Э. И. Зверович

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
в шести частях

Часть 1
Введение в анализ
и
дифференциальное исчисление

Минск

БГУ

2003

Книга представляет собой первую часть современного курса анализа, написанного на основе многолетнего (начиная с 1975 г.) опыта преподавания дисциплин аналитического цикла на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета. Особенностью этого курса является сближение содержания учебных дисциплин «Математический анализ» (изучаемого в 1—4 семестрах) и «Теория функций комплексного переменного» (изучаемого в 5—6 семестрах). В соответствии с этим пособие выпускается в шести частях. В первой части наряду с традиционным материалом излагаются комплексные числа, элементы общей топологии и числовые ряды. Во второй части предполагается изложить интегральное исчисление (на основе процедуры Римана) с приложениями, а также несобственные интегралы и интегралы Стилтьеса. В третьей части будет изложено дифференциальное исчисление функций векторного аргумента, а также функциональные ряды и интегралы, зависящие от параметра. В пятой части будут изложены элементы теории меры, кратные интегралы (с использованием процедуры Лебега) и интегральное исчисление на многоообразиях, включая общую теорему Стокса. Шестая часть будет полностью посвящена современному изложению теории аналитических функций компексного переменного.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателя предлагается первая часть учебного пособия по вещественному и компле́ксному анализу, написанного на основе многолетнего опыта преподавания этих курсов студентам механико-математического факультета БГУ и непрерывного эксперимента. Основные разделы[1] этого пособия были многократно прочитаны студентам и, как показал опыт, хорошо ими усваивались. Пособие состоит из шести частей, каждая из которых содержит лекционный материал объемом около 70 часов. К каждой части предполагается выпустить соответствующий ей сборник задач, рассчитанный на такое же число часов практических занятий. В целом учебное пособие и задачник охватят весь материал, предусмотренный действующими программами учебных дисциплин «Математический анализ» и «Теория функций комплексного переменного». А пока к каждой главе добавлены подборки задач, дополняющие основной текст. Подборки составлены доцентом О. Б. Долгополовой.

Основная методическая проблема, над которой работал автор, может быть сформулирована как попытка модернизации методики преподавания курса анализа, необходимость которой диктуется постоянно возрастающим объемом научной (а значит, и учебной) информации. В этих условиях количество часов, предусматриваемых учебными планами на преподавание традиционно изучаемых дисциплин, имеет устойчивую тенденцию к сокращению. В этой связи необходимо, чтобы учебные дисциплины, еще не потерявшие своей актуальности, преподавались на современном научном уровне, полноценно и кратко. Предлагаемое учебное пособие представляет собой одну из попыток решения этой проблемы. В нем постоянно используется теоретико-множественный подход и принимаются меры, направленные на сближение дисциплин вещественного, комплексного и (в меньшей степени) функционального анализа. В связи с этим в начале курса анализа рассматривается теория не только вещественных, но и комплексных чисел, а также элементы общей топологии. Это дает возможность не повторять на лекциях все те факты, которые над полями вещественных и комплексных чисел формулируются (и доказываются) одинаково. Учитывая далее, что теория числовых

[1] Основные разделы набраны крупным шрифтом.

рядов не сложнее теории числовых последовательностей, предлагается изучать ряды сразу же после последовательностей (а не в начале третьего семестра, как это традиционно делается). Предел функции $f : X \longrightarrow Y$ вводится как предел «по Коши» при $x \to a$; $x \in X$, где a — точка прикосновения множества X, а теория непрерывности дополняется общей теоремой о непрерывности всех элементарных функций. Понятия дифференциала и производной вводятся одновременно. Заканчивается первая часть изложением наиболее популярных приложений дифференциального исчисления.

Остальные части этого пособия также будут иметь предисловия, поэтому на особенностях этих частей остановлюсь кратко. Теорию определенного интеграла планируется изложитьть по Риману, а теорию кратных интегралов — по Лебегу, предварительно включив в курс элементы теории меры. Факты типа формулы Грина планируется изложить на современном уровне строгости (в отличие от традиционных учебников, в которых этот материал излагается недостаточно строго). Закончить курс вещественного анализа планируется изложением элементов анализа на многообразиях, исчисления внешних дифференциальных форм и общей теоремы Стокса. Комплексный анализ планируется изложить в тесной связи с вещественным анализом. Все эти меры призваны обогатить лекционный курс анализа, сделать его более строгим (без потери доступности) и привести к экономии учебного времени студентов.

Выражаю благодарность доценту И. И. Комяку (ныне покойному) и профессору Ф. В. Чумакову, вместе с которыми я в 1975 г. начинал работу по модернизации курса анализа на механико-математическом факультете БГУ, доценту Л. П. Примачуку за участие в обсуждении различных разделов курса, другим сотрудникам кафедры теории функций за участие в апробации моих лекций. Особую признательность я выражаю профессору В. Г. Кротову, инженеру А. С. Автаеву, старшему преподавателю А. И. Кулибабе, а также лаборантке Е. К. Щетникович за помощь при подготовке рукописи в издательской системе LaTeX 2_ε. Выражаю благодарность рецензентам: докторам физико-математических наук, профессорам Э. Г. Кирьяцкому и В. И. Бернику, а также заведующему кафедрой математического анализа Гомельского государственного университета, профессору Ю. В. Малинковскому и доценту этой кафедры А. П. Старовойтову.

Глава 1
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Множества: отношения и операции

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Оно не определяется, поэтому дадим его описание. *Множество — это совокупность, собрание, коллекция, набор, семейство, класс каких-нибудь предметов, называемых его элементами.* Например, можно говорить о множестве всех студентов данного вуза, факультета, курса и т. п., а также о множестве всех домов данного города, квартала, района и т. п. Условимся в этом параграфе обозначать множества заглавными латинскими буквами. Множества могут состоять из *элементов*. Запись «$x \in A$» означает, что x *принадлежит* множеству A (т. е. *является элементом* множества A). Запись «$x \notin A$» или «$x \overline{\in} A$» означает, что x *не принадлежит* множеству A (т. е. не является элементом множества A). Задать множество — это значит указать правило или признак, позволяющие отличать элементы, которые ему принадлежат, от всех прочих элементов (т. е. от тех, которые ему не принадлежат).

Множества можно задавать разнообразными способами, из которых выделим три наиболее часто встречающихся. Первый способ — перечисление всех элементов данного множества (если такое перечисление возможно). Например, запись

$$A := \{a\,,\, b\,,\, \ldots\,,\, p\}$$

означает, что A определяется как множество с элементами a, b, $\ldots$, p (многоточие[1] заменяет пропущенные элементы). Второй способ применяется тогда, когда есть свойство, которым обладают все элементы данного множества, и только эти элементы. Например, запись

$$B := \{x \mid x \text{ обладает свойством } \mathcal{P}\}$$

означает, что B определяется как множество всех тех и только тех элементов x, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Третий способ применяется тогда, когда элементы данного множества помечены элементами другого множества (*индексами*), например, занумерованы:

$$C := \{a_i \mid i \in I\}\,. \tag{1.1}$$

[1] Символ « $\ldots$ » читается: «и так далее».

Эта запись означает, что элементами множества C являются те и только те элементы a_i, для которых $i \in I$. Здесь I — множество индексов. В (1.1) возможна такая ситуация, что $a_i = a_j$ при $i \neq j$. Если множество задается в виде (1.1), то оно называется иногда *семейством.*

Два множества A и B считаются равными ($A = B$), если каждый элемент одного из этих множеств принадлежит другому.

Между некоторыми парами множеств устанавливается отношение *включения*[2]. *Говорят, что множество A включается в множество B (или содержится в B), если каждый элемент множества A является элементом множества B.* Записывается это в виде $A \subset B$ (или, что равносильно, в виде $B \supset A$). То же самое выражают словами: «*A есть подмножество множества B*». Очевидно, что отношение включения обладает следующим свойством *транзитивности*

$$A \subset B \subset C \implies A \subset C,$$

т. е. *если A содержится в B, а B содержится в C, то A содержится в C.* Имеет место следующее утверждение

$$A = B \iff \begin{cases} A \subset B, \\ A \supset B, \end{cases} \tag{1.2}$$

т. е. *равенство двух множеств равносильно тому, что каждое из них содержится в другом.* В тех случаях, когда $A \subset B$ и $A \neq B$, принято говорить, что A является *собственным подмножеством* множества B (обозначается это так: $A \subsetneqq B$).

Кроме множеств, содержащих элементы, вводится в рассмотрение так называемое *пустое множество*, т. е. множество, в котором вообще нет элементов. Оно обозначается символом $\varnothing$. Естественно считать, что включение

$$\varnothing \subset A \tag{1.3}$$

выполняется для любого множества A. Из (1.2) и (1.3) вытекает *единственность пустого множества.*

◀ Предполагая существование двух пустых множеств $\varnothing_1$ и $\varnothing_2$, используя (1.2) и (1.3), имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \varnothing_1 \subset \varnothing_2 \\ \varnothing_1 \supset \varnothing_2 \end{array}\right\} \implies \varnothing_1 = \varnothing_2 .$$

Иначе говоря, любые два пустых множества совпадают. ▶

[2] Сразу же отметим, что здесь и всюду в дальнейшем принимается соглашение, по которому *включение не исключает равенства.*

Понятие пустого множества удобно использовать в тех случаях, когда заранее ничего не известно о существовании хотя бы одного элемента данного множества, или в тех случаях, когда известно, что таких элементов нет вовсе.

Важнейшими операциями над множествами являются операции *объединения* ($\bigcup$), *пересечения* ($\bigcap$) и *разности* ($\setminus$).

Объединением семейства множеств $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *называется множество* $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ *, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств* U_α *.*

В частности, объединение $U \cup V$ двух множеств U и V можно задать так:

$$U \cup V := \{x \mid \text{ либо } x \in U\,, \text{ либо } x \in V\,, \text{ либо } (x \in U \text{ и } x \in V)\}\,.$$

Пересечением семейства множеств $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *называется множество* $\bigcap\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ *, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам данного семейства.*

В частности, пересечение двух множеств можно задать так:

$$U \cap V := \{x \mid x \in U \text{ и } x \in V\}\,.$$

Очевидно, что обе операции $\bigcup$ и $\bigcap$ *коммутативны* и *ассоциативны*, т. е. обладают переместительным и сочетательным свойствами. Если известно, что множества U и V не пересекаются, т. е. $U \cap V = \varnothing$, то их объединение обозначают иногда символом $U \sqcup V$ и называют *дизъюнктным объединением.*

Разностью $U \setminus V$ *множеств* U *и* V *называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству* U *и не принадлежат множеству* V *,* т. е.

$$U \setminus V := \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin V\}\,.$$

Для наглядного изображения различных соотношений между множествами иногда используются так называемые *диаграммы Эйлера — Венна*[3]. Так называются рисунки, на которых различные множества изображаются в виде различных множеств точек плоскости (чаще всего — в виде *областей,* например кругов), по-разному заштрихованных или раскрашенных в различные цвета. На таких рисунках становятся наглядными различные соотношения между множествами. Например, на диаграмме Эйлера —

[3] *Эйлер* Леонард (1707—1783) — швейцарец по происхождению, знаменитый математик, механик и физик, академик Петербургской академии наук. *Венн* Джон (1834—1923) — английский логик.

Венна, изображенной на рис. 1, множество A заштриховано горизонтальными линиями, множество B — вертикальными. Заштрихованная часть плоскости изображает $A \cup B$; часть плоскости, заштрихованная и горизонтальными, и вертикальными линиями — множество $A \cap B$, а часть плоскости, заштрихованная *только* горизонтальными (*только* вертикальными) линиями, — множество $A \setminus B$ $(B \setminus A)$. Из рис. 1 очевидны, например, следующие включения:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{и} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B.$$

Из других операций над множествами в анализе часто используется *декартово произведение*. Определим его в простейшем случае двух множеств. *Декартовым (или прямым) произведением множества A на множество B называется множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$,* т. е.

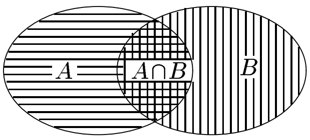

Рис. 1. Пример диаграммы Эйлера — Венна

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}.$$

Если, например, в качестве множеств A и B взять две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом, то их декартовым произведением $A \times B$ будет содержащая их координатная плоскость.

§ 2. Некоторые сведения из математической логики

1. Высказывания и операции над ними

Всякая научная теория есть некоторая система понятий и утверждений. Истинность каждого утверждения нуждается, вообще говоря, в обосновании. Часть утверждений обосновывается опытным путем, т. е. *эмпирически*. Другая, обычно бóльшая, часть утверждений обосновывается с помощью логических средств. Эти логические средства изучаются в разделе математики, называемом *математической логикой*. Исходным понятием математической логики является понятие *высказывания*.

Определение 1. *Высказыванием называется всякое утверждение, т. е. любое повествовательное предложение, которое определенно является истинным или ложным.*

Например, предложение «$2+2=4$» является истинным высказыванием, а предложение «$0=1$» — ложным высказыванием. Повествовательное предложение «В огороде бузина, а в Киеве дядька» не является высказыванием, поскольку без дополнительной информации ничего определенного об истинности или ложности этого предложения утверждать нельзя. Восклицательные, вопросительные, повелительные и назывные предложения также *не являются* высказываниями. Условимся в этом пункте высказывания обозначать заглавными латинскими буквами, например: P, Q, R, ...

Определение 2. *Значением истинности высказывания P называется число $\alpha(P)$, которое находится по следующему правилу:*

$$\alpha(P) := \begin{cases} 1\,, & \text{если } P \text{ — истинное,} \\ 0\,, & \text{если } P \text{ — ложное.} \end{cases}$$

Находя с помощью некоторого исчисления значения истинности различных сложных высказываний, можно узнавать, истинные эти высказывания или ложные. Сложные высказывания образуются из более простых с помощью *логических операций*, важнейшими из которых являются: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция*. Определим их.

Определение 3. *Отрицанием высказывания P называется высказывание, которое является ложным, если P — истинное, и истинным, если P — ложное.*

Отрицание высказывания P обозначается символом $\rceil P$ или символом $\overline{P}$. Читается это так: «не P» или «неверно, что имеет место P». Используя определения 2 и 3, имеем: $\alpha(\overline{P}) = 1 - \alpha(P)$.

Определение 4. *Конъюнкцией высказываний P и Q называется высказывание, которое считается истинным, если истинны оба высказывания P, Q, и ложным во всех остальных случаях.*

Конъюнкция высказываний P и Q читается «P и Q» и обозначается одним из следующих символов:

$$P \wedge Q \quad \text{или} \quad P \& Q\,.$$

Для нее справедливо равенство

$$\alpha(P \wedge Q) = \alpha(P) \cdot \alpha(Q)\,.$$

Определение 5. *Дизъюнкцией высказываний P и Q называется высказывание, которое считается ложным, если ложны оба высказывания P, Q, и истинным во всех остальных случаях.*

Дизъюнкция высказываний P, Q читается «P или Q» и обозначается символом: $P \vee Q$. Для нее справедливо следующее равенство:

$$\alpha(P \vee Q) = 1 - \alpha(P \wedge Q)\,.$$

Определение 6. *Импликацией высказываний P и Q называется высказывание, которое ложно лишь в том случае, если P — истинное, а Q — ложное.*

Импликация высказываний P и Q обозначается символом «$P \Rightarrow Q$» и читается так: «если P, то Q» или «из P следует Q» и т. п. В импликации $P \Rightarrow Q$ высказывание P называется *условием*, а Q — ее *заключением* или *следствием*. Из определения 6 вытекает следующее равенство:

$$\alpha(P \Rightarrow Q) = 1 - \alpha(P \wedge \overline{Q})\,.$$

Определение 7. *Эквивалентностью (или эквиваленцией) высказываний P и Q называется высказывание, которое ложно лишь в том случае, когда одно из высказываний P, Q — истинное, а другое — ложное.*

Эквиваленция высказываний P и Q обозначается символом «$P \Leftrightarrow Q$» и читается так: «P равносильно Q», «P эквивалентно Q», «P если и только если Q» и т. п. Для нее справедливо такое равенство:

$$\alpha(P \Leftrightarrow Q) = \alpha(P \Rightarrow Q) \cdot \alpha(Q \Rightarrow P)\,.$$

2. Формулы алгебры высказываний и их применения

С помощью логических операций, рассмотренных в предыдущем пункте, можно, исходя из простейших высказываний, строить новые, более сложные высказывания, называемые *формулами*. Например,

$$(P \vee Q) \Rightarrow R\,, \tag{1.4}$$

где P, Q, R — «простейшие» высказывания. Отвлекаясь от конкретного содержания высказываний P, Q, R, будем называть их *высказывательными переменными*. Вместо них можно подставлять в (1.4) любые истинные или ложные высказывания, и в результате выполнения операций, входящих в (1.4), будем получать новые высказывания, которые могут оказаться как истинными, так и ложными. Чтобы сформулировать общее понятие формулы алгебры высказываний, зададим сначала некоторое множество высказывательных переменных X, Y, Z, $\ldots$. В это множество включим две специфические высказывательные переменные *И* и *Л*.

Специфика их заключается в том, что вместо *И* разрешается подставлять любые истинные высказывания, и только их, а вместо *Л* разрешено подставлять любые ложные высказывания, и только их. Общее понятие формулы алгебры высказываний дается следующим определением, в котором используется так называемая *рекурсия*[4].

Определение 8. (a) *Каждая отдельно взятая высказывательная переменная считается формулой;*

(b) *если* F_1 *и* F_2 *— формулы, то выражения*

$$\overline{F_1}\,,\quad \overline{F_2}\,,\quad (F_1 \vee F_2)\,,\quad (F_1 \wedge F_2)\,,\quad (F_1 \Rightarrow F_2)\quad (F_1 \Leftrightarrow F_2) \tag{1.5}$$

также считаются формулами;

(c) *не существует никаких других формул, кроме тех, которые можно получить в результате применения конечного числа раз (в любом порядке) п.* (a) *и п.* (b) *этого определения.*

Принимается также соглашение, состоящее в том, что иногда признаются формулами выражения вида (1.5), *но без внешних скобок.* По этому соглашению является формулой, например, выражение (1.4) (разумеется, при условии, что P, Q, R — формулы).

Подставляя в данную формулу вместо всех входящих в нее переменных значения *И* или *Л*, будем в результате получать высказывания. Значения истинности таких высказываний можно свести в таблицу, которая называется *таблицей истинности* данной формулы. Например, таблицу истинности формулы $P \wedge Q \Leftrightarrow R$ можно задать в следующем виде (доказательство оставляем читателю в качестве упражнения):

$\alpha(P)$	$\alpha(Q)$	$\alpha(R)$	$\alpha((P \wedge Q) \Leftrightarrow R)$
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Особую роль играют определяемые ниже формулы специального вида, называемые *тавтологиями.*

[4] *Рекурсия, рекурсивность, рекуррентность* (от лат. *recurrere* — возвращаться) — близкие между собой понятия, которые иногда используются в анализе.

Определение 9. *Формула алгебры высказываний $F(X_1, \ldots, X_n)$ называется тождественно истинной (или тавтологией), если ее значение истинности $\alpha(F)$ равно 1 при любых значениях истинности переменных $X_1, \ldots, X_n$.*

Роль тавтологий заключается прежде всего в том, что они дают схемы построения истинных высказываний, не зависящие от содержания и истинности составляющих их высказываний. Например, тавтологией является формула $X \vee \overline{X}$ («икс или не икс»). Действительно, какое бы конкретное высказывание вместо X в нее ни подставить, получим истинное высказывание. Этим, однако, не исчерпывается роль тавтологий. Не меньшее значение имеет то, что *тавтологии дают правильные способы умозаключений.* Проиллюстрируем это на примере следующей тавтологии:

$$((\overline{X} \Rightarrow Y) \wedge (\overline{X} \Rightarrow \overline{Y})) \Longrightarrow X. \tag{1.6}$$

Схема логического умозаключения, выражаемая этой тавтологией, часто используется в математике как *метод доказательства «от противного»*, суть которого заключается в следующем. Желая доказать истинность утверждения X, предполагают, что оно ложно (т. е. что истинным является $\overline{X}$). Затем с помощью некоторых рассуждений устанавливают истинность утверждений $\overline{X} \Rightarrow Y$ и $\overline{X} \Rightarrow \overline{Y}$. Таким образом, получается, что должно быть истинным утверждение $Y \wedge \overline{Y}$, которое на самом деле является тождественно ложным. Из полученного противоречия делается заключение об истинности утверждения X. Ниже перечисляются некоторые наиболее важные тавтологии.

1°. Законы коммутативности конъюнкции и дизъюнкции:

$$(X \wedge Y) \iff (Y \wedge X); \qquad (X \vee Y) \iff (Y \vee X).$$

2°. Законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции:

$$(X \wedge (Y \wedge Z)) \iff ((X \wedge Y) \wedge Z);$$
$$(X \vee (Y \vee Z)) \iff ((X \vee Y) \vee Z).$$

3°. Законы дистрибутивности:

$$(X \wedge (Y \vee Z)) \iff ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z));$$
$$(X \vee (Y \wedge Z)) \iff ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)).$$

4°. Законы де Мо́ргана:

$$\overline{(X \wedge Y)} \iff (\overline{X} \vee \overline{Y}); \qquad \overline{(X \vee Y)} \iff (\overline{X} \wedge \overline{Y}).$$

5°. Закон исключенного третьего: $X \vee \overline{X}$.

6°. Закон контрапозиции:

$$(X \Rightarrow Y) \iff (\overline{Y} \Rightarrow \overline{X}).$$

7°. Правило «цепного заключения» (закон силлогизма, или транзитивность операции $\Rightarrow$):

$$(X \Rightarrow Y \Rightarrow Z) \implies (X \Rightarrow Z). \tag{1.7}$$

8°. Правило «модус пóненс»:

$$(X \wedge (X \Rightarrow Y)) \implies Y.$$

9°. Схема (1.6) доказательства «от противного».

Математические теоремы обычно имеют структуру, выражаемую формулой

$$X \Longrightarrow Y. \tag{1.8}$$

При этом высказывание X называется *условием* теоремы, а высказывание Y — ее *заключением.* В теореме (1.8) истинность высказывания Y называют *необходимым условием* для истинности высказывания[5] X, а истинность высказывания X — *достаточным условием* для истинности высказывания Y. Не всякое необходимое условие является достаточным и не всякое достаточное условие является необходимым. В том частном случае, когда необходимое условие является и достаточным, теорема (1.8) приобретает такую форму:

$$X \Longleftrightarrow Y \tag{1.9}$$

и называется иногда *критерием.* С каждой теоремой вида (1.8) можно связать еще три теоремы

$$Y \Longrightarrow X, \qquad \overline{X} \Longrightarrow \overline{Y}, \qquad \overline{Y} \Longrightarrow \overline{X}, \tag{1.10}$$

называемые соответствено *обратной, противоположной* и *обратной к противоположной.* Из закона контрапозиции 6° вытекает равносильность теоремы (1.8) и последней из теорем (1.10).

Иногда критерии имеют следующую структуру, более сложную, чем (1.9): *«Равносильны следующие утверждения:* $A_1, \ldots, A_n$*»* где $n > 2$. Доказательства таких критериев экономнее всего проводить по так называемой *круговой схеме*, которая при $n = 5$ имеет вид, показанный на рис. 2. Проверив истинность пяти импликаций, показанных на рис. 2, мы на основании свойства транзитивности (1.7) делаем заключение о равносильности всех утверждений A_ν.

[5]Иногда это выражают еще так: «без Y нет X».

3. Предикаты и кванторные операции над ними

Начнем с определения понятия *предиката.*

Определение 10. *Повествовательное предложение, в которое входят переменные и которое при замене всех входящих в него переменных возможными их значениями становится высказыванием, называется высказывательной функцией, или предикатом.*

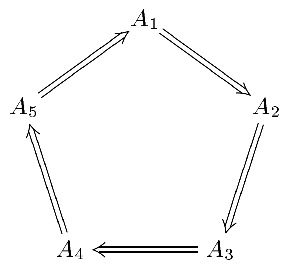

Рис. 2. Пример круговой схемы

Например, всякая формула алгебры высказываний является предикатом. Однако понятие предиката — более общее, так как входящие в предикат переменные не обязательно являются высказывательными переменными (они могут быть, например, *числовыми*). Более конкретными примерами предикатов являются уравнения, а также неравенства, содержащие переменные. Предикат называется *одноместным, двухместным* и т. д., если в него входят соответственно *одна, две* и т. д. переменные. При задании предиката должно указываться множество X всех тех значений, которые могут принимать входящие в него переменные. Оно называется *областью определения предиката.* Его подмножество $X^* \subset X$, состоящее из всех тех и только тех значений переменных, при которых данный предикат становится истинным высказыванием, называется *областью истинности* предиката. Например, областью определения предиката

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.11}$$

является множество всех чисел, а область его истинности совпадает с множеством всех корней уравнения (1.11).

Над предикатами можно производить те же операции, что и над высказываниями: *отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквиваленцию.* Не останавливаясь на соответствующих определениях, ограничимся лишь примерами. Отрицанием предиката (1.11) является предикат

$$ax^2 + bx + c \neq 0\,.$$

Пусть предикатами являются уравнения

$$P(x,y) = 0 \quad \text{и} \quad Q(x,y) = 0 \tag{1.12}$$

от двух переменных x , y . Их *конъюнкцией* является *система* уравнений:

$$\begin{cases} P(x,y) = 0\,, \\ Q(x,y) = 0\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Область истинности предиката (1.13) есть *пересечение* областей истинности предикатов (1.12). *Дизъюнкцией* предикатов (1.12) является *совокупность* уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} P(x,y) = 0\,, \\ Q(x,y) = 0\,. \end{array}\right.$$

Область истинности этого предиката есть *объединение* областей истинности предикатов (1.12). На подобных примерах можно истолковать *импликацию* и *эквиваленцию* предикатов как импликацию и эквивалентность уравнений.

Кроме перечисленных, над предикатами можно производить так называемые *кванторные* операции, не имеющие аналогов среди операций над высказываниями. Каждая из таких операций, примененная к одноместному предикату, превращает его в высказывание.

Определение 11. *Операцией «квантор общности» называется правило, которое каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве X, сопоставляет высказывание: «для всех $x \in X$ истинным является $P(x)$ », которое считается истинным только в том случае, когда предикат $P(x)$ является тождественно истинным.*

Условимся обозначать высказывание, о котором идет речь в определении 11, так:

$$\forall x \in X\, :\ P(x)\,. \tag{1.14}$$

Здесь символ $\forall$ читается *для всех* или *для любого* и называется *квантором общности*[6].

Определение 12. *Операцией «квантор существования» называется правило, которое каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве X , сопоставляет высказывание: «существует значение $x \in X$ такое, что истинным является $P(x)$ », которое считается ложным только в том случае, когда предикат $P(x)$ является тождественно ложным.*

Условимся обозначать высказывание, о котором идет речь в определении 12, так:

$$\exists x \in X\, :\ P(x)\,. \tag{1.15}$$

[6]Отметим, что слова «$\forall$» *нельзя склонять* (т.е. изменять по падежам).

Здесь символ $\exists$ читается *существует*[7] и называется *квантором существования.* Из определений 11 и 12 вытекают следующие утверждения:

$$\overline{\forall x \in X:\ P(x)} \iff (\exists x \in X:\ \overline{P(x)})\,;$$

$$\overline{\exists x \in X : P(x)} \iff (\forall x \in X : \overline{P(x)})\,.$$

Эти эквивалентности означают следующее. *Чтобы образовать отрицание высказывания типа* (1.14) *либо типа* (1.15), *надо в них заменить символ* $\forall$ *на символ* $\exists$, *а* $\exists$ *на* $\forall$, *а соответствующий предикат заменить его отрицанием.* Отметим, что кванторные операции можно применять и к многоместным предикатам. Сформулированное правило образования отрицаний обобщается и на них (с соответствующими изменениями).

§ 3. Первоначальные сведения об отображениях и числовых функциях

1. Отображение, его график, сужение и продолжение

Кроме понятия множества, другим основным понятием математики является понятие *отображения* множеств. Определим его, задавая произвольные непустые множества X и Y.

Определение 13. *Отображением множества* X *в множество* Y *называется правило, по которому каждому элементу* $x \in X$ *ставится в соответствие единственный элемент* $y \in Y$.

Уточним, что правило, о котором идет речь в этом определении, различным элементам множества X может ставить в соответствие различные же элементы множества Y. Итак, задавая различные правила, будем получать различные отображения из X в Y. При этом множество X называется *областью определения* (или *множеством задания*), а множество Y — *областью значений* данного отображения.

Обозначая через f правило, о котором идет речь в определении 13, условимся считать, что запись $y = f(x)$ означает, что правило f сопоставляет элементу $x \in X$ элемент $y \in Y$. Таким образом, $f(x)$ — это *значение* отображения f на элементе x. Кроме записи $y = f(x)$, для отображений

[7]Отметим, что символ «$\exists$» *нельзя спрягать как глагол.*

применяются и многие другие обозначения. Приведем здесь так называемые *диаграммы*

$$f : X \longrightarrow Y\ ; \qquad X \xrightarrow{f} Y\ ; \qquad f : x \longmapsto y\,. \tag{1.16}$$

Первые две диаграммы символизируют то, что f есть отображение из X в Y. Стрелку $\longrightarrow$ условимся называть *символом отображения.* Третья диаграмма из (1.16) указывает на то, что при отображении f элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $y \in Y$. Стрелка $\longmapsto$ называется *символом поэлементного отображения.* Элемент $y = f(x)$ называется *образом* элемента x при отображении f, а элемент x — *прообразом* элемента $y = f(x)$ при этом отображении. Два отображения $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$ и $f_2 : X_2 \longrightarrow Y$ считаются равными, если $X_1 = X_2$ и $\forall x : f_1(x) = f_2(x)$. Различные частные виды отображений называются также *функциями, функционалами, преобразованиями, операторами* и т. п. В некоторых случаях отображения допускают наглядное геометрическое изображение. В связи с этим каждому отображению сопоставляется его *график.*

Определение 14. *Графиком отображения* $f : X \longrightarrow Y$ *называется множество* $\Gamma_f \subset X \times Y$, *состоящее из всех упорядоченных пар* (x, y), *где* $x \in X$, $y = f(x)$, *т. е.*

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X\ ;\ y = f(x)\}\,.$$

Иногда приходится рассматривать отображения, которые различаются только своими множествами задания. В связи с этим полезно ввести понятия *сужения и продолжения отображений.*

Определение 15. *Сужением отображения* $f : X \longrightarrow Y$ *на множество* $A \subset X$ *называется отображение* $g : A \longrightarrow Y$ *такое, что* $\forall x \in A : f(x) = g(x)$.

Для сужения примем такое обозначение[8]: $g = f|_A$. Если g — сужение отображения f, то f называется *продолжением* отображения g (с множества A на множество X). Очевидно, что график сужения есть подмножество графика исходного отображения (т. е. $\Gamma_g \subset \Gamma_f$).

