \mathbb{R}$, в которых существуют конечные пределы слева и справа:

$$f(x-0) := \lim_{t\to+0} f(x-t) \qquad \text{и} \qquad f(x+0) := \lim_{t\to+0} f(x+t)\,. \tag{18.32}$$

Если оказывается, что $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, то функция f непрерывна в точке x, в противном случае она имеет в точке x разрыв (устранимый или первого рода).

Введем в рассмотрение новую функцию S_f, которая в точках, где существуют конечные пределы (18.32), определяется равенством

$$S_f(x) := \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\,. \tag{18.33}$$

Значения этой функции равны $f(x)$ в точках непрерывности функции f и отличаются от $f(x)$ в точках разрыва функции f.

2. Признаки Дини и Липшица

Теорема 35 (признак Дини). *Предположим, что* 2π*-периодическая функция* f *суммируема на* $[-\pi\,,\,\pi]$*, а при* $x \in [-\pi\,,\,\pi]$ *существуют числа* $f(x\pm 0)$*. Если при некотором* $\delta \in (0\,,\,\pi)$ *сходится интеграл* $\int\limits_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$*, где*

$$\varphi(t) := \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - S_f(x)\,,$$

то ряд Фурье функции f *сходится в точке* x *к сумме* $S_f(x)$*.*

◀ Так как функция $t \longmapsto \dfrac{t}{\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна и ограничена на промежутке $(0\,,\,\pi]$, то она суммируема. Поэтому и функция

$$t \longmapsto \frac{\varphi(t)}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$$

суммируема на $[0\,,\,\pi]$ как произведение суммируемой функции на ограниченную.

Используя для n-й частичной суммы ряда Фурье (18.30) третье интегральное представление

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\cdot D_n(t)\,dt$$

и равенство $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$, имеем:

$$S_n(f;x) - S_f(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\cdot D_n(t)\,dt - \frac{S_f(x)}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - S_f(x)\right] D_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi(t)\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt \to 0$$

при $n\to\infty$ в силу леммы об осцилляции. ▶

Теорема 36 (признак Липшица). *Предположим, что 2π-периодическая функция f суммируема на $[-\pi\,,\,\pi]$, а при $x\in[-\pi\,,\,\pi]$ существуют числа $f(x\pm 0)$. Если при некотором $\delta\in(0\,,\,\pi)$ существуют числа $\alpha\in(0\,,\,1]$ и $L\in\mathbb{R}_+$, такие, что $|f(x\pm t)-f(x\pm 0)|\leqslant \leqslant L\cdot t^{\alpha}$ при $t\in(0\,,\,\delta)$, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к сумме $S_f(x)$.*

◀ Преобразуем функцию φ из предыдущей теоремы

$$\varphi(t) = \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - S_f(x) =$$
$$= \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} =$$
$$= \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2} + \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2}\,.$$

Используя, далее, условие теоремы, при $t \in (0\,,\,\delta)$ имеем

$$\frac{|\varphi(t)|}{t} = \left|\frac{f(x-t)-f(x-0)}{2t} + \frac{f(x+t)-f(x+0)}{2t}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2t} + \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2t} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L\cdot t^{\alpha}}{2t} + \frac{L\cdot t^{\alpha}}{2t} = \frac{L}{t^{1-\alpha}}\,. \qquad (18.34)$$

Так как $0 \leqslant 1-\alpha < 1$, то правая часть неравенства (18.34) суммируема на $(0\,,\,\delta)$. Поэтому из (18.34) в силу признака сравнения следует суммируемость функции $t \longmapsto \dfrac{|\varphi(t)|}{t}$. Тем самым показано, что выполнены все условия предыдущей теоремы. Значит, выполнено и ее заключение. ▶

Замечание. Если в теоремах 35 и 36 дополнительно предположить, что функция f непрерывна в точке x, то ее ряд Фурье в этой точке будет сходиться к сумме $f(x)$, т. е. будет выполняться равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ . \qquad (18.35)$$

Определение 18. *Говорят, что функция f удовлетворяет в точке x условию Гёльдера, если существуют числа $\alpha \in (0\,,\,1]$ и $L \in \mathbb{R}_+$, такие, что при некотором $\delta \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство*

$$|f(x+t)-f(x)| \leqslant L\cdot|t|^{\alpha} \quad \textit{для всех} \quad |t| \leqslant \delta\,. \qquad (18.36)$$

В случае $\alpha = 1$ условие Гёльдера называется условием Липшица.

Замечания. 1. Если функция f удовлетворяет в точке x условию Гёльдера, то она и непрерывна в этой точке. Если она еще и 2π-периодична, то для нее выполнены все условия теоремы 36. Таким образом, в этом случае выполняется равенство (18.35).

2. Если функция f дифференцируема в точке x, то она, очевидно, удовлетворяет условию Липшица. Отсюда и из теоремы 36 следует, например, такой факт: *если 2π-периодическая функция дифференцируема на $\mathbb{R}$, то $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство* (18.35).

3. Сходимость ряда Фурье при условиях Дирихле

Теорема 37 (лемма Дирихле). *Если функция $g : [0\,,h] \longrightarrow \mathbb{R}$ монотонна, то выполняется следующее равенство*[4]*:*

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot g(+0)\,. \tag{18.37}$$

◀ В доказательстве будем использовать равенство

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv = \frac{\pi}{2}\,, \tag{18.38}$$

которое будет доказано в следующей главе.

Из сходимости интеграла (18.38) вытекает ограниченность функции $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin v}{v}dv$, и мы обозначим

$$M := \sup_x \left|\int_0^x \frac{\sin v}{v}dv\right| \in \mathbb{R}_+\,.$$

Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем $\delta \in (0\,,h]$ так, чтобы было

$$|g(\delta)-g(+0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6M}\,. \tag{18.39}$$

Фиксируя это значение δ и используя лемму об осцилляции, найдем такое $p_1 \in \mathbb{R}_+$, что

$$p \geqslant p_1 \quad\Longrightarrow\quad \left|\int_\delta^h \frac{g(t)}{t}\cdot\sin pt\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{18.40}$$

Используя равенство (18.38), найдем такое $p_2 \in \mathbb{R}_+$, что

$$p \geqslant p_2 \quad\Longrightarrow\quad \left|g(+0)\int_0^{p\delta}\frac{\sin v}{v}\,dv - \frac{\pi}{2}\cdot g(+0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{18.41}$$

[4] Существование предела $g(+0) := \lim\limits_{t\to+0} g(t)$ следует из монотонности функции g.

Преобразуем интеграл из (18.37) с использованием второй теоремы «о среднем»:

$$\int_0^h g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt = \left(\int_0^\delta + \int_\delta^h\right) g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt =$$

$$= \int_0^\delta [g(t)-g(+0)]\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt + g(+0)\int_0^\delta \frac{\sin pt}{t}dt + \int_\delta^h g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt =$$

$$= [g(\delta)-g(+0)]\int_\xi^\delta \frac{\sin pt}{t}\,dt + g(+0)\int_0^{p\delta}\frac{\sin v}{v}dv + \int_\delta^h g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt =$$

$$= [g(\delta)-g(+0)]\int_{p\xi}^{p\delta} \frac{\sin v}{v}\,dt + g(+0)\int_0^{p\delta}\frac{\sin v}{v}dv + \int_\delta^h g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt\,.$$

Полагая $p_\varepsilon := \max\{p_1, p_2\}$ и используя неравенства (18.39) — (18.41), при $p \geqslant p_\varepsilon$ произведем заключительную оценку

$$\left|\int_0^h g(t)\cdot\frac{\sin pt}{t}\,dt - \frac{\pi}{2}\cdot g(+0)\right| \leqslant |g(\delta)-g(+0)|\cdot\left|\int_{p\xi}^{p\delta}\frac{\sin v}{v}dv\right| +$$

$$+\left|g(+0)\int_0^{p\delta}\frac{\sin v}{v}dv - \frac{\pi}{2}\cdot g(+0)\right| + \left|\int_\delta^h \frac{g(t)}{t}\cdot\sin pt\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{6M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Определение 19. *Говорят, что функция* $f : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям Дирихле, если существует такое разбиение* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$*, что на каждом интервале* $(x_k\,, x_{k+1})$ *функция* f *ограничена, непрерывна и монотонна.*

Теорема 38. *Если* 2π*-периодическая функция* f *удовлетворяет на отрезке* $[-\pi\,, \pi]$ *условиям Дирихле, то ее ряд Фурье сходится поточечно к функции* S_f*.*

◀ Зафиксируем произвольно точку x. Не ограничивая общности, будем считать, что $x \in (-\pi\,, \pi)$, ибо в противном случае мы, пользуясь периодичностью функции f, могли бы сдвинуть промежуток интегрирования так, чтобы точка x оказалась внутри него.

Используя условие Дирихле, выберем настолько малое число $\delta \in \mathbb{R}_+$, чтобы выполнялось включение $(x-\delta\,,\,x+\delta) \subset (-\pi\,,\,\pi)$, а на интервалах $(x-\delta\,,\,x)$ и $(x\,,\,x+\delta)$ функция f была бы ограниченной, непрерывной и монотонной.

Функция

$$t \longmapsto g(t) := \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$$

непрерывна и ограничена на промежутке $(0\,,\,\pi]$, что легко проверить, пользуясь правилом Лопиталя при $t \to +0$. Используя, далее, третье интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье $S_n(f;x)$, принцип локализации, лемму об осцилляции и лемму Дирихле, при $n \to \infty$ имеем:

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\cdot D_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\cdot D_n(t)\,dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} \frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} [f(x-t)+f(x+t)]\cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} [f(x-t)+f(x+t)]\cdot g(t)\cdot \sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt +$$

$$+ o(1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} f(x-t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\delta} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt +$$

$$+ o(1) = \frac{\pi}{2\pi}f(x-0) + \frac{\pi}{2\pi}f(x+0) + o(1) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} +$$

$$+ o(1) = S_f(x) + o(1) \to S_f(x) \quad \text{при} \quad n \to \infty\,. \ \blacktriangleright$$

§ 6. Дополнительные вопросы теории рядов Фурье

1. Равномерная сходимость рядов Фурье

Здесь приведем одно достаточное условие, при выполнении которого ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно.

Теорема 39. *Если f — дифференцируемая 2π-периодическая функция, производная которой удовлетворяет условиям Дирихле, то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$.*

◄ Сопоставим функциям f и f' их ряды Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \tag{18.42}$$

$$f'(x) \sim \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a'_k \cos kx + b'_k \sin kx)\,. \tag{18.43}$$

В силу ограничений, наложенных на функции f и f', оба ряда сходятся поточечно: ряд (18.42) к сумме $f(x)$, а ряд (18.42) — к сумме $S_{f'}(x)$. Надо показать, что ряд (18.42) сходится равномерно на $\mathbb{R}$. С этой целью установим зависимость между коэффициентами Фурье функций f и f'. Используя интегрирование по частям, имеем

$$a'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi} f(t)\cos kt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = kb_k\,,$$

$$b'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin kt\,dt = \frac{1}{\pi} f(t)\sin kt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = -ka_k\,.$$

Отсюда находим

$$a_k = -\frac{b'_k}{k}\,, \qquad b_k = \frac{a'_k}{k}\,. \tag{18.44}$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (18.42) применим признак Вейерштрасса. В силу очевидного неравенства

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leqslant |a_k| + |b_k|$$

ряд Фурье (18.42) мажорирутся числовым рядом $\dfrac{|a_0|}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$, и остается только установить сходимость этого числового ряда. Для этого применим признак сравнения, исходя из равенств (18.44)

$$|a_k| + |b_k| = |a'_k| \cdot \frac{1}{k} + |b'_k| \cdot \frac{1}{k} \leqslant \frac{|a'_k|^2 + |b'_k|^2}{2} + \frac{1}{k^2}\,.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (|a'_k|^2 + |b'_k|^2)$ сходится в силу неравенства Бесселя, примененного к ряду Фурье (18.43), а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ сходится как обобщенный гармонический ряд. Таким образом, в силу признака сравнения мажорантный ряд тоже сходится. ►

Замечание. Отметим, что для произвольных непрерывных 2π-периодических функций теорема о равномерной сходимости их рядов Фурье неверна.

2. Равномерное приближение непрерывных функций многочленами

Определение 20. *Ядром Фейера при* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *называется функция* $x \longmapsto K_n(x)$, *определяемая равенством*

$$K_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x)\,, \tag{18.45}$$

где $D_k(x) = \sum\limits_{\nu=-k}^{k} e^{i\nu x}$ *— ядро Дирихле.*

Иначе говоря, n-е ядро Фейера K_n определяется как среднее арифметическое ядер Дирихле $D_0, D_1, \ldots, D_n$. Основные свойства ядра Фейера содержатся в следующей теореме.

Теорема 40. *Справедливы следующие утверждения*:

(a) *ядро* K_n *— непрерывная,* 2π*-периодическая, четная функция;*

(b) $K_n(x) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1 - \cos(n+1)x}{1 - \cos x} = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{\sin^2 \frac{x}{2}}\,;$

(c) $\dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = 1\,;$

(d) $0 \leqslant K_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{2}{1 - \cos\delta}$ *при* $0 < \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\,.$

◄ (a) Это утверждение очевидно, так как всеми указанными свойствами обладают ядра Дирихле.