[8] В литературе встречается также обозначение $f|A$.

2. Образы и прообразы множеств при отображениях

Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — отображение, и $\varnothing \subset A \subset X$.

Определение 16. *Образом множества A при отображении f называется множество $f(A)$, состоящее из образов всех элементов множества A, т. е.*

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Отметим некоторые свойства образов, предполагая, что $f : X \longrightarrow Y$ — отображение, $A \subset X$, $B \subset X$:

1°. $f(\varnothing) = \varnothing$;

2°. $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \subset f(B)$;

3°. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

4°. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Докажем, например, свойство 4°.

◀ Действительно, если $A \cap B = \varnothing$, то, используя 1°, имеем

$$f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing \subset f(A) \cap f(B).$$

Если же $A \cap B \neq \varnothing$, то $\exists x \in A \cap B$ и, значит, $f(x) \in f(A \cap B)$. Но

$$x \in A \cap B \implies (x \in A \text{ и } x \in B),$$

откуда $f(x) \in f(A)$ и $f(x) \in f(B)$, т. е. $f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Итак,

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \quad ▶$$

Отметим, что включение в 4° может быть *строгим*, т. е. возможно, что

$$f(A \cap B) \subsetneqq f(A) \cap f(B).$$

◀ Пусть, например, множество X содержит более одного элемента, а отображение $f : X \longrightarrow Y$ — постоянное, т. е.[9]

$$\exists c \in Y \quad \forall x \in X : \ f(x) = c. \tag{1.17}$$

Так как X содержит более одного элемента, то существуют непустые подмножества $A \subset X$ и $B \subset X$ такие, что $A \cap B = \varnothing$. Для них имеем

$$f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing \subsetneqq \{c\} = f(A) \cap f(B). \quad ▶$$

[9]Иногда вместо записи типа (1.17) будем использовать более короткую запись: $f(x) \equiv c$ (читается это так: «$f(x)$ тождественно равно c»).

Определение 17. *Полным прообразом множества* $B \subset Y$ *при отображении* $f : X \longrightarrow Y$ *называется множество* $f^{-1}(B)$, *состоящее из всех прообразов всех элементов множества* B, *т. е.*

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Перечислим некоторые свойства полных прообразов.

1°. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;

2°. $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

3°. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

4°. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

5°. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

Доказательства оставляем читателю.

3. Композиция отображений. Обратное отображение

Пусть заданы два отображения

$$f : X \longrightarrow Y \qquad \text{и} \qquad g : Y \longrightarrow Z\,, \tag{1.18}$$

где область значений первого отображения совпадает с областью определения второго. Для таких[10] отображений определяется так называемая *композиция отображений* (называемая также *суперпозицией отображений* или *сложным отображением*).

Определение 18. *Композицией отображений* (1.18) *называется отображение* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *такое, что* $\forall x \in X : (g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Аналогично можно определить композицию трех и бóльшего числа отображений, например

$$(h \circ g \circ f)(x) := h(g(f(x)))\,.$$

Операция образования композиции, вообще говоря, *не коммутативна* (т. е. $g \circ f \neq f \circ g$, даже если обе композиции имеют смысл). Очевидно, однако, что она *ассоциативна*, т. е.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\,.$$

Используя понятие композиции, можно ввести понятие *обратного отображения.*

[10]Композиция имеет смысл и не только для таких отображений, но эту более общую ситуацию рассматривать пока не будем.

Определение 19. *Отображение* $g : Y \longrightarrow X$ *называется обратным к отображению* $f : X \longrightarrow Y$, *если*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \text{и} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y ,$$

где через Id *обозначено тождественное отображение* (например, $\mathrm{Id}_X(x) = x$ для всех $x \in X$).

Для отображения $g : Y \longrightarrow X$, обратного к $f : X \longrightarrow Y$, принято такое обозначение: $g = f^{-1}$. Очевидно, что $(f^{-1})^{-1} = f$.

Определение 20. *Отображение* $f : X \longrightarrow Y$ *называется:*

(a) *сюръективным, если* $f(X) = Y$;

(b) *инъективным*[11], *если* $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;

(c) *биективным*[12], *если оно является сюръективным и инъективным.*

Отметим, что для произвольного отображения $f : X \longrightarrow Y$ выполняется лишь включение $f(X) \subset Y$, и в связи с этим произвольные отображения называют отображениями *в* и обозначают иногда символом $\xrightarrow{\text{в}}$.

Теорема 1. *Если отображение* $f : X \longrightarrow Y$ *является биективным, то для него существует единственное обратное отображение* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

◀ Зададим произвольно $y \in Y$. Так как отображение f — сюръективное, то $\exists x \in X : f(x) = y$. Так как отображение f — инъективное, то элемент x определяется однозначно. Таким образом, мы получили единственное отображение $g : y \longmapsto x$, обратное к отображению $f : x \longmapsto y$. ▶

4. Числовые функции и способы их задания

Основным понятием математического анализа является понятие *функции*. Функция — это весьма частный случай отображения, поэтому все факты, справедливые для произвольных отображений, остаются справедливыми и для функций. Здесь и далее через $\mathbb{R}$ будем обозначать множество всех вещественных (действительных) чисел.

Определение 21. *Вещественной функцией одного вещественного переменного называется всякое отображение вида* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$.

Для краткости такие отображения будем называть просто *функциями*. Математический анализ в своей основной части — это *теория функций*. Существует много различных способов задания функций. Среди них выделим четыре наиболее важных: *аналитический, табличный, компьютерный и графический*.

[11] Инъективные отображения называют также *инъекциями*.

[12] Биективные отображения называют также *взаимно-однозначными* или *биекциями*.

Аналитический способ задания функций — это задание ее уравнением, например

$$y = 2^x, \quad u = \lg|\sin z|, \quad s = v \cdot t, \quad F = m \cdot a, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В этих примерах функции заданы *явными*[13] *аналитическими выражениями*. В тех случаях, когда некоторую функцию $f : X \longrightarrow Y$ задают в виде *уравнения* $y = f(x)$, символы x и y называют *переменными*. При этом x называют *независимой переменной* (или *аргументом*), а y — *зависимой переменной* (или *функцией*).

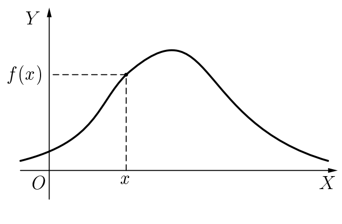

Рис. 3. Пример графика функции

Табличный способ задания функции состоит в задании некоторого множества конкретных значений аргумента и соответствующих им значений функции.

Компьютерный способ задания функции представляет собой соответствующую программу, записанную в компьютере или встроенную в него. Задавая конкретные числовые значения аргумента и обращаясь к этой программе, можно с помощью компьютера получать соответствующие значения функции.

Графический способ задания функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, заключается в построении ее графика

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X\,;\ y = f(x)\}$$

в виде некоторого множества точек координатной плоскости XOY. Именно, изображая каждую пару чисел $(x, y) \in \Gamma_f$ в виде точки $M(x, y)$ на плоскости XOY, получим множество точек, которое и принимается за графическое изображение данной функции (рис. 3). Основным преимуществом графического способа задания функции является его *наглядность*, и благодаря этому многие факты анализа становятся геометрически очевидными. Отметим, что каждая прямая, параллельная оси OY, пересекает график *не более чем в одной точке*. Этот факт является следствием *однозначности* функции (т. е. того, что каждому $x \in X$ соответствует *только одно* значение переменной y).

[13] Существуют также *неявные, параметрические* и другие разновидности аналитического способа задания функций.

5. Монотонные функции. Обратные функции

Определение 22. *Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется монотонной на множестве X, если $\forall\, x_1, x_2 \in X$ выполняется одно из следующих условий:*

(а) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (возрастание);
(б) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (убывание);
(в) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (неубывание);
(г) $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (невозрастание).

Функции, возрастающие и убывающие, называются *строго монотонными*, а остальные — монотонными (*в широком смысле*). На рис. 4 *а—г* показаны графики монотонных функций, для которых выполнены соответствующие условия из определения 22. Монотонные функции выделяются среди других классов функций своими специфическими свойствами, одно из которых рассмотрим здесь.

Теорема 2. *Если функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, — строго монотонная, то для функции $f : X \longrightarrow Y$, где $Y = f(X)$, существует единственная обратная функция $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, которая является строго монотонной в том же смысле, что и f.*

◀ Из условий (а) и (б) строгой монотонности вытекает, что

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\,,$$

т. е. что отображение $f : X \longrightarrow Y$ — инъективное. Так как $Y = f(X)$, то это отображение — сюръективное. Значит, оно биективное, и на основании теоремы 1 заключаем, что для него существует единственное обратное отображение $f^{-1} : Y \longrightarrow X$, которое тоже биективное. Таким образом, имеем

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 \neq y_2\,, \tag{1.19}$$

где

$$y_1 := f(x_1)\ ,\ y_2 := f(x_2)\,.$$

Установим строгую монотонность обратной функции $x = f^{-1}(y)$. Предположим, что f возрастает, т. е. что

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow y_1 > y_2\,,$$

и пусть $y_1 > y_2$. Отсюда, учитывая (1.19), заключаем, что $x_1 \neq x_2$, т. е. что $x_1 > x_2$, либо что $x_1 < x_2$. Последнее неравенство влечет $y_1 < y_2$, что противоречит сделанному предположению. Остается единственная возможность $x_1 > x_2$, которая означает, что функция f^{-1} возрастает. Аналогично можно рассмотреть случай, когда f убывает, но его оставляем читателю в качестве упражнения. ▶

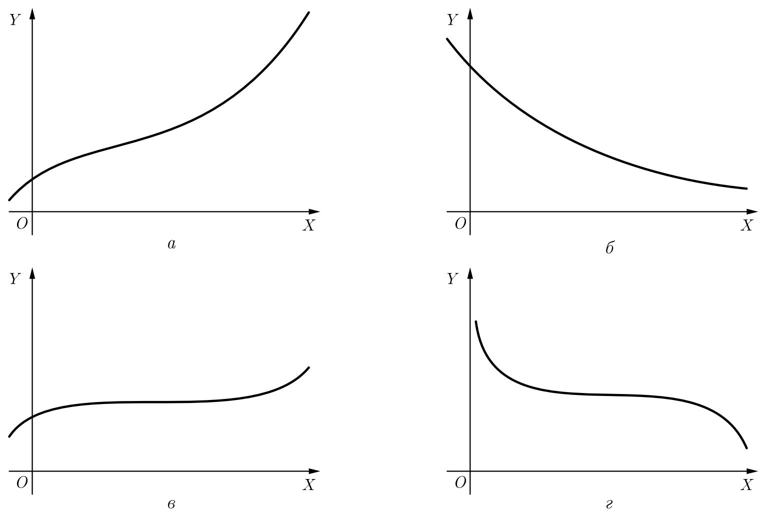

Рис. 4. Графики монотонных функций

Рассмотрим графики взаимно обратных функций

$$\Gamma_f = \{(x,y) \mid x \in X\,,\ y \in Y;\ y = f(x)\}\,,$$

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y,x) \mid x \in X\,,\ y \in Y;\ x = f^{-1}(y)\}\,.$$

Так как уравнения $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ равносильны, то графики функций f и f^{-1} можно получить один из другого с помощью следующего биективного отображения: $(x,y) \longmapsto (y,x)$. Если графики этих функций изобразить на одной и той же координатной плоскости в обозначениях $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$, то отображение $(x,y) \longmapsto (y,x)$ представится в виде преобразования симметрии относительно прямой $y = x$ (см. рис. 5). Отметим еще мнемоническое правило: *чтобы увидеть график функции f^{-1}, достаточно посмотреть на график функции f с обратной стороны того листа, на котором он нарисован, причем ось OX надо направить вверх.*

6. Четные, нечетные и периодические функции

Изучение функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, вообще говоря, упрощается, если обнаруживается, что ее график Γ_f обладает *симметриями* того или иного типа. Известно, что всякая симметрия так или иначе связана с алгебраическим понятием *группы*, которое является одним из основных понятий математики. Определим его.

Определение 23. *Непустое множество G называется группой, если в нем определена бинарная операция, т. е. задано отображение*

$$(a\,,\,b) \longmapsto a * b \text{ из } G \times G \text{ в } G\,,$$

и $\forall a,\, b,\, c \in G$ выполнены следующие условия (аксиомы):

(a) $a * (b * c) = (a * b) * c\,;$

(b) $\exists e \in G : a * e = e * a = a\,;$

(c) $\exists a^{-1} \in G : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e\,.$

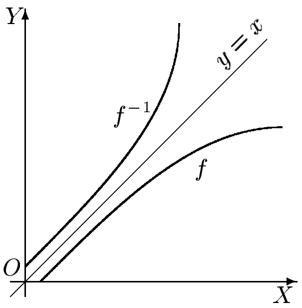

Рис. 5. Графики взаимно обратных функций

Например, множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, в котором в качестве бинарной операции взято сложение, является группой. Нейтральным элементом этой группы является число 0, а элементом, обратным к n, является $(-n)$. Существуют группы, состоящие из конечного числа элементов. Возьмем, например, две функции

$$\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

где $\mathrm{Id} : x \longmapsto x$ (тождественное отображение), а $\varphi : x \longmapsto -x$ (отображение симметрии). Тогда множество $\{\mathrm{Id}\,;\ \varphi\}$ вместе с бинарной операцией «$\circ$» (композиция отображений) является группой. Нейтральным элементом этой группы служит Id, и каждый элемент сам себе обратен. С этой группой связаны понятия *четной* и *нечетной* функций.

Определение 24. *Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ X \subset \mathbb{R}$, называется четной, если множество X расположено симметрично относительно начала координат, и $\forall x \in X\ :\ f(-x) = f(x)$.*

Примеры четных функций

$$y \equiv c\,, \quad y = x^2\,, \quad y = 2x^4\,, \quad y = |x|\,, \quad y = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad y = \cos x\,.$$

Пусть Γ_f — график четной функции f. Тогда свойство четности можно выразить так

$$(x, y) \in \Gamma_f \quad \Longleftrightarrow \quad (-x, y) \in \Gamma_f\,,$$

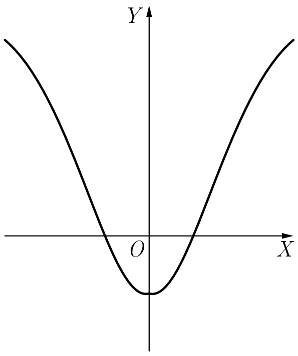

Рис. 6. График четной функции

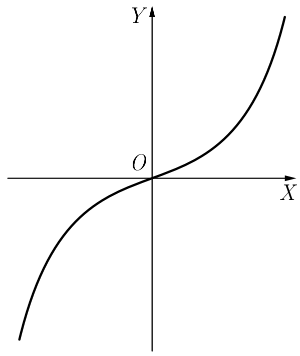

Рис. 7. График нечетной функции

т. е. $(x, y) \longmapsto (-x, y)$ есть биективное отображение Γ_f на себя. Таким образом, *график любой четной функции расположен в плоскости* XOY *симметрично относительно оси* OY (рис. 6).

Определение 25. *Функция* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *называется нечетной, если множество* X *расположено симметрично относительно начала координат, и* $\forall x \in X \ : \ f(-x) = -f(x)$.

Примеры нечетных функций

$$y = x\,, \quad y = x^5\,, \quad y = \sin x\,, \quad y = \frac{x}{1+x^2}\,, \quad y = \operatorname{sign} x\,.$$

Пусть Γ_f — график нечетной функции f. Тогда свойство нечетности можно выразить так

$$(x, y) \in \Gamma_f \quad \Longleftrightarrow \quad (-x, -y) \in \Gamma_f\,,$$

т. е. $(x, y) \longmapsto (-x, -y)$ есть биективное отображение Γ_f на себя. Таким образом, *график любой нечетной функции расположен в плоскости* XOY *симметрично относительно начала координат* (рис. 7).

Определение 26. *Функция* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, *называется периодической с периодом* $T \neq 0$, *если* $\forall x \in X$ *выполняются условия*

(a) $\forall k \in \mathbb{Z} \ : \ \ x \in X \iff x + k \cdot T \in X$;

(b) $f(x+T) = f(x)$.

Теорема 3. *Множество всех периодов любой функции является группой относительно операции сложения.*

◀ Пусть $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ — произвольная функция, и пусть $x \in X$. Так как $f(x+0) = f(x)$, то число нуль можно считать периодом *любой* функции (даже не обязательно периодической). Поэтому, если

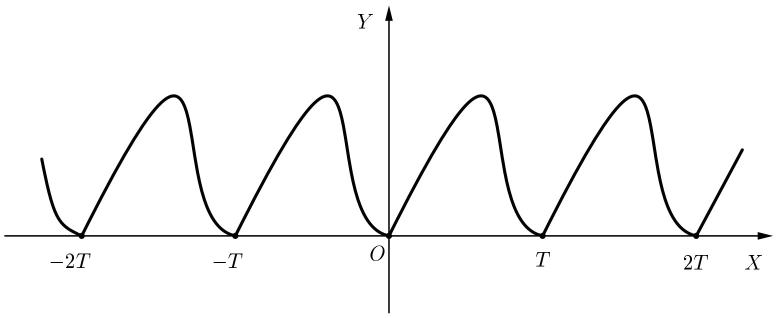

Рис. 8. График периодической функции

функция f *не является* периодической, то множество всех ее периодов состоит только из нуля ($\{0\}$ — группа относительно операции сложения). Предположим, что функция f — периодическая, и пусть T, T_1, T_2 — ее периоды. Тогда

$$f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x)\,,$$

т. е. $(T_1 + T_2)$ — период. Далее, так как $f(x + T) = f(x)$, то, обозначая $t = x + T$, получим: $f(t) = f(t - T)$, т. е. $(-T)$ — период. ▶

Среди периодических функций наиболее интересными считаются такие, группа периодов которых порождается одним числом $T \neq 0$, т. е. имеет вид

$$\{k \cdot T \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

где $\mathbb{Z}$ — группа всех целых чисел. Число T называется *основным периодом* данной периодической функции. Обычно в качестве основного периода берется *наименьший положительный период.* Для построения графика периодической функции достаточно построить график сужения данной функции на любой промежуток вида $(a\,,\, a+T)$, где T — основной период, а затем сдвинуть построенный график влево и вправо на величины, целократные T (рис. 8).

Задачи к главе 1

1.1. Доказать справедливость следующих утверждений (заглавными буквами обозначены множества):

а) $A \subset B \subset C \Longrightarrow A \subset C$;

b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, где $A \subset X, B \subset X$;

c) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

f) $A \times B \subset X \times Y \iff A \subset X, B \subset Y$.

1.2. Составить таблицы истинности следующих формул (заглавными буквами обозначены высказывания):

a) $(X \vee Y) \iff (\overline{X} \Rightarrow \overline{Y})$;

b) $(X \wedge Y) \Longrightarrow (Y \wedge \overline{X})$;

c) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$.

1.3. Доказать, что все утверждения $1^\circ - 9^\circ$ из § 2, п. 2 являются тавтологиями.

1.4. Используя операции «квантор общности» и «квантор существования» по отношению к переменной x, записать следующие высказывания:

a) равенство $f(x) = 0$ является тождеством;

b) равенство $f(x) = 0$ не является тождеством.

1.5. Доказать утверждения $1^\circ - 9^\circ$ из § 3, п. 2.

1.6. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — отображение. Используя кванторные операции, записать следующие высказывания, а также их отрицания:

a) отображение f — инъективное;

b) отображение f — сюръективное;

c) отображение f — биективное.

1.7. Составить композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ следующих функций:

$$f(x) = \sin x\,, \quad g(x) = x^2\,.$$

1.8. Составить композиции $\varphi \circ \varphi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$, $\psi \circ \psi$, где

a) $\varphi(x) = x^2\,, \quad \psi(x) = 2^x$;

b) $\varphi(x) = \operatorname{sign} x\,, \quad \psi(x) = 1/x$;

c) $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geqslant 0\,, \\ x^2 & \text{при } x < 0\,; \end{cases} \quad \psi = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0\,, \\ 0 & \text{при } x < 0\,. \end{cases}$

1.9. Исследовать на четность и на нечетность следующие функции:

a) $y = \sin x - 3\,\mathrm{sign}\, x$;

b) $y = (x^2 - 1)/(x^2 + 1) + 7\cos x - 2$;

c) $y = x + \cos x$;

d) $y = \big|\ln|x^2 - 1| - \ln|x^2 + 1|\big|$;

e) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$;

f) $y = 2\sin 3x - 2\cos x$.

1.10. Доказать следующие утверждения:

a) Любую функцию с симметричной областью определения можно однозначно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

b) Если в выражении

$$(x^2 + x + 1)^{1000} + (x^2 - x + 1)^{1000}$$

раскрыть скобки и привести подобные члены, то все слагаемые, содержащие нечетные степени переменного x, взаимно уничтожатся.

c) Если в выражении

$$(x^2 + x + 1)^{1000} - (x^2 - x + 1)^{1000}$$

раскрыть скобки и привести подобные члены, то все слагаемые, содержащие четные степени переменного x, взаимно уничтожатся.

1.11. Исследовать на периодичность следующие функции и найти группы их периодов:

a) $f_1(x) = \sin x + \mathrm{tg}\, x$;

b) $f_2(x) = 3^{\sqrt{\lg \sin 5x}}$;

c) $f_3(x) = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{21}{17}\sin 3x$;

d) $f_4(x) = \cos x + \cos \pi x$;

e) $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ — рациональное,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$

f) $\forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = c$;

g) $\sin|_{\mathbb{R}_+}$ (сужение синуса на положительный луч).

Глава 2

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ

§ 1. Натуральные, целые, рациональные числа

1. Отношение эквивалентности, классы эквивалентности

Иногда бывает целесообразно различные элементы данного множества рассматривать как одинаковые (или, как говорят, *отождествлять*). Например, интересуясь длиной прямолинейного отрезка, можно не различать *конгруэнтные*[1] между собой отрезки. Если речь идет о направлении в пространстве, то нет необходимости различать параллельные прямые. С точки зрения измерения величин естественно считать равными, например, такие обыкновенные дроби: $3/5$ и $9/15$.

Определение 27. *Бинарным отношением на множестве M называется любое подмножество $\mathcal{R}$ декартова произведения $M \times M$. Если $(a;b) \in \mathcal{R}$, то говорят, что элементы a и b находятся между собой в отношении $\mathcal{R}$* (записывается это иногда так: $a\mathcal{R}b$).

Задавая различные подмножества множества $M \times M$, будем получать, таким образом, различные бинарные отношения (или *соответствия*) на M. Примером бинарного отношения на M является график любого отображения $f : M \longrightarrow M$. Здесь остановимся на так называемых *отношениях эквивалентности.*

Определение 28. *Отношением эквивалентности на множестве M называется такое бинарное отношение на M* (обозначим его здесь сим-

[1] *Конгруэнтные* (от лат. «congruens» в смысле «совпадающий») — это такие, которые можно совместить один с другим с помощью перемещения в пространстве.

волом $\sim$), *которое* $\forall\, a, b, c \in M$ *удовлетворяет следующим условиям*:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & a \sim a & \text{(рефлексивность);} \\ \text{(b)} & a \sim b \iff b \sim a & \text{(симметричность);} \\ \text{(c)} & \left.\begin{array}{l} a \sim b \\ b \sim c \end{array}\right\} \implies a \sim c & \text{(транзитивность).} \end{array}$$

Определение 29. *Пусть* $\sim$ *— отношение эквивалентности на множестве* M. *Класс эквивалентности* K_a *элемента* $a \in M$ *определяется так:*

$$K_a := \{b \in M \mid b \sim a\}\,.$$

Теорема 4. *Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

◀ Считается, что M и $\sim$ заданы. Пусть K_a и K_b — классы эквивалентности. Если $K_a \cap K_b \neq \varnothing$, то $\exists c \in K_a \cap K_b$. По определению 29 имеем: $c \sim a$ и $c \sim b$, откуда по симметричности и транзитивности заключаем, что $a \sim b$. Поэтому $K_a = K_b$. ▶

Определение 30. *Фактор-множеством множества* M *по отношению эквивалентности* $\sim$ *называется множество* $M/_{\sim}$, *элементами которого являются всевозможные классы эквивалентности, т. е.*

$$M/_{\sim} := \{K_a \mid a \in M\}\,.$$

Построение фактор-множеств является одним из средств, с помощью которых можно формировать новые понятия, исходя из тех, которые уже сформированы. Этот метод будет использован ниже при формировании понятия числа.

2. Мощность множества. Целые положительные числа

Определение 31. *Два непустых множества называются равномощными, если существует биективное отображение одного из них на другое.*

Например, множества всех точек любых двух прямолинейных отрезков равномощны. Чтобы в этом убедиться, возьмем два отрезка AB и CD, затем с помощью вспомогательных биекций (перемещений) добьемся того, чтобы данные отрезки заняли положение отрезков OM и ON, показанных на рис. 9. Требуемая биекция между отрезками OM и ON может быть взята в виде[2] $P \longleftrightarrow Q$, где P и Q — точки пересечения этих отрезков с прямыми, параллельными прямой NM.

Теорема 5. *Равномощность есть отношение эквивалентности на любой непустой совокупности множеств.*

◀ Обозначим символом $\approx$ отношение равномощности. Покажем, что оно обладает всеми свойствами, указанными в определении 28. Пусть M, M_1, M_2, M_3 — множества из данной совокупности. Так как тождественное отображение $\mathrm{Id} : M \longrightarrow M$ есть биекция, то $M \approx M$, т. е. выполнено условие рефлексивности. Пусть, далее, $M_1 \approx M_2$. Тогда существует биекция $f : M_1 \longrightarrow M_2$. Однако для всякой биекции существует обратная биекция $f^{-1} : M_2 \longrightarrow M_1$ (в силу теоремы 1 из гл. 1). Таким образом, $M_2 \approx M_1$, т. е. выполнено условие симметричности. Предположим теперь, что $M_1 \approx M_2$ и $M_2 \approx M_3$. Тогда существуют биекции $f_1 : M_1 \longrightarrow M_2$ и $f_2 : M_2 \longrightarrow M_3$. Их композиция $f_2 \circ f_1 : M_1 \longrightarrow M_3$ также является биекцией, поэтому $M_1 \approx M_3$, т. е. выполнено и условие транзитивности. ▶

Используя теоремы 4 и 5, можно любую совокупность множеств разбить на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Тем самым вводится понятие *мощности множества.*

Определение 32. *Мощностью множества M будем называть класс множеств, равномощных с множеством M.*

Для обозначения мощности используются различные символы, например, такие: card, $\#$. Условимся, однако, в этом пункте мощность множества M обозначать символом $|M|$. Чтобы ввести понятие *натурального числа*, станем подразделять множества на конечные и бесконечные. Основным свойством, отличающим бесконечные множества от конечных, является то, что *всякое бесконечное множество равномощно некоторому его собственному подмножеству.* Например, множество всех точек отрезка OM равномощно множеству всех точек отрезка OQ (рис. 9). Но очевидно, что $OQ \underset{\neq}{\subset} OM$.

Определение 33. *Непустое множество M называется конечным, если оно не равномощно никакому его собственному подмножеству. Мощности $|M|$ непустых конечных множеств условимся называть натуральными числами.*

Символом $\mathbb{N}$ будем обозначать множество *всех натуральных чисел.* Желая ввести для них обозначения, возьмем непустое конечное множество M. Так как $M \neq \varnothing$, то $\exists a \in M$. Если $M \diagdown \{a\} = \varnothing$, то полагаем $1 := |M|$, вводя тем самым натуральное число 1. Если $M \diagdown \{a\} \neq \varnothing$, то $\exists b \in M \diagdown \{a\}$. Если $M \diagdown \{a, b\} = \varnothing$, то полагаем $2 := |M|$, вводя тем самым натуральное

[2]Условимся использовать стрелку $\longleftrightarrow$ в качестве символа биективного отображения.

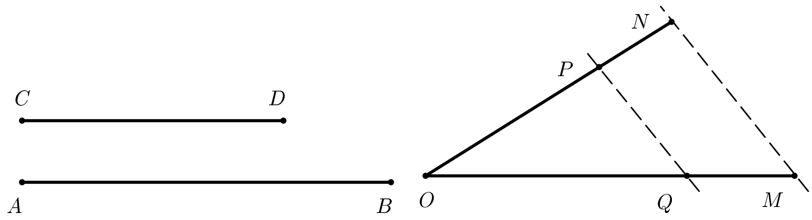

Рис. 9. Биекция между отрезками прямых

число 2. Если $M\diagdown\{a,b\} \neq \varnothing$, то $\exists c \in M\diagdown\{a,b\}$. Если $M\diagdown\{a,b,c\} = \varnothing$, то полагаем $3 := |M|$, вводя тем самым натуральное число 3. Продолжая этот процесс до тех пор, пока не окажется, что $M\diagdown\{\,a,\,b,\,c,\,\ldots,\,p\,\} = \varnothing$, вводим тем самым натуральное число

$$n := |M| = |\{\,a,\,b,\,c,\,\ldots,\,p\,\}|\,.$$

Таким образом, вводя обозначения для мощностей всех попарно неравномощных конечных множеств, можно представить множество $\mathbb{N}$ в следующем виде:

$$\mathbb{N} := \{1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots,\,n\,,\,\ldots\}\,,$$

где многоточия заменяют невыписанные натуральные числа. Множество $\mathbb{N}$, очевидно, бесконечное. Введем арифметические операции над натуральными числами.

Определение 34. *Сумму двух натуральных чисел определим равенством*

$$a+b := |A \sqcup B|\,,$$

где A *и* B *— непересекающиеся конечные множества, для которых*

$$a = |A|\,, \quad b = |B|\,.$$

Очевидно, что сумма $a+b$ не зависит от выбора конкретных множеств A и B, а из коммутативности и ассоциативности операции $\sqcup$ вытекают соответствующие свойства суммы чисел

$$a+b = b+a\,, \;\; a+(b+c) = (a+b)+c\,.$$

Определение 35. *Пусть* A, B *— непустые конечные множества, причем* $A \supset B$, $A \neq B$. *Пусть* $a = |A|$ *и* $b = |B|$. *Разность* $d = a-b$ *определяется так:* $a-b := |A\diagdown B|$.

Поскольку $A \supset B \implies A = (A\diagdown B) \sqcup B$, причем $(A\diagdown B) \cap B = \varnothing$, то $a = d+b$, т. е. $d = a-b \iff a = b+d$.

Определение 36. *Произведение $a \cdot b$ натуральных чисел a и b определим так: $a \cdot b := |A \times B|$, где A и B — конечные множества, для которых*

$$a = |A|\,, \quad b = |B|\,.$$

Так как отображение $(a\,;\,b) \longleftrightarrow (b\,;\,a)$ есть биекция множества $A \times B$ на множество $B \times A$, то произведение обладает свойством коммутативности, т. е. $a \cdot b = b \cdot a$. Далее нетрудно показать, что $(A \times B) \times C \approx A \times (B \times C)$, откуда вытекает ассоциативность умножения: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Далее, если $B \cap C = \varnothing$, то $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$, так как у пар $(x, y) \in A \times B$ и $(u, v) \in A \times C$ вторые компоненты заведомо различны (т. е. $y \neq v$). Поэтому

$$a \cdot (b + c) = |A \times (B \sqcup C)| = |(A \times B) \sqcup (A \times C)| = a \cdot b + a \cdot c\,,$$

т. е. имеет место распределительный закон. И наконец, $a \cdot 1 = a$, так как $A \times \{x\} \approx A$ в силу биекции $(a; x) \longleftrightarrow a$ множеств $A \times \{x\}$ и A.

3. Отношение порядка на множестве $\mathbb{N}$

Пусть a, b, $c \in \mathbb{N}$.

Определение 37. *Будем говорить, что $a < b$, если*

$$\exists d \in \mathbb{N}:\ a + d = b\,.$$

Теорема 6 (свойство линейной упорядоченности). *Для любых двух натуральных чисел выполняется только одно из следующих соотношений:*

$$a = b\,, \quad a < b\,, \quad b < a\,.$$

◀ Пусть A, B — такие множества, что $|A| = a$, $|B| = b$. Если $A \approx B$, то $a = b$. Если же $A \not\approx B$, то множества A и B неравномощны. В этом случае либо существует инъекция $A \longrightarrow B$, и тогда $a < b$, либо существует инъекция $B \longrightarrow A$, и тогда $b < a$. ▶

Справедливы также следующие свойства, на обосновании которых не останавливаемся:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}: \quad \begin{cases} a < b & \Longleftrightarrow \quad a + c < b + c\,, \\ a < b & \Longleftrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c\,. \end{cases}$$

Теорема 7 (свойство транзитивности). *Пусть a, b, $c \in \mathbb{N}$. Если $a < b < c$, то $a < c$.*

◀ Существуют числа d_1, $d_2 \in \mathbb{N}$, такие, что $a + d_1 = b$, $b + d_2 = c$. Отсюда $a + (d_1 + d_2) = b + d_2 = c$, т. е. $a < c$. ▶

Кроме того, справедливы неравенства

$$1 < 2 < 3 < \ldots < n < \ldots .$$

Отсюда очевидно, в частности, что 1 есть наименьшее натуральное число. Более того, справедливо следующее свойство *полной упорядоченности* множества $\mathbb{N}$.

Теорема 8. *В любом непустом подмножестве множества* $\mathbb{N}$ *содержится наименьшее число.*

◀ Пусть M — такое множество натуральных чисел, что $\varnothing \subsetneqq M \subsetneqq \mathbb{N}$. Если $1 \in M$, то 1 и будет наименьшим числом. Если $1 \notin M$, но $2 \in M$, то 2 будет наименьшим числом. Продолжая этот процесс, мы найдем в M наименьшее число. Действительно, в противном случае окажется, что $M \cap \mathbb{N} = \varnothing$. С другой стороны, $M \subset \mathbb{N}$. Пересекая это с M, находим: $M = M \cap M \subset \mathbb{N} \cap M = \varnothing$. Значит, $M = \varnothing$ — противоречие. ▶

Теорема 9 (принцип полной индукции). *Пусть* $A(n)$ — *высказывательная функция (предикат), зависящая от натурального аргумента* n. *Если высказывание* $A(1)$ — *истинное, и высказывание*

$$\forall k \in \mathbb{N} : A(k) \Rightarrow A(k+1)$$

— *также истинное, то и высказывание* $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ — *истинное.*

◀ Введем два множества:

$$U := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{высказывание } A(n) \text{ — истинное}\},$$
$$V := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{высказывание } A(n) \text{ — ложное}\}.$$

Очевидно, что $U \cap V = \varnothing$, $U \sqcup V = \mathbb{N}$. Если предположить, что $V \neq \varnothing$, то по теореме 8 в нем есть наименьшее число p. Так как $p \in V$, то высказывание $A(p)$ — *ложное.* Так как p — наименьшее число с таким свойством, то $p > 1$, а высказывание $A(p-1)$ — истинное. Однако по условию имеем: $A(p-1) \Rightarrow A(p)$, т. е. высказывание $A(p)$ — *истинное.* Получено противоречие. Из него заключаем, что $V = \varnothing$, и, значит, $U = \mathbb{N}$. ▶

Приведем два примера на применение принципа полной индукции. В качестве первого примера докажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \alpha \geqslant -1$ имеет место так называемое *неравенство Бернулли*[3]

$$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n \cdot \alpha . \tag{2.1}$$

[3] *Берну́лли* — швейцарская семья, представителями которой являются 8 известных математиков. Неравенство (2.1) принадлежит Якобу Бернулли (1659—1705).

◀ При $n = 1$ это неравенство очевидно. Предполагая, далее, что неравенство (2.1) выполняется, имеем:

$$(1{+}\alpha)^{n+1} = (1{+}\alpha)^n{\cdot}(1{+}\alpha) \geqslant (1{+}n{\cdot}\alpha)(1{+}\alpha) = 1{+}n{\cdot}\alpha{+}\alpha{+}n{\cdot}\alpha^2 \geqslant 1{+}(n{+}1){\cdot}\alpha\,.$$

Таким образом, из неравенства (2.1) следует неравенство

$$(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)\cdot\alpha\,. \quad ▶$$

В качестве второго примера покажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$ справедлива *формула бинома Ньютона*[4]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \tag{2.2}$$

где $\displaystyle\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ — числа, называемые *биномиальными коэффициентами*[5].

◀ При $n = 1$ равенство (2.2) очевидно, а при $n = 2$ и $n = 3$ оно переходит в соответствующие формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{и} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,,$$

известные из школьного курса математики. Предполагая, далее, что равенство (2.2) выполняется, имеем

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\cdot(a+b) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a^kb^{n-k+1} + a^{k+1}v^{n-k}) =\\ = a^0b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + a^{n+1}b^0 =\\ = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right)a^kb^{n-k} + a^{n+1} =\\ = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} + a^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kv^{n+1-k}\,. \quad ▶\end{aligned}$$

[4] *Нью́тон* Исаак (1643—1727) — знаменитый английский математик и физик, один из создателей математического анализа.

[5] Символ $n!$ читается *«эн факториал»* и определяется при натуральных $n > 1$ равенством $n! := 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Кроме того, по определению полагают: $1! := 1$ и, более того, $0! := 1$.

В этих преобразованиях было использовано тождество

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

которое легко доказывается.

◀ Имеем

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)}{(k+1)(n-k)} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \quad ▶$$

Теорема 10 (свойство Архимеда). *Пусть* $a, b \in \mathbb{N}$, *и* $a \geqslant b$. *Существует единственное* $p \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$b \cdot p \leqslant a < b \cdot (p+1).$$

◀ Покажем сначала, что *любое* $a \in \mathbb{N}$ *обладает свойством быть превзойденным некоторым целократным числа* $b \in \mathbb{N}$. С этой целью применяем индукцию по числу $a \in \mathbb{N}$. Так как $1 < b+1 \leqslant 2b$, то число $a = 1$ таким свойством обладает. Далее, если $a < b \cdot n$, то

$$a + 1 < b \cdot n + 1 \leqslant b \cdot n + b = b \cdot (n+1).$$

Этим вспомогательное утверждение доказано. По теореме 8 среди чисел n, для которых $a < b \cdot (n+1)$, есть наименьшее. Обозначая его через p, имеем: $b \cdot p \leqslant a < b \cdot (p+1)$. ▶

4. Построение кольца всех целых чисел

Построение проводится методом *симметризации.* Суть его заключается в том, что к множеству $\mathbb{N}$ добавляют новые элементы (нуль и отрицательные целые числа), распространяют на них арифметические операции сложения, вычитания и умножения, а также отношение неравенства. Мотивом расширения множества $\mathbb{N}$ служит проблема *обеспечения неограниченной возможности вычитания.* На множестве $\mathbb{N}$ эта возможность *ограничена*, так как по определению 35 вычитать можно *только от бóльшего числа мéньшее.*

Целое число 0 (*нуль*) вводим как мощность пустого множества $\varnothing$, т. е. полагаем $0 := |\varnothing|$. Так как для любого непустого конечного множества M выполняются соотношения

$$\varnothing \subsetneqq M\,, \quad M \cup \varnothing = M \setminus \varnothing = M\,, \quad M \times \varnothing = \varnothing\,, \quad M \setminus M = \varnothing\,,$$

то естественно считать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $0 < n$, а также равенства

$$n \pm 0 = n\,, \quad n \cdot 0 = 0\,, \quad n - n = 0\,. \tag{2.3}$$

Введем теперь два биективных образа множества $\mathbb{N}$. Первый из них назовем *множеством всех положительных целых чисел*

$$+\mathbb{N} := \{+1, +2, \ldots, +n, \ldots\}\,,$$

а второй — *множеством всех отрицательных целых чисел*

$$-\mathbb{N} := \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}\,.$$

Объединяя эти множества и множество $\{\,0\,\}$, получим множество $\mathbb{Z}$ *всех целых чисел*:

$$\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \sqcup \{0\} \sqcup (+\mathbb{N}) = \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\}\,.$$

Подчиняя введенные числа неравенствам

$$\ldots < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < \ldots$$

с сохранением свойства *транзитивности*, превращаем $\mathbb{Z}$ в *линейно упорядоченное множество* (т. е. на $\mathbb{Z}$ справедлива теорема 6).

Чтобы ввести на $\mathbb{Z}$ арифметические операции, сначала отождествим целые положительные числа с соответствующими натуральными числами, т. е. положим:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; n := +n := -(-n)\,.$$

При таком соглашении имеет место включение $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Тем самым и арифметические операции над натуральными числами переносятся на целые числа (но не на все!).

Переходя к распространению арифметических операций на любые пары целых чисел, прежде всего считаем равенства (2.3) выполненными *для любого целого* n. Кроме того, полагаем: $0 = +0 = -0$.

Определение 38. *Модуль (или абсолютную величину) целого числа a определим как целое неотрицательное число $|a|$, равное*[6] $\max\{a\,, -a\}$, *т. е. полагаем*

$$|a| := \max\{a\,, -a\}\,.$$

[6]Символами $\max M$ и $\min M$ обозначаются соответственно наибольший и наименьший элементы числового множества M.

Определение 39. *Сумма двух целых чисел одинаковых знаков считается равной числу того же знака, что и слагаемые, а модуль их суммы равен сумме модулей слагаемых. Сумма двух чисел разных знаков считается числом того же знака, что и бóльшее по модулю слагаемое, а модуль ее считается равным разности модулей слагаемых.*

Теорема 11. *Для любых* $a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}$ *имеем*

(a) $a + b = b + a$ (коммутативность);
(b) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность);
(c) $a + 0 = 0 + a = a$ (свойство нуля);
(d) $a + (-a) = 0$ (сумма противоположных чисел).

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы (оно простое), отметим только, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел образует *коммутативную* или *áбелеву*[7] группу[8] относительно операции сложения. Определив сумму любых двух чисел, легко определить и их разность, сводя ее к сумме $a - b := a + (-b)$.

Теорема 12 (неравенства треугольника). *Для любых* $a\,,\, b \in \mathbb{Z}$ *справедливы следующие неравенства*:

$$|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|\,. \tag{2.4}$$

◀ Докажем сначала правое неравенство (2.4). Если $a = 0$ либо $b = 0$, то это неравенство выполняется, так как обращается в равенство в силу первого из равенств (2.3). Если знаки чисел a и b — одинаковые, то оно также обращается в равенство согласно определению 39. Если же знаки чисел a и b — противоположные, то в силу того же определения 39 выполняется строгое неравенство $|a + b| < |a| + |b|$.

Используя, далее, правое неревенство (2.4), имеем

$$|a| = |(a + b) - b| \leqslant |a + b| + |-b| = |a + b| + |b|\,.$$

Отсюда получаем $|a + b| \geqslant |a| - |b|$. ▶

Операция умножения целых чисел определяется с использованием операции умножения натуральных чисел и известного *правила знаков* следующим образом.

Определение 40. *Произведение* $a \cdot b$ *целых чисел* $a,\, b \in \mathbb{Z}$ *определяется следующим образом:*

$$a \cdot b := \begin{cases} a \cdot b, & \text{если } a \geqslant 0,\, b \geqslant 0, \\ |a| \cdot |b|, & \text{если } a \leqslant 0\,,\, b \leqslant 0, \\ -|a| \cdot |b| & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

[7]Абелевой группа названа в честь норвежского математика *Н. Г. Абеля* (1802—1829).

[8]Понятие группы дано в гл. 1, § 3, п. 6.

Теорема 13. *Для любых* a, b, $c \in \mathbb{Z}$ *имеем*

(a)	$a \cdot b = b \cdot a$	(коммутативность);
(b)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	(ассоциативность);
(c)	$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	(свойство единицы);
(d)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	(дистрибутивность);
(e)	$a \cdot b = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = 0\,, \\ b = 0 \end{array} \right.$	(отсутствие делителей нуля).

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы, отметим, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел вместе с операциями сложения и умножения является *кольцом* (в алгебраическом смысле).

Кольцом называется всякое множество, в котором введены две операции (называемые обычно сложением и умножением). По отношению к операции сложения должны выполняться все утверждения теоремы 11. По отношению к операции умножения должны выполняться условия ассоциативности и дистрибутивности. Если выполнена коммутативность умножения, то кольцо называется *коммутативным*; если в нем есть элемент 1, то оно называется *кольцом с единицей*. Если же выполнено и условие (e) из теоремы 13, то оно называется *кольцом без делителей нуля.*

5. Построение множества всех рациональных чисел

Пусть $a \neq 0$ и b — заданные целые числа, и пусть требуется *разделить b на a*, т. е. найти такое число x, для которого выполнялось бы равенство $a \cdot x = b$. Легко видеть, что это уравнение имеет целое решение не для любых $a \neq 0$ и b. Например, уравнение $3 \cdot x = 5$ целых решений не имеет, а уравнение $7 \cdot x = 14$ — имеет. В подобных случаях говорят: *«возможность деления в кольце $\mathbb{Z}$ ограничена»*. Желая обеспечить *неограниченную возможность деления*, приходят к необходимости введения новых (рациональных) чисел. Предварительно вводятся так называемые *обыкновенные дроби.*

Определение 41. *Обыкновенными дробями условимся называть элементы декартова произведения* $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Пусть $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Условимся обыкновенную дробь (m, n) записывать в виде $m : n$, или m/n, или $\dfrac{m}{n}$. Таким образом, множество всех обыкновенных дробей можно записать в такой форме

$$\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\diagdown\{0\}) = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m\in\mathbb{Z}\,,\, n\in\mathbb{Z}\diagdown\{0\}\right\}. \qquad (2.5)$$

Введем на этом множестве отношение эквивалентности (т. е. отношение *равенства* дробей).

Определение 42. *Равенство обыкновенных дробей определяется следующим образом*:

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \quad \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \quad m_1\cdot n_2 = m_2\cdot n_1\,. \qquad (2.6)$$

Таким образом, равенство обыкновенных дробей сводится к равенству целых чисел. А так как равенство целых чисел обладает свойствами *рефлексивности, симметричности и транзитивности*, то этими же свойствами обладает и отношение равенства обыкновенных дробей. Используя затем теорему 4, можно разбить множество всех обыкновенных дробей на попарно непересекающиеся классы, каждый из которых состоит из всех равных между собой дробей. Эти классы и называют рациональными числами.

Определение 43. *Рациональными числами условимся называть классы эквивалентности множества* (2.5) *всех обыкновенных дробей по отношению* (2.6) *равенства дробей.*

Символом $\mathbb{Q}$ будем обозначать множество всех рациональных чисел, т. е. следующее фактор-множество:

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\diagdown\{0\})\diagup_{=}\,.$$

Условимся также отождествлять целые числа $k\in\mathbb{Z}$ с классами эквивалентности обыкновенных дробей вида $k\diagup 1$. Учитывая это, имеем $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, и таким образом, множество $\mathbb{Q}$ есть *расширение* множества $\mathbb{Z}$.

6. Арифметические операции над рациональными числами

Сначала введем понятие поля (в алгебраическом смысле).

Определение 44. *Множество $\mathbb{P}$ называется полем, если в нем введены две операции (сложение и умножение), которые* $\forall a,b,c\in\mathbb{P}$

обладают следующими свойствами:

(a) $a + b = b + a$;
(b) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
(c) $\exists\, 0 \in \mathbb{P}: \quad a + 0 = a$;
(d) $\exists!(-a) \in \mathbb{P}: \quad a + (-a) = 0$;
(e) $a \cdot b = b \cdot a$;
(f) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
(g) $\exists\, 1 \in \mathbb{P}: \quad a \cdot 1 = a$;
(h) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
(i) $\forall a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{P}: \quad a \cdot a^{-1} = 1$.

Замечание. Отметим прежде всего, что символ $\exists!$ из (d) здесь и всюду в дальнейшем читается так: *существует единственное.* Если выполнены все условия, кроме последнего (т. е. кроме условия (i)), то $\mathbb{P}$ есть кольцо, каковым является, например, множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. Таким образом, поле — это кольцо с единицей, в котором выполнено условие (i), *обеспечивающее неограниченную возможность деления.* Вводя надлежащим образом арифметические операции над рациональными числами, покажем, что множество $\mathbb{Q}$ является полем.

Определение 45. *Арифметические операции над обыкновенными дробями определяются следующими равенствами:*

$$\begin{aligned} &\frac{m_1}{n_1} \pm \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}\,; \\ &\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}\,; \\ &\frac{m_1}{n_1} \bigg/ \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть r_1, r_2 *— рациональные числа, а* m_1/n_1, m_2/n_2 *— представляющие их дроби. Рациональные числа*

$$r_1 \pm r_2\,, \quad r_1 \cdot r_2\,, \quad r_1/r_2$$

определяются как классы дробей, равных правым частям соответствующих равенств (2.7).

Это определение является корректным, так как при замене дробей m_1/n_1 и m_2/n_2 равными им дробями числители и знаменатели правых частей равенств (2.7) всегда умножаются на одни и те же числа, т. е. правые части тоже заменяются эквивалентными им дробями.

Теорема 14. *Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел вместе с операциями, введенными в определении 45, является полем.*

◀ Для доказательства надо проверить выполнение условий (a)—(i), перечисленных в определении 44. Сначала эти условия проверяются для операций (2.7) над обыкновенными дробями. Но свойства (a)—(h) для дробей следуют из соответствующих свойств операций над целыми числами, а эти свойства мы считаем установленными. И наконец, пусть $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, и пусть m/n — дробь, представляющая число r, причем ясно, что $m \neq 0$, $n \neq 0$. Тогда дробь $\dfrac{m}{n}$ обладает таким свойством: $\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{n}{m} = 1$, т. е. дробь $\dfrac{n}{m}$ представляет некоторое рациональное число, которое естественно обозначить r^{-1}, или $1/r$, или $1 : r$. ▶

Замечание. В поле $\mathbb{Q}$, как и во всяком поле, *отсутствуют делители нуля*, т. е.

$$r_1 \cdot r_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} r_1 = 0\,, \\ r_2 = 0\,. \end{array} \right.$$

◀ Предположим, что $r_1 \cdot r_2 = 0$ и $r_1 \neq 0$. Тогда $\exists r_1^{-1} \in \mathbb{Q}$, и мы имеем $r_2 = 1 \cdot r_2 = (r_1^{-1} \cdot r_1) \cdot r_2 = r_1^{-1} \cdot (r_1 \cdot r_2) = r_1^{-1} \cdot 0 = 0$, т. е. $r_2 = 0$. ▶

7. Отношение порядка на множестве $\mathbb{Q}$

Распространим теперь отношение неравенства с множества $\mathbb{Z}$ на множество $\mathbb{Q}$.

Определение 46. *Пусть $r \in \mathbb{Q}$, а m/n — дробь, представляющая число r. Будем считать, что $r > 0$, если m и n — целые числа, имеющие одинаковые знаки. Пусть r_1, r_2 — любые рациональные числа. Будем считать, что $r_1 > r_2$, если и только если $r_1 - r_2 > 0$.*

Это определение является корректным, так как при переходе от дроби m/n к равной ей дроби свойство числителя и знаменателя *быть числами одного знака* не нарушается. Далее считаем, что

$$
\begin{aligned}
r_1 > r_2 \quad &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad r_2 < r_1\,, \\
r_1 \geqslant r_2 \quad &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} r_1 > r_2\,, \\ r_1 = r_2\,; \end{array}\right. \\
r_1 \leqslant r_2 \quad &\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} r_1 < r_2\,, \\ r_1 = r_2\,. \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Теорема 15 (свойство линейной упорядоченности). *Для любых* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ *имеет место только одно из следующих соотношений*:

$$r_1 < r_2\,; \quad r_1 = r_2\,; \quad r_1 > r_2\,.$$

◀ Возьмем обыкновенные дроби m_1/n_1 и m_2/n_2, представляющие числа r_1 и r_2 соответственно, и составим разность

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}\,.$$

Для дроби в правой части последнего равенства реализуется только одна из следующих возможностей: либо

$$m_1 \cdot n_2 - m_2 \cdot n_1 = 0\,, \quad \text{тогда} \quad r_1 = r_2\,,$$

либо числитель и знаменатель имеют одинаковые знаки (тогда $r_1 > r_2$), либо они имеют разные знаки (тогда $r_1 < r_2$). ▶

Определение 47. *Модуль (абсолютная величина) числа* $r \in \mathbb{Q}$ *определяется равенством* $|r| := \max\{r\,, -r\}$.

Очевидно, что $|r| \geqslant 0$, причем $|r| = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 0$.

Теорема 16 (неравенство треугольника). *Для любых* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ *справедливы следующие неравенства*:

$$|r_1| - |r_2| \leqslant |r_1 + r_2| \leqslant |r_1 + r_2|\,. \tag{2.8}$$

◀ Желая установить правое неравенство (2.8), представим рациональные числа r_1 и r_2 в виде обыкновенных дробей с общим *положительным* знаменателем n

$$r_1 \sim \frac{m_1}{n}\,,\; r_2 \sim \frac{m_2}{n}\,, \quad \text{где} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для таких дробей, используя теорему 12, получим:

$$\left|\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}\right| = \frac{|m_1+m_2|}{n} \leqslant \frac{|m_1|+|m_2|}{n} = \left|\frac{m_1}{n}\right| + \left|\frac{m_2}{n}\right|,$$

т. е. $|r_1+r_2| \leqslant |r_1|+|r_2|$. Левое неравенство (2.8) легко получить как следствие правого. ▶

Следующая теорема не имеет аналога в $\mathbb{Z}$.

Теорема 17 (свойство плотности). *Для любых двух не равных между собой чисел* r_1, $r_2 \in \mathbb{Q}$ *существует число, заключенное между ними (существует даже бесконечное множество таких чисел).*

◀ Пусть $r_1 < r_2$. Полагаем $r := (r_1+r_2)/2$. Легко проверить, что $r_1 < r < r_2$. В самом деле, имеем

$$r - r_1 = (r_1+r_2)/2 - r_1 = (r_2-r_1)/2 > 0,$$

так как $r_2 > r_1$. Аналогично проверяется и второе неравенство. «Вставляя» между r_1 и r, между r_2 и r новые числа и продолжая этот процесс, получим последнее утверждение теоремы. ▶

Теорема 18 (свойство транзитивности). *Имеем*

$$\left.\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ r_2 < r_3 \end{array}\right\} \implies r_1 < r_3 .$$

◀ Имеем $r_2 - r_1 > 0$ и $r_3 - r_2 > 0$. Складывая эти неравенства, получим $r_3 - r_1 > 0$. ▶

8. Представление рациональных чисел в виде бесконечных десятичных дробей

Сначала введем соответствующие понятия.

Определение 48. *Десятичной мантиссой условимся называть всякое отображение вида*

$$\mathbb{N} \longrightarrow \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}. \tag{2.9}$$

Условимся записывать мантиссу в виде $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$, где $k \longmapsto n_k$ — поэлементная запись отображения (2.9).

Определение 49. *Бесконечной десятичной дробью условимся называть всякое выражение вида*

$$\pm n_0 \,.\, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots\,,$$

где n_0 — целое неотрицательное число, а после десятичной точки записана десятичная мантисса.

Условимся каждую конечную десятичную дробь рассматривать как бесконечную, мысленно дописывая к ней последовательность, состоящую из одних нулей. Бесконечные десятичные дроби подразделяются на *периодические* и *непериодические* в зависимости от свойств их мантисс.

Определение 50. *Мантисса $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ называется периодической, если ее можно представить в виде*

$$n_1 n_2 \ldots n_k \ldots = \ldots (n_k \ldots n_{k+p})\,,$$

где символ $(n_k \ldots n_{k+p})$ означает, что последовательность цифр $n_k \ldots n_{k+p}$ считается записанной вправо бесконечно много раз подряд.

Теорема 19. *Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической дроби. Обратно, каждая такая дробь представляет некоторое рациональное число. Это соответствие будет биективным, если исключить из рассмотрения все периодические дроби, периодом которых является цифра 9.*

◀ Проиллюстрируем эту теорему на примере. Получить из обыкновенной дроби, представляющей данное рациональное число, бесконечную десятичную дробь можно, деля ее числитель на знаменатель «столбиком». Например,

$$\begin{array}{l|l}
5.000000 & \underline{7} \\
\underline{50} & 0.714285 \\
\underline{10} & \\
\underline{30} & \\
\underline{20} & \\
\underline{60} & \\
\underline{40} & \\
5 &
\end{array}$$

Последовательные остатки от этого деления записаны в кружочках, их всего шесть, и все они различны. Последний из выписанных остатков равен 5, поэтому при дальнейшем делении последовательность частных и остатков начнет повторяться. Отсюда легко заключить, что $5/7 = 0.(714285)$, т. е. обыкновенная дробь представлена в виде десятичной периодической.

Обратно, каждую периодическую дробь можно представить в виде суммы конечной десятичной дроби и бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Суммируя прогрессию по известной формуле[9], получим обыкновенную дробь. Например,

$$1.(37) = 1 + 0.(37) = 1 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100^2} + \ldots = 1 + \frac{37/100}{1 - 1/100} = \\ = 1 + \frac{37}{99} = \frac{136}{99}\,.$$

Последнее утверждение теоремы связано с тем, что некоторые рациональные числа (а именно те, которые представлены в виде конечных десятичных дробей) можно представить в виде двух различных бесконечных десятичных дробей. Например, $1 = 1.(0) = 0.(9)$. ►

9. Изображение рациональных чисел точками числовой оси

Напомним, что числовой осью (рис. 10) называется прямая линия, на которой зафиксирована точка O (*начало отсчета), положительное направление* (например, слева направо) и *масштаб* (т. е. отрезок OA, длина которого принимается равной 1). Положительное направление на числовой оси указывается на рисунках стрелкой. Противоположное направление называется *отрицательным.*

Теорема 20. *Существует инъективное и сохраняющее линейный порядок отображение множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел в множество всех точек числовой оси.*

◄ Построим это отображение. Сначала сопоставим числу 0 (нуль) точку O (начало отсчета). Далее, откладывая от точки O в положительном направлении (т. е. вправо) $1, 2, 3, \ldots$ раз отрезок OA (единицу масштаба), получим точки, соответствующие натуральным

[9]Имеется в виду равенство $1 + q + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$, где $|q| < 1$.

числам. Откладывая затем отрезок OA от точки O влево $1, 2, 3, \ldots$ раз, получим изображения целых отрицательных чисел. Пусть теперь $n > 1$ — натуральное число. Откладывая отрезок длины $1/n$ вправо и влево m раз, получим изображения рациональных чисел, представленных обыкновенными дробями. Поскольку число n — произвольное, то таким способом на оси можно изобразить все рациональные числа. Так как различные рациональные числа можно представить в виде различных обыкновенных дробей, имеющих один и тот же знаменатель, то различные рациональные числа изобразятся различными точками числовой оси. ▶

Замечание. В заключение отметим, что указанное в теореме 20 отображение *не является биективным*. Это означает, что на числовой оси остались точки, которые не являются образами рациональных чисел при указанном выше отображении.

◀ Возьмем, например, (см. рис. 10) точку C такую, что отрезок OC конгруэнтен диагонали квадрата со стороной, равной 1. Тогда в силу теоремы Пифагора должно быть[10]

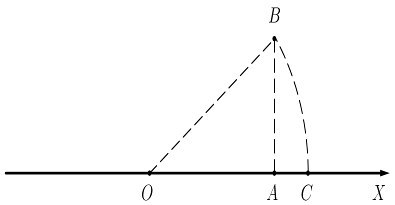

Рис. 10. Числовая ось

$$|OC|^2 = |OB|^2 = 1 + 1 = 2\,,$$

т. е. квадрат длины отрезка OC должен быть равен 2. Предполагая, что $|OC| = p/q$, где p/q — *несократимая дробь*, получим $p^2 = 2q^2$, откуда видно, что число p — четное, т. е. $p = 2p_1$. Но тогда $q^2 = 2p_1^2$, откуда следует, что и число q — четное. Таким образом, дробь p/q оказалась *сократимой*. Полученное противоречие показывает, что точке C не соответствует никакое рациональное число. ▶

Желание добиться того, чтобы любая точка числовой оси была изображением некоторого числа, является одним из оснований для введения новых (вещественных) чисел. Это будет сделано в следующем параграфе.

[10]Здесь символом $|OC|$ обозначена длина отрезка OC.

§ 2. Вещественные числа

1. Сечения Дедекинда

Напомним, что символом $\mathbb{Q}$ мы условились обозначать множество (поле) всех рациональных чисел. Желая его расширить, введем понятие *сечения.*

Определение 51. *Множество $\alpha \subset \mathbb{Q}$ называется сечением, если выполнены следующие условия:*

(I) $\varnothing \subsetneqq \alpha \subsetneqq \mathbb{Q}$;

(II) $\left.\begin{array}{l} p \in \alpha \\ q < p \end{array}\right\} \implies q \in \alpha$;

(III) *Множество α не содержит наибольшего числа.*

Условимся в этом пункте употреблять буквы $p, q, r, \ldots$ только для обозначения рациональных чисел. Сечения условимся обозначать, как правило, буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Исключения будут составлять те случаи, когда сечение будет явным образом связано с некоторым рациональным числом.

Теорема 21. *Если $p \in \alpha$, а $q \notin \alpha$, то $q > p$.*

◄ Предположим противное: $q \leqslant p$. Если $q = p$, то получим: $p \in \alpha$ и $p \notin \alpha$ — противоречие. Если же $q < p$, то в силу свойства (II) имеем: $q \in \alpha$ — опять противоречие. ►

Принимая во внимание эту теорему, будем называть элементы множества α *нижними числами сечения* α, а элементы, не принадлежащие α, — *верхними числами сечения* α. В силу свойства (III) среди нижних чисел сечения α нет наибольшего. Однако наименьшее верхнее число может как существовать, так и не существовать. Покажем последнее на примерах.