(b) Так как

$$2\cdot[1-\cos x]=(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)\,,\quad D_n(x)=\frac{e^{i(k+1)x}-e^{-ikx}}{e^{ix}-1}\,,$$

то имеем

$$\begin{aligned}2\cdot[1-\cos x]\,(n+1)K_n(x)&=(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)\sum_{k=0}^{n}D_n(x)=\\&=(e^{-ix}-1)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x}-e^{-ikx}\right)=\\&=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ikx}-e^{i(k+1)x}-e^{-i(k+1)x}+e^{-ikx}\right)=\\&=2\sum_{k=0}^{n}[\cos kx-\cos(k+1)x]=2\cdot[1-\cos(n+1)x]\,.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$K_n(x)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}\,.$$

(c) Учитывая аналогичное свойство ядра Дирихле, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,dx=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(x)\,dx=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}1=1\,.$$

(d) Пусть $\delta\in(0\,,\,\pi)$. При $\delta\leqslant|x|\leqslant\pi$ имеем

$$|1-\cos(n+1)x|\leqslant 2\,,\quad |1-\cos x|\geqslant 1-\cos\delta\,,$$

поэтому $0\leqslant\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{2}{1-\cos\delta}$. ►

Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция. Желая равномерно приблизить ее тригонометрическими многочленами, рассмотрим сначала последовательность частичных сумм ее ряда Фурье

$$
\begin{aligned}
&S_0(f;x) = \frac{a_0}{2}\,, \\
&S_1(f;x) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x)\,, \\
&S_2(f;x) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x)\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\
&S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{18.46}
$$

Известно, что эта последовательность сходится в среднем. Однако ни поточечная, ни тем более равномерная сходмость не имеют места без дополнительных ограничений на функцию f. Желая построить последовательность тригонометричких многочленов, равномерно сходящуюся к функции f, станем рассматривать последовательность $(\sigma_n(f;x))_{n=0}^{\infty}$ средних арифметических многочленов (18.46):

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(f;x) &:= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{k}{n+1}\right)a_k\cos kx + \left(1-\frac{k}{n+1}\right)b_k\sin kx\right] = \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,.
\end{aligned}
\tag{18.47}
$$

Теорема 41 (Фейер). *Если 2π-периодическая функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, то последовательность $(\sigma_n(f;x))_{n=0}^{\infty}$, определяемая равенствами* (18.47)*, сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции f.*

◀ Представим многочлен $\sigma_n(f;x)$ в виде интеграла с ядром Фейера

$$
\begin{aligned}
\sigma_n(f;x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_k(t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x-t)}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt\,.
\end{aligned}
\tag{18.48}
$$

Так как функция f непрерывна на $[-\pi\,,\,\pi]$, то по теоремам Вейерштрасса и Кантора она там ограничена и равномерно непрерывна. Оба эти свойства остаются справедливыми и на $\mathbb{R}$, так как f периодична. Пусть

$$M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \in \mathbb{R}_+\,.$$

Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем $\delta \in (0\,,\,\pi)$ так, чтобы было

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ :\ |x-y| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{18.49}$$

В силу теоремы 40(d) существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $\forall n \geqslant n_0$ и при $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$ будет

$$0 \leqslant K_n(t) \leqslant \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{1-\cos\delta} \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\,. \tag{18.50}$$

Учитывая, далее, что $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_n(f;x)-f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt - \frac{f(x)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x-t)-f(x)]\,K_n(t)\,dt = \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}\right)[f(x-t)-f(x)]\,K_n(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $K_n(t) \geqslant 0$, находим

$$\begin{aligned}&|\sigma_n(f;x)-f(x)| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_{-\delta}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\pi}\right)|f(x-t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt\,.\end{aligned} \tag{18.51}$$

Оценим каждый из этих трех интегралов отдельно. В силу неравенства (18.50) при $n \geqslant n_0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,;$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\int\limits_{\delta}^{\pi} dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Используя, далее, (18.49), имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|\cdot K_n(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_n(t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Таким образом, $\forall n \geqslant n_0$ будет

$$|\sigma_n(f;x)-f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Следствие. *Если две непрерывные 2π-периодические функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье, то $f(x)\equiv g(x)$.*

◀ Итак, пусть

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\sim g(x)\,. \tag{18.52}$$

Обозначим через $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ последовательность срелних арифметических частичных сумм ряда (18.52). По теореме Фейера при $n\to\infty$ имеем $\sigma_n \rightrightarrows f$ и $\sigma_n \rightrightarrows g$ на $\mathbb{R}$. Отсюда в силу единственности предела заключаем, что $f=g$. ▶

Рассмотрим теперь вопрос о равномерном приближении непрерывных функций *алгебраическими многочленами*, т. е. функциями вида

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots{}_{a_k}\,x^k\,.$$

Теорема 42 (Стоун — Вейерштрасс). *Для любой функции f, непрерывной на отрезке $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}$, существует последовательность алгебраических многочленов $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, которая при $n\to\infty$ сходится к функции f равномерно на $[a\,,\,b]$.*

◀ Не ограничивая общности, будем считать, что $[a\,,\,b]=[0\,,\,\pi]$. Считая, что функция f задана на отрезке $[0\,,\,\pi]$, продолжим ее по закону четности на отрезок $[-\pi\,,\,0]$, а затем по закону 2π-периодичности — на всю числовую ось. В результате получим четную 2π-периодическую функцию, равномерно непрерывную на $\mathbb{R}$.

Задавая произвольно $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ и применяя теорему Фейера, найдем сумму Фейера $\sigma_n(f;x)$ так, чтобы было:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ |f(x)-\sigma_n(f;x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Разлагая сумму Фейера $\sigma_n(f;x)$ в ряд Маклорена, получим степенной ряд, сходящийся всюду на $\mathbb{R}$, поскольку таким свойством обладают ряды Маклорена для функций $\sin$ и $\cos$. Так как степенной ряд сходится равномерно на компактах, лежащих внутри интервала сходимости, то существует такой многочлен P (частичная сумма ряда Маклорена), что

$$x \in [0\,,\,\pi] \;:\; |\sigma_n(f;x) - P(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Таким образом, имеем

$$\forall x \in [0\,,\,\pi] \;:$$
$$|f(x) - P(x)| \leqslant |f(x) - \sigma_n(f;x)| + |\sigma_n(f;x) - P(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \;\blacktriangleright$$

3. Полнота и замкнутость тригонометрической системы функций

Определение 21. *Ортогональная система функций называется полной в данном классе функций, если в этом классе не существует ненулевой функции, ортогональной ко всем функциям данной системы.*

Теорема 43. *Основная тригонометрическая система функций полна в классе всех непрерывных 2π-периодических функций.*

◀ Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция, ортогональная ко всем функциям основной тригонометрической системы

$$\left\{\frac{1}{2}\,,\,\cos x\,,\,\sin x\,,\,\cos 2x\,,\,\sin 2x\,,\,\ldots\right\}\,.$$

В этом случае все коэффициенты Фурье функции f равны нулю, и потому ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(0\cdot\cos kx + 0\cdot\sin kx)\,.$$

Но такой же ряд Фурье имеет и функция $g(x) \equiv 0$, которая тоже является непрерывной и 2π-периодической. Отсюда на основании следствия из теоремы Фейера заключаем, что $f(x) \equiv 0$. ▶

Определение 22. *Ортогональная система называется замкнутой в данном классе функций, если для ряда Фурье по этой системе любой функции из данного класса выполняется равенство Парсеваля.*

Теорема 44. *Основная тригонометрическая система функций замкнута в классе всех непрерывных 2π-периодических функций.*

◀ Пусть f — непрерывная 2π-периодическая функция,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

— n-я частичная сумма ее ряда Фурье, а $\sigma_n(f;x)$ — n-я сумма Фейера (среднее арифметическое частичных сумм ряда Фурье). Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и применяя теорему Фейера, имеем

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall x \in \mathbb{R} \; : \; |f(x) - \sigma_n(f;x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \, .$$

Используя минимизирующее свойство частичных сумм ряда Фурье, при $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$\|S_n(f;x) - f(x)\| \leqslant \|\sigma_n(f;x) - f(x)\| = \\ = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f;x) - f(x)|^2 \, dx} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx} = \varepsilon \, .$$

Таким образом, ряд Фурье функции f сходится к ней в среднем. Отсюда на основании теоремы 30 заключаем, что выполняется равенство Парсеваля

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \, . \;\; \blacktriangleright$$

Глава 19

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе излагается теория интегралов, зависящих от параметра и понимаемых в смысле Римана или как несобственные. В качестве приложений изложены основы теории эйлеровых интегралов и элементы теории интегралов Фурье.

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Определения и примеры

Собственными интегралами условимся здесь называть интегралы, понимаемые в смысле Римана, чтобы отличить их от несобственных интегралов, которые будут рассматриваться ниже.

Предположим, что функция двух переменных

$$f\,:\,[a\,,\,b]\times X\longrightarrow\mathbb{R}\,,$$

такова, что при каждом фиксированном $y\in Y$ существует (в смысле Римана) интеграл

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx\,. \tag{19.1}$$

Он называется интегралом, зависящим от параметра, и определяет некоторую функцию параметра y:

$$\Phi\,:\,Y\longrightarrow\mathbb{R}\,. \tag{19.2}$$

Здесь рассмотрим условия, обеспечивающие непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость этой функции. Кроме того, дадим вывод формул для интеграла и производной от функции (19.1).

Определение 23. (a) *Колебанием функции* $G : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *называется функция,* $\omega_G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *, определяемая равенством*

$$\omega_G(\delta) := \sup_{|t'-t''|\leqslant\delta} |G(t') - G(t'')|\,.$$

(b) *Колебанием функции* f *двух переменных* $(x\,,\,y)$ *называется функция* $\omega_f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *, определяемая равенством*

$$\omega_f(\delta) := \sup_{\substack{|x'-x''|\leqslant\delta\\ |y'-y''|\leqslant\delta}} |f(x',y') - f(x'',y'')|\,.$$

Замечание. С помощью колебания весьма просто выражается свойство равномерной непрерывности функции f:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+\ \ \exists\delta\in\mathbb{R}_+\ :\ \omega_f(\delta)\leqslant\varepsilon\,. \tag{19.3}$$

Теорема 45. *Если функция* f *равномерно непрерывна на множестве* $[a\,,\,b]\times Y$*, то функция* Φ*, определяемая равенством* (19.1)*, равномерно непрерывна на множестве* Y*.*

◀ Так как функция f равномерно непрерывна на множестве Y, то для нее выполнено условие (19.3). Пусть теперь $y', y'' \in Y$ такие, что $|y'-y''|\leqslant\delta$. Тогда

$$\big|\Phi(y') - \Phi(y'')\big| = \left|\int\limits_a^b f(x,y')\,dx - \int\limits_a^b f(x,y'')\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_a^b \big|f(x,y') - f(x,y'')\big|\,dx \leqslant \omega_f(\delta)\cdot\int\limits_a^b dx\ = (b-a)\cdot\omega_f(\delta).$$

Беря в левой части sup по всем y', y'', для которых $|y'-y''|\leqslant\delta$, и используя неравенство (19.3), получим

$$\omega_\Phi(\delta)\leqslant(b-a)\cdot\omega_f(\delta)<(b-a)\cdot\varepsilon\,. \tag{19.4}$$

Отсюда следует, что Φ равномерно непрерывна. ▶

Лемма 1. *Для любой функции* $G\in\mathcal{R}[a\,,\,b]$ *имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta G(t)\,dt - \sum_{k=0}^{m-1} G(\xi_k)\Delta t_k\right| \leqslant (\beta-\alpha)\cdot\omega_G(\delta), \tag{19.5}$$

где интегральная сумма построена для любого разбиения (T,ξ) *отрезка* $[\alpha\,,\,\beta]$*, мелкость которого не превосходит* δ*.*

◀ Пусть $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ — разбиение отрезка $[\alpha\,,\,\beta]$ такое, что $\max\{\Delta t_0\,,\,\ldots\,,\,\Delta t_{m-1}\} \leqslant \delta\,,\ \xi_k \in [t_k\,,\,t_{k+1}]$. Имеем

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(t)\,dt - \sum_{k=0}^{m-1} G(\xi_k)\,\Delta t_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} G(t)\,dt - \sum_{k=0}^{m-1} G(\xi_k)\cdot\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} dt\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (G(t) - G(\xi_k))\,dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |G(t) - G(\xi_k)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \omega_G(\delta)\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\Delta t_k = (\beta-\alpha)\cdot\omega_G(\delta)\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 46. *Если функция f непрерывна в прямоугольнике $[a\,,\,b]\times[c\,,\,d]$, то имеет место равенство*

$$\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx\right]dy = \int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x\,,\,y)\,dy\right]dx. \tag{19.6}$$

◀ Обозначим

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx\,,\quad F(x) = \int\limits_c^d f(x\,,\,y)\,dy\,. \tag{19.7}$$

В этих обозначениях равенство (19.6) запишется в виде

$$\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy = \int\limits_a^b F(x)\,dx\,. \tag{19.8}$$

Достаточно доказать только это равенство. Применяя неравенство (19.4) к функции F, имеем

$$\omega_F(\delta) \leqslant (d-c)\cdot\omega_f(\delta). \tag{19.9}$$

Пусть $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a\,,\,b]$, мелкость которого не превосходит δ. В силу неравенств (19.5) и (19.9) справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_a^b F(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\,\Delta x_k\right| \leqslant$$
$$\leqslant (b-a)\cdot\omega_F(\delta) \leqslant (b-a)\cdot(d-c)\cdot\omega_f(\delta). \tag{19.10}$$

Для этого же разбиения в силу неравенства (19.5) имеем

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx-\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k,y)\,\Delta x_k\right|\leqslant(b-a)\cdot\omega_f(\delta)\,.$$

Используя это неравенство, находим

$$\left|\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy-\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\,\Delta x_k\right|=$$
$$=\left|\int\limits_c^d dy\left(\int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx-\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k\,,\,y)\,\Delta x_k\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_c^d dy\left|\int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx-\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k\,,\,y)\,\Delta x_k\right|\leqslant(d-c)\cdot(b-a)\cdot\omega_f(\delta)\,.$$

Таким образом,

$$\left|\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy-\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\,\Delta x_k\right|\leqslant(d-c)\cdot(b-a)\cdot\omega_f(\delta). \tag{19.11}$$

Из неравенств (19.10) и (19.11) заключаем, что

$$0\leqslant\left|\int\limits_c^d \Phi(y)\,dy-\int\limits_a^b F(x)\,dx\right|\leqslant 2(d-c)\cdot(b-a)\cdot\omega_f(\delta).$$

Отсюда следует (19.8), так как $\omega_f(\delta)\to 0$ при $\delta\to+0$. ▶

Замечание. Применяя более удобную форму записи интеграла, равенство (19.6) обычно записывают в следующем виде:

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx\times=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x\,,\,y)\,dy\,. \tag{19.12}$$

Это равенство выражает возможность перемены порядка интегрирований при условии, что функция f непрерывна в прямоугольнике $[a\,,\,b]\times[c\,,\,d]$.