Лемма. *Пусть α — множество, включающее в себя все отрицательные числа, нуль и все положительные рациональные числа, квадрат которых меньше двух. Множество α — сечение, притом такое, что среди его верхних чисел нет наименьшего.*

◀ Выполнение условий (I) и (II) для введенного множества α очевидно. Введем, далее, множества

$$\begin{aligned} A &:= \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 < 2\} \subset \alpha\,, \\ B &:= \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где символом $\mathbb{Q}_+$ условимся обозначать множество всех положительных рациональных чисел.

Пусть $p \in A$. В силу свойства плотности существует $h \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$0 < h < \min\left\{1\ ;\ \frac{2-p^2}{2p+1}\right\}.$$

Для него имеем

$$(p+h)^2 = p^2 + 2ph + h^2 = p^2 + (2p+h)\cdot h < p^2 + (2p+1)\cdot\frac{2-p^2}{(2p+1)} = 2\,,$$

откуда $(p+h)^2 < 2$, т. е. $p+h \in \alpha$. Итак, множество α не содержит наибольшего числа, т. е. выполнено (III), и, значит, α — сечение.

Покажем, что среди верхних чисел, составляющих множество B из (2.10), нет наименьшего. Пусть $p \in B$, тогда $p > 0$ и $p^2 > 2$. Положим $q := p - (p^2-2)/2p = p/2 + 1/p$. Отсюда видно, что $0 < q < p$. Далее,

$$q^2 = \left(p - \frac{p^2-2}{2p}\right)^2 = p^2 - (p^2-2) + \left(\frac{p^2-2}{2p}\right)^2 > 2\,, \quad \text{откуда} \quad q^2 > 2\,,$$

т. е. $q \in B$ и $q < p$ и, следовательно, число $p \in B$ — не наименьшее. ▶

Однако для некоторых сечений наименьшее верхнее число существует. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 22. *Пусть $r \in \mathbb{Q}$. Определим множество α следующим образом:*

$$\alpha := \{p \in \mathbb{Q} \mid p < r\}\,. \tag{2.11}$$

Тогда α — сечение, а r — наименьшее его верхнее число.

◀ Очевидно, что для множества (2.11) выполняются условия (I), (II). Покажем, что выполняется и (III). Если $p \in \alpha$, то $p < r$, и по свойству плотности (теорема 17) имеем: $p < (p+r)/2 < r$, откуда

$(p+r)/2 \in \alpha$. Значит, число $p \in \alpha$ — не наибольшее, т. е. выполнено (III). Пусть теперь q — верхнее число. Тогда $q \geqslant r$, а так как $r \notin \alpha$, то r — тоже верхнее число, притом наименьшее. ▶

Определение 52. *Сечение, построенное в теореме* 22, *будем называть рациональным сечением, а* r *— его пограничным числом.*

Желая подчеркнуть, что сечение α — рациональное, а r — его пограничное число, условимся обозначать его так: $\alpha = r^*$. В теореме 22 установлена биекция между рациональными числами и рациональными сечениями.

Определение 53. *Сечения* α *и* β *считаются равными* $(\alpha = \beta)$, *если они равны как множества. В случае* $\alpha \neq \beta$ *считаем, что* $\alpha < \beta$, *если* $\alpha \subset \beta$.

Очевидным образом можно определить и следующие отношения между сечениями: $\leqslant$, $>$, $\geqslant$. Изучим теперь свойства отношения порядка на множестве сечений.

Теорема 23 (линейная упорядоченность сечений). *Для любых сечений* α *и* β *выполняется только одно из следующих трех соотношений*:

$$\alpha = \beta\ , \quad \alpha > \beta\ , \quad \alpha < \beta\,. \tag{2.12}$$

◀ Из определения 53 очевидно, что если $\alpha = \beta$, то ни одно из неравенств (2.12) не выполняется. Так как

$$\alpha = \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha \subset \beta\,, \\ \alpha \supset \beta\,, \end{cases}$$

то в случае $\alpha \neq \beta$ может выполняться *не более чем одно* из неравенств (2.12). Осталось только показать, что одно из них обязательно выполняется. Итак, пусть $\alpha \neq \beta$. Тогда $\exists\, p \in \mathbb{Q}$ такое, что выполнено по меньшей мере одно из следующих соотношений:

$$p \in \beta \setminus \alpha \quad \text{либо} \quad p \in \alpha \setminus \beta\,. \tag{2.13}$$

Предположим, что выполняется первое из них, т. е. $\begin{cases} p \notin \alpha\,, \\ p \in \beta\,, \end{cases}$ поэтому $\forall q \in \alpha :\ q < p$, и значит, $q \in \beta$. Итак, имеем $q \in \alpha \implies q \in \beta$, т. е. $\alpha \subsetneqq \beta$ или, что равносильно, $\alpha < \beta$.

Аналогично можно рассмотреть случай, когда выполнено второе из соотношений (2.13). ▶

Теорема 24 (плотность множества сечений). *Для любых двух не равных между собой сечений существует сечение, заключенное между ними (существует даже бесконечное множество таких сечений).*

◀ Пусть $\alpha < \beta$. Тогда $\alpha \subset \beta$ и $\alpha \neq \beta$. Поэтому существует рациональное число r такое, что $r \in \beta$ и $r \notin \alpha$. Для соответствующего ему рационального сечения имеем: $\alpha \subset r^* \subset \beta$, т. е. $\alpha < r^* < \beta$. Вставляя между α и r^*, а также между r^* и β новые сечения и продолжая процесс, можно получить сколь угодно много сечений, заключенных между α и β. ▶

Теорема 25 (свойство транзитивности). *Пусть α, β, γ — сечения. Тогда*

$$\alpha < \beta < \gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha < \gamma .$$

◀ По условию имеем: $\alpha \subset \beta \subset \gamma$, причем все включения — строгие. По свойству транзитивности отношения $\subset$ (включения) имеем строгое включение $\alpha \subsetneqq \gamma$, т. е. $\alpha < \gamma$. ▶

Последние две теоремы показывают, что отношение «меньше» между сечениями обладает теми основными свойствами, которые обычно связывают с отношениями строгого неравенства. Перейдем теперь к введению арифметических операций над сечениями.

Теорема 26. *Пусть α, β — сечения, и пусть*

$$\gamma := \{ r \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in \alpha \ \ \exists q \in \beta : \ r = p + q \} . \tag{2.14}$$

Тогда γ — сечение.

◀ Покажем, что множество γ удовлетворяет всем условиям из определения 51.

(I) Так как $\alpha \neq \varnothing$ и $\beta \neq \varnothing$, то $\exists p \in \alpha$ и $\exists q \in \beta$. Значит, $\exists\ (p+q) \in$ $\in \gamma$, т. е. $\gamma \neq \varnothing$. Далее, так как $\alpha \neq \mathbb{Q}$, то $\exists p' \notin \alpha$, а так как $\beta \neq \mathbb{Q}$, то $\exists q' \notin \beta$. Тогда $\forall p \in \alpha : \ p < p'$ и $\forall q \in \beta : \ q < q'$. Отсюда находим

$$\forall p \in \alpha \ \ \forall q \in \beta : \ \ p + q < p' + q' , \ \ \text{т. е.} \ \ p' + q' \notin \gamma ,$$

поэтому $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(II) Пусть $r \in \gamma$ и $s < r$. Надо показать, что $s \in \gamma$. Выберем $p \in \alpha$, $q \in \beta$ так, чтобы было $p + q = r$. Уменьшая первое слагаемое, найдем $p' < p$ так, чтобы стало $p' + q = s$. Значит, $s \in \gamma$.

(III) Пусть $r \in \gamma$. Тогда $r = p + q$ для некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Поскольку существует $p' > p$ и $p' \in \alpha$, то $p' + q > r$ и $p' + q \in \gamma$. Значит, число r — не наибольшее в γ. ▶

Определение 54. *Сечение, задаваемое равенством* (2.14), *обозначается символом $\alpha + \beta$ и называется суммой сечений α и β.*

Теорема 27. *Пусть α, β, γ — сечения. Тогда*[11]

(a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(c) $\alpha + 0^* = \alpha$;

(d) $\forall \alpha \ \exists! \beta : \ \alpha + \beta = 0^*$;

(e) $\forall \alpha, \beta \ \exists! \gamma : \ \alpha + \gamma = \beta$.

Доказательство всех этих фактов — не сложное и на нем не останавливаемся. Сечение β, для которого выполнено (d), называется сечением, *противоположным* к α, и обозначается символом $(-\alpha)$. Сечение γ, для которого выполняется (d), называется *разностью* сечений β и α и обозначается $\beta - \alpha$.

Теорема 28. *Для любых сечений α, β, γ таких, что $\beta < \gamma$, имеем $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. В частности, полагая $\beta = 0^*$, имеем: если $\alpha > 0^*$, $\gamma > 0^*$, то $\alpha + \gamma > 0^*$.*

◀ По определению 53 $\beta < \gamma \iff \beta \subsetneqq \gamma$. Далее, используя (2.14), получаем

$$\alpha + \beta = \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in \alpha \ \ \exists q \in \beta \ : \ r = p + q\} \subset$$
$$\subset \{r \in \mathbb{Q} \mid \exists p \in \alpha \ \ \exists q \in \gamma \ : \ r = p + q\} = \alpha + \gamma .$$

Отсюда видно, что $\alpha + \beta \leqslant \alpha + \gamma$. Посмотрим, когда здесь возможно равенство. Предполагая, что $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ и используя теорему 27(c), находим

$$\beta = 0^* + \beta = (-\alpha + \alpha) + \beta = -\alpha + (\alpha + \beta) = -\alpha + \alpha + \gamma = \gamma ,$$

т. е. $\beta = \gamma$. И наконец, если $\alpha > 0^*$, $\gamma > 0^*$, то $\alpha + \gamma > \gamma > 0^*$, и, значит, $\alpha + \gamma > 0^*$. ▶

Еще более кратко, чем сложение и вычитание, рассмотрим умножение и деление сечений. Обозначая через $\mathbb{Q}_+$ $(\mathbb{Q}_-)$ множество

[11] Напоминаю, что символ $\exists!$ означает существование и единственность, а символ 0^* — рациональное сечение с пограничным числом 0.

всех положительных (отрицательных) рациональных чисел, установим следующую теорему.

Теорема 29. *Пусть* α, β *— положительные сечения, и пусть*

$$\gamma := \mathbb{Q}_- \sqcup \{0\} \sqcup \\ \sqcup \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid \exists p \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+ \ \ \exists q \in \beta \cap \mathbb{Q}_+ \ : \ r = p \cdot q\} . \qquad (2.15)$$

Тогда γ *— сечение.*

◀ Проверим для γ свойства (I)—(III) из определения 51.

(I) Так как $0 \in \gamma$, то $\gamma \neq \varnothing$. Пусть, далее, $p' \notin \alpha$, $q' \notin \beta$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} \forall p \in \alpha \cap \mathbb{Q}_+ \ : \ p < p' \\ \forall q \in \beta \cap \mathbb{Q}_+ \ : \ q < q' \end{array}\right\} \Longrightarrow p \cdot q < p' \cdot q' ,$$

т. е. $p' \cdot q' \notin \gamma$, и, значит, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(II) Пусть $r \in \gamma$ и $s < r$, где $s \in \mathbb{Q}$. Надо показать, что $s \in \gamma$. Это очевидно в случае $s \leqslant 0$, поэтому считаем, что $s > 0$. Выберем положительные числа $p \in \alpha$, $q \in \beta$ так, чтобы было: $r = p \cdot q$. Так как $s < r$, то существует $p' \in \alpha$ такое, что $s = p' \cdot q$. Значит, $s \in \gamma$.

(III) Чтобы показать, что γ не содержит наибольшего числа, возьмем $r \in \gamma \cap \mathbb{Q}_+$. Тогда $r = p \cdot q$ для некоторых положительных $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Так как α не содержит наибольшего числа, то $\exists\, p' \in \alpha \ : \ p' > p$. Тогда $p' \cdot q \in \gamma$ и $p' \cdot q > p \cdot q$, т. е. число $r = p \cdot q \in \in \gamma$ — не наибольшее в γ. ▶

Определение 55. *Сечение* γ*, задаваемое равенством* (2.15)*, называется произведением неотрицательных сечений* α *и* β *и обозначается символом* $\alpha \cdot \beta$ *(или, короче,* $\alpha\beta$*).*

Чтобы распространить понятие произведения на любые сечения (не обязательно неотрицательные), используем известное *правило знаков.*

Определение 56. *Модулем (абсолютной величиной) сечения* α *называется неотрицательное сечение* $|\alpha|$*, задаваемое следующим образом*:

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha \ \ \textit{при} \ \alpha \geqslant 0^* , \\ -\alpha \ \ \textit{при} \ \alpha \leqslant 0^* . \end{cases}$$

Очевидно, что $|\alpha| \geqslant 0^*$, причем $|\alpha| = 0^* \ \Leftrightarrow \ \alpha = 0^*$.

Теорема 30. *Для любых сечений* α, β *имеем*

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|\,. \tag{2.16}$$

◀ Установим правое неравенство (2.16). Пусть $p \in |\alpha+\beta|$. Тогда $p = \max\{p_1 + q_1;\, -p_1 - q_1\}$ при некоторых $p_1 \in \alpha$, $q_1 \in \beta$. Используя неравенство треугольника для рациональных чисел, получим: $p_1 + q_1 \leqslant |p_1| + |q_1|$, и значит,

$$p = \max\{p_1 + q_1;\, -p_1 - q_1\} \leqslant \max\{|p_1| + |q_1|,\, -|p_1| - |q_1|\}\,.$$

Но $|p_1| \in |\alpha|$, $|q_1| \in |\beta|$ и потому

$$\max\{|p_1| + |q_1|\,,\, -|p_1| - |q_1|\} \in |\alpha| + |\beta|\,, \text{ т. е. } p \in |\alpha| + |\beta|\,.$$

Таким образом, $|\alpha + \beta| \subset |\alpha| + |\beta|$ или $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$. Левое неравенство (2.16) является следствием правого. ▶

Используя определение 56, мы дополним определение 55, сняв ограничение положительности сомножителей.

Определение 57. *Для любых сечений* α *и* β *полагаем:*

$$\alpha \cdot \beta := \begin{cases} -|\alpha| \cdot |\beta|\,, & \text{если } \alpha < 0^*,\ \beta > 0^*\,, \\ -|\alpha| \cdot |\beta|\,, & \text{если } \alpha > 0^*,\ \beta < 0^*\,, \\ \ \ |\alpha| \cdot |\beta|\,, & \text{если } \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*\,. \end{cases}$$

Кроме того, произведение сечений считается равным нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Теорема 31. *Пусть* α, β, γ *— сечения. Тогда:*

(a) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
(b) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;
(c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;
(d) $\alpha \cdot 0^* = 0^*$;
(e) $\alpha \cdot \beta = 0^* \iff \left[\begin{array}{l} \alpha = 0^*, \\ \beta = 0^*; \end{array}\right.$
(f) $\alpha \cdot 1^* = \alpha$;
(g) $\left.\begin{array}{c} \alpha > \beta \\ \gamma > 0^* \end{array}\right\} \implies \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$;
(h) $\forall \alpha \neq 0^* \ \ \forall \beta \ \ \exists! \gamma \ : \ \alpha \cdot \gamma = \beta$.

На доказательстве этой теоремы здесь не останавливаемся. Сечение γ, для которого выполняется (h), обозначается одной из следующих формул:

$$\beta : \alpha\,, \quad \beta/\alpha\,, \quad \frac{\beta}{\alpha}\,, \quad \beta \div \alpha$$

и называется *частным от деления* β на α. В заключение этого пункта приведем две теоремы о рациональных сечениях.

Теорема 32. *Для любых* p, $q \in \mathbb{Q}$ *имеем*:

(a) $p^* + q^* = (p+q)^*$;

(b) $p^* \cdot q^* = (p \cdot q)^*$;

(c) $p^* < q^* \iff p < q$.

◄ (a) Если $r \in p^* + q^*$, то $r = s + t$ для некоторых рациональных $s < p$ и $t < q$. Складывая эти неравенства, получим $r = s + t < p + q$, откуда $r < p + q$ и, значит, $r \in (p+q)^*$. Этим установлено, что $p^* + q^* \subset (p+q)^*$.

Установим противоположное включение. Пусть $r = (p+q)^*$, тогда $r < p + q$. Положим

$$h := p + q - r\,, \ s := p - h/2\,, \ t := q - h/2\,.$$

Так как $h > 0$, то $s \in p^*$, $t \in q^*$, откуда $r = s + t \in p^* + q^*$. Итак, $(p+q)^* \subset p^* + q^*$.

(b) Предположим, что $p > 0$, $q > 0$. Если $0 < r \in p^* \cdot q^*$, то $r = s \cdot t$ для некоторых положительных рациональных $s < p$ и $t < q$. Перемножая эти неравенства, получим $r = s \cdot t < p \cdot q$. Отсюда находим $r = (p \cdot q)^*$, и, значит, $p^* \cdot q^* \subset (p \cdot q)^*$.

Обратно, пусть $r \in (p \cdot q)^*$ и $r > 0$. Тогда $r < p \cdot q$, и существует $p' < p$ такое, что $r = p' \cdot q < p \cdot q$. Полагая $s := (p + p')/2$, $t := r/s$, имеем

$$s < p\,, \quad t = \frac{2p' \cdot q}{p + p'} < q\,, \quad r = s \cdot t\,, \text{ где } s \in p^*\,, \ t \in q^*\,.$$

Таким образом, $r \in p^* \cdot q^*$ и, значит, $(p \cdot q)^* \subset p^* \cdot q^*$. Если условие $p > 0$, $q > 0$ не выполнено, то надо применить правило знаков, но мы на этом не останавливаемся.

(c) Если $p < q$, то $p \notin p^*$ и $p \in q^*$. Отсюда следует, что $p^* \subsetneqq q^*$, т. е. $p^* < q^*$.

Обратно, если $p^* < q^*$, то $p^* \subsetneqq q^*$. Следовательно, существует рациональное число r такое, что $r \in q^*$ и $r \notin p^*$. Для него выполняются неравенства $p \leqslant r < q$, откуда по свойству транзитивности находим: $p < q$. ▶

Теорема 33. *Для любого сечения* α *имеем*:

$$p \in \alpha \iff p^* < \alpha .$$

◀ $\Rightarrow$ Имеем $p \in \alpha$ и $p \notin p^*$. Отсюда $p^* \neq \alpha$ и $p^* \subset \alpha$. Значит, $p^* < \alpha$. ▶

◀ $\Leftarrow$ Пусть $p^* < \alpha$, тогда $p^* \subsetneqq \alpha$. Поэтому существует рациональное q такое, что $q \in \alpha$, $q \notin p^*$. Последнее равносильно тому, что $q \in \alpha$ и $p \leqslant q$. Отсюда в силу (II) находим $p \in \alpha$. ▶

2. Множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел и его полнота

В предыдущем пункте были рассмотрены некоторые множества рациональных чисел, названные *сечениями.* На множестве всех сечений были введены отношения порядка и арифметические операции. Было установлено, что так полученная арифметика сечений подчиняется тем же законам, что и арифметика рациональных чисел. Особое внимание было уделено множеству всех рациональных сечений и было показано, *что упорядоченное поле* $\mathbb{Q}$ *всех рациональных чисел изоморфно упорядоченному полю всех рациональных сечений.* Этот *изоморфизм* (т. е. биекция, сохраняющая арифметические операции и отношение порядка[12]) установлен в теореме 32. Это позволяет нам отождествить любое рациональное сечение r^* с порождающим его рациональным числом r. Разумеется, r^* — не то же самое, что r, но их свойства, с которыми приходится иметь дело в анализе (арифметика и порядок), одинаковы в обоих этих полях. В связи с этим вполне естественно дать следующее определение.

Определение 58. *Вещественными (действительными) числами условимся называть сечения. Рациональные сечения будем называть рациональными числами, а все остальные сечения — иррациональными числами.*

[12]Это означает, что при такой биекции бо́льшим числам соответствуют бо́льшие сечения, сумма переходит в сумму и т. д.

Таким образом, все свойства сечений Дедекинда[13], установленные в предыдущем пункте, — это свойства вещественных чисел. Напомним, что множество всех вещественных чисел принято обозначать символом $\mathbb{R}$. Прилагательные *вещественные* или *действительные* применяются для того, чтобы отличить эти числа от чисел других типов (комплексных, гиперкомплексных, p-адических и прочих). Важнейшим для анализа свойством множества $\mathbb{R}$ является свойство *непрерывности*, которое называют также свойством *сплошности* или *полноты*. Одной из эквивалентных формулировок, в которой устанавливается это свойство, является следующая теорема.

Теорема 34 (Дедекинд). *Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что*
(a) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$*;*
(b) $A \cap B = \varnothing$, $A \sqcup B = \mathbb{R}$*;*
(c) $\forall \alpha \in A \ \ \forall \beta \in B \ : \ \alpha < \beta$.

Тогда

$$\exists! \gamma \in \mathbb{R} \ \ \forall \alpha \in A \ \ \forall \beta \in B \ : \ \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta . \tag{2.17}$$

◀ Докажем сначала единственность числа γ. Пусть $\gamma' \neq \gamma''$ — различные числа, для которых выполнены неравенства (2.17). Предположим для определенности, что $\gamma' < \gamma''$. По свойству плотности (теорема 24) существует число γ такое, что $\gamma' < \gamma < \gamma''$. Но тогда должно быть

$$\forall \alpha \in A \ \ \forall \beta \in B \ : \alpha \leqslant \gamma' < \gamma < \gamma'' \leqslant \beta .$$

Так как $\forall \alpha \in A \ : \ \ \alpha < \gamma$, то $\gamma \notin A$. Аналогично, так как $\forall \beta \in B \ : \ \gamma < \beta$, то $\gamma \notin B$. Таким образом, $\gamma \notin A \sqcup B = \mathbb{R}$, а это противоречит тому, что $\mathbb{R}$ — множество *всех* вещественных чисел. Итак, единственность числа γ установлена.

Чтобы доказать существование этого числа, введем в рассмотрение такое множество рациональных чисел:

$$\gamma := \{ p \in \mathbb{Q} \mid \exists \ \alpha \in A \ : \ p < \alpha \} . \tag{2.18}$$

Покажем, что это множество — сечение.

---

[13] *Дедекинд* Рихард (1831—1916) — немецкий математик, построивший строгую теорию вещественных чисел.

(I) Так как $A \neq \varnothing$, то $\exists \alpha \in A$. Рассматривая α как сечение, заключаем, что $\exists p \in \mathbb{Q} \ : \ p \in \alpha$, т. е. $p < \alpha$. Таким образом, $p \in \gamma$, и, значит, $\gamma \neq \varnothing$. Так как $A \neq \mathbb{R}$, то $\exists \beta \notin A$, значит, $\beta \in B$. Поскольку β как сечение не совпадает с $\mathbb{Q}$, то $\exists q \in \mathbb{Q} \ : \ q \neq \beta$, т. е. $q \geqslant \beta$. Отсюда и из условия (c) следует, что $q \notin \gamma$. Действительно, $\forall \alpha \in A \ : \ \alpha < \beta < p$, т. е. $\forall \alpha \in A \ : \ p > \alpha$. Итак, $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

(II) Пусть $p \in \gamma$ и $q < p$, тогда $\exists \alpha \in A \ : \ q < p < \alpha$, т. е. $q < \alpha$. Значит, $q \in \gamma$.

(III) Если $p \in \gamma$, то $\exists \alpha \in A \ : \ p < \alpha$. По свойству плотности $\exists q \ : \ p < q < \alpha$. Поэтому $q \in \gamma$, и, значит, p — не наибольшее в γ.

Итак, γ — сечение. Рассматривая его как вещественное число, покажем, что для него выполняются неравенства (2.17).

Пусть $\alpha \in A$ и $p \in \mathbb{Q}$, $p < \alpha$. В силу (2.18) имеем $p \in \gamma$, т. е.

$$p \in \alpha \implies p \in \gamma .$$

Значит, $\alpha \subset \gamma$, т. е. $\alpha \leqslant \gamma$.

Пусть теперь $\beta \in B$. Согласно условию (c) имеем

$$\forall \alpha \in A \ : \ \alpha < \beta .$$

Если $p \in \gamma$, то $p \in \alpha$ для некоторого α. Значит, для этого α имеем $p < \alpha < \beta$, откуда $p \in \beta$ и потому $\gamma \subset \beta$, т. е. $\gamma \leqslant \beta$. ▶

Замечания. 1. Иррациональные числа — это те сечения, для каждого из которых не существует наименьшего верхнего числа. Поскольку было установлено, что такие сечения существуют (см. лемму в п. 1), то тем самым установлено существование иррациональных чисел.

2. Так как $A \sqcup B = \mathbb{R}$ и $A \cap B = \varnothing$, то для числа γ, входящего в (2.17), выполняется только одно из соотношений: $\gamma \in A$ либо $\gamma \in B$. В первом случае γ является наибольшим числом множества A, а во втором — наименьшим числом множества B.

3. Если попытаться расширить множество $\mathbb{R}$ подобно тому, как расширялось множество $\mathbb{Q}$, то придется строить сечения, элементами которых будут вещественные числа. Однако в силу теоремы Дедекинда для всякого такого сечения будет существовать наименьшее верхнее число. Поэтому введение сечений не может привести к расширению множества $\mathbb{R}$. В этом проявляется *полнота* множества $\mathbb{R}$.

Теперь рассмотрим вопрос о представлении вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Понятие бесконечной десятичной дроби было дано в определении 49. В дополнение к нему отметим, что на множестве всех бесконечных десятичных дробей можно естественным образом ввести арифметические операции и порядок. Не останавливаясь на соответствующих определениях, отметим, что таким способом множество всех десятичных дробей можно превратить в линейно упорядоченное поле.

Теорема 35. *Если исключить из рассмотрения все периодические дроби, периодом которых является цифра 9, то оказывается, что упорядоченное поле всех остальных бесконечных десятичных дробей изоморфно упорядоченному полю $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.*

◀ Ограничимся здесь только установлением биекции между числами и дробями. Пусть $\alpha > 0$ — число. Пользуясь свойством Архимеда (теорема 10, которая остается справедливой при любом $\alpha > 0$), найдем целое число $n_0 \geqslant 0$ такое, что $n_0 \leqslant \alpha < n_0 + 1$. Затем найдем целое число n_1 такое, что

$$n_0 + \frac{n_1}{10} \leqslant \alpha < n_0 + \frac{n_1 + 1}{10}\,.$$

Затем найдем такое целое число n_2, чтобы было

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leqslant \alpha < n_0 + \frac{n_1 + 1}{10} + \frac{n_2 + 1}{10^2}\,.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, можно сопоставить числу α бесконечную десятичную дробь $n_0\,.\,n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$, притом единственную.

Обратно, пусть дана бесконечная десятичная дробь (положительная) $n_0\,.\,n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$. Сопоставим ей множество

$$\alpha := \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists\, k \in \mathbb{N}\ :\ p \leqslant n_0\,.\,n_1 n_2 \ldots n_k\}\,.$$

Можно показать, что множество α — сечение, а значит, $\alpha \in \mathbb{R}$. Его и сопоставим данной дроби. ▶

Замечания. 1. Согласно теореме 19, рациональные числа (и только они) изображаются бесконечными *периодическими* десятичными дробями. Исключая их из рассмотрения, приходим к выводу, что иррациональные числа (и только они) изображаются бесконечными *непериодическими* десятичными дробями.

2. Теорема 35 дает основание *определять*[14] вещественные числа как бесконечные десятичные дроби, что и делают авторы многих учебников.

Теорема 36. *Существует биективное и сохраняющее порядок соответствие между множеством $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел и множеством всех точек числовой оси.*

◀ Условимся на числовой оси сопоставлять началу отсчета число 0, а точкам, лежащим в положительном (отрицательном) направлении, — положительные (отрицательные) числа.

Требуемое в теореме 36 соответствие устанавливается с использованием известного процесса *измерения отрезков.* Чтобы упростить рассуждения, будем считать, что соответствие между рациональными числами и точками числовой оси уже установлено (теорема 20).

Пусть α — произвольная точка числовой оси, лежащая в положительном направлении от начала. Откладывая единицу масштаба в положительном направлении от начала необходимое число раз и пользуясь аксиомой Архимеда, найдем целое неотрицательное число n_0 так, чтобы было: $n_0 \leqslant \alpha < n_0+1$ (здесь знак неравенства означает *лежать левее*). Далее, откладывая $1/10$ единицы масштаба вправо от точки n_0, найдем n_1 так, чтобы было

$$n_0 + n_1/10 \leqslant \alpha < n_0 + (n_1+1)/10 .$$

Откладывая затем $1/100$ единицы масштаба вправо от точки $n_0 + n_1/10$, найдем n_2 так, чтобы было

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leqslant \alpha < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2+1}{10^2} .$$

Продолжая этот процесс неограниченно, можно сопоставить точке α единственную бесконечную десятичную дробь $n_0 . n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$, а значит, и вещественное число.

Обратно, пусть α — положительное (иррациональное) число. Представляя его в виде бесконечной десятичной дроби

$$\alpha = n_0 . n_1 n_2 \ldots n_k \ldots ,$$

[14] Определять, т. е. давать определение, или, что то же самое, отвечать на вопрос: *что это такое?*

рассмотрим на числовой оси бесконечную последовательность отрезков

$$[n_0\,;\,n_0+1]\supset[n_0\,.\,n_1\,;\,n_0\,.\,n_1+1/10\,]\supset \\ \supset[n_0\,.\,n_1n_2\,;\,n_0\,.\,n_1n_2+1/10^2]\supset\ldots,$$

где каждый следующий отрезок «вложен» в предыдущие. Длина k-го отрезка равна $1/10^{k-1}$, и ее можно сделать меньше любого числа за счет выбора достаточно большого k. Например, будет: $0<1/10^{k-1}<\varepsilon$ при $k>1+\lg(1/\varepsilon)$. При этих условиях в курсах геометрии *постулируется*[15] *существование на числовой оси единственной точки, лежащей на всех отрезках.* Эту точку и сопоставляем данному числу. ▶

Замечание. Вещественное число x, которое, согласно теореме 36, соответствует данной точке M, лежащей на числовой оси, называется *координатой* точки M. Обозначается это иногда так: $M(x)$. Теорема 36 показывает, что *вещественных чисел достаточно для того, чтобы каждой точке числовой оси приписать координату.* В связи с этим часто вообще не различают вещественные числа и точки числовой оси, а множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел отождествляют с множеством всех точек числовой оси.

3. Числовые множества и их границы

Определение 59. *Числовым множеством называется любое подмножество множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.*

Примеры числовых множеств

$$\varnothing\,,\ \{0\}\,,\ \mathbb{N},\ \mathbb{Z}\,,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},$$

а также любое непустое конечное множество чисел.

Примерами числовых множеств, наиболее часто встречающихся в классическом анализе, являются так называемые *числовые промежутки.* Чтобы их определить, зададим два числа $a\,,\,b\in\mathbb{R}$,и пусть

[15] *Постулируется,* т. е. принимается за аксиому. Эта аксиома является геометрическим аналогом свойства полноты множества $\mathbb{R}$.

$a < b$. Множество[16]

$$(a\,,\,b) = (a\,;\,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

называется *открытым промежутком* или *интервалом.*

Множество

$$[a\,,\,b] = [a\,;\,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *за́мкнутым промежутком* или *отрезком.*

Множества

$$(a\,,\,b] = (a\,;\,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}\,,$$
$$[a\,,\,b) = [a\,;\,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

называются *полуоткрытыми промежутками* или *полуинтервалами.*

Множества

$$(a\,,+\infty) = (a\,;+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}\,,$$
$$(-\infty\,,\,b) = (-\infty\,;\,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

называются *открытыми лучами* или *полубесконечными интервалами.* Частными случаями такого рода множеств являются: $\mathbb{R}_+ := (0\,,+\infty)$ (положительный луч) и $\mathbb{R}_- := (-\infty\,,\,0)$ (отрицательный луч).

Множества

$$[a,+\infty) = [a;+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}\,,$$
$$(-\infty,b] = (-\infty;b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$$

называются *полубесконечными отрезками.* Встретившиеся выше символы *минус бесконечность* $(-\infty)$ и *плюс бесконечность* $(+\infty)$ обозначают некоторые элементы, которые *не являются числами.* Однако иногда их присоединяют к множеству $\mathbb{R}$ и постулируют, что $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ -\infty < x < +\infty$. Тогда множество $\mathbb{R}$ можно записать в виде интервала (открытого промежутка): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Присоединив

[16] Здесь возникает досадная «накладка» в обозначениях, поскольку символом $(a\,,\,b)$ ранее обозначалась упорядоченная пара. Что следует понимать под символом $(a\,,\,b)$, в каждом случае будет ясно из контекста.

элементы $(-\infty)$ и $(+\infty)$ к множеству $\mathbb{R}$, получают так называемое *упорядоченное расширение множества* $\mathbb{R}$

$$\widetilde{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\},$$

которое можно записать в виде отрезка (замкнутого интервала) следующим образом: $\widetilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. При такой интерпретации элементы $(-\infty)$ и $(+\infty)$ играют роль *самого маленького числа* и *самого большого числа* соответственно (хотя *числами* они, напомним, *не являются*).

Другими примерами встречающихся в анализе числовых множеств являются *счетные множества.* Так называется всякое бесконечное множество X такое, что существует биекция $f : X \longleftrightarrow \mathbb{N}$. Нумеруя с помощью этой биекции элементы множества X, можно записать его в виде

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Замечание. Известно, например, что множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ являются счетными, а множество $\mathbb{R}$ таковым не является.

Определение 60. *Числовое множество X называется ограниченным сверху, если*

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ : \ x \leqslant M. \tag{2.19}$$

Число M называется верхней границей множества X. Наименьшая из всех верхних границ называется точной верхней границей (или верхней гранью) множества X и обозначается символом $\sup X$ *(*читается: *«супре́мум икс»).*

Числовое множество X называется ограниченным снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ : \ x \geqslant m. \tag{2.20}$$

Число m называется нижней границей множества X. Наибольшая из всех нижних границ называется точной нижней границей (или нижней гранью) множества X и обозначается символом $\inf X$ *(*читается: *«и́нфимум икс»).*

Числовое множество X называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу (т. е. если выполняются оба условия (2.19) *и* (2.20)*).*

Фундаментальное значение в анализе имеет проблема существования у числовых множеств точных границ. Решение этой проблемы содержится в следующей теореме.

Теорема 37. *Пусть* $X \neq \varnothing$ *— числовое множество. Тогда:*

(a) *если* X *ограничено сверху, то существует единственное число* $\sup X$;

(b) *если* X *ограничено снизу, то существует единственное число* $\inf X$.

◀ (a) Предположим сначала, что среди элементов множества X есть наибольший, т. е. $\exists x_0 \in X\ \forall x \in X\ :\ x \leqslant x_0$. Тогда очевидно, что $x_0 = \sup X$, поскольку в силу (2.19) x_0 есть верхняя граница, притом наименьшая.

Предположим теперь, что среди элементов множества X нет наибольшего. Введем в рассмотрение два множества: B — совокупность всех верхних границ множества X, и множество $A := \mathbb{R} \setminus B$. Тогда $A \neq \varnothing$, поскольку $A \supset X \neq \varnothing$; $B \neq \varnothing$, так как множество X ограничено сверху, и, значит, множеству B принадлежат все верхние границы. Далее, $A \cap B = \varnothing$, $A \sqcup B = \mathbb{R}$ по построению. И наконец, имеем:

$$\forall \alpha \in A\ \ \forall \beta \in B\ \ \exists x \in X\ :\ \alpha < x \leqslant \beta\,. \tag{2.21}$$

так как β — верхняя граница, а α — не верхняя граница множества X. Из (2.21) находим:

$$\forall \alpha \in A\ \ \forall \beta \in B\ :\ \alpha < \beta\,.$$

Применяя теорему 34 (Дедекинда), заключаем, что

$$\exists!\, \gamma \in \mathbb{R}\ \ \forall\, \alpha \in A\ \ \forall\, \beta \in B\ :\ \alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta\,.$$

Отсюда, учитывая, что $X \subset A$, заключаем: $\gamma = \sup X$.

Утверждение (b) можно доказать аналогично. ▶

Иногда целесообразно рассматривать также точные границы *неограниченных множеств.* Тогда по определению полагают:

$\sup X\ := +\infty$, *если множество* X *не пусто и не ограничено сверху,*

$\inf X\ := -\infty$, *если множество* X *не пусто и не ограничено снизу.*

Если эти определения принять, то для любого непустого числового множества X существуют точные границы, причем $\forall x \in X$ будет:

$$-\infty \leqslant \inf X \leqslant x \leqslant \sup X \leqslant +\infty \,.$$

И наконец, для пустого множества естественно принять такое определение:

$$\sup \varnothing \;:=\; -\infty \;; \quad \inf \varnothing \;:=\; +\infty \,.$$

Читателю рекомендуется подумать, почему должно быть именно так, а не иначе.

§ 3. Комплексные числа

Основанием для введения новых чисел обычно является наличие таких задач, для решения которых недостаточно введенных ранее чисел. Классической задачей, для полного решения которой недостаточно одних только вещественных чисел, является *алгебраическое уравнение*, т. е. уравнение вида

$$x^n + p \cdot x^{n-1} + \ldots + q = 0 \,,$$

где x — неизвестное, $n \in \mathbb{N}$, а все коэффициенты $p, \ldots, q$ — вещественные числа. Например, при $n = 2$ имеем квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, корни которого содержатся в известной формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \;. \tag{2.22}$$

Если $p^2 \big/ 4 - q \geqslant 0$, то существует вещественное число $\sqrt{p^2 \big/ 4 - q}$ (его существование можно доказать, например, методом сечений Дедекинда). Если же $p^2 \big/ 4 - q < 0$, то вещественного числа, квадрат которого был бы равен $p^2 \big/ 4 - q$, *не существует*. Желая придать смысл правой части равенства (2.22), необходимо ввести такие новые числа, среди которых были бы, в частности, корни квадратные из отрицательных вещественных чисел. Так появляются *компле́ксные* числа.

Определение 61. *Комплексными числами назовем упорядоченные пары* $(x\,;\,y)$ *вещественных чисел* x *и* y. *Равенство комплексных чисел определим естественным образом:*

$$(x_1\,;\,y_1) = (x_2\,;\,y_2) \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \,, \\ y_1 = y_2 \,. \end{array} \right.$$

Чтобы эти пары можно было назвать *числами*, необходимо на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ всех таких пар *разумно* ввести арифметические операции.

Определение 62. *Арифметические операции над комплексными числами определим с помощью следующих равенств:*

$$\begin{aligned} (x_1\,;\,y_1) \pm (x_2\,;\,y_2) &:= (x_1 \pm x_2\,;\,y_1 \pm y_2)\,; \\ (x_1\,;\,y_1) \cdot (x_2\,;\,y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2\,;\; x_1y_2 + x_2y_1)\,; \\ \frac{(x_1\,;\,y_1)}{(x_2\,;\,y_2)} &:= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\;;\;\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Разумеется, последнее равенство имеет смысл, если и только если выполнено следующее условие $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, которое равносильно такому: $(x_2\,;\,y_2) \neq (0\,,\,0)$.

Теорема 38. *Множество всех комплексных чисел вместе с арифметическими операциями, введенными в определении* 62, *является полем.*

◀ Нам необходимо проверить выполнение условий (a) — (i), перечисленных в определении 44. Коммутативность и ассоциативность операции сложения очевидна из (2.23) и из того, что эти свойства выполняются для сложения вещественных чисел. Роль нулевого элемента играет пара $(0\,;\,0)$. Роль элемента, противоположного к $(x\,;\,y)$, играет элемент $(-x\,;\,-y)$, так как

$$(x\,;\,y) + (-x;-y) = (0\,;\,0)\,.$$

Далее, коммутативность операции умножения комплексных чисел очевидна из (2.23). Проверку ассоциативности оставляем читателю. Роль единичного элемента играет пара $(1\,;\,0)$, так как

$$(x\,;\,y)\cdot(1\,;\,0) = (x\cdot 1 - y\cdot 0\,;\,x\cdot 0 + y\cdot 1) = (x\,;\,y)\,.$$

Выполнение распределительного закона (дистрибутивности) очевидно. И наконец, элементом, обратным к $(x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$, является элемент

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,;\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right),$$

поскольку

$$(x;y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}\;;\;\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,;\,\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}\right) = (1\,;\,0)\,. \quad ▶$$

Условимся символом $\mathbb{C}$ обозначать поле всех комплексных чисел.

Теорема 39. *Множество* $\mathbb{R}\times\{0\}$ *всех комплексных чисел вида* $(x\,;\,0)$ *является подполем*[17] *поля* $\mathbb{C}$, *которое изоморфно полю* $\mathbb{R}$ *всех вещественных чисел.*

[17]Подполем называется подмножество поля, которое в свою очередь является полем.

◀ Полагая в равенствах (2.23) $y_1 = y_2 = 0$, получим соответственно:

$$\begin{aligned} (x_1\,;\,0) \pm (x_2\,;\,0) &= (x_1 \pm x_2\,;\,0)\,; \\ (x_1\,;\,0)\cdot(x_2\,;\,0) &= (x_1x_2\,;\,0)\,; \\ \frac{(x_1\,;\,0)}{(x_2\,;\,0)} &= \left(\frac{x_1}{x_2}\,;\,0\right) \text{ при } x_2 \neq 0\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Эти равенства показывают, что арифметические операции (2.23) над числами из $\mathbb{R}\times\{0\}$ дают в результате снова числа из $\mathbb{R}\times\{0\}$. Следовательно, $\mathbb{R}\times\{0\}$ есть подполе поля $\mathbb{C}$. Зададим теперь биективное отображение $\mathbb{R}\times\{0\}$ на $\mathbb{R}$, полагая $(x,0) \longleftrightarrow x$. Из равенств (2.24) очевидно, что при этом отображении сумма, произведение и частное пар переходят соответственно в сумму, произведение и частное первых компонент этих пар. Поэтому отображение $(x\,;\,0) \longleftrightarrow x$ есть *изоморфизм полей.* ▶

Замечания. 1. Используя теорему 39, условимся отождествлять каждое комплексное число вида $(x\,;\,0)$ с вещественным числом x. Иначе говоря, полагаем по определению $x := (x\,;\,0)$. В частности, $(1\,;\,0) = 1$, $(0\,;\,0) = 0$. При таком соглашении имеем: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. Возводя в квадрат комплексное число $(0\,;\,1)$ и используя сделанное только что отождествление, получим

$$(0\,;\,1)^2 = (0\,;\,1)\cdot(0\,;\,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1\,;\,0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1\,;\,0) = -1\,.$$

Число $i := (0\,;\,1)$ принято называть *мнимой единицей.* Она обладает таким свойством: $i^2 = -1$. Напомним, что вещественного числа, квадрат которого был бы отрицательным, не существует.

3. На основании предыдущего замечания любое комплексное число можно преобразовать следующим образом:

$$(x\,;\,y) = (x\,;\,0) + (0\,;\,y) = (x\,;\,0) + (0\,;\,1)\cdot(y\,;\,0) = x + iy\,.$$

Представление комплексного числа в виде $x+iy$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа. Представляя комплексные числа в алгебраической форме, мы можем больше не употреблять представление комплексных чисел в виде упорядоченных пар.

4. Используя алгебраическую форму записи комплексных чисел, равенства (2.23) можно переписать в следующем равносильном виде:

$$\begin{aligned} &(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i\cdot(y_1 \pm iy_2)\,; \\ &(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\cdot(x_1y_2 + x_2y_1)\,; \\ &\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\cdot\frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}\,. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает следующее мнемоническое правило, облегчающее преобразование выражений, содержащих комплексные числа. *При тождественных преобразованиях выражений, содержащих комплексные числа, представленные в алгебраической форме, с комплексными числами можно обращаться как с многочленами, учитывая только, что* $i^2 = -1$.

5. Комплексные числа вида $x + i \cdot 0 = x$ принято называть *чисто вещественными*, а комплексные числа вида $0+iy = iy$ — *чисто мнимыми.*

Пусть $z = x + iy$ — комплексное число. Комплексное число $\overline{z} :=$ $:= x - iy$ называется *комплексно сопряженным* к z. Вещественные числа $\operatorname{Re} z := x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ и $\operatorname{Im} z := y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ называются соответственно *вещественной* (Re) и *мнимой* (Im) частями комплексного числа z.

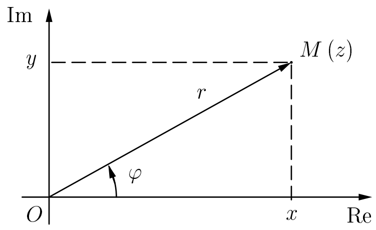

Рис. 11. Комплексная плоскость

6. Изображая пару $(x\,;\,y)$ в виде точки M координатной плоскости XOY, получим *геометрическую интерпретацию* комплексного числа

$$z = x + iy\,.$$

При этом комплексное число изображается не только точкой M, но и *радиусом-вектором*[18] $\overrightarrow{OM}$ этой точки (рис. 11). Чисто вещественные числа (и только они) изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые (и только они) — точками оси ординат. В связи с этим ось абсцисс называется *вещественной осью*, а ось ординат — *мнимой осью.* Координатная плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.*

Определение 63. *Модуль* $|z|$ *комплексного числа* $z = x + iy$ *определяется как неотрицательное число, равное*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{2.25}$$

Из рис. 11 на основании теоремы Пифагора заключаем, что $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ (т. е. расстоянию от начала координат до точки M, изображающей данное число). Кроме того, очевидно, что $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Определение 64. *Аргументом* $\arg z$ *комплексного числа* $z = x + iy$ *называется величина угла*[19]*, на который надо против часовой стрелки повернуть положительный вещественный луч до совмещения его с направлением радиуса-вектора точки* z.

[18] *Радиус-вектор* точки M — это вектор, начало которого совпадает с началом координат O, а конец — с точкой M.

[19] В классическом анализе «по умолчанию» принято углы измерять *в радианах.*

Обозначая $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ и обращаясь к рис. 11, имеем

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}. \tag{2.26}$$

Используя эти равенства, можно преобразовать данное комплексное число следующим образом:

$$x + iy = r\cdot\cos\varphi + ir\cdot\sin\varphi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа. Для преобразования комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую надо найти его модуль по формуле (2.25), а аргумент — из системы (2.26). Поскольку функции sin и cos — периодические с основным периодом 2π, то φ находится из системы (2.26) с точностью до слагаемого, целократного числу 2π.

Теорема 40. *Для любых комплексных чисел* $z = x + iy$, $w = u + iv$ *имеем*:

(a) $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \iff z = 0$;

(b) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$;

(c) $|z| - |w| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенства треугольника).

◀ Утверждение (a) вытекает прямо из определения 63.

(b) Имеем

$$\begin{aligned}|z\cdot w|^2 &= |(x+iy)(u+iv)|^2 = |(xu - yv) + i(xv + yu)|^2 = \\ &= (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 = \\ &= (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = |z|^2\cdot|w|^2.\end{aligned}$$

Отсюда, извлекая корень, получим требуемое.

(c) При $z + w = 0$ доказательства не требуется. В случае $z + w \neq 0$ положим $\lambda := \dfrac{|z+w|}{z+w}$. Умножая это равенство на $(z+w)$ и используя (b), находим

$$|z + w| = \lambda z + \lambda w = |\lambda(z + w)| = |\lambda|\cdot|z + w|.$$

Отсюда видно, что $|\lambda| = 1$, а число $\lambda z + \lambda w$ — вещественное. Используя далее неравенство треугольника $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ для вещественных чисел x и y, получим

$$\begin{aligned}|z + w| = |\lambda z + \lambda w| = \operatorname{Re}(\lambda z) + \operatorname{Re}(\lambda w) \leqslant |\operatorname{Re}(\lambda z)| + |\operatorname{Re}(\lambda w)| \leqslant \\ \leqslant |\lambda z| + |\lambda w| = |\lambda|\cdot|z| + |\lambda|\cdot|w| = |z| + |w|.\end{aligned}$$

Левое неравенство (c) является следствием правого неравенства треугольника. ▶

Теорема 41. *Для любых комплексных чисел* $z_1, \ldots, z_n$ *и* $w_1, \ldots, w_n$ *имеем*[20]:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{w}_k\Big|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 . \tag{2.27}$$

◄ Введем следующие обозначения:

$$A := \sum |z_k|^2, \quad B := \sum |w_k|^2, \quad C := \sum z_k \overline{w}_k ,$$

опуская ради краткости пределы изменения индекса суммирования. Если $B = 0$, то $w_1 = ... = w_n = 0$, и в этом случае неравенство (2.27) приобретает вид: $0 \leqslant 0$ и, значит, справедливо. Пусть теперь $B > 0$. Тогда имеем:

$$0 \leqslant \sum |Bz_k - Cw_k|^2 = \sum (Bz_k - Cw_k)(B\overline{z}_k - \overline{C}\overline{w}_k) =$$

$$= B^2 \sum |z_k|^2 - CB \sum w_k \overline{z}_k - B\overline{C} \sum \overline{w}_k z_k + |C|^2 B =$$

$$= B^2 A - |C|^2 B + |C|^2 B + |C|^2 B = (AB - |C|^2) B .$$

Так как $B > 0$, то имеем неравенство $A \cdot B - |C|^2 \geqslant 0$, равносильное неравенству (2.27). ►

В заключение этого параграфа запишем цепочку включений

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} ,$$

отражающую отдельные этапы расширения понятия числа.

И наконец, отметим, что поле $\mathbb{C}$ *не является линейно упорядоченным,* т. е. на комплексные числа невозможно распространить отношение неравенства с сохранением всех свойств неравенств, связывающих вещественные числа. Поэтому всюду в дальнейшем *всякое неравенство понимается как неравенство, связывающее вещественные числа.*

---

[20] В неравенстве (2.27), называемом *неравенством Коши — Буняковского — Шварца,* использовано общепринятое обозначение $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. *Буняковский* Виктор Яковлевич (1804—1889) — русский математик. *Шварц* Карл Герман Амандус (1843—1921) — немецкий математик.

§ 4. Элементы общей топологии

1. Метрические пространства

Понятие метрического пространства является далеко идущим обобщением понятия числового множества.

Определение 65. *Метрическим пространством называется произвольное непустое множество* X, *на котором определена функция расстояния (метрика), т. е. отображение* $d\ :\ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *такое, что* $\forall x\,,\ y\,,\ z \in X$ *выполнены следующие условия:*

M1 $\quad d(x,y) \geqslant 0\,;\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (неотрицательность);

M2 $\quad d(x,y) = d(y,x)$ (симметричность);

M3 $\quad d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (неравенство треугольника).

Элементы метрического пространства обычно называют *точками.* Условия M1—M3 принято называть *аксиомами метрического пространства.* Они в абстрактной форме выражают наиболее существенные свойства, которыми должно обладать обычное расстояние между точками. А именно свойство M1 выражает *неотрицательность* расстояния, свойство M2 — его *симметричность*, а M3 — *неравенство треугольника.*

В качестве примера метрического пространства возьмем множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, на котором функция расстояния определена формулой: $d(z,w) := |z-w|$. С геометрической точки зрения это есть обычное евклидово расстояние между точками плоскости. Отсюда, а также из свойств модуля комплексного числа вытекает, что для этого расстояния выполняются условия M1—M3. Проверим, например, условие M3.

◀ В силу теоремы 40(c) $\forall z, w, \zeta \in \mathbb{C}$ имеем:

$$|z-w| = |(z-\zeta) + (\zeta - w)| \leqslant |z-\zeta| + |\zeta - w|\,,$$

т. е. $d(z,w) \leqslant d(z,\zeta) + d(\zeta,w)$. ▶

На одном и том же множестве X можно задавать различные функции расстояния, например такую:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ при } x = y\,, \\ 1 \text{ при } x \neq y\,. \end{cases}$$

Очевидным образом проверяется, что так определенная функция ρ тоже удовлетворяет всем условиям M1—M3. Поэтому, чтобы уточнить, о какой функции расстояния идет речь, часто метрическое пространство задают в виде пары $(X\,;\,d)$, где X — основное множество, а d — заданная на нем метрика.

Определение 66. *Подпространством метрического пространства* $(X\,,\,d)$ *называется пара* $(Y,\,\rho)$ *, где* $\varnothing \neq Y \subset X$ *, а* $\rho = d|_{Y\times Y}$ *.*

Проще говоря, подпространство метрического пространства X — это его любое непустое подмножество Y с той же самой функцией расстояния, что и в X. Ясно, что условия M1—M3 выполняются в любом подпространстве данного метрического пространства. В частности, любое непустое числовое множество (например, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$) вместе с евклидовым расстоянием является метрическим пространством.

Пусть опять $(X\,;\,d)$ — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — его точка, ε — положительное число.

Определение 67. *Открытым шаром радиуса* ε *с центром в точке* x_0 *называется множество* $\{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$*.*

За́мкнутым шаром радиуса ε *с центром в точке* x_0 *называется множество*

$$\{x \in X \mid d(x, x_0) \leqslant \varepsilon\}\,.$$

Сферой радиуса ε *с центром в точке* x_0 *называется множество*

$$\{x \in X \mid d(x, x_0) = \varepsilon\}\,.$$

Шары с центром в точке x_0 радиуса ε часто называют *шаровыми* ε*-окрестностями* точки x_0 (открытыми или замкнутыми соответственно).

Не имея возможности здесь углубляться в теорию метрических пространств, установим только одно свойство, которое широко используется уже в начальных главах анализа.

Теорема 42. *Всякое метрическое пространство отделимо, т. е. у любых двух различных точек существуют непересекающиеся окрестности.*

◀ Пусть $(X\,,\,d)$ — метрическое пространство, $x_0 \in X$, $y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$. Пусть $d(x_0, y_0) = r$. Так как $x_0 \neq y_0$, то $r > 0$. Открытые шары

$$K_1 := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r/2\} \quad \text{и} \quad K_2 := \{x \in X \mid d(x, y_0) < r/2\}$$

не пересекаются. Действительно, в противном случае существовала бы точка $z \in K_1 \cap K_2$. Для нее имеем: $d(x_0, z) < r/2$ и $d(y_0, z) < r/2$. С другой стороны, в силу неравенства треугольника имеем:

$$r = d(x_0, y_0) \leqslant d(x_0, z) + d(z, y_0) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\,.$$

Отсюда получаем: $r < r$ — противоречие. ▶

2. Топологические пространства

В анализе иногда приходится иметь дело с пространствами, более общими, чем метрические, а именно с *топологическими пространствами*, поэтому познакомимся и с ними.

Определение 68. *Топологией, заданной на непустом множестве* X, *называется совокупность его подмножеств (называемых открытыми множествами), обладающая следующими свойствами:*

O1 *множества* $\varnothing$ *и* X *открыты;*

O2 *объединение любого семейства открытых множеств открыто;*

O3 *пересечение любого конечного семейства открытых множеств открыто.*

Утверждения O1—O3 называются *аксиомами открытых множеств.* На любом множестве X можно задать топологию. Считая, например, открытыми множествами только $\varnothing$ и X, легко проверить, что совокупность $\{\varnothing\,;\,X\}$ — топология. Эту топологию условимся называть *тривиальной.* Другим примером топологии на X является совокупность *всех* подмножеств множества X (так называемый *булеан*). Свойства O1—O3 для булеана также очевидны. Эту топологию условимся называть *дискретной.* Если множество X содержит более одного элемента, то на нем тривиальная топология не совпадает с дискретной. Таким образом, на одном и том же множестве, вообще говоря, можно задавать различные топологии.

Определение 69. *Топологическим пространством называется пара* $(X;\mathcal{T})$, *где* X *— непустое множество, а* $\mathcal{T}$ *— заданная на нем топология.*

Важнейшими примерами топологических пространств являются метрические пространства. Чтобы в этом убедиться, надо показать, что (в некотором смысле) *метрика порождает топологию.*

Определение 70. *Пусть* $(X\,;\,\mathcal{T})$ *— топологическое пространство. Семейство* $\mathcal{C}$ *открытых множеств называется базой топологии* $\mathcal{T}$, *если любое множество из* $\mathcal{T}$ *можно представить в виде объединения некоторого семейства множеств из* $\mathcal{C}$.

Теорема 43. *Пусть* $(X\,;\,d)$ *— метрическое пространство. Всевозможные открытые шары образуют базу некоторой топологии на* X.

◀ Назовем открытыми в X множествами всевозможные объединения открытых шаров. Покажем, что для определенных так открытых множеств выполняются условия O1—O3. Пустое множество открыто как объединение пустого семейства шаров. Множество X открыто как объединение всех шаров. Тем самым показано, что выполнено условие O1. Далее, объединяя объединения открытых шаров, снова получим некоторое объединение открытых шаров. Значит, выполнено условие O2.

Для проверки условия О3 зададим конечное семейство $\{V_1, \ldots, V_n\}$ открытых множеств, и пусть $V := \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k$. Надо показать, что множество V открыто. С этой целью будем обозначать через $U_r(x)$ открытый шар радиуса r с центром в точке x. Если $V \neq \varnothing$, то, задавая произвольно $x \in V$, найдем открытые шары $U_{r_1}(x), \ldots, U_{r_n}(x)$ так, чтобы было:

$$U_{r_1}(x) \subset V_1, \ \ldots, U_{r_n}(x) \subset V_n .$$

Обозначая $r_x = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, имеем

$$U_{r_x}(x) \subset V_1 \bigcap \ldots \bigcap V_n \subset V.$$

Отсюда находим

$$V = \bigcup_{x\in V} \{x\} \subset \bigcup_{x\in V} U_{r_x}(x) \subset \bigcup_{x\in V} V = V.$$

Так как левая и правая части последнего равенства совпадают с V, то все включения на самом деле являются равенствами, и мы имеем

$$V = \bigcup_{x\in V} U_{r_x}(x),$$

т. е. множество V открыто как объединение некоторого семейства открытых шаров. ▶

Другие примеры топологических пространств

1) На множестве $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел с метрикой $d(x,y) := |x - y|$ открытыми шарами служат открытые интервалы (a, b). Применив к этой ситуации теорему 43, заключаем, что множество $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ есть база топологии на $\mathbb{R}$. Эту топологию принято называть *естественной*.

2) На множестве $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел с евклидовой метрикой $d(z,w) := |z - w|$ открытыми шарами являются обычные евклидовы круги

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}.$$

Семейство всех этих кругов есть база топологии на $\mathbb{C}$. Эту топологию на $\mathbb{C}$ также называют *естественной*.

3) Рассмотрим *упорядоченное* расширение поля $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Можно показать, что базой топологии на $\widetilde{\mathbb{R}}$ является семейство интервалов $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, к которому надо присоединить еще два семейства:

$$\{[-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \{(a,+\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}\,.$$

4) Добавляя к множеству $\mathbb{R}$ *единственную бесконечно удаленную точку* ∞ (т. е. какой-нибудь элемент со свойством $\infty \notin \mathbb{R}$), получим *неупорядоченное* расширение множества $\mathbb{R}$. Обозначим его так: $\widehat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$. На нем базой топологии является семейство интервалов $\{(a\,,\,b) \mid\ a,b \in \mathbb{R}\}$, к которому надо присоединить такое семейство: $\{\widehat{\mathbb{R}} \diagdown [a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

5) Добавляя к множеству $\mathbb{C}$ *единственную* бесконечно удаленную точку ∞ (т. е. элемент $\infty \notin \mathbb{C}$), получим так называемую *расширенную комплексную плоскость*: $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. Базу топологии на $\widehat{\mathbb{C}}$ образуют открытые круги и всевозможные дополнения замкнутых кругов.

Определение 71. *Пусть X — топологическое пространство, A — его непустое подмножество. Точка $x \in A$ называется внутренней точкой множества A, если существует открытое множество $U(x)$ такое, что $x \in U(x) \subset A$. Совокупность всех внутренних точек множества A называется его внутренностью и обозначается символом A^0.*

Теорема 44. *Внутренность A^0 любого множества $A \subset X$ — открытое множество, притом наибольшее (по включению) открытое подмножество множества A.*

◀ Пусть $x \in A^0$. По определению 71 существует открытое множество $U(x)$ со свойством $\{x\} \subset U(x) \subset A$. Так как все точки, лежащие в $U(x)$, — внутренние, то должно быть: $\{x\} \subset U(x) \subset A^0$. Взяв объединение этих множеств по всем $x \in A^0$, получим:

$$A^0 = \bigcup_{x \in A^0} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A^0} U(x) \subset \bigcup_{x \in A^0} A^0 = A^0\,.$$

Отсюда видно, что $A^0 = \bigcup\limits_{x \in A^0} U(x)$ и, значит, открыто как объединение открытых множеств.

Пусть теперь $U \subset X$ — любое другое непустое открытое множество. Если $x \in U$, то имеем $\{x\} \subset U \subset X$, и, значит, точка $x \in A$ — внутренняя, т. е. $x \in A^0$. Таким образом, $U \subset A^0$, т. е. множество A^0 — максимальное. ▶

Следствие. *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *множество $A \subset X$ — открытое;*

(b) *все точки, принадлежащие A, — его внутренние точки, т. е. $A^0 = A$.*

Доказательство оставляем читателю в качестве упражнения.