Пример. Функция $f(x\,,\,y)=x^y$ непрерывна при

$$(x\,,\,y)\in[0\,,\,1]\times[\alpha\,,\,\beta]\,,\quad\text{где}\quad 0<\alpha<\beta<+\infty\,.$$

По формуле (19.12) имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_\alpha^\beta x^y dy = \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_0^1 x^y\,dx = \int\limits_\alpha^\beta \frac{x^{y+1}}{y+1}\bigg|_0^1 =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\bigg|_\alpha^\beta = \ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}\,.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx = \ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}. \tag{19.13}$$

Найденное значение последнего интеграла вычислить обычным способом (т. е. по формуле Ньютона — Лейбница) затруднительно, так как первообразная от $\dfrac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}$ не выражается через элементарные функции.

Теорема 47. *Если функция f непрерывна в прямоугольнике $[a\,,\,b]\times[c\,,\,d]$, а функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике $[a\,,\,b]\times[y_0-\delta\,,\,y_0+\delta]$ при некоторых $\delta>0$, $y_0\in(c\,,\,d)$, то при $y\in(y_0-\delta\,,\,y_0+\delta)$ справедливо равенство*

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}\,dx\,. \tag{19.14}$$

◀ Применяя к функции $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, непрерывной в прямоугольнике $[a\,,\,b]\times[y_0-\delta\,,\,y_0+\delta]$, теорему 45, получим

$$\int\limits_{y_0}^y dt \int\limits_a^b \frac{\partial f(x\,,\,t)}{\partial t}\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0}^y \frac{\partial f(x\,,\,t)}{\partial t}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b f(x\,,\,t)\bigg|_{t=y_0}^{t=y}\cdot dx = \int\limits_a^b f(x\,,\,y)\,dx - \int\limits_a^b f(x\,,\,y_0)\,dx\,.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_a^b f(x,y)\,dx - \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx = \int\limits_{y_0}^y dt \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx\,. \tag{19.15}$$

Правая часть этого равенства имеет производную по y, равную $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x\,,y)}{\partial y}dx$. Следовательно, и левая часть дифференцируема по y. Поэтому, дифференцируя равенство (19.15), получим (19.14). ▶

Пример. Интеграл

$$\mathcal{I}(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x)\,dx\,, \quad (y > 1)\,,$$

по формуле Ньютона — Лейбница вычислить трудно, так как его первообразная не выражается через элементарные функции. Однако, дифференцируя его по y и производя в полученном интеграле замену

$$t = \operatorname{ctg} x\,,\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}\,,$$

будем иметь

$$\mathcal{I}'(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2y\,dx}{y^2 - \sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2y}{1 - \dfrac{y^2}{\sin^2 x}} \cdot \left(-\frac{dx}{\sin^2 x}\right) = \int\limits_{+\infty}^{0} \frac{2y\,dt}{1 - y^2(1+t^2)} =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{2y\,dt}{1 - y^2 - t^2 y^2} = \frac{2}{y} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \dfrac{y^2-1}{y^2}} =$$

$$= \frac{2}{y}\,\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,\operatorname{arctg}\frac{yt}{\sqrt{y^2-1}}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

Итак,

$$\mathcal{I}'(y) = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\mathcal{I}(y) = \int \frac{\pi\,dy}{\sqrt{y^2-1}} = \pi \ln(y + \sqrt{y^2-1}) + C\,. \tag{19.16}$$

Осталось найти значение постоянной C. С этой целью перепишем равенство (19.16) в виде

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x)\,dx = \pi \ln(y + \sqrt{y^2-1}) + C\,.$$

Полагая здесь $y = 1/\tau$, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{1-\tau^2\sin^2 x}{\tau^2}\,dx = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{\tau} + C.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства $\pi \ln \tau$, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln(1-\tau^2\sin^2 x)\,dx = \pi \ln(1+\sqrt{1-\tau^2}) + C.$$

Обе части этого равенства непрерывны при $0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon < 1$. Поэтому, переходя к пределу при $\tau \to +0$, найдем $0 = \pi \ln 2 + C$, откуда $C = -\pi \ln 2$. Подставляя найденное значение C в равенство (19.16), получим окончательный ответ

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 x)\,dx = \pi \ln \frac{y+\sqrt{y^2-1}}{2}\,.$$

Теорема 48. *Пусть функция f непрерывна в прямоугольнике $[a\,,b] \times [c\,,d]$, а функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике $[a\,,b] \times [y_0-\delta\,,y_0+\delta]$ при некотором $\delta > 0$, $y_0 \in (c\,,d)$. Пусть, далее, функция $\varphi : [y_0-\delta\,,y_0+\delta] \longrightarrow [a\,,b]$ дифференцируема. Тогда функция $\Phi(y) = \int\limits_a^{\varphi(y)} f(x\,,y)\,dx$ дифференцируема в точке y_0, причем*

$$\Phi'(y_0) = \int\limits_a^{\varphi(y_0)} \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}\,dx + f(\varphi(y_0)\,,y_0)\cdot\varphi'(y_0)\,. \tag{19.17}$$

◀ Для вычисления производной функции Φ в точке y_0 сделаем следующее преобразование

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{\varphi(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{\varphi(y_0)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x,y)\,dx\,. \tag{19.18}$$

По предыдущей теореме производная первого слагаемого правой части равна

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^{\varphi(y_0)} f(x,y)\,dx\right)\Bigg|_{y=y_0} = \int\limits_a^{\varphi(y_0)} \frac{\partial f(x\,,y_0)}{\partial y}\,dx\,.$$

Для вычисления производной последнего интеграла в (19.18) преобразуем его к виду

$$\int\limits_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x\,,\,y)\,dx = f(\theta\,,\,y)\cdot(\varphi(y)-\varphi(y_0))\,, \tag{19.19}$$

где[1] $\varphi(y_0)\lesseqgtr\theta\lesseqgtr\varphi(y)$. Из (19.19) имеем

$$\left(\frac{d}{dy}\int\limits_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y)} f(x\,,\,y)\,dx\right)\Bigg|_{y=y_0} = \lim_{y\to y_0}\left(f(\theta,y)\cdot\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}\right) =$$

$$= f(\varphi(y_0)\,,\,y_0)\cdot\varphi'(y_0)\,. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Если, в частности, $[a\,,\,b]=[c\,,\,d]$, $\varphi(y)\equiv y$, то равенство (19.17) дает

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^y f(x\,,\,y)\,dx\right)\Bigg|_{y=y_0} = \int\limits_0^{y_0}\frac{\partial f(x\,,\,y_0)}{\partial y}\,dx + f(y_0\,,\,y_0)\,. \tag{19.20}$$

Пример. Найдем производную по x от функции

$$I_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt\,, \qquad (n\in\mathbb{N})\,.$$

◀ Применяя формулу (19.20), имеем

$$I_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (n-1)(x-t)^{n-2}f(t)dt + \frac{(x-x)^{n-1}}{(n-1)!}f(a) =$$

$$\frac{1}{(n-2)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-2}f(t)dt = I_{n-1}(x)\,.$$

Так как $I_n(a)=0$, то

$$I_n(x) = \int\limits_a^x I_{n-1}(t)\,dt\,.$$

[1] Символ $\lesseqgtr$ употребляется здесь в смысле «лежать между».

Учитывая, что $I_1(x) = \int\limits_a^x f(t_1)\,dt_1$, получаем следующее равенство:

$$I_2(x) = \int\limits_a^x dt_2 \int\limits_a^{t_2} f(t_1)\,dt_1\,,$$

и вообще,

$$I_n(x) = \int\limits_a^x dt_n \int\limits_a^{t_n} dt_{n-1} \,\ldots \int\limits_a^{t_2} f(t_1)\,dt_1\,,$$

т. е. исходный интеграл — это записанный в виде одной квадратуры результат последовательного n-кратного интегрирования функции f. ►

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость

Пусть $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, и $Y \subset \mathbb{R}_+$ Предположим, что функция двух переменных $f\,:\,[a\,,\,\omega)\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ такова, что при каждом значении $y \in Y$ интеграл[2]

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \tag{19.21}$$

существует в смысле Римана или сходится как несобственный. Он называется несобственным интегралом, зависящим от параметра[3] и определяет функцию $\Phi\,:\,Y \longrightarrow \mathbb{R}$, зависящую параметра y.

Основные вопросы теории таких интегралов — те же, что и в предыдущем параграфе. Именно, требуется исследовать условия непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости функции Φ в зависимости от свойств подынтегральной функции f, а также дать вывод формул для интеграла и производной от функции Φ. Эти формулы применяются для вычисления некоторых интегралов, имеющих теоретическое и прикладное значение. Однако теоремы и формулы, установленные в предыдущем параграфе, без дополнительных ограничений неверны для несобственных интегралов, зависящих от параметра. Покажем это на **примерах.**

[2]Стрелка перед верхним пределом интегрирования служит для напоминания о том, что единственной особенностью несобственного интеграла являтся точка ω.

[3]Некоторые авторы для обозначения этого понятия употребляют аббревиатуру «НИЗОП», но здесь подобные сокращения не употребляются.

1) Функция $f(x\,,\,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ непрерывна и дифференцируема в полуплоскости $x > 0\,,\; y \in \mathbb{R}$. Однако, как это будет установлено ниже, справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sign} y\,. \tag{19.22}$$

Оно показывает, что несобственный интеграл (19.22) от непрерывной функции является разрывной функцией.

2) Дифференцируя по y подынтегральную функцию интеграла (19.22), получим интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \cos(xy)\,dx\,,$$

который расходится для каждого $y \in \mathbb{R}$. Таким образом, для интеграла (19.22) неверна формула дифференцирования по параметру под знаком интеграла.

3) Имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{y-x}{(y+x)^3}\,dy = \int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(y+x)^2} - \frac{2x}{(y+x)^3}\right) dy = \left(-\frac{1}{y+x} + \frac{x}{(y+x)^2}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=+\infty} = \frac{1}{(1+x)^2}\,;$$

$$\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{y-x}{(y+x)^3}\,dy = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\,.$$

Аналогично,

$$\int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{y-x}{(y+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_1^{+\infty} dx \int\limits_1^{+\infty} \frac{y-x}{(y+x)^3}\,dy \neq \int\limits_1^{+\infty} dy \int\limits_1^{+\infty} \frac{y-x}{(y+x)^3}\,dx\,,$$

т. е. в этом примере неверна формула перестановки порядка интегрирования.

Важнейшим из дополнительных предположений, при которых для несобственных интегралов, зависящих от параметра, можно будет получать положительные результаты, является предположение о *равномерной сходимости* таких интегралов. Прежде чем определять это понятие, условимся рассматривать в этом и следующем параграфах только интегралы вида (19.21) с единственной особенностью на верхнем пределе интегрирования, т. е. в точке $\omega \leqslant +\infty$. Иначе говоря, будем предполагать, что в (19.21) при каждом фиксированном $y \in Y$ подынтегральная функция $x \longmapsto f(x\,,\,y)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a\,,\,b] \subset [a\,,\,\omega)$. Это предположение не ограничивает общности, но упрощает многие формулировки и доказательства.

Определение 24. *Интеграл* (19.21) *называется сходящимся равномерно на множестве* Y, *если*

$$\lim_{\substack{\eta\to\omega\\ \eta<\omega}} \int_a^{\eta} f(x\,,\,y)\,dx = \int_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$$

равномерно по $y \in Y$, *т. е. если*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists\eta_\varepsilon \in [a\,,\,\omega) \;\; \forall\eta \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega) \;\; \forall y \in Y \;\; : \quad \left|\int_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\,. \tag{19.23}$$

Сравним понятие равномерной сходимости интеграла (19.21) с понятием сходимости его при каждом $y \in Y$, т. е. с поточечной сходимостью, которую можно определить, например, так:

$$\forall y \in Y \;\; \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists\eta_{\varepsilon,y} \in [a\,,\,\omega) \;\; \forall\eta \in [\eta_{\varepsilon,y}\,,\,\omega) \;\; : \quad \left|\int_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\,. \tag{19.24}$$

В этом последнем условии $\eta_{\varepsilon,y}$ зависит от ε и y, а в условии (19.23) η_ε зависит только от ε и не зависит от y. Таким образом, условие (19.23) является частным случаем условия (19.24). Иначе говоря, из равномерной сходимости вытекает поточечная, а обратное неверно.