Определение 72. *Подмножество V топологического пространства X называется за́мкнутым, если его дополнение $X\setminus V$ открыто.*

Теорема 45. *Справедливы следующие утверждения:*

З1 *множества $\varnothing$ и X замкнуты;*

З2 *пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто;*

З3 *объединение любого конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.*

◀ Для доказательства этих утверждений надо воспользоваться определением 72, формулами де Моргана

$$X\setminus\bigcup_{\nu}U_{\nu}=\bigcap_{\nu}(X\setminus U_{\nu}),\quad X\setminus\bigcap_{\nu}U_{\nu}=\bigcup_{\nu}(X\setminus U_{\nu})$$

и основными свойствами О1—О3 открытых множеств. ▶

Примерами замкнутых множеств на числовой оси являются: $\varnothing$, $\mathbb{R}$, отрезки $[a\,;b]$, конечные множества точек, замкнутые лучи $[a\,;+\infty)$, $(-\infty\,;b]$, а также любые конечные объединения таких множеств.

В п. 1 было дано понятие *шаровой окрестности точки* метрического пространства. Ввиду важности этого понятия дадим общее определение окрестности и изучим некоторые их свойства.

Определение 73. *Окрестностью точки x топологического пространства X называется произвольное множество, включающее в себя открытое множество, содержащее точку x.*

Обращаем внимание читателя на то, что окрестность не обязана быть *открытым* множеством (как ее иногда трактуют). Напротив, окрестность может быть множеством открытым, замкнутым, открыто-замкнутым (т. е. таким, которое является и открытым, и замкнутым), а также ни открытым, ни замкнутым.

Теорема 46. *Пусть X — топологическое пространство. Равносильны следующие утверждения:*

(a) *множество $A\subset X$ — открытое;*

(b) *множество A есть окрестность каждой точки $x\in A$.*

◀ (a) $\Rightarrow$ (b) Если A открыто, то из соотношения $x\in A\subset A$ заключаем, что A — окрестность точки x (согласно определению 73).

(b) $\Rightarrow$ (a) Обратно, предположим, что A — окрестность любой точки $x\in A$. Применяя определение 73, заключаем, что существует открытое множество $U(x)$ такое, что $x\in U(x)\subset A$ или $\{x\}\subset U(x)\subset A$. Объединяя это по всем $x\in A$, получим

$$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in A}U(x)\subset\bigcup_{x\in A}A=A,\ \text{откуда}\ A=\bigcup_{x\in A}U(x).$$

Таким образом, множество A открыто как объединение открытых множеств. ▶

Отметим также, что *объединение любого семейства окрестностей точки x является окрестностью точки x, и что пересечение любого конечного семейства окрестностей точки x также является окрестностью точки x.*

Определение 74. *Замыканием $\overline{A}$ подмножества A топологического пространства X называется наименьшее (по включению) замкнутое множество, содержащее A. Все точки, принадлежащие замыканию $\overline{A}$, называются точками прикосновения множества A.*

Замечание. Из очевидных включений $A^0 \subset A \subset \overline{A} \subset X$ вытекает, что точками прикосновения множества A являются все точки, принадлежащие этому множеству, и, в частности, все его внутренние точки. Кроме того, точками прикосновения множества A являются все точки его *границы* $\mathbf{Fr}\,A := \overline{A} \setminus A^0$. Точку прикосновения x множества A можно охарактеризовать еще тем, что $A \cap U \neq \varnothing$, где U — любая окрестность точки x. Точка прикосновения x множества A называется *изолированной*, если существует такая ее окрестность U, что $A \cap U = \{x\}$. В противном случае она называется *предельной точкой* множества A. Точки, не являющиеся точками прикосновения множества A, т. е. не принадлежащие его замыканию $\overline{A}$, называются *внешними* (по отношению к множеству A).

Определение 75. *Топологическое пространство называется отделимым, если у любых двух различных его точек существуют непересекающиеся[21] окрестности.*

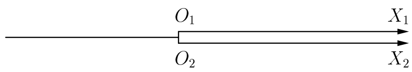

Рис. 12. Пример неотделимого пространства

В теореме 42 установлена отделимость любого метрического пространства. Покажем на примере, что *существуют неотделимые топологические пространства.* Возьмем две числовые оси O_1X_1 и O_2X_2, пересечение которых пусто. Склеим их отрицательные лучи, отождествляя между собой точки, имеющие одинаковые (отрицательные) координаты. В результате возникает топологическое пространство, напоминающее «вилку» (рис. 12). Оно не является отделимым, поскольку любые окрестности точек O_1 и O_2 имеют непустое пересечение, состоящее из точек с достаточно малыми по модулю отрицательными координатами. Из неотделимости вытекает, что на этом топологическом пространстве невозможно ввести метрику, которая бы порождала его топологию. Таким образом, понятие топологического пространства является существенно более общим, чем понятие метрического пространства.

[21] или *дизъюнктные*, т. е. такие, пересечение которых пусто.

Задачи к главе 2

2.1. Применяя метод полной индукции, доказать следующие тождества $(n \in \mathbb{N})$:

a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$;

b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

d) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$;

e) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

2.2. Доказать следующие неравенства $(n \in \mathbb{N})$:

a) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$;

b) $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n > 1$;

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

d) $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n \geqslant 3$;

e) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$;

f) $\left|\sin\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sin x_k$, где $0 \leqslant x_k \leqslant \pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ следующие выражения делятся на k:

a) $n \cdot (2n^2 - 3n + 1)$, $k = 6$;

b) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$, $k = 11$;

c) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$, $k = 133$;

d) $n^2 - n$, $k = 5$.

2.4. Построив соответствующие сечения, доказать следующие равенства:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$; b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

2.5. Используя метод сечений Дедекинда, доказать существование следующих вещественных чисел:

a) корня степени $n \in \mathbb{N}$ из положительного числа α;

b) числа α^p, где $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{Q}$;

c) числа α^{β}, где α, $\beta \in \mathbb{R}$, причем $\alpha > 0$;

d) числа $\log_{\alpha} \beta$, где α, $\beta > 0$, причем $\alpha \neq 1$.

2.6. Представить следующие комплексные числа в алгебраической форме:
$\dfrac{1}{i}$; $\dfrac{1-i}{1+i}$; $\dfrac{2}{1-3i}$; $(1+i\sqrt{3})^3$; $(1+i)^5$.

2.7. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел:
7; -2; $3i$; $1+i$; $-1-i$; $2+5i$; $2-5i$; $-2+5i$; $-2-5i$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $-3+4i$.

2.8. Что можно сказать о числах a и b, если известно, что $a < b$?

2.9. Доказать счетность следующих множеств:

a) множества всех четных чисел;

b) множества всех нечетных чисел;

c) множества $\mathbb{Q}$.

2.10. Доказать несчетность следующих множеств:
$\mathbb{R}$; множества $\mathbb{R}_+$ всех положительных чисел; отрезка $[0\,,\,1]$.

2.11. Вычислить суммы:

a) $1 + 11 + \ldots + 11\ldots1$;

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}$;

c) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$;

d) $x^n + 2x^{n-1} + \ldots + (n-1)x^2 + nx$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$;

f) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$;

g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$;

h) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin^2 kx$;

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x$;

j) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos^3 2x$;

k) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$.

2.12. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Символом E' обозначим совокупность всех предельных точек множества E, а через $\overline{E}$ — замыкание множества E. Привести примеры множества E, для которого выполнялось бы одно из следующих соотношений:

a) $E = E'$;

b) $\begin{cases} E' \underset{\neq}{\subset} E\,, \\ E \diagdown E' \neq \varnothing\,; \end{cases}$

c) $\begin{cases} E \underset{\neq}{\subset} E'\,, \\ E' \diagdown E \neq \varnothing\,; \end{cases}$

d) $\begin{cases} E' \diagdown E \neq \varnothing\,, \\ E \diagdown E' \neq \varnothing\,; \end{cases}$

e) $E \cap E' = \varnothing$;

f) $\sup E \in E$;

g) $\sup E \notin E$;

h) $\sup E \in E \diagdown E'$.

2.13. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Обозначим $\mathbf{Fr}\, E$ границу множества E. Доказать, что если $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, то:

a) $\mathbf{Fr}\ (A \cup B) \subset (\mathbf{Fr}\, A) \cup (\mathbf{Fr}\, B)$;

b) $\mathbf{Fr}\ (A \cap B) \subset (\mathbf{Fr}\, A) \cup (\mathbf{Fr}\, B)$.

Глава 3
ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

§ 1. Последовательности и их пределы

1. Определения и примеры

Пусть X — произвольное непустое множество, а $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Определение 76. *Последовательностью элементов множества X называется отображение $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Значение $f(n)$ называется n-м *членом последовательности.* Обозначив $x_n = f(n)$, последовательность часто записывают в следующих формах:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n), \quad x_n,$$

или так

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

где, как обычно, многоточия символизируют члены, которые явно не выписаны.

В отличие от записи $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ запись $\{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$ будет означать *множество всех членов последовательности* (x_n). Например, $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ — постоянная последовательность, т. е. $x_n = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ — множество $\{1\}$, состоящее из одного элемента, равного 1.

Последовательности подразделяются в зависимости от природы элементов множества X. Так, если элементами множества X являются числа, функции и т. п., то соответствующие последовательности называются числовыми, функциональными и т. п. В этой главе будем изучать только *числовые последовательности*, т. е. будем считать, что X — непустое числовое множество. Числовые последовательности подразделяются на вещественные и комплексные в зависимости от того, какое из следующих включений $X \subset \mathbb{R}$ или $X \subset \mathbb{C}$

имеет место. Предполагая, что X — произвольное *топологическое пространство*, дадим общее определение понятия предела последовательности.

Определение 77. *Говорят, что последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *элементов* $x_n \in X$ *имеет пределом точку* $a \in X$ *(или сходится к точке* $a \in X$*), если для любой окрестности* $V(a)$ *точки* $a \in X$ *существует номер* $n_V \in \mathbb{N}$ *такой, что* $\forall n \geqslant n_V \ : \ x_n \in V(a)$.

Кратко это записывается в виде[1]: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или в виде $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Запишем определение 77 в другой, более обозримой форме

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall V(a) \ \ \exists n_V \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_V : \ x_n \in V(a). \tag{3.1}$$

Такая запись не только более обозрима, но и позволяет, например, просто сформулировать утверждение «Последовательность (x_n) не сходится к точке a»:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \neq a \quad \Longleftrightarrow \quad \exists V(a) \ \ \forall n_V \in \mathbb{N} \ \ \exists n \geqslant n_V : \ x_n \notin V(a).$$

Конкретизируя в определении 77 топологическое пространство X, будем получать определения предела соответствующей последовательности (например, числовой, функциональной и т. п.). Рассматривая числовые последовательности, удобно наряду с произвольными окрестностями точек рассматривать так называемые ε*-окрестности* (замкнутые либо открытые).

Определение 78. *Пусть* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. *Замкнутой* ε*-окрестностью точки* $a \in \mathbb{C}$ *называется замкнутый круг* $|z-a| \leqslant \varepsilon$ *с центром в точке* a *радиуса* ε. *Открытой* ε*-окрестностью точки* $a \in \mathbb{C}$ *называется открытый круг* $|z-a| < \varepsilon$.

Определение 79. *Пусть снова* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. *Замкнутой* ε*-окрестностью точки* $a \in \mathbb{R}$ *называется отрезок* $[a-\varepsilon\,;\ a+\varepsilon]$, *а открытой — интервал* $(a-\varepsilon\,;\ a+\varepsilon)$ *с центром в точке* a *радиуса* ε.

Теперь конкретизируем определение 77 применительно к числовым последовательностям, взяв в качестве окрестностей соответствующие ε-окрестности.

---

[1] В тех случаях, когда заранее не известно, выполняется ли для последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ условие, указанное в приведенном определении, запись $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ рассматривается как задача.

Определение 80. *Числовая последовательность называется сходящейся к числу c, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, начиная с которого выполняется неравенство: $|z_n - a| \leqslant \varepsilon$.*

Перепишем его в форме, аналогичной (3.1).

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;:\; |z_n - a| \leqslant \varepsilon\,. \quad (3.2)$$

Это определение годится как для вещественных, так и для комплексных числовых последовательностей. Различие начинает проявляться лишь тогда, когда требуется конкретизировать окрестность $|z_n - a| \leqslant \varepsilon$ (т. е. уточнить, что это — круг или отрезок?).

Числовую последовательность, которая не сходится ни к какому числу, принято называть *расходящейся*. Этот термин будет означать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ либо не существует, либо он существует, но *не является числом.*

Рассмотрим **примеры** на применение определения предела последовательности.

1) Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

◀ Задавая число $\varepsilon > 0$, станем искать какое-нибудь $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, для которого $\left|\dfrac{1}{n_\varepsilon} - 0\right| \leqslant \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно неравенству $n_\varepsilon \geqslant 1/\varepsilon$. Учитывая, что n_ε должно быть целым, полагаем $n_\varepsilon := [1/\varepsilon]+1$, где $[\cdots]$ означает целую часть. Так как $[1/\varepsilon]+1 > 1/\varepsilon$, то $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ будет: $n \geqslant 1/\varepsilon$ или $1/n \leqslant \varepsilon$. ▶

2) Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

◀ Задавая число $\varepsilon \in (0\,;1)$, будем искать какое-нибудь $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, для которого $|q^{n_\varepsilon} - 0| \leqslant \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно такому: $|q|^{n_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$, или $n_\varepsilon \cdot \ln|q| \leqslant \ln\varepsilon$, или $n_\varepsilon \geqslant \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. Поэтому, учитывая, что $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, достаточно положить $n_\varepsilon = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1$. Тогда при $n \geqslant n_\varepsilon$ будет: $n \geqslant \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, что равносильно такому неравенству $|q|^n \leqslant \varepsilon$. ▶

3) Последовательность $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ расходится.

◀ Запишем общий член данной последовательности в виде $x_n = (-1)^{n+1}$. Предполагая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, имеем:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;:\; \left|(-1)^{n+1} - a\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Полагая здесь $\varepsilon = 1/2$, получим соответственно для четных и нечетных значений n следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} |1+a| \leqslant \dfrac{1}{2}\,, \\ |1-a| \leqslant \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Эта система несовместна, так как

$$2 = |1+1| = |(1+a)+(1-a)| \leqslant |1+a| + |1-a| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,,$$

т. е. $2 \leqslant 1$ — противоречие. ►

2. Общие свойства пределов. Предел и арифметические операции

Определение 81. *Последовательность вещественных чисел* $(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n, \ldots)$ *называется ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если соответствующим свойством обладает множество* $\{x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_n, \ldots\}$ *всех ее членов.*

Отметим, что для последовательностей комплексных чисел имеет смысл только понятие ограниченности.

Теорема 47. (a) *Любая окрестность предела сходящейся последовательности содержит все члены последовательности, кроме конечного их числа.*

(b) *Последовательность не может иметь двух различных пределов.*

(c) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

(d) *Предел постоянной последовательности равен этой постоянной.*

◄(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$. По определению 77 имеем

$$\forall V(c) \;\; \exists n_V \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_V \;:\; x_n \in V(c)\,.$$

Отсюда видно, что *не принадлежащие окрестности* $V(c)$ члены последовательности (z_n) могут находиться только среди первых $(n_V - 1)$ членов $z_1\,, z_2\,, \ldots\,, z_{n_V-1}$, которых конечное число.

(b) Предположим противное, а именно:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c_1\,, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = c_2\,, \quad c_1 \neq c_2\,.$$

Применяя *свойство отделимости* (теорему 42), заключаем, что существуют окрестности $V(c_1)$ и $V(c_2)$ такие, что $V(c_1) \cap V(c_1) = \varnothing$. Далее, по определению предела имеем

$$\begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_1 \; : \; z_n \in V(c_1)\,, \\ \exists n_2 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_2 \; : \; z_n \in V(c_2)\,. \end{cases}$$

Отсюда при $n \geqslant \max\{n_1\,,\, n_2\}$ будет $z_n \in V(c_1) \cap V(c_2) = \varnothing$, т. е. $z_n \in \varnothing$ — противоречие.

(c) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$. Взяв $\varepsilon = 1$ и применив определение 80, имеем

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_1 \; : \; |z_n - c| \leqslant 1\,,$$

но так как $|z_n - c| \geqslant |z_n| - |c|$, то $|z_n| \leqslant 1 + |c|$ при $n \geqslant n_\varepsilon$. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; |z_n| \leqslant M$, где $M := \max\{|z_1|\,, \ldots, |z_{n_1-1}|\,, 1 + |c|\}$.

(d) Если $z_n = c$ для всех n, то $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ будет

$$|z_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon\,. \;\; \blacktriangleright$$

Арифметические операции над числовыми последовательностями определяются естественным образом[2]. Пределы получающихся таким образом последовательностей можно вычислять, пользуясь следующей теоремой.

Теорема 48. *Пусть* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *— сходящиеся числовые последовательности, и пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$. *Тогда:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot z_n) = c \cdot z$; $\lim\limits_{n\to\infty} (c + z_n) = c + z$ *для любого числа* c;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \cdot w_n = z \cdot w$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{z_n}\right) = \dfrac{1}{z}$, *если* $z \neq 0$, $z_n \neq 0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

◀ (a) Зададим число $\varepsilon > 0$. По числу $\varepsilon/2$ найдем номера $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\begin{cases} \forall n \geqslant n_1 \; : \; |z_n - z| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\,, \\ \forall n \geqslant n_2 \; : \; |w_n - w| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\,. \end{cases}$$

[2] Это означает, что сумма, разность, произведение и частное последовательностей (x_n) и (y_n) определяются как последовательности с общими членами $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$ и $\dfrac{x_n}{y_n}$ соответственно.

Полагая $n_\varepsilon := \max\{n_1\,;\ n_2\}$, при $n \geqslant n_\varepsilon$ получим

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| = |(z_n - z) + (w_n - w)| \leqslant$$
$$\leqslant |z_n - z| + |w_n - w| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

(b) Если $c = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $c \neq 0$. Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, по числу c найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы было: $\forall n \geqslant n_\varepsilon\ :\ |z_n - z| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|c|}$. При тех же значениях n имеем

$$|c \cdot z_n - c \cdot z| = |c \cdot (z_n - z)| = |c| \cdot |z_n - z| \leqslant |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon\,.$$

Второе из утверждений (b) доказывается совсем просто: если $|z_n - z| \leqslant \varepsilon$, то $|(c + z_n) - (c + z)| = |z_n - z| \leqslant \varepsilon$.

(c) Воспользуемся тождеством

$$z_n \cdot w_n - z \cdot w = (z_n - z) \cdot (w_n - w) + z \cdot (w_n - w) + w \cdot (z_n - z)\,. \tag{3.3}$$

Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\begin{cases} \forall n \geqslant n_1\ :\ |z_n - z| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,, \\ \forall n \geqslant n_2\ :\ |w_n - w| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,. \end{cases}$$

Взяв $n_\varepsilon = \max\{n_1\,;\ n_2\}$, при $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$|(z_n - z)(w_n - w)| = |z_n - z| \cdot |w_n - w| \leqslant \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon\,.$$

Применяя теперь (a) и (b) к тождеству (3.3), найдем

$$\lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} [z \cdot w + (z_n - z)(w_n - w) + z \cdot (w_n - w) + w \cdot (z_n - z)] =$$
$$= z \cdot w + \lim_{n\to\infty} (z_n - z)(w_n - w) + z \cdot \lim_{n\to\infty} (w_n - w) + w \cdot \lim_{n\to\infty} (z_n - z) = z \cdot w\,.$$

(d) Выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы было $\forall n \geqslant n_0\ :\ |z - z_n| \leqslant \dfrac{|z|}{2}$. При тех же значениях n будет

$$\frac{|z|}{2} \geqslant |z - z_n| \geqslant |z| - |z_n|\,,\ \text{откуда}\ |z_n| \geqslant \frac{|z|}{2}\,,\ \text{т. е.}\ \frac{1}{|z_n|} \leqslant \frac{2}{|z|}\,.$$

Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы было $n_\varepsilon \geqslant n_0$ и

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon \,:\, |z_n - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2} \cdot \varepsilon\,.$$

При тех же значениях n будем иметь

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \frac{|z_n - z|}{|z_n| \cdot |z|} \leqslant \frac{|z|^2}{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{|z|} \cdot \frac{2}{|z|} = \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 49. *Сходимость последовательности* $(z_n)_{n=1}^\infty$ *комплексных чисел* $z_n = x_n + iy_n$ *равносильна сходимости последовательностей* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *и* $(y_n)_{n=1}^\infty$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 82. *Числовая последовательность* $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ *называется бесконечно малой* (б. м.), *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Очевидно следующее утверждение:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \iff \alpha_n \text{— б. м. последовательность, где } \alpha_n := z_n - z\,,$$

широко используемое при вычислении пределов.

Определение 83. *Числовая последовательность* $(z_n)_{n=1}^\infty$ *называется бесконечно большой* (б. б.), *если*

$$\forall E \in \mathbb{R}_+ \ \exists n_E \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_E \,:\, |z_n| \geqslant E\,. \tag{3.4}$$

Обозначается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. Например, последовательность с общим членом $x_n = (-1)^n \cdot n$ является бесконечно большой, поскольку, полагая $n_E := [E] + 1$, при $n \geqslant n_E$ имеем

$$|x_n| = n \geqslant n_E = [E] + 1 > E.$$

Обращаясь к определению 77, видим, что бесконечно большую последовательность комплексных чисел $(z_n)_{n=1}^\infty$ можно рассматривать как сходящуюся к точке ∞ в некотором топологическом пространстве, каковым в данном случае является расширенная комплексная плоскость $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. В частности, бесконечно большую последовательность вещественных чисел $\bigl(x_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ можно рассматривать как сходящуюся к точке ∞ в *неупорядоченном* расширении $\widehat{\mathbb{R}}$ множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Частными случаями бесконечно больших последовательностей являются последовательности вещественных чисел, сходящиеся соответственно к $(+\infty)$ и к $(-\infty)$. Такого рода бесконечно большие последовательности можно определить следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall E \in \mathbb{R}_+ \ \exists n_E \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_E \ : \ x_n \leqslant -E;$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall E \in \mathbb{R}_+ \ \exists n_E \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_E \ : \ x_n \geqslant E\,.$$

Их можно рассматривать как последовательности, сходящиеся в *упорядоченном расширении*

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$$

множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Теорема 50. *Пусть $\bigl(z_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность чисел, отличных от нуля. Равносильны следующие утверждения:*

(a) *последовательность $\bigl(z_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая;*

(b) *последовательность $(1/z_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая.*

◀ (a)⇒(b) Пусть выполнено (3.4). Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, положим $E := 1/\varepsilon$. Очевидно, что из неравенства (3.4) следует неравенство $|1/z_n| \leqslant \varepsilon$.

(b)⇒(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} 1/z_n = 0$, т. е.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ |1/z_n| \leqslant \varepsilon\,.$$

Полагая $E := 1/\varepsilon$, из последнего неравенства получим неравенство (3.4). ▶

Замечание. Используя теоремы о пределах, в некоторых случаях арифметические операции над числами можно распространить и на элементы $+\infty, -\infty$ и ∞, рассматривая их как *бесконечно большие числа*[3]. Так, последняя теорема дает основание считать, что $\dfrac{1}{\infty} := 0$, $\dfrac{1}{0} := \infty$.

[3] Напомним, что на самом деле они *не являются* числами.

Кроме того, для любого числа a можно дать такие определения:

$$\begin{cases} a + \infty = \infty\,, \\ a \cdot \infty = \infty \quad \text{при} \quad a \neq 0\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

а также

$$+\infty + \infty := +\infty\ ; \quad -\infty - \infty := -\infty\,. \tag{3.6}$$

Однако выражениям типа

$$\frac{0}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad 0 \cdot \infty\,, \quad +\infty - \infty$$

(и некоторым выражениям других типов) заранее невозможно приписать определенные значения. Это так называемые *неопределенные выражения.* Их *раскрытие* (т. е. приписывание им конкретных значений) — одна из основных задач теории пределов.

Числовые последовательности иногда можно сравнивать между собой в зависимости от их асимптотики (т. е. от их свойств при $n \to \infty$). Определим здесь соответствующие понятия.

Определение 84. *Пусть* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *— числовые последовательности. Говорят, что:*

(a) *последовательность* (a_n) *имеет порядок не выше, чем* (b_n) *при* $n \to \infty$, *если выполняется условие*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \ :\ |a_n| \leqslant M \cdot |b_n|\,;$$

обозначается это так[4]: $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$;

(b) *последовательности* (a_n) *и* (b_n) *имеют одинаковый порядок при* $n \to \infty$, *если выполняются оба условия* $a_n = O(b_n)$ *и* $b_n = O(a_n)$; обозначается это так: $a_n \asymp b_n$ при $n \to \infty$;

(c) *последовательности* (a_n) *и* (b_n) *эквивалентны при* $n \to \infty$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$; обозначается это так: $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$.

(d) *последовательность* (a_n) *является бесконечно малой по сравнению с последовательностью* (b_n) *при* $n \to \infty$, *если выполняется условие*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon \ :\ |a_n| \leqslant \varepsilon \cdot |b_n|\,;$$

обозначается это так: $a_n = o(b_n)$ при $n \to \infty$.

[4]Символы O и o происходят от немецкого Ordnung — порядок.

Замечания. 1. В этих обозначениях запись $a_n = O(1)$ при $n \to \infty$ означает, что последовательность (a_n) ограничена, а запись $a_n = o(1)$ при $n \to \infty$ означает, что последовательность (a_n) бесконечно мала (в смысле определения 82).

2. Символы O и o иногда называют «символами Ландау[5]», а символы $\asymp$ и $\sim$ – «символами Харди[6]».

§ 2. Предел и неравенства. Нижний и верхний пределы. Критерий Коши. Полнота

1. Предел и неравенства

Поскольку в этом параграфе речь будет идти о неравенствах, то будем рассматривать здесь только последовательности вещественных чисел.

Теорема 51. (a) *Пусть* $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ *и* $\big(y_n\big)_{n=1}^{\infty}$ *— две последовательности, имеющие пределы в* $\widetilde{\mathbb{R}}$*, причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b\,, \quad a < b\,.$$

Тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_0 \ : \ x_n < y_n\,.$$

(b) *Пусть последовательности* $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$, $\big(y_n\big)_{n=1}^{\infty}$, $\big(z_n\big)_{n=1}^{\infty}$ *таковы, что*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a\,.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\,.$

◀ (a) Так как $a < b$, то по свойству отделимости в $\widetilde{\mathbb{R}}$ существуют окрестности $V(a)$ и $V(b)$ такие, что $V(a) \cap V(b) = \varnothing$. Более того,

---

[5] *Ландау* Эдмунд Георг Герман (1877—1938) — немецкий математик, написавший курс анализа, построенный с безупречной логической строгостью.

[6] *Харди* Готфри Харолд (1877—1947) — английский математик.

так как $a < b$, то эти окрестности можно выбрать так, чтобы $V(a)$ лежала на $\widetilde{\mathbb{R}}$ *левее* окрестности $V(b)$, т. е. так, чтобы было

$$\forall x \in V(a) \ \ \forall y \in V(b) \ : \ x < y\,.$$

Далее имеем

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_1 \ : \ x_n \in V(a)\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \iff \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_2 \ : \ y_n \in V(b)\,. \end{cases}$$

Положим $n_0 := \max\{n_1\,,\ n_2\}$. Тогда $\forall n \geqslant n_0$ будет

$$x_n \in V(a)\,,\ y_n \in V(b) \quad \text{и, значит,} \quad x_n < y_n\,.$$

(b) Зададим окрестность $V(a)$ *в виде промежутка.* Найдем номера $n_1\,,\ n_2 \in \mathbb{N}$ так, чтобы было

$$\begin{cases} \forall n \geqslant n_1 \ : \ x_n \in V(a)\,, \\ \forall n \geqslant n_2 \ : \ z_n \in V(a)\,. \end{cases}$$

Затем полагаем $n_V := \max\{n_1\,,\ n_2\}$. Тогда $\forall n \geqslant n_V$ будет

$$y_n \in [x_n\,,\ z_n] \subset V(a)\ , \quad \text{т. е.} \quad \forall n \geqslant n_V \ : \ y_n \in V(a)\,.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ▶

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *и* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n$, *то* $a \leqslant b$.

◀ Предполагая противное: $a > b$ и применяя теорему 51(a), приходим к противоречию: $x_n > y_n$, начиная с некоторого номера. ▶

Замечание. Строгое неравенство между последовательностями может в пределе переходить в равенство. Например,

$$1/n > 0\,, \quad \text{но} \quad \lim_{n\to\infty} 1/n = 0\,.$$

Теорема 52. *У любой монотонной последовательности существует предел, лежащий в* $\widetilde{\mathbb{R}}$. *Если, кроме того, она ограничена, то этот предел — число. Если же она не ограничена, то этот предел равен* $(+\infty)$ *в случае неубывания и* $(-\infty)$ *в случае невозрастания.*

◀ Предположим, что последовательность $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ *не убывает,* т. е. $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots x_n \leqslant \ldots$. Положим $a := \sup\{x_1\,,\ x_2\,, \ldots\,,\ x_n\,, \ldots\}$ и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем окрестность $V(a)$ точки a в виде промежутка, *открытого слева.* Так как $a \in V(a)$, то точка a *не является* левым концом промежутка $V(a)$. Следовательно, $\exists \widetilde{x} \in \in V(a)\ :\ \widetilde{x} < a$. Так как $V(a)$ — промежуток, то $[\widetilde{x}\,,\, a] \subset V(a)$. Поскольку

$$\widetilde{x} < a = \sup\{x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,, \ldots\}\,,$$

то $\widetilde{x}$ не является верхней границей множества $\{x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,, \ldots\}$. Поэтому

$$\exists \widetilde{n} \in \mathbb{N}\ :\ x_{\widetilde{n}} \in (\widetilde{x}\,,\ a) \subset V(a)\,.$$

Так как последовательность $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ не убывает, то

$$\forall n > \widetilde{n}\ :\ x_n \geqslant x_{\widetilde{n}} > \widetilde{x}\,, \quad \text{т. е.} \quad x_n \in V(a)\,.$$

Значит, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

И наконец, $a \in \mathbb{R}$ или $a = +\infty$ в зависимости от того, ограничена сверху последовательность $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ или не ограничена.

Случай, когда последовательность $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ не возрастает, можно рассмотреть аналогично. Читателю предлагается сделать это самостоятельно. ▶

Теорема 53 («второй замечательный предел»). *Последовательность с общим членом* $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *сходится в* $\mathbb{R}$.

◀ Положим $x'_n := (1 + 1/n)^{n+1} = (1 + 1/n) \cdot x_n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если хотя бы один из этих пределов существует. Поэтому достаточно доказать существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n$. С этой целью, используя теорему 52, достаточно установить, что последовательность $\big(x'_n\big)_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу. Последнее выполняется в силу очевидного неравенства $x'_n = (1 + 1/n)^{n+1} > 1$. Чтобы доказать ее неубывание, используем неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\cdot\alpha$ при $\alpha \geqslant -1$. Имеем

$$\frac{x'_{n-1}}{x'_n} = \frac{(1+1/(n-1))^n}{(1+1/n)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \\ = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \\ = \frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geqslant \frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) > \\ > \frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1\,. \quad (3.7)$$

Итак, $x'_{n-1}/x_n > 1$, откуда $x'_{n-1} > x'_n$. ▶

Замечания. 1. Принято обозначение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Известно, что e — число иррациональное[7], и первые его десятичные знаки таковы: $e = 2.718281828459045\ldots$. Это число имеет исключительно большое значение в анализе, так как его использование ведет к упрощению многих формул. Показательная функция $y = e^x$ называется *экспонентой* и в связи с этим обозначается иногда формулой $y = \exp(x)$. Логарифмы при основании e называются *натуральными*, а для соответствующей логарифмической функции принято обозначение $y = \ln x$.