Определение (19.23) равномерной сходимости интеграла (19.21) можно, очевидно, переписать в следующих равносильных формах:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists\eta_\varepsilon \in [a\,,\,\omega) \;\; \forall\eta \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega) \;\; : \;\; \sup_{y\in Y}\left|\int_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

или

$$\lim_{\substack{\eta\to\omega\\ \eta<\omega}} \sup_{y\in Y} \left| \int\limits_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| = 0\,. \tag{19.25}$$

Пример. Исследуем на равномерную сходимость интеграл

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{+\infty} y\,e^{-xy}\,dx\,,$$

который сходится поточечно при $y \geqslant 0$.

◀ Если $\eta > 0$, то

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} y\,e^{-xy}\,dx = \int\limits_{y\eta}^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-y\eta} \leqslant 1\,.$$

Так как $\sup\limits_{y\geqslant 0} e^{-y\eta} = 1$, то на множестве $y \geqslant 0$ данный интеграл сходится неравномерно (его «остаток» невозможно сделать меньше $\varepsilon = 1$). На множестве $y > 0$ он тоже сходится неравномерно, поскольку $\sup\limits_{y>0} e^{-y\eta} = 1$.

Пусть теперь $y \in [c\,,+\infty)$, где $c > 0$. В этом случае имеем

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} y\,e^{-xy}\,dx = e^{-y\eta} \leqslant e^{-\eta c} \leqslant \varepsilon < 1$$

при

$$\eta \geqslant \eta_0 = -\frac{\ln\varepsilon}{c}\,.$$

Таким образом, на множестве $Y = [c\,,+\infty)$, где $c > 0$, данный интеграл сходится равномерно. ▶

Теорема 49 (критерий Коши). *Для того, чтобы интеграл* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dy$ *сходился равномерно на множестве* Y, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+ \quad \exists\eta_\varepsilon\in[a,\omega) \quad \forall\eta,\eta'\in[\eta_\varepsilon\,,\,\omega) \quad \forall y\in Y \quad : \quad \left| \int\limits_{\eta}^{\eta'} f(\,x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant \varepsilon\,. \tag{19.26}$$

◀ **Необходимость.** Предполагая, что интеграл сходится равномерно на Y, зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и запишем условие (19.23):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \eta_\varepsilon \in [a,\omega) \;\; \forall \eta \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega) \;\; \forall y \in Y \;\; : \;\; \left| \int\limits_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

и то же самое с заменой η на η'

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \eta_\varepsilon \in [a,\omega) \;\; \forall \eta' \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega) \;\; \forall y \in Y \;\; : \;\; \left| \int\limits_{\eta'}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Из двух последних условий находим

$$\left| \int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x\,,\,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx - \int\limits_{\eta'}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| + \left| \int\limits_{\eta'}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Таким образом, условие (19.26) выполнено.

Достаточность. Предполагая, что выполнено условие (19.26) и переходя в (19.26) к пределу при $\eta' \to \omega$, $\eta' < \omega$, получим

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \eta_\varepsilon \in [a\,,\,\omega) \;\; \forall \eta \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega) \;\; \forall y \in Y \;\; : \;\; \left| \int\limits_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant \varepsilon\,,$$

что совпадает с определением равномерной сходимости. ▶

Теорема 50 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Если существует функция* $g \; : \; [a\,,\,\omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *такая, что неравенство* $|f(x\,,\,y)| \leqslant g(x)$ *выполняется для всех* $x \in [a\,,\,\omega)$ *и для всех* $y \in Y$, *а интеграл* $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ *сходится равномерно по* $y \in Y$.

◀ Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Применяя критерий Коши сходимости интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} g(x)\,dx$, имеем

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists \eta_\varepsilon \in [a,\omega) \;\; \forall \eta, \eta' \in [\eta_\varepsilon,\omega) \;\; : \;\; \left| \int\limits_{\eta}^{\eta'} g(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon\,.$$

При тех же условиях и $\forall y \in Y$ имеем

$$\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{\eta}^{\eta'} |f(x\,,\,y)|\,dx\right| \leqslant \left|\int_{\eta}^{\eta'} g(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Таким образом для интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости. ▶

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2+1}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

◀ Так как $\dfrac{1}{x^2+\alpha^2+1} \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$, то, учитывая, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+1}$ сходится, на основании признака Вейерштрасса заключаем, что данный интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. ▶

Теорема 51 (критерий). *Для того, чтобы сходящийся при $y \in Y$ несобственный интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ сходился равномерно на Y, необходимо и достаточно, чтобы для любой возрастающей числовой последовательности $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\eta_k \in [a\,,\,\omega)$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = \omega$, функциональная последовательность $(\Phi_k)_{k=1}^{\infty}$, где $\Phi_k(y) = \int\limits_a^{\eta_k} f(x\,,\,y)\,dx$, сходилась равномерно на Y к функции Φ.*

◀ **Необходимость.** Предположим, что данный интеграл сходится равномерно на Y. Тогда выполнено условие (19.25)

$$\lim_{\substack{\eta\to\omega\\ \eta<\omega}} \sup_{y\in Y} \int_{\eta}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx = 0\,.$$

Зададим произвольную последовательность $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$, такую, что $\eta_k \in [a\,,\,\omega)$ и $\eta_k \nearrow \omega$ при $k \to \infty$. Тогда из (19.25) получим

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in Y} |\Phi(y) - \Phi_k(y)| = \lim_{\substack{\eta_k\to\omega\\ \eta_k<\omega}} \sup_{y\in Y} \left|\int_{\eta_k}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| = 0\,.$$

Это означает,что $\Phi_k \rightrightarrows \Phi$ на Y.

Достаточность. Пусть выполнено условие, указанное в формулировке теоремы. Надо показать, что данный интеграл сходится равномерно на Y. Предполагая противное, заключаем, что не выполнено, например, условие (19.25). Задавая произвольную последовательность $(\widetilde{\eta}_k) \nearrow \omega$, $\widetilde{\eta}_k \in [a\,,\,\omega)$, запишем для каждого k то, что не выполнено условие (19.25):

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall \widetilde{\eta}_k \in [a, \omega) \;\; \exists \eta_k \in [\widetilde{\eta}_k, \omega) \; : \; \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{\eta_k}^{\omega} f(x\,,\,y)\,dx \right| > \varepsilon\,.$$

Таким образом, существует последовательность $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\eta_k \nearrow \omega$, и для любого $k \in \mathbb{N}$ будет: $\sup\limits_{y \in Y} |\Phi(y) - \Phi_k(y)| > \varepsilon > 0$, т. е. $(\Phi_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится неравномерно на Y. ▶

Теорема 52 (признак Абеля). *Предположим, что интеграл* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ *сходится равномерно при* $y \in Y$, *а функция* $g(x\,,\,y)$ *монотонна по* x *при каждом* $y \in Y$ *и ограниченна на* $[a\,,\,\omega) \times Y$. *Тогда интеграл* $F(y) = \int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y) \cdot g(x\,,\,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y.

◀ Пусть $|g(x\,,\,y)| \leqslant L < +\infty$ при $(x\,,\,y) \in [a\,,\,\omega) \times Y$. При $a < \eta < \eta' < \omega$ в силу второй теоремы «о среднем» имеем

$$\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x\,,\,y) \cdot g(x\,,\,y)\,dx =$$

$$= g(\eta\,,\,y) \int\limits_{\eta}^{\xi} f(x\,,\,y)\,dx + g(\eta'\,,\,y) \int\limits_{\xi}^{\eta'} f(x\,,\,y)\,dx\,, \qquad (19.27)$$

где $\eta \leqslant \xi \leqslant \eta'$. Зададим $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ существует $\eta_\varepsilon \in [a\,,\,\omega)$, такое, что при $\eta_\varepsilon \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant \eta' < \omega$ будут выполнены неравенства

$$\left| \int\limits_{\eta}^{\xi} f(x\,,\,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}\,, \qquad \left| \int\limits_{\xi}^{\eta'} f(x\,,\,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}\,.$$

Используя равенство (19.27), для всех $y \in Y$ имеем

$$\left| \int_{\eta}^{\eta'} f(x\,,\,y) \cdot g(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant |g(\eta\,,\,y)| \cdot \left| \int_{\eta}^{\xi} f(x\,,\,y)\,dx \right| + |g(\eta'\,,\,y)| \cdot \left| \int_{\xi}^{\eta'} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon\,.$$

Таким образом, для интеграла $F(y)$ выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости. ▶

Теорема 53 (признак Дирихле). *Предположим, что интегралы* $\int\limits_a^{\eta} f(x\,,\,y)\,dx$ *равномерно ограничены при* $\eta \in [a\,,\,\omega)$, $y \in Y$, *а функция* $g(x\,,\,y)$ *убывает по* x *при каждом фиксированном* y, *и* $\lim\limits_{\substack{x \to \omega \\ x < \omega}} g(x\,,\,y) = 0$ *равномерно по* $y \in Y$. *Тогда интеграл* $F(y) = \int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y) \cdot g(x\,,\,y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y.

◀ Пусть $\left| \int\limits_a^{\eta} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant L < +\infty$ при $(\eta\,,\,y) \in [a\,,\,\omega) \times Y$. Задавая $\varepsilon > 0$, найдем $\eta_\varepsilon \in [a\,,\,\omega)$ так, чтобы при $x \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega)$ и $y \in Y$ было $|g(x\,,\,y)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4L}$. Тогда при $\eta_\varepsilon \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant \eta' < \omega$ из равенства (19.27) имеем

$$\left| \int_{\eta}^{\eta'} f(x\,,\,y) \cdot g(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant g(\eta\,,\,y) \left| \int_{\eta}^{\xi} f(x\,,\,y)\,dx \right| + g(\eta'\,,\,y) \left| \int_{\xi}^{\eta'} f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4L} \left| \left(\int_a^{\xi} - \int_a^{\eta} \right) f(x\,,\,y)\,dx \right| + \leqslant \frac{\varepsilon}{4L} \left| \left(\int_a^{\eta'} - \int_a^{\xi} \right) f(x\,,\,y)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4L} \cdot 2L + \frac{\varepsilon}{4L} \cdot 2L = \varepsilon\,.$$

Таким образом, для интеграла $F(y)$ выполнено условие критерия Коши равномерной сходимости. ▶

§ 3. Некоторые свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 54. *Если функция* $f : [a, \omega) \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *равномерно непрерывна на каждом множестве* $[a, \eta) \times Y$, *где* $a \leqslant \eta < \omega$, *а интеграл* $\Phi(y) = \int\limits_a^{\to\omega} f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y, *то определяемая им функция* Φ *непрерывна на* Y.

◀ Зададим произвольную последовательность $(\eta_k) \nearrow \omega$, где $\eta_k \in [a, \omega)$ при $k \in \mathbb{N}$. Интегралы

$$\Phi_k(y) = \int\limits_a^{\eta_k} f(x,y)\,dx\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

существуют как интегралы Римана при любом $y \in Y$. По теореме 45 все функции Φ_k непрерывны на Y. По теореме 51 последовательность $(\Phi_k)_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к Φ на Y. Отсюда на основании теоремы о равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций заключаем, что Φ непрерывна на Y. ▶

Теорема 55. *Если функция* f *непрерывна на* $[a, \omega) \times [\alpha, \beta]$, *а интеграл* $\Phi(y) = \int\limits_a^{\to\omega} f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[\alpha, \beta]$, *то* Φ *непрерывна на* $[\alpha, \beta]$, *и справедливо равенство*

$$\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^{\to\omega} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{\to\omega} dx \int\limits_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\,. \tag{19.28}$$

◀ Пусть $a \leqslant \eta < \omega$. Функция f непрерывна в прямоугольнике $[a, \eta] \times [\alpha, \beta]$, а значит, и равномерно непрерывна в силу теоремы Кантора. Отсюда на ововании предыдущей теоремы следует, что f непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Осталось только проверить равенство (19.28). С этой целью зададим последовательность $(\eta_k) \nearrow \omega$, где $\eta_k \in [a, \omega)$. Для каждого η_k по теореме 46 имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_a^{\eta_k} f(x, y)\,dx = \int\limits_a^{\eta_k} dx \int\limits_\alpha^\beta f(x, y)\,dy\,. \tag{19.29}$$

Так как $\int\limits_a^{\eta_k} f(x, y)\,dx \rightrightarrows \int\limits_a^{\to\omega} f(x, y)\,dx$ при $k \to \infty$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей заключаем, что в левой части равенства (19.29) возможен предельный переход (при $k \to \infty$) под знаком интеграла, т. е.

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{a}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \cdot \lim_{k\to\infty} \int\limits_{a}^{\eta_k} f(x\,,\,y)\,dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} dy \int\limits_{a}^{\eta_k} f(x\,,\,y)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{a}^{\eta_k} dx \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x\,,\,y)dy =$$

$$= \int\limits_{a}^{\to\omega} dx \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x\,,\,y)\,dy\,.$$

Беря начало и конец, получим равенство (19.28). ▶

Теорема 56 (о перестановке двух несобственных интегрирований). *Пусть функция* $f\ :\ [a\,,\,\omega) \times [b\,,\,\psi) \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна, и выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(a) *Повторный интеграл* $\int\limits_{b}^{\to\psi} dy \int\limits_{a}^{\to\omega} |f(x\,,\,y)|\,dx$ *сходится, а несобственный интеграл* $\int\limits_{a}^{\to\omega} |f(x\,,\,y)|\,dx$ *сходится равномерно при* $y \in [b\,,\,\xi]$ *для любого* $\xi \in [b\,,\,\psi)$.

(b) *Повторный интеграл* $\int\limits_{a}^{\to\omega} dx \int\limits_{b}^{\to\psi} |f(x\,,\,y)|\,dy$ *сходится, а несобственный интеграл* $\int\limits_{b}^{\to\psi} |f(x\,,\,y)|\,dy$ *сходится равномерно при* $x \in [a\,,\,\eta]$ *для любого* $\eta \in [a\,,\,\omega)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{a}^{\to\omega} dx \int\limits_{b}^{\to\psi} f(x\,,\,y)\,dy = \int\limits_{b}^{\to\psi} dy \int\limits_{a}^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\,. \tag{19.30}$$

◀ Предположим для определенности, что выполнено условие (a). Из него в силу признака сравнения следует сходимость повторного интеграла, стоящего в правой части равенства (19.30). При любом $\eta \in [a\,,\,\omega)$ в силу теоремы 55 имеем

$$\int\limits_{a}^{\eta} dx \int\limits_{b}^{\to\psi} f(x,y)\,dy = \int\limits_{b}^{\to\psi} dy \int\limits_{a}^{\eta} f(x,y)\,dx\,. \tag{19.31}$$

Покажем, что разность между правыми частями равенств (19.30) и (19.31) бесконечно мала при $\eta \to \omega$, $\eta < \omega$. Преобразуем и оценим эту разность

$$\left|\int_b^{\to\psi} dy \int_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)dx - \int_b^{\to\psi} dy \int_a^{\eta} f(x\,,\,y)dx\right| = \left|\int_b^{\to\psi} dy \int_\eta^{\to\omega} f(x\,,\,y)dx\right| =$$

$$= \left|\int_b^{\xi} dy \int_\eta^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx + \int_\xi^{\to\psi} dy \int_\eta^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_b^{\xi} dy \left|\int_\eta^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| + \int_\xi^{\to\psi} dy \int_\eta^{\to\omega} |f(x\,,\,y)|\,dx\,, \quad (19.32)$$

где $\xi \in [b, \psi)$. Задавая $\varepsilon > 0$, оценим интегралы, стоящие в правой части равенства (19.32). Пользуясь сходимостью повторного интеграла, выберем $\xi \in [b\,,\,\psi)$ так, чтобы было

$$0 \leqslant \int_\xi^{\to\psi} dy \int_\eta^{\to\omega} |f(x\,,\,y)|\;dx \leqslant \int_\xi^{\to\psi} dy \int_a^{\to\omega} |f(x\,,\,y)|\;dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (19.33)$$

Фиксируя это значение $\xi \in [a\,,\,\omega)$ и пользуясь равномерной сходимостью интеграла $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ на отрезке $[b\,,\,\xi]$, выберем $\eta_\varepsilon \in [a\,,\,\omega)$ так, чтобы для любого $\eta \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega)$ было

$$\left|\int_\eta^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(\xi - b)}\,.$$

Тогда будет

$$\int_b^{\xi} dy \left|\int_\eta^{\to\omega} f(x,y)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(\xi - b)} \cdot (\xi - b) = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (19.34)$$

Из неравенств (19.33) и (19.34) следует, что

$$\left|\int_b^{\to\psi} dy \int_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx - \int_b^{\to\psi} dy \int_a^{\eta} f(x\,,\,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

для всех $\eta \in [\eta_\varepsilon\,,\,\omega)$. Таким образом, правая часть равенства (19.31) при $\eta \to \omega$, $\eta < \omega$ сходится к правой части равенства (19.30). Переходя к пределу в (19.31) при $\eta \to \omega$, $\eta < \omega$, получим равенство (19.30). ▶

Теорема 57. *Предположим, что функции* $f(x\,,\,y)$ *и* $\frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}$ *непрерывны в прямоугольнике* $[a\,,\,\omega)\times[\alpha\,,\,\beta]$, *интеграл* $\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y_0)\,dx$ *сходится при некотором* $y_0\in[\alpha\,,\,\beta]$, *а интеграл* $\int\limits_a^{\to\omega}\frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}\,dx$ *сходится равномерно на* $[\alpha\,,\,\beta]$. *Тогда интеграл* $\Phi(y)=\int\limits_a^{\to\omega} f(x\,,\,y)\,dx$ *определяет функцию* $\Phi\ :\ [\alpha\,,\,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$, *которая дифференцируема на* $[\alpha\,,\,\beta]$, *причем* $\Phi'(y)=\int\limits_a^{\to\omega}\frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}\,dx$.

◀ Зададим числовую последовательность $(\eta_k)_{k=1}^{\infty}$, где $\eta_k\nearrow\omega$, $\eta_k\in[a\,,\,\omega)$. Тогда по теореме 47 все функции

$$\Phi_k(y)=\int\limits_a^{\to\eta_k} f(x\,,\,y)\,dx$$

дифференцируемы, причем

$$\Phi_k'(y)=\int\limits_a^{\to\eta_k}\frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}\,dx\,.$$

Для функциональной последовательности $(\Phi_k)_{k=1}^{\infty}$ выполнены следующие услоовия: $(\Phi_k(y_0))_{k=1}^{\infty}$ сходится, а $({\Phi'}_k)_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[\alpha\,,\,\beta]$. Отсюда на основании теоремы о дифференцировании функциональных последовательностей заключаем, что $\Phi_k\rightrightarrows\Phi$ на $[\alpha\,,\,\beta]$, Φ дифференцируема, причем

$$\Phi'(y)=\lim_{k\to\infty}{\Phi_k}'(y)=\lim_{k\to\infty}\int\limits_a^{\to\eta_k}\frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}\,dx=\int\limits_a^{\to\omega}\frac{\partial f(x\,,\,y)}{\partial y}\,dx\,.\ \blacktriangleright$$

§ 4. Вычисление некоторых несобственных интегралов

Здесь рассмотрим применение теорем предыдущего параграфа к вычислению некоторых несобственных интегралов.

1. Вычисление интеграла Пуассона и его обобщений

Вычислим интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\,. \tag{19.35}$$

Использовать для этой цели формулу Ньютона — Лейбница не удается, так как первообразная от подынтегральной функции не выражается через элементарные функции. Сходимость интеграла (19.35) следует (в силу признака сравнения) из неравенства $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, справедливого при $x \geqslant 1$, и из сходимости интеграла[4] $\int\limits^{+\infty} e^{-x}\,dx$. Для вычисления интеграла (19.35) проделаем следующие преобразования:

$$I^2 = \left(\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+t^2)}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}x\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}x\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-x^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\right)\Bigg|_{x=0}^{+\infty} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\,. \tag{19.36}$$

Беря начало и конец, получим $I^2 = \pi/4$, откуда $I = \sqrt{\pi}/2$. Таким образом, имеем

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{19.37}$$

---

[4]Когда в интеграле не указан один из пределов интегрирования, то это означает, что в данном вопросе его конкретное числовое значение существенного значения не имеет, лишь бы оно находилось достаточно близко к тому прелелу интегрирования, который указан.

В выкладках (19.36) была сделана замена $t = xy$, затем произведена перемена порядка двух несобственных интегрирований

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} x\, dy = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} x\, dx\,.$$

Законность этой перемены следует из теоремы 56 предыдущего параграфа. В самом деле, непрерывность подынтегральной функции при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, а также сходимость повторных интегралов очевидны. Из неравенства

$$xe^{-x^2(1+y^2)} \leqslant xe^{-x^2}$$

в силу признака Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} x\, dx$$

при $y \in \mathbb{R}$.

Исходя из равенства (19.37), покажем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \alpha^{-1/2}, \quad (\alpha > 0) \tag{19.38}$$

В самом деле, замена $t = \sqrt{\alpha} x$, $dt = \sqrt{\alpha} dx$, дает

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \alpha^{-1/2}\,.$$

Дифференцируя k раз равенство (19.38) по α, получим

$$(-1)^k \int\limits_0^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) \cdot \alpha^{-1/2-k}\,,$$

откуда

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi} \alpha^{-1/2-k}, \quad (\alpha > 0,\, k \geqslant 1)\,. \tag{19.39}$$

Для обоснования этого равенства достаточно убедиться в том, что интеграл (19.39) сходится равномерно при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ для любого $\alpha_0 > 0$. Так как при $x \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ справедливо неравенство

$$x^{2k} e^{-\alpha x^2} \leqslant x^{2k} e^{-\alpha_0 x^2}\,,$$

то равномерная сходимость интеграла (19.39) вытекает из признака Вейерштрасса.

Вычислим еще один интеграл, являющийся обобщением интеграла Пуассона (19.35)

$$\mathcal{J}(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} \cos \alpha x \, dx \,, \quad (k \neq 0 \,,\ \alpha \in \mathbb{R})\,. \tag{19.40}$$

Так как $\left| e^{-k^2x^2 \cos(\alpha x)} \right| \leqslant e^{-k^2x^2}$, то интеграл (19.40) сходится равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}$ в силу признака Вейерштрасса, поскольку мажорируется сходящимся интегралом Пуассона

$$\mathcal{J}(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|k|}\,.$$

Дифференцируя интеграл (19.40) по параметру α, получим

$$\mathcal{J}'(\alpha) := -\int\limits_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} x \sin \alpha x \, dx\,. \tag{19.41}$$

Из оценки $\left| e^{-k^2x^2} x \sin \alpha x \right| \leqslant xe^{-k^2x^2}$ следует, что интеграл (19.41) сходится равномерно по $\alpha \in \mathbb{R}$ и, значит, равенство (19.41) справедливо. К интегралу (19.41) применим интегрирование по частям, полагая

$$\left[\begin{array}{c|c} u = \sin(\alpha x) & du = \alpha \cos(\alpha x) \, dx \\ dv = -e^{-\alpha^2x^2} x \, dx & v = \dfrac{1}{2k^2} e^{-k^2x^2} \end{array} \right].$$

Тогда получим

$$\mathcal{J}'(\alpha) = \frac{\sin(\alpha x)}{2k^2} \cdot e^{-k^2x^2} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{\alpha}{2k^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} \cos(\alpha x) \, dx = -\frac{\alpha}{2k^2} \mathcal{J}(\alpha)\,.$$

Мы пришли к дифференциальному уравнению

$$\mathcal{J}'(\alpha) = -\frac{\alpha}{2k^2} \mathcal{J}(\alpha)$$

с начальным условием $\mathcal{J}(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{|k|}$. Интегрируя его, получим

$$\frac{d\mathcal{J}}{\mathcal{J}} = -\frac{\alpha}{2k^2} \quad \Longrightarrow \quad \ln|\mathcal{J}(\alpha)| = \ln C - \frac{\alpha^2}{4k^2} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{J}(\alpha) = C \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4k^2}\right) \ ; \quad \mathcal{J}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2|k|}\,.$$

Таким образом, исходный интеграл равен

$$\mathcal{J}(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-k^2x^2} \cos\alpha x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|k|} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4k^2}\right)\,.$$

2. Вычисление интегралов Дирихле и Фейера

Вычислим интеграл

$$J(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx \tag{19.42}$$

Его равномерная сходимость вытекает из признака Абеля, если принять $f(x\,,\,\beta) = \dfrac{\sin x}{x}$, $g(x\,,\,\beta) = e^{-\beta x}$. Так как подынтегральная функция непрерывна, а интеграл сходится равномерно, то $J(\beta)$ непрерывна при $\beta \geqslant 0$. В частности,

$$J(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

Далее, так как $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$, то

$$0 \leqslant |J(\beta)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\, dx = \frac{1}{\beta}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\beta\to+\infty} J(\beta) = 0\,. \tag{19.43}$$

Чтобы вычислить интеграл (19.42), найдем его производную по параметру β

$$J'(\beta) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cdot \sin x\, dx. \tag{19.44}$$

В силу неравенства

$$\left|e^{-\beta x} \cdot sinx\right| \leqslant e^{-\beta_0 x}$$

при $\beta \geqslant \beta_0 > 0$ интеграл (19.44) сходится равномерно для любого $\beta_0 > 0$. Таким образом, дифференцирование интеграла (19.44) по параметру β было законным (при $\beta > 0$).