2. Непосредственная подстановка в выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ вместо n символа ∞ приводит к выражению вида 1^∞, которое, таким образом, является неопределенным. Для раскрытия неопределенностей такого типа можно, вообще говоря, использовать теорему 53 и ее аналоги.

Теорема 54 («важные пределы»).

(a) *Если* $p\in\mathbb{R}_+$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p} = 0$.

(b) *Если* $p\in\mathbb{R}_+$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p} = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

(d) *Если* $p\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{R}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.

[7] и даже трансцендентное, т. е. не удовлетворяющее никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. Числа, не являющиеся трансцендентными, называются *алгебраическими*.

◄ (a) Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, положим $n_\varepsilon := \left[(1/\varepsilon)^{1/p}\right] + 1$. Тогда при $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$0 < \frac{1}{n^p} \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon^p} = \frac{1}{\left(\left[(1/\varepsilon)^{1/p}\right] + 1\right)^p} \leqslant \frac{1}{\left((1/\varepsilon)^{1/p}\right)^p} = \varepsilon\,.$$

(b) При $p > 1$ полагаем $x_n := \sqrt[n]{p} - 1 > 0$. Отсюда, используя неравенство Бернулли, находим: $1 + n \cdot x_n \leqslant (1 + x_n)^n = p$, и, значит, $0 < x_n < \dfrac{p-1}{n}$. Переходя здесь к пределу и используя теорему 51(b), получим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Случай $p = 1$ тривиален[8]. В случае $0 < p < 1$ требуемый результат можно получить, переходя к обратным величинам.

(c) Положим $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geqslant 0$. Отсюда, используя формулу бинома Ньютона, находим:

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + n \cdot x_n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_n^2 + \ldots > 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_n^2\,.$$

Отсюда в силу транзитивности следует неравенство

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_n^2\,,$$

из которого следует, что $0 < x_n < \sqrt{2/n}$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(d) Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы было $k > \alpha$. При $n > 2k$, используя формулу бинома Ньютона, получим

$$(1 + p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k > \binom{n}{k} p^k =$$
$$= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot p^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \cdot \frac{p^k}{k!}\,.$$

Отсюда находим $(1 + p)^n > \left(\dfrac{n}{2}\right)^k \cdot \dfrac{p^k}{k!}$. Используя это неравенство, получим

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k \cdot k! \cdot n^\alpha}{n^k \cdot p^k} = \frac{2^k \cdot k!}{p^k} \cdot \frac{1}{n^{k-\alpha}}\,.$$

[8] т. е. очевиден.

Так как $k > \alpha$, то по доказанной части этой теоремы (случай (а)) правая часть последнего неравенства при $n \to \infty$ стремится к нулю. ►

2. Нижний и верхний пределы последовательности

Не для всякой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ вещественных чисел x_n существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Определяемые здесь *нижний* и *верхний* пределы отличаются прежде всего тем, что они существуют *для любой* последовательности вещественных чисел.

Определение 85. *Пусть* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность вещественных чисел. Каждому* $n \in \mathbb{N}$ *сопоставим множество*

$$X_n := \{x_n,\, x_{n+1},\, x_{n+2}\,, \ldots\}\,,$$

и с его помощью образуем две последовательности $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *и* $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, *полагая*

$$u_n := \inf X_n\,; \qquad v_n := \sup X_n\,. \tag{3.8}$$

Нижний и верхний пределы последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *определим соответственно равенствами:*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} u_n\,; \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} v_n\,. \tag{3.9}$$

Теорема 55. *Для любой последовательности* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *вещественных чисел* x_n *оба предела* (3.8) *существуют и связаны неравенствами:*

$$-\infty \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant +\infty\,. \tag{3.10}$$

◄ Очевидно, что $X_n = \{x_n,\, x_{n+1},\, \ldots\} \neq \varnothing$ и $X_n \supset X_{n+1}$. Поэтому справедливы такие неравенства:

$$-\infty \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant +\infty\,. \tag{3.11}$$

Из этих неравенств видно, что последовательность $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ не убывает, а последовательность $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ не возрастает. Отсюда на основании теоремы 52 заключаем, что оба предела в правых частях равенств

(3.9) существуют. Переходя к пределу в неравенствах (3.11), получим неравенства (3.10). ▶

Пример. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует. Но так как для последовательности $x_n := (-1)^n$ имеем: $X_n = \{-1, +1\}$, то $u_n \equiv -1$, $v_n \equiv +1$. Значит,

$$\varliminf_{n\to\infty}(-1)^n = \lim_{n\to\infty} u_n = -1\,, \quad \varlimsup_{n\to\infty}(-1)^n = \lim_{n\to\infty} v_n = +1\,.$$

Теорема 56. *Существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ последовательности x_n равносильно совпадению ее нижнего и верхнего пределов. В этом случае*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n\,. \tag{3.12}$$

◀ Предположим, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = a$. В силу равенств (3.8) для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем: $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$. Переходя здесь к пределу и используя теорему 51(b), получим равенство (3.12).

Обратно, предположим, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Если a — число, то

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \; : \; a - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant a + \varepsilon\,.$$

Отсюда заключаем, что

$$X_n = \{x_n\,, x_{n+1}\,, \ldots\} \subset [a - \varepsilon\,;\, a + \varepsilon]\,.$$

Взяв здесь inf и sup по всем $n \geqslant n_\varepsilon$, получим

$$a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant a + \varepsilon\,.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, найдем:

$$a - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant a + \varepsilon\,,$$

т. е. $0 \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n - \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant 2\varepsilon$. Отсюда в пределе при[9] $\varepsilon \to +0$ получаем: $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

[9] Символы $\varepsilon \to \pm 0$ означают, что $\varepsilon \to 0$, сохраняя соответствующий знак.

Если $a = +\infty$, то

$$\forall E \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n_E \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_E \ : \ x_n \geqslant E,$$

или, что равносильно, $X_n \subset [E, +\infty]$, и, значит,

$$E \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant +\infty .$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получим

$$E \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant +\infty .$$

Переходя здесь к пределу при $E \to +\infty$, имеем:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = +\infty .$$

Аналогично можно рассмотреть случай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. ►

3. Критерий Коши. Полнота

Определение 86. *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется фундаментальной*[10], *если*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \ : \ |x_n - x_m| \leqslant \varepsilon . \tag{3.13}$$

Теорема 57 (критерий Коши[11]**).** *Последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится в* $\mathbb{R}$, *если и только если она фундаментальна.*

◄ Сначала предположим, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится в $\mathbb{R}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$. По определению это означает, что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ |x_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Заменяя здесь n на m, получим

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall m \geqslant n_\varepsilon \ : \ |x_m - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

[10] или *сходящейся в себе*, или *последовательностью Коши*.

[11] *Коши́* Огюстэн Луи (1789—1857) — знаменитый французский математик, один из создателей теории пределов.

Используя последние неравенства и неравенство треугольника, $\forall m, n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_n)| \leqslant |x_n - a| + |a - x_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

т. е. выполнено условие (3.13).

Теперь предположим, что выполнено условие (3.13). Полагая в нем $m = n_\varepsilon$, будем иметь $|x_n - x_{n_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$, что равносильно такому условию:

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \quad x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$$

или

$$X_n := \{x_n\,,\ x_{n+1}\,,\ \ldots\} \subset [x_{n_\varepsilon} - \varepsilon\,;\ x_{n_\varepsilon} + \varepsilon]\,,$$

и, значит,

$$x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant \inf X_n \leqslant \sup X_n \leqslant x_{n_\varepsilon} + \varepsilon\,.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим

$$x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant x_{n_\varepsilon} + \varepsilon\,. \tag{3.14}$$

Из этих неравенств легко следует, что

$$0 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n - \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to +0$, видим, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Поэтому на основании теоремы 56 заключаем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, а из неравенств (3.14) следует, что этот предел — число. ▶

Замечание. Критерий Коши выражает так называемое свойство *полноты* множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел (т. е. то же самое свойство, которое в другой форме выражает и теорема Дедекинда). Оно имеет смысл и для произвольных метрических пространств. Однако понятие полноты не имеет смысла для произвольных топологических пространств, поскольку в таких пространствах нет метрики.

Определение 87. *Последовательность* $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$ *элементов метрического пространства* $(X\,;\,d)$ *называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если выполнено условие:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \ : \ d(x_m\,;\,x_n) \leqslant \varepsilon\,.$$

Метрическое пространство $(X\,;\,d)$ *называется полным, если любая фундаментальная последовательность элементов из* X *сходится*[12] *в* X.

Теорема 58. *Множество* $\mathbb{C}$ *всех комплексных чисел является полным метрическим пространством.*

◀ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c \in \mathbb{C}$. Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, имеем:

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \; : \; \begin{cases} |z_n - c| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\,, \\ |z_n - c| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\,. \end{cases}$$

Отсюда

$$|z_n - z_m| \leqslant |z_n - c| + |z_m - c| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Обратно, предположим, что последовательность $\bigl(z_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ комплексных чисел $z_n \in \mathbb{C}$ фундаментальна, т. е. что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \; : \; |z_m - z_n| \leqslant \varepsilon\,.$$

Обозначая $z_n = x_n + iy_n$, где x_n, $y_n \in \mathbb{R}$, учитывая, что

$$|x_n| \leqslant |z_n| \quad \text{и} \quad |y_n| \leqslant |z_n|\,,$$

заключаем, что обе последовательности $\bigl(x_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ и $\bigl(y_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальные в $\mathbb{R}$. Отсюда в силу теоремы 57 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R},$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + bi \in \mathbb{C}. \quad ▶$$

§ 3. Компактность числовых множеств

Теорема 59 (лемма о вложенных отрезках). *Пусть задана бесконечная, убывающая по включению последовательность отрезков*

$$[a_1\,,\,b_1] \supset [a_2\,,\,b_2] \supset \ldots \supset [a_n\,,\,b_n] \supset \ldots\,. \tag{3.15}$$

[12] т. е. имеет предел, лежащий в X.

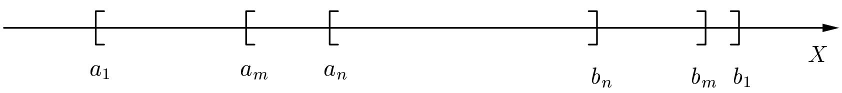

Рис. 13. Вложенные отрезки

Если $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$*, то существует единственная точка* $c \in \mathbb{R}$ *такая, что* $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n\,,\,b_n]$.

◀ Если $n > m$, то по условию (3.15) имеем: $[a_n\,,\,b_n] \subset [a_m\,,\,b_m]$, т. е. $a_m \leqslant a_n < b_n \leqslant b_m$ (см. рис. 13). Отсюда видно, что последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху числом b_m, а последовательность $\big(b_n\big)_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и ограничена снизу числом a_m. Применяя, далее, теорему 52, заключаем, что обе последовательности $\big(a_n\big)_{n=1}^{\infty}$ и $\big(b_n\big)_{n=1}^{\infty}$ сходятся, т. е.

$$\exists c',\, c'' \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c''\,. \end{cases}$$

Так как $a_n < b_n$, то в пределе получим $c' \leqslant c''$. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leqslant c' \leqslant c'' \leqslant b_n$, откуда $0 \leqslant c'' - c' \leqslant b_n - a_n$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $c' = c''$. Обозначая $c := c' = c''$, имеем

$$\exists!\, c \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \ c \in [a_n\,,\,b_n]\,,$$

или, что равносильно, $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n\,,\,b_n]$. ▶

Определение 88. *Пусть* X *— непустое подмножество топологического пространства. Семейство множеств* $\{A_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ *называется покрытием множества* X*, если* $X \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$*. Покрытие называется открытым, если все множества* A_α *— открытые. Семейство множеств* $\{B_\beta \,|\, \beta \in J\}$ *называется подпокрытием данного покрытия, если*

$$\{B_\beta \,|\, \beta \in J\} \subset \{A_\alpha \,|\, \alpha \in I\} \quad \text{и} \quad \bigcup_{\beta\in J} B_\beta \supset X.$$

Теорема 60 (лемма Гейне — Бореля[13] о покрытиях). *Любое покрытие замкнутого отрезка* $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ *открытыми интервалами содержит конечное подпокрытие.*

◀ Предположим противное, а именно: пусть существует покрытие $\{U_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ отрезка $[a\,,\,b]$ интервалами U_α, которое не содержит конечного подпокрытия. Разделим отрезок $[a\,,\,b]$ пополам. Семейство $\{U_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ является покрытием каждого из двух образовавшихся отрезков. По меньшей мере для одного из них (обозначим его $[a_1\,,\,b_1]$) данное покрытие не содержит конечного подпокрытия. Разделим теперь отрезок $[a_1\,,\,b_1]$ пополам. По меньшей мере для одного из двух образовавшихся новых отрезков (обозначим его $[a_2\,,\,b_2]$) данное покрытие не содержит конечного подпокрытия. Продолжая этот процесс неограниченно, приходим к бесконечной последовательности вложенных отрезков:

$$[a_1\,,\,b_1] \supset [a_2\,,\,b_2] \supset \ldots \supset [a_n\,,\,b_n] \supset \ldots\,, \tag{3.16}$$

для каждого из которых данное покрытие не содержит конечного подпокрытия. Так как $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$, то для последовательности (3.16) выполняются все условия теоремы 59. Применяя ее, заключаем, что

$$\exists! c \in [a\,,\,b] \ : \ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c\,.$$

Так как $c \in [a\,,\,b]$, то среди интервалов данного покрытия существует интервал U_{α_0}, содержащий точку c, т. е. $c \in U_{\alpha_0}$. Далее, по определению предела имеем

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_0 \ : \ \begin{cases} a_n \in U_{\alpha_0}\,, \\ b_n \in U_{\alpha_0}\,. \end{cases}$$

Так как U_{α_0} — интервал, то $[a_n\,,\,b_n] \subset U_{\alpha_0}$, т. е. при достаточно большом n отрезок $[a_n\,,\,b_n]$ покрывается единственным интервалом данного семейства. Получено противоречие. ▶

Определение 89. *Подмножество топологического пространства называется компактным, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.*

[13] *Гейне* Генрих Эдуард (1821—1881) — немецкий математик. *Борéль* Эмиль (1871—1956) — французский математик.

Простейшим примером компактного множества является любое конечное множество точек данного топологического пространства. Конечное подпокрытие такого множества можно построить, взяв для каждой точки данного множества содержащее ее открытое множество из данного покрытия.

Примерами компактных подмножеств числовой оси являются замкнутые отрезки $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}$. Действительно, каждое открытое подмножество числовой оси можно представить в виде дизъюнктного объединения открытых интервалов. Тем самым любое открытое покрытие представляется в виде покрытия интервалами. По лемме Гейне — Бореля каждое такое покрытие содержит конечное подпокрытие. Следующая теорема содержит простое описание всех компапктных подмножеств числовой оси.

Теорема 61 (критерий компактности в $\mathbb{R}$). *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *множество $X\subset\mathbb{R}$ — компактное*;

(b) *множество $X\subset\mathbb{R}$ — ограниченное и замкнутое.*

◀ (b)$\Rightarrow$(a). Пусть X — ограниченное и замкнутое множество, $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$ — его открытое покрытие. Так как множество X — ограниченное, то существует отрезок $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}$, такой, что $X\subset[a\,,\,b]$. Семейство открытых множеств $\{U_\alpha \mid \alpha\in I\}$ и открытое множество $\mathbb{R}\diagdown X$ образуют вместе открытое покрытие множества $\mathbb{R}$, а значит, и отрезка $[a\,,\,b]$. В силу леммы Гейне — Бореля это покрытие содержит конечное подпокрытие: $U_1\,,\,U_2\,,\ldots\,U_n\,,\ \mathbb{R}\diagdown X,$ т. е.

$$U_1\cup U_2\cup\ldots\cup U_n\cup(\mathbb{R}\diagdown X)\supset[a\,,\,b]\supset X.$$

Далее, так как $X\cap(\mathbb{R}\diagdown X)=\varnothing$, то $U_1\cup\ldots\cup U_n\supset X$, т. е. множества $U_1,\ldots,U_n$ образуют конечное подпокрытие множества X. Значит, множество X — компактное.

(a)$\Rightarrow$(b). Доказательство этого утверждения проведем методом *от противного.* Предположим, что множество X не является ограниченным. Тогда, например, бесконечное семейство интервалов $\{(-n\,;\,n)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ является его покрытием, не содержащим конечного подпокрытия. Значит, в этом случае множество X — не компактное. Предположим, что множество X не является замкнутым, т. е. не все его граничные точки ему принадлежат. Пусть $x_0\notin X$ — одна из таких граничных точек. Любая ее окрестность содержит точки множества X. Поэтому, например, семейство множеств

$\{\mathbb{R}\setminus[x_0 - 1/n\,;\,x_0 + 1/n] \;\big|\; n \in \mathbb{N}\}$ является открытым покрытием множества X, не содержащим конечного подпокрытия. Значит, и в этом случае множество X — не компактное. ▶

Определение 90. *Пусть X — топологическое пространство, а M — его бесконечное подмножество. Точка x_0 называется предельной точкой множества M, если в любой окрестности точки x_0 содержатся точки, отличные от x_0 и принадлежащие множеству M.*

При этом сама предельная точка множества M может как принадлежать, так и не принадлежать ему. Например, предельными точками интервала $(a\,,\,b)$ являются все точки отрезка $[a\,,\,b]$ и только они.

Теорема 62. *Если множество $X \subset \mathbb{R}$ — ограниченное и бесконечное, то в $\mathbb{R}$ существует предельная точка множества X.*

◀ Так как множество X — ограниченное, то существует отрезок $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}$ такой, что $X \subset [a\,,\,b]$. Разделив его пополам, заключаем, что по меньшей мере в одном из новых отрезков содержится бесконечно много точек из X. Обозначив этот отрезок через $[a_1\,,\,b_1]$, разделим его пополам. По меньшей мере в одном из новых отрезков (обозначим его $[a_2\,,\,b_2]$) содержится бесконечно много точек из X. Продолжая этот процесс неограниченно, приходим к бесконечной последовательности вложенных отрезков:

$$[a\,,\,b] \supset [a_1\,,\,b_1] \supset \ldots \supset \ldots [a_n\,,\,b_n] \supset \ldots\,,$$

для которых $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$, а все множества $X \cap [a_n\,,\,b_n]$ — бесконечные. Применяя теорему 59, заключаем, что

$$\exists! c \in \mathbb{R}\;:\; \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c\,.$$

Последнее можно переписать в таком виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;:\; [a_n\,,\,b_n] \subset (c-\varepsilon\,,\,c+\varepsilon)\,.$$

Таким образом, при всех достаточно больших значениях n имеем: $[a_n\,,\,b_n] \cap X \subset (c-\varepsilon\,,\,c+\varepsilon)$, а так как множество $[a_n\,,\,b_n] \cap X$ — бесконечное, то в нем имеются точки, отличные от c. Значит, точка c — предельная для X. ▶

Определение 91. *Пусть* $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, $x_n = f(n)$ *— последовательность элементов множества* X, *а* $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n_k = g(k)$ *— возрастающая последовательность натуральных чисел. Композиция*

$$f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow X , \quad x_{n_k} := f(g(k))$$

называется подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 63. *Если числовая последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, то у нее существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторому числу.*

◀ Ограниченность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ определялась как ограниченность множества $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ всех ее членов. Если это множество — конечное, то при пересчете

$$x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots$$

хотя бы одно из чисел должно встретиться бесконечно много раз. Обозначим это число через a, и пусть $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая последовательность номеров, таких, что $x_{n_k} = a$ для всех номеров $k \in \mathbb{N}$. По теореме о пределе постоянной имеем $\lim x_{n_k} = a$ при $k \to \infty$, т. е. подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ сходится к числу a.

Если множество $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — бесконечное, то по теореме 63 существует его предельная точка $a \in \mathbb{R}$. Поэтому для каждого $k \in \in \mathbb{N}$ существует номер $n_k \in \mathbb{N}$ такой, что последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ возрастает, и выполнены неравенства: $0 < |x_{n_k} - a| \leqslant 1/k$. Переходя в них к пределу при $k \to \infty$, получим: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. ▶

Замечание. Доказанная теорема называется теоремой Больцано — Вейерштрасса (по именам ее авторов[14]). Она допускает обобщение на случаи, для которых данная последовательность не является ограниченной. В таких случаях гарантировано существование подпоследовательностей, имеющих пределы в соответствующей расширенной системе чисел $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\widehat{\mathbb{R}}$, $\widehat{\mathbb{C}}$.

Теорема 64. *У любой последовательности вещественных чисел существует подпоследовательность, имеющая предел в* $\widehat{\mathbb{R}}$, *и существует подпоследовательность, имеющая предел в* $\widetilde{\mathbb{R}}$.

[14] *Больцано* Бернард (1781—1848) — чешский математик. *Вейерштрасс* Карл (1815—1897) — знаменитый немецкий математик.

◀ Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует номер $n_k \in \mathbb{N}$ такой, что последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ возрастает, и $|x_{n_k}| \geqslant k$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty \in \widehat{\mathbb{R}}$. Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху или снизу, то можно получить неравенства $x_{n_k} \geqslant k$ или $x_{n_k} \leqslant -k$ соответственно. Переходя в них к пределу при $k \to \infty$, получим соответственно $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty \in \widetilde{\mathbb{R}}$ или $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty \in \widetilde{\mathbb{R}}$. ▶

Задачи к главе 3

3.1. Используя логическую символику, подробно сформулировать следующие утверждения:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} x_n \neq a\,; \quad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} x_n \ \text{ не существует}.$$

3.2. Доказать расходимость последовательностей

$$(\sin n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad (\cos n)_{n=1}^{\infty}\ .$$

3.3. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + \dfrac{(-1)^n n}{n}\right|$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, a , $b > 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\big(\pi(n^2+n)\big)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2})$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + 3\sin\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}.$

3.4. Вычислить пределы:

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right);$$

$$\text{b)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\qquad (|a|<1\,,\ |b|<1);$$

$$\text{c)}\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right];$$

$$\text{d)}\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^3}{n^3}\right].$$

3.5. Найти числовые значения следующих цепных дробей:

a) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$; b) $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$;

$$\text{c)}\quad 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}}}.$$

3.6. Доказать сходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, где:

$$\text{a)}\quad x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1};$$

$$\text{b)}\quad x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right);$$

$$\text{c)}\quad x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3.7. Сформулировать и доказать критерий компактности в $\mathbb{C}$.

3.8. Доказать, что расширенные системы чисел $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\widehat{\mathbb{R}}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ являются компактными топологическими пространствами.

3.9. Привести пример последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \ : \quad x_n \leqslant \varepsilon \,,$$
и такой, что:

a) она не имеет предела;

b) она имеет предел. Может ли этот предел быть положительным?

3.10. Предположим, что последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ получена перестановкой членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Доказать, что:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

b) $\overline{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} x_n \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3.11. Привести примеры последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, причем:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$;

d) $\overline{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

3.12. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$. Верно ли, что:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$;

b) хотя бы одна из последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ или $(y_n)_{n=1}^{\infty}$

стремится к нулю?

3.13. Привести примеры таких расходящихся последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, что сходятся следующие последовательности:

a) $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$; b) $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$; c) $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

3.14. Предположим, что последовательнсть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не обращается в нуль и сходится к некоторому числу. При этих условиях:

a) исследовать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$;

b) предполагая, что этот предел — число, оценить его сверху по модулю;

c) исследовать последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ на ограниченность.

3.15. Всякая ли неограниченная последовательность является бесконечно большой? Привести примеры.

3.16. Предположим, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно большая. Верно ли, что:

a) если последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$;

b) если $\forall n \in \mathbb{N}\,:\, y_n \geqslant x_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;

c) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$?

3.17. Привести примеры последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, причем:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = -\infty$;

d) последовательность $(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

h) последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ расходится.

3.18. Привести примеры последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, причем:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$;

d) последовательность $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится.

3.19. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = +\infty\,.$$

3.20. Пусть $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — положительная последовательность, и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1 \cdot \ldots \cdot p_n} = p$.

3.21. Пусть $0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$. Доказать сходимость последовательности $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

3.22. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Доказать, что существует $\min\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

3.23. Найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; b) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$;

c) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n-1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$; d) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{n(n-1)/2}$;

e) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$; f) $x_n = n^{(-1)^n}$; g) $x_n = (-1)^n n$;

h) $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$; i) $x_n = -n\cdot(2+(-1)^n)$; j) $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$;

k) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$; l) $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$;

m) $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$; n) $x_n = ((-1)^n+1)\cdot 2^n$;

o) $x_n = n\cdot\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$; p) $x_n = \dfrac{n+1}{n+1+(-1)}$;

q) $x_n = \left(1+\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\left(1-\cos\dfrac{\pi n}{6}\right)$.

3.24. Построить последовательность, содержащую подпоследовательность, сходящуюся к любому наперед заданному неотрицательному числу. Найти ее верхний и нижний пределы.

3.25. Исследовать на сходимость последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и вычислить ее предел, если:

a) $a_{n+1} = \sin a_n$, $a_1 = \sin x$;

b) $a_n = x_{n+1} - x_n$, где $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, и $x_n = \operatorname{tg} x_n$.

c) $a_{n+1} = \dfrac{a_n + A}{4}$, $a_1 = 0$;

d) $a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n$, $a_1 = 25$;

e) $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2a_n + \dfrac{M}{a_n^2}\right)$, $a_1 = M \in \mathbb{R}_+$.

3.26. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{3^n\ln n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+2} - 2\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}}{\ln(1+n)-\ln(2+n)}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} n \arccos \dfrac{n^2}{n^2+1}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[n]{a}-1)$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cos(\pi\sqrt{4n^2+10}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi\sqrt{n^2+1}}$, где $x>0$.

Глава 4
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И ИХ СУММЫ

§ 1. Числовые ряды, их сходимость и расходимость. Некоторые операции над рядами

1. Определения и примеры

Если говорить коротко, то ряд — это обобщение понятия суммы на случай бесконечного (счетного) множества слагаемых, расположенных в определенном порядке.

Определение 92. *Пусть* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *— числовая последовательность. Соединив все ее последовательные члены знаком плюс, получим выражение вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots , \tag{4.1}$$

которое называется числовым рядом с членами $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$.

Таким образом, понятие ряда впервые появляется в анализе как *формальная сумма,* т. е. как задача суммирования бесконечного множества слагаемых (членов).

Определение 93. *Частичной суммой ряда* (4.1) *называется конечная сумма* $s_n := c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. *Отрезком ряда* (4.1) *называется всякая конечная сумма вида* $\sum\limits_{k=m}^{n} c_k$. *Остатком ряда* (4.1) *называется всякий ряд вида*

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k = c_n + c_{n+1} + \ldots .$$

Очевидно, что отрезком ряда можно считать каждый его член, а также любую его частичную сумму. Желая приписать сумму данному ряду, станем рассматривать последовательность его частичных сумм.

Определение 94. *Будем говорить, что ряд* (4.1) *имеет сумму, если существует предел последовательности* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *его частичных сумм* $s_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. *Этот предел* $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ *называется суммой ряда* (4.1). *Если сумма ряда является числом, то этот ряд называется сходящимся, а во всех остальных случаях — расходящимся.*

В случае, когда ряд (4.1) имеет сумму s, принято приписывать ему значение, равное этой сумме, т. е. писать

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots .$$

Основным вопросом теории рядов является вопрос о сходимости: *дан ряд и требуется установить, сходится он или расходится.* Если установлена его сходимость, то возникает задача вычисления его суммы s. Так как $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, то для числа s всегда есть приближенное равенство $s \approx s_1 + s_2 + \ldots + s_n$, которое тем точнее, чем больше число n.

Как видим, нахождение суммы данного ряда сводится к нахождению предела последовательности его частичных сумм. Обратно, каждой числовой последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ можно сопоставить ряд $s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots$, последовательность частичных сумм которого совпадает, очевидно, с $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. Таким образом, *проблема суммирования рядов равносильна проблеме вычисления пределов последовательностей.*

Рассмотрим несколько **примеров** исследования рядов на сходимость.

1) Пусть дан так называемый *геометрический ряд*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots , \tag{4.2}$$

т. е. формальная сумма всех членов бесконечной геометрической прогрессии $(q^n)_{n=0}^{\infty}$. Желая исследовать ряд (4.2) на сходимость, преобразуем его n-ю частичную сумму:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q},$$

если $q \neq 1$. Предполагая, что $|q| < 1$, имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. Таким образом, при $|q| < 1$ геометрический ряд (4.2) сходится, причем

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots .$$

Пусть теперь $|q| \geqslant 1$. Предполагая, что геометрический ряд (4.2) сходится к сумме s, имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} = s$, где s — число. Отсюда находим: $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$. С другой стороны, $s_{n+1} - s_n = q^n$, откуда

$$|s_{n+1} - s_n| = |q^n| = |q|^n \geqslant 1\,,$$

и значит, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |s_{n+1} - s_n| \geqslant 1$. Получено противоречие, поэтому при $|q| \geqslant 1$ ряд (4.2) расходится.

2) Рассмотрим ряд

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} + \ldots\,, \tag{4.3}$$

где $n_0 \in \mathbb{N} \sqcup \{0\}$, а $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ — последовательность целых неотрицательных чисел таких, что $0 \leqslant n_k \leqslant 9$. Сопоставим ряду (4.3) бесконечную десятичную дробь $n_0 \,.\, n_1 n_2 \,\ldots\, n_k \ldots$, представляющую вещественное число s, и покажем, что ряд (4.3) сходится к сумме s. При каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|s - n_0 \,.\, n_1 n_2 \ldots n_k| = 0\,.\,\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ нулей}} n_{k+1} \ldots \leqslant \frac{1}{10^k}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим требуемое.

3) Пусть дан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k = 1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots .$$

Желая исследовать этот ряд на сходимость, преобразуем его общий член так:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

Используя это равенство, находим

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ при } n \to \infty\,. \tag{4.4}$$

Таким образом, данный ряд сходится к сумме 1.

4) Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots .$$

Имеем:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ слагаемых}} = \sqrt{n},$$

т. е. $s_n > \sqrt{n}$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, т. е. данный ряд имеет сумму, равную $+\infty$, и, значит, расходится.