Для вычисления интеграла (19.44) используем формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos x\,dx + i\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin x\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}(\cos x + i\sin x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cdot e^{ix}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x(\beta - i)}\,dx = -\left.\frac{e^{-x(\beta-i)}}{\beta - i}\right|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{\beta - i} =$$
$$= \frac{\beta + i}{\beta^2+1} = \frac{\beta}{\beta^2+1} + i\frac{1}{\beta^2+1}\,.$$

Беря начало и конец и выделяя вещественную и мнимую части, находим

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos x\,dx = \frac{\beta}{\beta^2+1}, \qquad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\sin x\,dx = \frac{1}{\beta^2+1}\,.$$

Таким образом, имеем

$$J'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2+1}\,.$$

Интегрируя это равенство, получим $J(\beta) = C - \operatorname{arctg}\beta$, откуда при $\beta \to +\infty$ с учетом равнства (19.43) найдем $C = \pi/2$. Итак, имеем

$$J(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\beta\,. \tag{19.45}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\beta \to +0$, получаем числовое значение интеграла Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{19.46}$$

которое было использовано в теории рядов Фурье. Исходя из равенства (19.43), покажем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sign}\sigma\,. \tag{19.47}$$

В самом деле, при $\sigma > 0$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sigma t} \sigma\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Если $\sigma < 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin |\sigma| x}{x}\, dx = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Тем самым равенство (19.47) доказано. Интеграл (19.47) сходится равномерно по σ на любом отрезке $[\alpha\,,\,\beta]$, где $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Интегрируя равенство (19.47) в пределах от α до β, получим

$$\frac{\pi}{2} \cdot (\beta - \alpha) = \int\limits_\alpha^\beta d\sigma \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \sigma x}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int\limits_\alpha^\beta \sin \sigma x\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \left(-\frac{\cos \sigma x}{x} \right)\Bigg|_{\sigma=\alpha}^{\sigma=\beta} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\, dx\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot (\beta - \alpha), \tag{19.48}$$

при

$$0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty\,.$$

Этот интеграл сходится равномерно по $\alpha \in [0\,,\,\beta]$, поэтому обе части равенства (19.48) непрерывны по $\alpha \in [0\,,\,\beta]$. Переходя к пределу в равенстве (19.48) при $\alpha \to +0$, найдем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \beta x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \beta\,,$$

откуда при $\beta = 2$ получим величину следующего интеграла Фейера:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

3. Вычисление интегралов Фруллани

Несобственные интегралы вида

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx\,, \quad (0<a<b<+\infty), \tag{19.49}$$

называются *интегралами Фруллани.* В зависимости от свойств функции f известны два способа вычисления интеграла (19.49).

a) Предположим, что функция $f\ :\ [0\,,+\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на $(0\,,+\infty)$, причем

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(x)\,dx = f(+\infty)-f(0)\,. \tag{19.50}$$

Указанные условия выполняются, например, для функций arctg и $x \longmapsto e^{-x}$, продолженных по непрерывности в точку $+\infty$. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(\alpha x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha}\cdot f'(t)\,dt = \frac{f(+\infty)-f(0)}{\alpha} \tag{19.51}$$

сходится равномерно при $\alpha\in[a\,,\,b]$. Интегрируя равенство (19.51) по α от a до b, получим

$$[f(+\infty)-f(0)]\cdot\ln\frac{b}{a} = \int\limits_a^b \frac{f(+\infty)-f(0)}{\alpha}d\alpha = \int\limits_a^b d\alpha \int\limits_0^{+\infty} f'(\alpha x)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_a^b f'(\alpha x)\,d\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx\,.$$

Таким образом, в данном случае имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = [f(+\infty)-f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}\,. \tag{19.52}$$

b) Предположим, что функция $f\ :\ [0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ такая, что сходтся интеграл (19.49), и при некотором $A>0$ сходится интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx\,. \tag{19.53}$$

(Например, в качестве f можно взять $\sin$ или $\cos$). Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = -f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}\,. \qquad (19.54)$$

◀ Для доказательства этого равенства проделаем следующие преобразования:

$$\int\limits_0^{\eta} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int\limits_0^{\eta} \frac{f(bx)-f(0)}{x}\,dx - \int\limits_0^{\eta} \frac{f(ax)-f(0)}{x}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{b\eta} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt - \int\limits_0^{a\eta} \frac{f(t)-f(0)}{t}\,dt = \int\limits_{a\eta}^{b\eta} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\int\limits_{a\eta}^{b\eta}\frac{dt}{t} =$$
$$= \int\limits_{a\eta}^{b\eta} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}\,.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{\eta} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int\limits_{a\eta}^{b\eta} \frac{f(t)}{t}\,dt - f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\eta\to+\infty$ и используя критерий Коши сходимости интеграла (19.53), получаем равенство (19.54). ▶

§ 5. Эйлеровы интегралы

Эйлеровыми интегралами принято называть следующие две специальные функции: *гамма-функцию* $x\longmapsto\Gamma(x)$, определяемую равеством

$$\Gamma(x) := \int\limits_{\to 0}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (19.55)$$

(эйлеров интеграл 2-го рода), и *бета-функцию* $(x,y)\longmapsto \mathrm{B}(x,y)$, определяемую равенством

$$\mathrm{B}(x\,,\,y) := \int\limits_{\to 0}^{\to 1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (19.56)$$

(эйлеров интеграл 1-го рода). Эйлеровы интегралы обладают рядом замечательных свойств и имеют большое прикладное значение. В этом и следующих параграфах излагаются важнейшие свойства эйлеровых интегралов и некоторые их приложения.

1. Основные свойства гамма-функции

Теорема 58. *Гамма-функция определена равенством* (19.55) *для всех* $x \in \mathbb{R}_+$, *причем она там положительна и непрерывна.*

◀ Область определения гамма-функции совпадает с областью сходимости несобственного интеграла (19.55), а положительность гамма-функции следует из положительности подынтегральной функции этого интеграла. Так как подынтегральная функция непрерывна на $\mathbb{R}_+$, то область сходимости интеграла (19.55) зависит лишь от асимптотики подынтегральной функции при $t \to +0$ и при $t \to +\infty$. Так как $t^{x-1}e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ при $t \to +0$, то сходимость интеграла $\int\limits_{+0} t^{x-1}e^{-t}dt$ имеет место при $1 - x < 1$ т. е. при $x > 0$. Так как $t^{x-1}e^{-t} = o(e^{(1-\delta)t})$ при $t \to +\infty$, где $0 < \delta < 1$, то $\int\limits^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ сходится при всех $x \in \mathbb{R}$. Непрерывность гамма-функции следует из равномерной сходимости интеграла (19.55) при $x \geqslant \delta$, где δ — произвольное положительное число, а равномерную сходимость можно установить с помощью признака Вейерштрасса. ▶

Замечание. Иногда приходится рассматривать гамма-функцию *комплексного переменного* $z = x + iy$, где x, $y \in \mathbb{R}$:

$$\Gamma(z) := \int\limits_{\to 0}^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt\,, \tag{19.57}$$

где степень t^{z-1} с комплексным показателем определяется равенством

$$t^{z-1} := e^{(z-1)\ln t} = e^{(x-1)\ln t + iy\ln t} = t^{x-1} \cdot e^{iy\ln t}\,.$$

Так как $\left|e^{iy\ln t}\right| \equiv 1$, то $\left|t^{z-1}e^{-t}\right| \equiv t^{x-1}e^{-t}$. Отсюда и из сходимости интеграла (19.55) при $x > 0$ следует сходимость интеграла (19.57) в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Теорема 59. *Гамма-функция бесконечно дифференцируема на* $\mathbb{R}_+$, *причем*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} dt\,, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{19.58}$$

◄ Равенство (19.58) получено из (19.55) k-кратным дифференцированием по параметру x под знаком интеграла. Поэтому для доказательства равенства (19.58) можно применить теорему 57. С этой целью заметим, что подынтегральные функции интегралов (19.55) и (19.58) различаются лишь множителем $\ln^k t$, не оказывающим влияния ни на область сходимости, ни на область равномерной сходимости данных интегралов. Это происходит потому, что при $t \to +0$ и при $t \to +\infty$ любая положительная степень функции $|\ln t|$ возрастает медленнее любой возрастающей степенно́й функции. ►

Теорема 60. *Для любых* $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы следующие равенства*:

(a) $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ (формула понижения);

(b) $\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdot \ldots \cdot (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x)$;

(c) $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(n+1) = n!$;

(d) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$.

◄ (a) Применяя интегрирование по частям, находим

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} x \cdot t^{x-1} e^{-t} dt = x \cdot \Gamma(x)\,.$$

(b) Применяя n раз формулу понижения, имеем

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdot \Gamma(x+n-1) = (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \Gamma(x+n-2) = \\ = \ldots = (x+n-1) \cdot (x+n-2) \cdot \ldots \cdot (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x)\,.$$

(c) Имеем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1\,.$$

Учитывая это и полагая в равенстве (b) $x = 1$, находим

$$\Gamma(n+1) = n! \cdot \Gamma(1) = n!\,.$$

(d) Вычислим сначала $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, производя в интеграле замену

$t = u^2$ и используя затем известное значение интеграла Пуассона

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}\,.$$

Учитывая это и полагая в равенстве (b) $x = 1/2$, получим

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 61. (a) *На $\mathbb{R}_+$ гамма-функция строго выпукла вниз.*

(b) *Существует единственная точка $\xi \in (1\,,\,2)$, в которой гамма-функция имеет строгий минимум.*

(c) $\Gamma(x) \sim \dfrac{1}{x}$ *при* $x \to +0$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

◀ (a) Ввиду очевидного строгого неравенства

$$\Gamma''(x) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^2 e^{-t} dt > 0 \tag{19.59}$$

при $x > 0$ гамма-функция строго выпукла вниз.

(b) Так как $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = \Gamma(1)$, то по теореме Ролля существует точка $\xi \in (1\,,\,2)$, в которой $\Gamma'(\xi) = 0$. Из неравенства (19.59) следует, что функция Γ' строго возрастает, поэтому точка ξ — единственная стационарная точка гамма-функции. Поскольку $\Gamma''(\xi) > 0$, то в точке ξ гамма-функция имеет строгий минимум, притом глобальный.

(c) Итак, на интервале $(0\,,\,\xi)$ гамма-функция убывает, а на интервале $(\xi\,,\,+\infty)$ — возрастает. Так как $\Gamma(x+1) \to 1$ при $x \to +0$, и $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, то

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \to +0\,.$$

И, наконец, при больших значениях x в силу возрастания гамма-функции имеем

$$\Gamma(x) \geqslant \Gamma([x]) = ([x] - 1)! \to +\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty\,,$$

где $[\ldots]$ означает целую часть. ▶

Замечания. 1. Более точная асимптотика гамма-функции при $x \to +\infty$ будет дана в следующем параграфе, но уже полученных выше результатов достаточно, чтобы довольно точно нарисовать график гамма-функции при $x > 0$.

2. С помощью теоремы 60(b) можно доопределить гамма-функцию на отрицательные значения аргумента. В самом деле, пусть число x — отрицательное и не целое. Выберем натуральное n настолько большим, чтобы было $x+n>0$. Тогда $\Gamma(x+n)$ можно вычислить по формуле (19.55) и, экстраполируя[5] тождество (b) из теоремы 60, по определению полагаем

$$\Gamma(x):=\frac{\Gamma(x+n)}{(x+n-1)\cdot(x+n-2)\cdot\ldots\cdot(x+1)\cdot x}\,.$$

Отсюда, например, учитывая, что $\Gamma(x+n)\sim\dfrac{1}{x+n}$ при $x\to -n$, имеем

$$\Gamma(x)\sim\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{x+n}\quad\text{или}\quad\lim_{x\to -n}(x+n)\cdot\Gamma(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\,.$$

Этот последний предел называется *вычетом* гамма-функции в точке $x=-n$.

2. Основные свойства бета-функции и ее связь с гамма-функцией

Теорема 62. *Бета-функция определена равенством* (19.56) *в квадранте* $x>0$, $y>0$ *и обладает свойством симметрии*

$$\mathrm{B}(x\,,\,y)=\mathrm{B}(y\,,\,x)\,. \tag{19.60}$$

◄ Подынтегральная функция интеграла (19.56) непрерывна на интервале $(0\,,\,1)$ и потому сходимость этого интеграла зависит только от асимптотики подынтегральной фуекции при $t\to+0$ и при $t\to 1-0$. Так как

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sim t^{x-1}\quad\text{при}\quad t\to+0\,,$$

то интеграл $\int\limits_{\to 0} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ сходится при $x>0$. Так как

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1}\sim(1-t)^{y-1}\quad\text{при}\quad t\to 1-0\,,$$

то интеграл $\int^{\to 1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ сходится при $y>0$. Таким образом, интеграл (19.56) сходится при $x>0$, $y>0$.

---

[5] *Экстраполяция* — это доопределение функций или тождеств на более широкие множества, чем те, где эти функции или тождества первоначально заданы.

Производя в интеграле (19.56) замену $t = 1 - \tau$, $1 - t = \tau$, $dt = -d\tau$, получим

$$\mathrm{B}(x\,,\,y) = \int\limits_{\to 1}^{\to 0} (1-\tau)^{x-1}\tau^{y-1}(-d\tau) = \int\limits_{\to 0}^{\to 1} \tau^{y-1}(1-\tau)^{x-1}d\tau = \mathrm{B}(y\,,\,x)\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 63. (a) *Для бета-функции справедливы следующие интегральные представления*

$$\mathrm{B}(x\,,\,y) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} \frac{u^{x-1}du}{(u+1)^{x+y}} = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(u+1)^{x+y}}du\,. \tag{19.61}$$

(b) *При* $0 < x < 1$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{B}(x\,,\,1-x) = \int\limits_{\to 0}^{\to +\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1}du = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,. \tag{19.62}$$

◀ (a) Производя в интеграле (19.56) замену переменного

$$t = \frac{u}{u+1}\,,\ 1-t = \frac{1}{u+1}\,,\ dt = \frac{du}{(u+1)^2}\,,$$

получим

$$\mathrm{B}(x\,,\,y) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1} \frac{du}{(u+1)^2} = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du\,.$$

В частности, при $x + y = 1$ имеем

$$\mathrm{B}(x\,,\,1-x) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1}du\,.$$

Разбивая, далее, промежуток интегрирования точкой $u = 1$ на два, производя во втором интеграле замену $v = 1/u$, получим

$$\mathrm{B}(x\,,\,y) = \int\limits_{\to 0}^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{(v+1)^{x+y}}dv =$$

$$= \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du + \int\limits_{1}^{\to 0} \frac{1}{u^{x-1}(1+1/u)^{x+y}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int\limits_{\to 0}^{1} \frac{u^{x-1}+u^{y-1}}{(1+u)^{x+y}}du\,.$$

(b) Последнее равенство при $x+y=1$ приобретает следующий вид:

$$\mathrm{B}(x\,,\,1-x)=\int\limits_{\to 0}^{1}\frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du\,. \tag{19.63}$$

Для вычисления этого интеграла разложим в ряд Фурье функцию $x\longmapsto\dfrac{\pi\cos tx}{\sin\pi t}$, где $t\in(0\,,\,1)$ — параметр. Тогда получим справедливое при $x\in(-\pi\,,\,\pi)$ тождество

$$\frac{\pi\cos tx}{\sin\pi t}=\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{t-k}+\frac{1}{t+k}\right]\cos kx\,.$$

Полагая здесь $x=0$, получим

$$\frac{\pi}{\sin\pi t}=\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{t-k}+\frac{1}{t+k}\right]\,.$$

Умножая, далее, тождество

$$\frac{1}{1+u}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u^k+(-1)^{n+1}\frac{u^{n+1}}{1+u}$$

на $u^{x-1}+u^{-x}$ и интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до 1, будем иметь

$$\mathrm{B}(x\,,\,1-x)=\int\limits_{\to 0}^{1}\frac{u^{x-1}+u^{-x}}{1+u}du=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int\limits_{0}^{1}(u^{k+x-1}+u^{k-x})du+$$

$$+(-1)^n\int\limits_{0}^{1}\frac{u^{n+x}+u^{n+1-x}}{1+u}du=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k-x+1}\right]+r_n(x)\,,$$

где обозначено

$$r_n(x):=(-1)^n\int\limits_{0}^{1}\frac{u^{n+x}+u^{n+1-x}}{1+u}du\,.$$

Из этого равенства находим

$$|r_n(x)|\leqslant\int\limits_{0}^{1}\left(u^{n+x}+u^{n+1-x}\right)du=\frac{1}{n+x+1}+\frac{1}{n-x+2}\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty\,.$$

Таким образом, в пределе имеем

$$\mathrm{B}(x\,,\,1-x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k-x+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k-x}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{\sin\pi x}\,.\ \blacktriangleright$$

Теорема 64. *Бета-функция и гамма-функция связаны тождеством*

$$\mathrm{B}(x\,,\,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,. \tag{19.64}$$

◀ При $u>0$ из равенств

$$\int_0^{+\infty}\tau^{\lambda-1}e^{-u\tau}d\tau=\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{u}\right)^{\lambda-1}e^{-t}\frac{dt}{u}=\frac{1}{u^\lambda}\int_0^{+\infty}t^{\lambda-1}e^{-t}dt=\frac{\Gamma(\lambda)}{u^\lambda}$$

следует, что

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{u^\lambda}=\int_0^{+\infty}\tau^{\lambda-1}e^{-u\tau}d\tau\,.$$

Полагая в этом равенстве $\lambda=x+y$, $u=t+1$ и умножая его на t^{x-1}, получим

$$\frac{\Gamma(x+y)t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}}=t^{x-1}\int_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(t+1)\tau}d\tau\,.$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до $+\infty$, используя второе интегральное представление бета-функции, меняя порядок интегрирования, получим

$$\Gamma(x+y)\mathrm{B}(x\,,\,y)=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\Gamma(x+y)t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}}dt=\int_0^{+\infty}t^{x-1}dt\int_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-(t+1)\tau}d\tau=$$

$$=\int_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-\tau}d\tau\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{t\tau}d\tau=\int_0^{+\infty}\tau^{x+y-1}e^{-\tau}\frac{\Gamma(x)}{\tau^x}d\tau=$$

$$=\Gamma(x)\int_0^{+\infty}\tau^{y-1}e^{-\tau}d\tau=\Gamma(x)\Gamma(y)\,.$$

Отсюда находим $\Gamma(x+y)\mathrm{B}(x\,,\,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$, что равносильно равенству (19.64). ►

Следствие 1 (формула дополнения для гамма-функции). *При* $0<x<1$ *справедливо равенство*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,. \tag{19.65}$$

◄ Используя (19.64) и (19.62), имеем

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \mathrm{B}(x\,,\,1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,. \ ►$$

Следствие 2 (формула удвоения для гамма-функции). *Справедливо следующее тождество:*

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)\,. \tag{19.66}$$

◄ Производя выделение полного квадрата и серию замен, имеем

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \mathrm{B}(x\,,\,x) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (t-t^2)^{x-1}dt = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-t\right)^2\right]^{x-1} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1-u^2}{4}\right)^{x-1}\frac{du}{2} = \frac{2}{2^{2x-1}}\int\limits_0^1 (1-u^2)^{x-1}du =$$

$$= \frac{1}{2^{2x-1}}\int\limits_0^1 \tau^{\frac{1}{2}-1}(1-\tau)^{x-1}dt = \frac{\mathrm{B}(\frac{1}{2},x)}{2^{2x-1}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{2^{2x-1}\Gamma(x+\frac{1}{2})}\,.$$

Беря начало и конец, сокращая полученное равенство на $\Gamma(x)$, приходим к равенству

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}\Gamma(x+\frac{1}{2})}\,,$$

которое равносильно (19.66). ►

3. Вычисление некоторых интегралов с помощью гамма-функции

Здесь рассмотрим несколько типичных интегралов, которые обычными методами не вычисляются, но могут быть легко выражены через гвмма-функцию.

1) Покажем, что при $p > 1$, $q > 1$ имеет место равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)} .$$

◀ В самом деле, производя в интеграле замену переменного

$$t = \sin^2 x\,,\ 1 - t = \cos^2 x\,,\ x = \arcsin\sqrt{t}\,,\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}\,,$$

получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cdot \cos^q x \, dx = \int_0^1 t^{p/2}(1-t)^{q/2} \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{p+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{q+1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{B}\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)} . \ ▶$$

2) Покажем, что равенство

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-ax^q} dx = q^{-1} a^{-\frac{p+1}{q}} \Gamma(\tfrac{p+1}{q})$$

справедливо при $a > 0$, $q > 0$, $p > -1$ (при этих ограничениях на параметры данный интеграл сходится).

◀ Производя в интеграле замену

$$ax^q = t\,,\ x = \left(\frac{t}{a}\right)^{1/q}\,,\ dx = \frac{1}{q} \cdot a^{-1/q} \cdot t^{1/q-1} \cdot dt\,,$$

получим

$$\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax^q} dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{a}\right)^{p/q} e^{-t} \frac{1}{q} a^{-1/q} t^{1/q-1} dt =$$

$$= q^{-1} a^{-\frac{p+1}{q}-1} e^{-t} dt = q^{-1} a^{-\frac{p+1}{q}} \Gamma(\tfrac{p+1}{q}) . \ \blacktriangleright$$

3) Проверим, что равенство

$$\int\limits_0^1 x^p (1-x^r)^q dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{r}\right)\Gamma(q+1)}{r\Gamma\left(\frac{p+1}{r}+q+1\right)}$$

справедливо при $r > 0$, $p > -1$, $q > -1$.

$\blacktriangleleft$ В самом деле, замена $x^r = t$, $x = t^{1/r}$, $dx = \frac{1}{r} t^{1/r-1} dt$ дает

$$\int\limits_0^1 x^p (1-x^r)^q dx = \frac{1}{r} \int\limits_0^1 t^{p/r} (1-t)^q t^{1/r-1} dt = \frac{1}{r} \int\limits_0^1 t^{\frac{p+1}{r}-1} (1-t)^q dt =$$

$$= \frac{1}{r} \mathrm{B}\left(\frac{p+1}{r}, q+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{r}\right)\Gamma(q+1)}{r\Gamma\left(\frac{p+1}{r}+q+1\right)} . \ \blacktriangleright$$

4) Докажем равенства $(a > 0)$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} = \frac{a^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{\pi\lambda}{2}}, \quad (0 < \lambda < 1), \tag{19.67}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} = \frac{a^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}, \quad (0 < \lambda < 2). \tag{19.68}$$

$\blacktriangleleft$ Сходимость интегралов $\int\limits^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx$ и $\int\limits^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx$ можно проверить с помощью признака Дирихле. Используя формулу Эйлера $\cos ax + i \sin ax = e^{iax}$ и равенство

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{x^\lambda} = \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda-1} e^{-tx} dt, \tag{19.69}$$

будем вычислять интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^\lambda}dx$. Подставляя в него вместо $1/x^\lambda$ его выражение из (19.69), затем меняя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^\lambda}dx = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} e^{iax}dx \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-tx}dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda-1}dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-x(t-ai)}dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda-1}dt \left(-\frac{e^{-x(t-ai)}}{t-ai}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1}dt}{t-ai} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda-1}(t+ai)}{t^2+a^2}dt\,.$$

В последнем интеграле сделаем замену

$$t^2 = a^2\tau\,,\ t = a\tau^{1/2}\,,\ dt = \frac{a}{2}\tau^{-1/2}d\tau\,,$$

а затем воспользуемся равенством (19.62). Тогда получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^\lambda}dx = \frac{a}{2\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(a\tau^{1/2}\right)^{\lambda-1}\left(a\tau^{1/2}+ai\right)}{a^2(\tau+1)}\tau^{-1/2}d\tau =$$

$$= \frac{a^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^{(\lambda-1)/2}}{\tau+1}d\tau + i\int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau^{\lambda/2-1}}{\tau+1}d\tau \right) =$$

$$= \frac{a^{\lambda-1}}{2\Gamma(\lambda)} \left(\frac{\pi}{\sin\pi\frac{\lambda+1}{2}} + i\frac{\pi}{\sin\pi\frac{\lambda}{2}} \right)\,.$$

Выделяя здесь вещественную и мнимую части, получим равенства (19.67) и (19.68). ▶

§ 6. Формула Стирлинга

Так как $\Gamma(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то задача вычисления значений $\Gamma(x)$, вообще говоря, усложняется с возрастанием x. Например, вычисление значений $n!$, хотя и сводится только к операциям умножения, но при достаточно больших значениях n становися практически невыполнимым. Для преодоления такого рода трудностей часто используются *асимптотические формулы*. Например, для вычисления значений $n!$ используется *асимптотическая формула Стирлинга*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \quad \text{при} \quad n \to \infty\,, \tag{19.70}$$

которая упрощает вычисление значений $n!$ при больших значениях n, причем равенство (19.70) тем точнее, чем больше n.

Мы докажем здесь формулу Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^x \quad \text{при} \quad x \to +\infty\,. \tag{19.71}$$

Она является обобщением формулы (19.70) на случай, когда переменная x может принимать любые положительные значения (а не только целые). Перепишем соотношение (19.70) в следующем равносильном виде:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^x} = 1\,. \tag{19.72}$$

Для доказательства этого равенства нам потребуются некоторые свойства вспомогательной функции $u = u(v)$, содержащиеся в следующей лемме.

Лемма. *Уравнение*

$$v^2 = u - \ln(1+u) \tag{19.73}$$

неявно задает единственную строго возрастающую функцию $u = u(v)$, реализующую диффеоморфизм класса C^∞ интервала $(-\infty\,, +\infty)$ на интервал $(-1\,, +\infty)$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(0) = 0\,, \quad u'(0) = \sqrt{2}\,, \quad |u'(v) - u'(0)| \leqslant C \cdot |v| \tag{19.74}$$

при некотором $C \in \mathbb{R}_+$.

◀ Правая часть равенства (19.73) неотрицательна при всех $u \in (-1\,, +\infty)$ и обращается в нуль только при $u = 0$. Это следует из того, что кривая $y = \ln(1+u)$ строго выпукла вверх, а прямая $y = u$ касается этой кривой в точке $u = 0$.

Изучаемая нами функция $u = u(v)$ является обратной к функции

$$v = v(u) = \begin{cases} +\sqrt{u - \ln(1+u)}\,, & 0 \leqslant u < +\infty\,, \\ -\sqrt{u - \ln(1+u)}\,, & -1 < u \leqslant 0\,, \end{cases} \tag{19.75}$$

которая строго возрастает, так как при $u \neq 0$ из уравнения (19.73) следует равенство $2vv' = \dfrac{u}{1+u}$, которое показывает, что производная $v'(u)$ положительна (переменные u и v имеют одинаковые знаки, а $1 + u > 0$). Из (19.75) очевидно также, что

$$u \to +\infty \iff v \to +\infty\,, \quad \text{а} \quad u \to -1+0 \iff v \to -\infty\,.$$

Из теоремы о неявных функциях, примененной к уравнению (19.73), следует, что при $u \neq 0$, $v \neq 0$ обе функции $v = v(u)$ и $u = u(v)$ бесконечно дифференцируемы. Такое же заключение справедливо и в окрестности точек $u = v = 0$, но это вытекает из других соображений (теорема о неявных функциях в этом случае неприменима). Разлагая правую часть (19.73) в степенной ряд Маклорена, перепишем это уравнение в виде

$$v^2 = \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \ldots = \frac{u^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot u + \ldots\right) .$$

Отсюда, извлекая корень (т. е. используя биномиальный ряд), можно получить разложение

$$v = v(u) = \frac{u}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot u + \ldots\right) .$$

Обращая это разложение, можно получить разложение

$$u = u(v) = v\sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot v + \ldots\right) .$$

Числовые значения коэффициентов этих разложений можно получить методом неопределенных коэффициентов или с помощью последовательного дифференцирования уравнения (19.73) при $u = v = 0$. Но уже из найденных разложений видно, что

$$v'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \; u'(0) = \sqrt{2}\,, \; v''(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3}\,, \; u''(0) = \frac{4}{3}\,.$$

Осталось только установить неравенство (19.74). При $u \neq 0$ имеем:

$$|u'(v) - u'(0)| = \left|\frac{2v \cdot (1+u)}{u} - \sqrt{2}\right| = \\ = \left|\frac{2(1+u)}{|u|} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u - \ln(1+u)}}\right| \cdot |v|\,. \qquad (19.76)$$

Неравенство будет доказано, если будет установлена ограниченность функции, находящейся в правой части равенства (19.76) перед $|v|$. Ограниченность в свою очередь зависит от существования конечных пределов

$$\lim \left|\frac{2(1+u)}{|u|} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u - \ln(1+u)}}\right|$$

при $u \to +\infty$ (он равен 2), при $u \to -1+0$ (он равен 0), и при $u \to 0, u \neq 0$. Этот последний предел равен $|v''(0)| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ▶

Теперь переходим непосредственно к доказательству равенства (19.72).

◀ Производя в интегральном представлении гамма-функции замену переменной интегрирования $t = x \cdot (1+u)$, $dt = x \cdot du$, получим

$$\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int\limits_{-1}^{+\infty} (x(1+u))^x e^{-x(1+u)} \cdot x\, du =$$
$$= x^{x+1} e^{-x} \int\limits_{-1}^{+\infty} (1+u)^x e^{-xu} du = x^{x+1} e^{-x} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-x(u-\ln(1+u))} du\,.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменного $v^2 = u - \ln(1+u)$, принимая за новую переменную ту самую функцию $v = v(u)$, которая была изучена в лемме. Тогда получим

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2} u'(v)\, dv =$$
$$= x^{x+1} e^{-x} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2} u'(0)\, dv + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2} (u'(v) - u'(0))\, dv \right) =$$
$$= x^{x+1} e^{-x} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{x}} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2} (u'(v) - u'(0))\, dv \right) =$$
$$= \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x} + x^{x+1} e^{-x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2} (u'(v) - u'(0))\, dv\,.$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x}} = 1 + \sqrt{\frac{x}{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2} (u'(v) - u'(0))\, dv\,.$$

Перенося здесь единицу в левую часть и используя неравенство из (19.74), произведем заключительную оценку:

$$\left|\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x}}-1\right| = \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\cdot\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2}(u'(v)-u'(0))\,dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2}|u'(v)-u'(0)|\,dv \leqslant C\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-xv^2}|v|\,dv =$$

$$= 2C\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xv^2}v\,dv = \frac{C}{\sqrt{2\pi x}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xv^2}\,d(xv^2) =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi x}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\xi}\,d\xi = \frac{C}{\sqrt{2\pi x}} \to 0 \quad \text{при} \quad x\to+\infty\,. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Формула Стирлинга иногда применяется в форме точного равенства

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\cdot x^x\cdot e^{-x+\frac{\theta}{12x}}\,, \quad \text{где} \quad 0<\theta<1\,,$$

с «остаточным множителем» $\exp\frac{\theta}{12x}$, но на доказательстве этого последнего равенства здесь не останавливаемся.

§ 7. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

1. Интеграл Фурье

Пусть задана абсолютно интегрируемая (суммируемая) функция $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$.

Определение 25. *Интегралом Фурье функции f называется интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy\,, \tag{19.77}$$

где

$$a(y) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ty\,dt\,, \quad b(y) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ty\,dt\,. \tag{19.78}$$

Для сопоставления функции f ее интеграла Фурье будем использовать обозначение

$$f(x) \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\, dy\,, \tag{19.79}$$

аналогичное соответствующему обозначению из теории рядов Фурье. Сходимость интегралов (19.78) следует из неравенств

$$|f(t)\cos ty| \leqslant |f(t)|\,, \quad |f(t)\sin ty| \leqslant |f(t)|$$

и из суммируемости функции f. Если подставить выражения для функций $a(y)$ и $b(y)$ из (19.78) в (19.79), то соотношение (19.79) перепишется в таком виде

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\, dt\,. \tag{19.80}$$

Основные вопросы теории интегралов Фурье следующие:

(a) *при каких условиях интеграл Фурье сходится?*

(b) *если интеграл Фурье сходится, то как связана его величина со значениями функции* f*?*

Ниже покажем, как поточечная сходимость интеграла Фурье связана с поточечной сходимостью ряда Фурье. Предварительно установим две простые леммы.

Лемма 1. *Для любых* x, y, a, $b \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие неравенства:*

$$|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y| \tag{19.81}$$

и

$$\left|\frac{\sin ax - \sin bx}{x}\right| \leqslant |b-a|\,. \tag{19.82}$$

◀ Неравенство (19.81) получается так:

$$|\sin x - \sin y| = \left|2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-y|}{2} = |x-y|\,.$$

Заменяя в неравенстве (19.81) x на ax, y на bx, получим

$$|\sin ax - \sin bx| \leqslant |b-a|\cdot|x|\,,$$

что равносильно неравенству (19.82). ▶

Лемма 2. *Если функция f суммируема на отрезке $[0\,,\,a]\subset\mathbb{R}$, и при некотором $c\in\mathbb{R}_+$ выполняется равенство*

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}}\int\limits_0^a f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}dx = A\in\mathbb{C}\,, \tag{19.83}$$

то

$$\lim_{\substack{\omega\to+\infty\\ \omega\in\mathbb{R}_+}}\int\limits_0^a f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx = A\,. \tag{19.84}$$

◄ Зададим $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. Положим $n := \left[\dfrac{\omega}{c}-\dfrac{1}{2}\right]$, где $[\ldots]$ означает целую часть. Тогда $n\to\infty \iff \omega\to+\infty$, и $0\leqslant \dfrac{\omega}{c}-\dfrac{1}{2}-n<1$, и значит, $\left|\omega-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)c\right|<c$. Выберем $\delta\in(0\,,\,a)$ настолько малым, чтобы было

$$\int\limits_0^\delta |f(x)|dx\leqslant\frac{\varepsilon}{3c}\,.$$

Тогда, используя (19.82), получим

$$\left|\int\limits_0^\delta f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}dx-\int\limits_0^\delta f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^\delta |f(x)|\cdot\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}-\frac{\sin\omega x}{x}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)c-\omega\right|\cdot\int\limits_0^\delta|f(x)|dx\leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{3c}=\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Используя, далее, лемму Римана об осцилляции, найдем ω_0 так, чтобы $\forall\omega\geqslant\omega_0$ было

$$\left|\int\limits_\delta^a f(x)\cdot\frac{\sin\omega x}{x}dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Тогда при $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)c\geqslant\omega_0$, т. е. при $n\geqslant\dfrac{\omega_0}{c}-\dfrac{1}{2}$ будет

$$\left|\int\limits_\delta^a f(x)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}dx\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Итак, при $\omega \geqslant \omega_0$ и $n \geqslant \dfrac{\omega_0}{2} - \dfrac{1}{2}$ имеем

$$\left|\int\limits_0^a f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}dx - \int\limits_0^a f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_0^\delta f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}dx - \int\limits_0^\delta f(x)\frac{\sin\omega x}{x}dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_\delta^a f(x)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)cx}{x}dx\right| + \left|\int\limits_\delta^a f(x)\cdot\frac{\sin\omega x}{x}dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 65. *Предположим, что*

(a) *Функция* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *суммируема;*

(b) *для любого* $l \in \mathbb{R}_+$ *тригонометрический ряд Фурье функции* f *на отрезке* $[x-l\,,\, x+l]$ *сходится в точке* x *к сумме* S.

Тогда и интеграл Фурье сходится в точке x *к сумме* S, *т. е.*

$$S = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos t(x-y)\,dt\,. \tag{19.85}$$

◀ Не ограничивая общности, будем считать, что $x = 0$ (иначе мы могли бы рассмотреть функцию $\varphi(t) := f(x+t)$). Запишем тригонометрический ряд Фурье функции f на отрезке $[-l\,,\, l]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\,,\right)$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt\,,\quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\,.$$

По условию сумма ряда Фурье в точке $x = 0$ равна S. Представляя частичную сумму ряда фурье интегралом Дирихле, имеем

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot dt\,.$$

Легко показать, что функция

$$\varphi(t) := \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{\left(\frac{\pi t}{l}\right)}$$

суммируема на интервале $(-l\,,\,l)$. Поэтому в силу леммы Римна об осцилляции имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\varphi(t)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\cdot dt=0$$

и, значит,

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}}{t}\,dt\,.$$

Применяя лемму 2, перепишем последнее равенство в таком виде

$$S=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cdot\frac{\sin\omega t}{t}\cdot dt\,.$$

Заметим, далее, что функция $t\longmapsto\dfrac{f(t)}{t}$ суммируема на промежутках $(-\infty\,,\,l]$ и $[l\,,\,+\infty)$. Поэтому в силу леммы Римана об осцилляции имеем

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{-l}\frac{f(t)}{t}\sin\omega t\,dt=\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{l}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\sin\omega t\,dt=0\,.$$

Учитывая это, имеем

$$S=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{\sin\omega t}{t}\cdot dt\,.$$

Возвращаясь от значения аргумента $x=0$ к произвольному значению аргумента x, получим

$$S=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\cdot\frac{\sin\omega t}{t}\cdot dt=$$

$$=\lim_{\omega\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,dt\int\limits_{0}^{\omega}\cos ty\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\omega\to+\infty}\int\limits_{0}^{\omega}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\cos ty\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\cos ty\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt\,.$$

Итак, получено равенство(19.85). ▶

Замечание. Смысл доказанной теоремы в том, что она позволяет вопрос о сходимсти интеграла Фурье суммируемой функции к величине S сводить к вопросу о сходимости ее ряда Фурье к сумме S. Например, если суммируемая функция f локально удовлетворяет условиям Дирихле и непрерывна в точке x, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos y(x-t)\, dt\,. \tag{19.86}$$

Определение 26. *Пусть функция* $f\,;\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *суммируема на любом отрезке* $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$. *Интегралом в смысле главного значения от функции* f *по* $\mathbb{R}$ *называется предел*

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)\, dx\,. \tag{19.87}$$

Считается, что интеграл в смысле главного значения существует, если предел (19.87) *существует и является числом.*

Например, если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится как несобственный, то он существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, имеем

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dx = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_{-N}^{N} x\, dx = \lim_{N\to+\infty} 0 = 0\,,$$

однако как несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$ расходится.

Учитывая нечетность функции $\sin$, заключаем, что

$$0 = \frac{1}{2\pi}\, \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\, dt\,. \tag{19.88}$$

Умножая это равенство на i и складывая с (19.86), получим такое равенство:

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{iy(x-t)} dt\,, \tag{19.89}$$

которое выполняется всякий раз, когда выполняется (19.86).

2. Преобразование Фурье

Определение 27. *Преобразование Фурье функции* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *определяется равенством*

$$(Ff)(y) \equiv \widehat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixy} dx\,. \tag{19.90}$$

Обратное преобразование Фурье функции $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *определяется равенством*

$$\left(F^{-1}\widehat{f}\right)(y) \equiv f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) e^{-ixy} dx\,. \tag{19.91}$$

Предполагается, что интегралы (19.90) и (19.91) существуют по крайней мере в смысле главного значения. Переходим к изучению некоторых свойств преобразования Фурье.

Теорема 66. *Преобразование Фурье отображает суммируемые на* $\mathbb{R}$ *функции в ограниченные и непрерывные на* $\mathbb{R}$ *функции.*

◄ Имеем

$$|\widehat{f}(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ixy} dy \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy = C \in \mathbb{R}_+\,,$$

значит, функция $\widehat{f}$ ограничена. Из этой же оценки следует равномерная сходимость преобразования Фурье, и потому функция $\widehat{f}$ непрерывна. ►

Теорема 67. *Если функция* f *суммируема и дифференцируема на* $\mathbb{R}$, *то справедливы формулы обращения*

$$\left(F^{-1} \circ F\right)(f) = f\,, \qquad \left(F \circ F^{-1}\right)(f) = f\,. \tag{19.92}$$

◄ При условиях теоремы имеет место равенство (19.89), равносильное первому из равенств (19.92). Второе равенство можно получить аналогично. ►

Определение 28. *Сверткой функций* f *и* g, *определенных на* $\mathbb{R}$, *называется интеграл*

$$(f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\, dt\,. \tag{19.93}$$

Предполагая этот интеграл сходящимся $\forall x \in \mathbb{R}$, заключаем, что равенство (19.93) определяет бинарную операцию $*$ на некотором множестве функций, определенных на $\mathbb{R}$. Изучим некоторые свойства свертки.

Теорема 68. *Если функции f и g непрерывны, ограничены и суммируемы на $\mathbb{R}$, то их свертка $f * g$ обладает теми же свойствами.*

◀ Вводя обозначение $M := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| \in \mathbb{R}_+$, имеем

$$|(f*g)(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty\,,$$

так как g ограничена, а f суммируема на $\mathbb{R}$. Далее, $|f(t)g(x-t)| \leqslant \leqslant M\cdot|f(t)|$, откуда в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла (19.93), а так как подынтегральная функция непрерывна, то и свертка непрерывна. Проверим суммируемость свертки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)|\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|du < +\infty\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 69. *Если выполнены условия предыдущей теоремы, то*

$$F(f*g) = F(f)\cdot F(g)\,.$$

◀ Производя во внутреннем интеграле замену $y - t = u$, $dt = -du$, имеем

$$F(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}dt\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y-t)g(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y-t)e^{ixt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{ix(y-u)}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}g(y)dy\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu}f(u)du = F(f)(x)\cdot F(g)(x)\,. \ \blacktriangleright$$

Следствие. *Операция свертки ассоциативна и коммутативна на множестве всех ограниченных, непрерывных и суммируемых на $\mathbb{R}$ функций.*

◀ Это вытекает из последней теоремы и из того, что операция умножения функций обладает свойствами ассоциативности и коммутативности. ▶

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 1997—1998. Ч. I—II.
2. *Толстов Г. П.* Элементы математического анализа. М., 1974. Т. I—II.
3. *Рудин У.* Основы математического анализа. М., 1966.
4. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. Волгоград, 1996.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб., 1997. Т. I—III.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. М., 1968. Т. I—II.
7. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М., 1985.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М., 1990—1991. Т. I—II.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1988—1989. Т. 1—3.
10. *Демидович Б. П.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