2. Некоторые операции над рядами

Теорема 65. (a) *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится к сумме* s, *а* λ — *число, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot a_k$ *сходится к сумме* $\lambda \cdot s$.

(b) *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся к суммам* s *и* σ *соответственно, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *сходится к сумме* $s + \sigma$.

◄ (a) Очевидно, что частичные суммы двух данных рядов связаны равенством $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим требуемое.

(b) Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ — частичные суммы данных рядов. Тогда $s_n + \sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $s + \sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$. ►

Для дальнейшего нам необходимо вспомнить понятие подпоследовательности.

Определение 95. *Пусть* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ — *последовательность, и пусть* $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — *бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность*

$(x_k)_{k=1}^{\infty}$ *с общим членом* $x_k := z_{n_k}$ *называется подпоследовательностью последовательности* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

Лемма 1. *Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.*

◀ Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$, и пусть $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Имеем:

$$\forall V(c) \;\; \exists n_V \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_V \; : \; z_n \in V(c)\,, \tag{4.5}$$

где $V(c)$ — окрестность точки c. Так как последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ строго возрастает, то $\lim\limits_{n\to\infty} n_k = +\infty$, и, значит,

$$\forall n_V \in \mathbb{N} \;\; \exists k_V \in \mathbb{N} \;\; \forall k > k_V \; : \; n_k > n_V\,. \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\forall V(c) \;\; \exists k_V \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geqslant k_V \; : \; z_{n_k} \in V(c)\,,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n_k} = c$. ▶

Теорема 66. *Если, не изменяя порядка следования членов сходящегося ряда* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, *произвольным образом сгруппировать его члены, образовав новый ряд* $b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_k} + \ldots$, *в котором*

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1}\,, \quad b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}\,, \; \ldots\,,$$

то новый ряд будет сходиться к той же сумме, что и исходный.

◀ Пусть $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм исходного ряда, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ — его сумма. Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда имеет вид $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. Применяя к ней лемму 1, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n_k} = s$. ▶

Замечание. Условие сходимости в теореме 66 существенно. Возьмем, например, расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Сгруппируем его члены следующим образом: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$. В результате получаем сходящийся ряд $0 = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$. Сгруппировав его члены иначе: $1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots$, снова получаем ряд, но сходящийся уже к другой сумме: $1 = 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$. Если же сгруппировать его члены по три $(1-1+1) + (-1+1-1) + \ldots$, то получим расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.

3. Критерий Коши и его следствия

Теорема 67 (критерий Коши). *Сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *равносильна выполнению следующего условия:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_\varepsilon \;\; \forall p \in \mathbb{N} \; : \; \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leqslant \varepsilon \, . \tag{4.7}$$

◀ Пусть $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм данного ряда. Согласно критерию Коши сходимости числовых последовательностей, она сходится, если и только если выполнено условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant n_\varepsilon \; : \; |s_m - s_n| \leqslant \varepsilon \, . \tag{4.8}$$

Полагая здесь $m = n + p$, получим:

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| ,$$

и, значит, условие критерия Коши для последовательностей переходит в условие (4.7). ▶

Следствие 1 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

◀ Предполагая данный ряд сходящимся и полагая в (4.7) $p = 1$, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_\varepsilon \; : \; |a_{n+1}| \leqslant \varepsilon \, ,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, или, что равносильно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ▶

Замечание. Необходимый признак сходимости ряда не является достаточным. Рассмотрим, например, так называемый *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots . \tag{4.9}$$

Для него имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но он *расходится*.

◀ Предполагая ряд (4.9) сходящимся, сгруппируем его члены следующим образом:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+ \\ +\left(\frac{1}{2^k+1}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)+\ldots. \quad (4.10)$$

Общий член этого ряда содержит 2^k слагаемых. Оценим его снизу

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k} > \\ > \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{2^k \text{ слагаемых}}=\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

По теореме 66 сгруппированный ряд (4.10) должен сходиться. Однако, согласно неравенству (4.11), все его члены ограничены снизу числом $1/2$. Отсюда в силу необходимого признака заключаем, что ряд (4.10) расходится. Значит, расходится и ряд (4.9). ▶

Следствие 2. *Сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка.*

◀ В самом деле, для достаточно больших значений $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ условие критерия Коши сходимости данного ряда и его остатка имеет один и тот же вид (4.7). ▶

§ 2. Признаки сходимости и расходимости положительных рядов

1. Критерий сходимости и признаки сравнения

Определение 96. *Числовой ряд называется:*

(a) *положительным, если все его члены неотрицательны;*

(b) *строго положительным, если все его члены положительны.*

Теорема 68. *Любой положительный ряд имеет сумму. Сходимость положительного ряда равносильна ограниченности сверху последовательности его частичных сумм.*

◀ Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — положительный ряд, т. е. $\forall k \in \mathbb{N}\;:\; a_k \geqslant 0$. Пусть $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность его частичных сумм. Так как

$$s_{n+1} = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geqslant a_1 + \ldots + a_n = s_n\,,$$

то $s_{n+1} \geqslant s_n$, т. е. последовательность $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ не убывает. Отсюда (по теореме о пределе монотонной последовательности) следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \leqslant +\infty$, причем этот предел является числом, если и только если последовательность $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху. ▶

Пример. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\,.$$

◀ Имеем

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3\,.$$

Таким образом, согласно теореме 68, данный ряд сходится. Можно показать, что его сумма равна числу e. ▶

Теорема 69 (признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — *положительные ряды, и* $\forall k \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$. *Тогда:*

(a) *если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

(b) *если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

◀ Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ — частичные суммы, а s и σ — суммы данных рядов. Так как $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$, то

$$0 \leqslant s_n \leqslant \sigma_n \leqslant \sigma\,. \tag{4.12}$$

Предполагая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится к числу σ, из (4.12) заключаем, что последовательность $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху числом σ.

Отсюда в силу теоремы 68 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Предполагая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ и переходя к пределу в неравенстве $s_n \leqslant \sigma_n$, заключаем, что $\sigma = +\infty$, т. е. что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. ▶

Теорема 70 (признак сравнения, предельная форма). *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — положительные ряды, и пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = K \in [0\,, +\infty]$. Тогда:*

(a) *если $0 \leqslant K < +\infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

(b) *если $0 < K \leqslant +\infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;*

(c) *если $0 < K < +\infty$, то данные ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

◀ (a) Задавая число $\varepsilon > 0$, найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ было $\dfrac{a_n}{b_n} \leqslant K + \varepsilon$, т. е. $a_n \leqslant (K+\varepsilon)\cdot b_n$. Применяя теорему 69(a), заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(b) Задавая $\varepsilon \in (0, K)$, найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ выполнялось неравенство:

$$\frac{a_n}{b_n} \geqslant \varepsilon\,, \quad \text{т. е.} \quad a_n \geqslant \varepsilon \cdot b_n\,.$$

Отсюда и из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Задавая произвольно $\varepsilon \in (0\,,\, K)$, найдем номер $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, начиная с которого, выполняются следующие неравенства:

$$K - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant K + \varepsilon\,,$$

равносильные неравенствам $(K-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (K+\varepsilon)\cdot b_n$. Из этих неравенств в силу теоремы 69 следует, что данные ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся. ▶

Теорема 71 (признак сравнения отношений). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— строго положительные ряды такие, что* $\forall n \in \mathbb{N}$ *выполнены неравенства* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. *Тогда:*

(a) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

(b) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

◀ Имеем:

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}\,, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}\,.$$

Перемножая эти неравенства, получим:

$$\frac{a_2 a_3 \ldots a_n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \leqslant \frac{b_2 b_3 \ldots b_n}{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}\,,$$

откуда $\dfrac{a_n}{a_1} \leqslant \dfrac{b_n}{b_1}$. Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N}\,:\ a_n \leqslant \dfrac{a_1}{b_1}\cdot b_n$. Отсюда в силу теоремы 69 получаем требуемое. ▶

2. Обобщенный гармонический ряд

Обобщенным гармоническим рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots\,, \tag{4.13}$$

где α — параметр. Исследуем его на сходимость в зависимости от величины параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 72. *Обобщенный гармонический ряд* (4.13) *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

◀ При $\alpha \leqslant 0$ имеем $\dfrac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \geqslant 1$. Отсюда видно, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 1$, т. е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда (4.13). Следовательно, он расходится.

Расходимость ряда (4.13) в случае $\alpha = 1$ была установлена выше. Если $0 < \alpha < 1$, то $n^\alpha < n$, и, значит, $\dfrac{1}{n^\alpha} > \dfrac{1}{n}$. Отсюда в силу признака сравнения 69(b) следует, что при $0 < \alpha < 1$ ряд (4.13) расходится.

Пусть теперь $\alpha > 1$ и

$$s_n(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

— n-я частичная сумма ряда (4.13). Так как последовательность $(s_n(\alpha))_{n=1}^\infty$ возрастает, то

$$s_n(\alpha) < s_{2n+1}(\alpha) = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{(2n)^\alpha} + \frac{1}{(2n+1)^\alpha}\right) < 1 + 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 + \frac{s_n(\alpha)}{2^{\alpha-1}}\,.$$

Отсюда находим

$$s_n(\alpha) < 1 + \frac{s_n(\alpha)}{2^{\alpha-1}}\,.$$

Решая это неравенство относительно $s_n(\alpha)$, имеем

$$s_n(\alpha) < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}\,,$$

т. е. частичные суммы ряда (4.13) ограничены сверху. Отсюда на основании теоремы 68 заключаем, что при $\alpha > 1$ ряд (4.13) сходится[1]. ▶

Замечание. Иногда можно исследовать на сходимость положительные ряды, сравнивая их с обобщенным гармоническим рядом (4.13), т. е. принимая его за *эталонный* ряд.

[1] Сумму ряда (4.13) принято обозначать $\zeta(\alpha)$. Функция $\alpha \longmapsto \zeta(\alpha)$ называется *дзета-функцией Римана* и широко используется в теории чисел.

Теорема 73 (степенной признак сравнения). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— положительный ряд. Если существуют положительные числа* α *и* M *такие, что*

$$a_n \sim \frac{M}{n^\alpha} \quad \text{при} \quad n \to \infty ,$$

то в случае $\alpha > 1$ *данный ряд сходится, а в случае* $\alpha \leqslant 1$ *— расходится.*

◀ Утверждение теоремы следует, например, из теоремы 70(c), где в качестве ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ надо взять ряд (4.13). ▶

Пример. Из теоремы 73 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} / n^\alpha$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

3. Признаки Коши и Даламбера

Теорема 74 (признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— положительный ряд, и пусть* $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Тогда:*

(a) *при* $0 \leqslant \alpha < 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*

(b) *при* $\alpha > 1$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится;*

(c) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $\alpha = 1$.

◀ (a) Пусть $0 \leqslant \alpha < 1$. Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\alpha + \varepsilon < 1$. Так как $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{ \sqrt[n]{a_n} ,\ \sqrt[n+1]{a_{n+1}} ,\ \ldots \}$, то

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ \sup\{ \sqrt[n]{a_n} ,\ \sqrt[n+1]{a_{n+1}} , \ldots \} \leqslant \alpha + \varepsilon .$$

Отсюда следует, что

$$\forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ a_n \leqslant (\alpha + \varepsilon)^n , \tag{4.14}$$

а так как $\alpha+\varepsilon<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha+\varepsilon)^n$ сходится. Отсюда и из (4.14) на основании признака сравнения заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

(b) Пусть теперь $\alpha>1$. Зададим $\varepsilon\in\mathbb{R}$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\alpha-\varepsilon>1$. Так как

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\sup\{\sqrt[n]{a_n},\ \sqrt[n+1]{a_{n+1}},\dots\},$$

то

$$\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geqslant n_\varepsilon\ :\ \sup\{\sqrt[n]{a_n},\ \sqrt[n+1]{a_{n+1}},\ \dots\}\geqslant\alpha-\varepsilon\,.$$

Последнее означает, что существуют сколь угодно большие номера $n\in\mathbb{N}$, такие, что $\sqrt[n]{a_n}\geqslant\alpha-\varepsilon>1$ или $a_n>1$. Отсюда видно, что невозможно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, т. е. что не выполнен необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Значит, он расходится.

(c) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится. Но в обоих случаях имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2}=1\,.\ \blacktriangleright$$

Теорема 75 (признак Даламбера[2]). *Строго положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$:

(a) *сходится, если* $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$;

(b) *расходится, если* $\exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geqslant n_0:\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant1$;

(c) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant1\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\,. \tag{4.15}$$

$\blacktriangleleft$ (a) Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$. Зададим $\varepsilon\in R_+$ так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha+\varepsilon<1$. Тогда

$$\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geqslant n_\varepsilon:\ \frac{a_{n+1}}{a_n}<\alpha+\varepsilon=\frac{(\alpha+\varepsilon)^{n+1}}{(\alpha+\varepsilon)^n}\,.$$

[2]*Даламбер (D'Alembert)* Жан Лерон (1717—1783) — французский математик.

Отсюда, учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha+\varepsilon)^n$, на основании признака сравнения отношений заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

(b) Если, начиная с некоторого номера, будет $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, то $a_{n+1} \geqslant a_n$, и равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ становится невозможным. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

(c) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится. Однако для обоих этих рядов имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1\,. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Признаки Коши и Даламбера оба основаны на сравнении с геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$. Признак Коши более универсален, так как примени́м к произвольным положительным рядам, а признак Даламбера — только к строго положительным рядам. Однако и в этом последнем случае они не равносильны. Заключить, какой из этих двух признаков сильнее, можно на основании следующей теоремы.

Теорема 76. *Для любой последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел a_n справедливы неравенства:*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\,. \tag{4.16}$$

◀ Среднее из этих неравенств очевидно, поскольку нижний предел не превосходит верхнего для любой последовательности. Левое и правое наравенства (4.16) можно доказать аналогично, поэтому докажем только правое неравенство. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, то оно очевидно. Поэтому считаем, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < +\infty$.

Возьмем произвольное число $p \in (\alpha, +\infty)$. По нему найдем номер $N \in \mathbb{N}$, начиная с которого выполняются наравенства: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < p$. Отсюда при любом $n > N$ имеем неравенства:

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < p\,,\ \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < p\,,\ \ldots\,,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} < p\,.$$

Перемножив их, найдем

$$\frac{a_n}{a_N} < p^{n-N}\,, \quad \text{откуда} \quad a_n < \frac{a_N}{p^N} \cdot p^n\,.$$

Извлекая корень степени n, получим

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_N}{p^N}} \cdot p\,.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, будем иметь

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant p\,, \quad \text{поскольку} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_N}{p^N}} = 1\,.$$

Так как $p > \alpha$ выбрано произвольно, то можно перейти к пределу при $p \to \alpha$, и мы получим $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \alpha$. ▶

Замечание. Теорема 76 показывает, что признак Коши сильнее признака Даламбера в следующем смысле. Правое неравенство (4.16) означает, что если признак Даламбера указывает на сходимость, то и признак Коши указывает на сходимость. Левое же неравенство (4.16) показывает, что если признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости (т. е. если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$), то и признак Даламбера его не дает (так как в этом случае выполняются неравенства (4.15)). И наконец, есть примеры, когда признак Коши указывает на сходимость, а признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости. Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots \tag{4.17}$$

с общим членом

$$a_k = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n & \text{при} \quad k = 2n-1\,, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^n & \text{при} \quad k = 2n\,. \end{cases}$$

Для него имеем

$$(a_k)^{1/k} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n/(2n-1)} & \text{при} \quad k = 2n-1\,, \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/2} & \text{при} \quad k = 2n\,. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\,,$$

и, значит, признак Коши указывает на сходимость. Однако признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости этого ряда, поскольку

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0\,;$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \Big/ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty\,,$$

и значит, выполняются неравенства (4.15).

4. Другие признаки

Рассмотрим сначала один весьма общий признак, открытый Куммером[3], затем в качестве его следствий получим другие признаки.

Теорема 77 (признак Куммера). *Пусть* $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ *— заданная последовательность положительных чисел такая, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ *расходится, и пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— строго положительный ряд, который хотят исследовать на сходимость. Образуем последовательность* $(\mathcal{K}_n)_{n=1}^{\infty}$ *с общим членом*

$$\mathcal{K}_n := c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$$

и предположим, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{K}_n = \mathcal{K}$. *Тогда в случае* $\mathcal{K} > 0$ *данный ряд сходится, а в случае* $\mathcal{K} < 0$ *— расходится.*

◀ Предположим сначала, что $\mathcal{K} > 0$. Возьмем произвольное $\delta \in (0\,,\mathcal{K})$ и найдем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство

$$\mathcal{K}_n = c_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta\,,$$

которое равносильно следующему:

$$c_n\cdot a_n - c_{n+1}\cdot a_{n+1} \geqslant \delta\cdot a_{n+1} > 0\,. \tag{4.18}$$

[3] *Ку́ммер* Эрнст Эдуард (1810—1893) — немецкий математик.

Отсюда, в частности, следует, что последовательность $(c_n \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$ убывает и, значит, сходится к неотрицательному числу. Ряд

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1})$$

сходится, так как его частичная сумма при $n > n_0$ равна

$$\sum_{k=n_0}^{n} (c_k a_k - c_{k+1} a_{k+1}) = c_{n_0} \cdot a_{n_0} - c_{n+1} \cdot a_{n+1} \tag{4.19}$$

и, как установлено, имеет конечный предел. Но тогда из неравенства (4.18) в силу признака сравнения следует сходимость ряда

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \delta \cdot a_{n+1}\,, \text{ а значит, и ряда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.$$

Если же $\mathcal{K} < 0$, то

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_0 \ : \ c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < 0\,,$$

т. е.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{c_n}\,,$$

или

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}\,.$$

Отсюда по признаку сравнения отношений и из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/c_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ▶

Замечание. Последовательность $(\mathcal{K}_n)_{n=1}^{\infty}$, введенная в теореме 77, называется *вариантой*[4] *Куммера.* Полагая, в частности, $c_n \equiv 1$, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/c_n$ расходится, и варианта Куммера в данном случае принимает вид $\mathcal{K}_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \mathcal{D}_n - 1$, где $\mathcal{D}_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ — *варианта Даламбера.* Отсюда видно, что признак Даламбера (в том случае, когда существует предел $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{D}_n$) является частным случаем признака Куммера.

[4] *Вариа́нта* — это малоупотребительный синоним термина *последовательность.*

Теорема 78 (признак Раабе[5]). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— строго положительный ряд. Образуем последовательность* $(\mathcal{R}_n)_{n=1}^{\infty}$ *с общим членом*

$$\mathcal{R}_n = n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right),$$

называемую вариантой Раабе, и предположим, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{R}_n = \mathcal{R}$. *Если* $\mathcal{R} > 1$, *то данный ряд сходится, если* $\mathcal{R} < 1$, *то он расходится.*

◀ Учитывая расходимость гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, положим в признаке Куммера $c_n \equiv n$. Тогда варианту Куммера можно преобразовать следующим образом:

$$\mathcal{K}_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 = \mathcal{R}_n - 1 .$$

Таким образом, варианты Раабе и Куммера связаны равенством $\mathcal{K}_n \equiv \mathcal{R}_n - 1$. Поэтому признак Раабе является следствием признака Куммера. ▶

Теорема 79 (признак Бертрана[6]). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— строго положительный ряд. Образуем последовательность* $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ *с общим членом*

$$\mathcal{B}_n = \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right],$$

называемую вариантой Бертрана, и предположим, что существует предел $\mathcal{B} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{B}_n$. *Тогда при* $\mathcal{B} > 1$ *данный ряд сходится, а при* $\mathcal{B} < 1$ *— расходится.*

◀ Можно показать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

[5] *Раабе* Йозеф Людвиг (1801—1859) — швейцарский математик.

[6] *Бертран* Жозеф Луи Франсуа (1822—1900) — французский математик.

расходится[7], поэтому в признаке Куммера имеем право положить $c_n := n \cdot \ln n$. Найдем зависимость между вариантами Куммера и Бертрана:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n = n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot \ln(n+1) = \\ = n \cdot \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \cdot \ln n + (n+1) \cdot \ln \frac{n}{n+1} = \\ = \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right] = \mathcal{B}_n - 1 + \alpha_n ,\end{aligned}$$

где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая последовательность. Таким образом, в пределе получим $\mathcal{K} = \mathcal{B} - 1$, поэтому признак Бертрана является следствием признака Куммера. ►

Теорема 80 (признак Гаусса[8]). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— строго положительный ряд. Предположим, что существуют постоянные* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ *такие, что отношение* $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ *может быть представлено в виде*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right) \ \text{при } n \to \infty . \tag{4.20}$$

Тогда при $\lambda > 1$ *данный ряд сходится, а при* $\lambda < 1$ *— расходится. Если же* $\lambda = 1$, *то данный ряд сходится при* $\mu > 1$ *и расходится при* $\mu \leqslant 1$.

◄ Переходя в (4.20) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda ,$$

поэтому при $\lambda \neq 1$ признак Гаусса является следствием признака

[7] Это утверждение является примером на применение весьма эффектного *интегрального признака сходимости рядов*, который будет установлен в главе 11, и его можно сформулировать следующим образом: *если функция* $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *не возрастает, то интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

[8] *Гаусс* Карл Фридрих (1777—1855) — выдающийся немецкий математик.

Даламбера. В случае $\lambda = 1$ из равенства (4.20) можно выразить варианту Раабе

$$\mathcal{R}_n = n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + O\left(\frac{1}{n^\nu}\right) \text{ при } n \to \infty\,. \tag{4.21}$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $\mathcal{R} = \mu$, поэтому при $\mu \neq 1$ признак Гаусса является следствием признака Раабе. И наконец, в случае $\lambda = \mu = 1$ из равенства (4.21) можно выразить варианту Бертрана

$$\mathcal{B}_n = \ln n \cdot \left[n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = O\left(\frac{\ln n}{n^\nu}\right) \text{ при } n \to \infty\,.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим $\mathcal{B} = 0 < 1$ и, значит, данный ряд расходится в силу признака Бертрана. ►

§ 3. Исследование на сходимость произвольных числовых рядов

1. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов

Здесь будут рассмотрены произвольные ряды с вещественными или комплексными членами. Как мы увидим, существуют две основные причины, от которых зависит ответ на вопрос о сходимости числовых рядов. Первая причина — «скорость» стремления к нулю последовательности членов данного ряда. Вторая причина — частичное взаимное уничтожение членов данного ряда, имеющих противоположные знаки. В зависимости от этих причин различаются типы сходимости числовых рядов: *абсолютная* и *условная*. Некоторые свойства сходящихся рядов различны в зависимости от того, какой тип сходимости имеет место для этих рядов.

Определение 97. *Числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$, *составленный из модулей членов исходного ряда.*

Так как $|c_n| = c_n \iff c_n \geqslant 0$, то для положительных рядов понятие абсолютной сходимости совпадает с понятием сходимости. Для других типов рядов эти понятия, вообще говоря, различны. Справедлива, однако, следующая теорема.

Теорема 81. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

◀ Надо показать, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Применяя критерий Коши сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$, заключаем, что должно выполняться следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \ \ \forall p \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k| \leqslant \varepsilon \, .$$

Отсюда, используя неравенство треугольника, заключаем, что при тех же значениях n и p выполняются следующие неравенства:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. условие критерия Коши выполнено и для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Значит, и он сходится. ▶

Замечание. Доказанная теорема означает, что абсолютная сходимость числовых рядов есть частный случай сходимости. Для исследования ряда[9] $\sum z_n$ на абсолютную сходимость надо взять ряд $\sum |z_n|$ и применить к нему какой-нибудь признак сходимости положительных рядов (например, один из тех, которые изложены в предыдущем параграфе). Если установлена абсолютная сходимость ряда $\sum z_n$, то тем самым установлена и его сходимость (по теореме 81). Если установлено, что ряд $\sum |z_n|$ расходится, то для исследования на сходимость ряда $\sum z_n$ требуется дополнительное исследование.

[9] Здесь и до конца этого пункта для краткости при записи рядов опущены индексы суммирования.

Теорема 82. *Абсолютная сходимость вещественного ряда $\sum a_n$ равносильна сходимости двух положительных рядов*

$$\sum \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{и} \quad \sum \frac{|a_n| - a_n}{2}. \tag{4.22}$$

◀ Если оба ряда (4.22) сходятся, то по теореме 65(b) должен сходиться такой ряд: $\sum \left(\frac{|a_n| + a_n}{2} + \frac{|a_n| - a_n}{2} \right) = \sum |a_n|$, т. е. ряд $\sum a_n$ должен сходиться абсолютно.

Обратно, если сходится ряд $\sum |a_n|$, то по теореме 81 сходится и ряд $\sum a_n$, а согласно теореме 65(b) сходятся ряды

$$\sum \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{и} \quad \sum \frac{|a_n| - a_n}{2}. \ ▶$$

Теорема 83. *Абсолютная сходимость комплексного ряда $\sum c_n$ равносильна абсолютной сходимости двух вещественных рядов $\sum \operatorname{Re} c_n$ и $\sum \operatorname{Im} c_n$.*

◀ Обозначим $c_n = a_n + ib_n$, где $a_n = \operatorname{Re} c_n$, $b_n = \operatorname{Im} c_n$. Предположим, что ряд $\sum |c_n|$ сходится. Из неравенств

$$0 \leqslant |a_n| \leqslant |c_n| \quad \text{и} \quad 0 \leqslant |b_n| \leqslant |c_n|,$$

согласно признаку сравнения, заключаем, что сходятся ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |b_n|$.

Обратно, пусть ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |b_n|$ сходятся. Так как $c_n = a_n + ib_n$, то отсюда в силу неравенства треугольника находим: $|c_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$. Опять применяя признак сравнения, заключаем, что и ряд $\sum |c_n|$ сходится. ▶

Определение 98. *Ряд $\sum c_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $\sum |c_n|$ расходится.*

Теорема 84. *Если вещественный ряд $\sum a_n$ условно сходится, то ряды $\sum \frac{|a_n| + a_n}{2}$ и $\sum \frac{|a_n| - a_n}{2}$ оба расходятся.*

◀ Дано, что ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum |a_n|$ расходится. Если предположить, что ряды $\sum \frac{|a_n| + a_n}{2}$ и $\sum \frac{|a_n| - a_n}{2}$ сходятся, то их сумма, т. е. ряд $\sum |a_n|$, тоже будет сходиться, что противоречит условию. Если ряд $\sum \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$ сходится, а ряд $\sum \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$ расходится, то ряд $\sum \left(\dfrac{|a_n| + a_n}{2} - a_n\right) = \sum \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$ должен сходиться. Получено противоречие. Аналогично можно получить противоречие, предполагая, что ряд $\sum \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$ сходится, а ряд $\sum \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$ расходится. Таким образом, остается единственная возможность, а именно та, которая указана в формулировке теоремы. ▶

2. Признак Лейбница

Определение 99. *Вещественный ряд называется знакопеременным, если не все его ненулевые члены имеют одинаковые знаки. Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если его можно представить в виде*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots \,, \tag{4.23}$$

где все a_n имеют одинаковые знаки.

Теорема 85 (признак Лейбница). *Если $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, а сумма любого его остатка удовлетворяет неравенству*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k\right| \leqslant a_n \,.$$

◀ Пусть $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — n-я частичная сумма ряда (4.23). Полагая $n = 2k+2$, имеем

$$s_{2k+2} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}) + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geqslant s_{2k} \,,$$

так как $a_{2k+1} - a_{2k+2} \geqslant 0$ в силу невозрастания последовательности $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Таким образом, имеем $(s_{2n})\uparrow$, т. е. последовательность $\left(s_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ не убывает. Записывая s_{2k+2} в другой форме, находим

$$s_{2k+2} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2k} - a_{2k+1}) - a_{2k+2} \leqslant a_1,$$

так как все вычитаемые числа неотрицательны. Итак, последовательность $\left(s_{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ не убывает и ограничена сверху, поэтому она сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \leqslant a_1$. Далее, имеем $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$s_{2[n/2]} \leqslant s_n \leqslant s_{2[n/2]+1}, \tag{4.24}$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Переходя в (4.24) к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, т. е. ряд (4.23) сходится к сумме s. Кроме того, установлено, что $s \leqslant a_1$. Применяя это неравенство к $(n-1)$-му остатку данного ряда, т. е. к знакочередующемуся ряду $\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, заключаем, что и он сходится, причем

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k\right| \leqslant a_n\,. \ \blacktriangleright$$

Замечания 1. Сумму s сходящегося ряда можно вычислить приближенно, полагая $s \approx s_{n-1}$. Чтобы оценить погрешность этого приближенного равенства, запишем сначала точное равенство $s = s_{n-1} + r_{n-1}$, где r_{n-1} — сумма $(n-1)$-го остатка. Для знакочередующихся рядов в силу признака Лейбница[10] имеем $|r_{n-1}| \leqslant a_n$, что и дает искомую оценку погрешности.

2. Признак Лейбница позволяет, исходя из известных расходящихся положительных рядов, строить знакочередующиеся ряды, сходящиеся условно. Рассмотрим, например, обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ldots\,. \tag{4.25}$$

---

[10] *Лейбниц* Готфрид Вильгельм (1646—1716) — знаменитый немецкий математик, один из создателей математического анализа.

При $\alpha > 0$ последовательность $(1/n^\alpha)_{n=1}^\infty$, монотонно убывая, стремится к нулю. Поэтому для знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots \tag{4.26}$$

при $\alpha > 0$ выполнены все условия признака Лейбница. Значит, этот ряд сходится. Учитывая, что ряд (4.25) при $\alpha > 1$ сходится, а при $0 < \alpha \leqslant 1$ он расходится, заключаем, что ряд (4.26) при $\alpha > 1$ сходится абсолютно, а при $0 < \alpha \leqslant 1$ — условно. В дальнейшем будет показано, что в частном случае $\alpha = 1$ справедливо равенство $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

3. Преобразование Абеля. Неравенства Абеля

Рассмотрим одно весьма полезное преобразование конечных сумм.

Теорема 86 (преобразование Абеля[11]). *Для любых конечных последовательностей* $(a_k)_{k=1}^n$ *и* $(b_k)_{k=1}^n$ *имеем*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k-1})B_k\,, \tag{4.27}$$

где обозначено $B_k := b_1 + b_2 + \ldots + b_k$.

◄ Полагая $B_0 := 0$, имеем

$$b_1 = B_1 - B_0\,,\ b_2 = B_2 - B_1\,,\ \ldots\,,\ b_n = B_n - B_{n-1}\,.$$

Учитывая эти равенства, преобразуем левую часть (4.27):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} =$$
$$= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=2}^{n} a_k B_{k-1} = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k =$$
$$= a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\,.$$

[11] *Áбель* Нильс Хенрик (1802—1829) — норвежский математик.

Таким образом, получили правую часть (4.27). ▶

Замечание. Отметим, что равенство (4.27) иногда называется формулой *суммирования по частям.*

Теорема 87 (неравенство Абеля). *Предположим, что*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0 \quad \text{и} \quad |B_k| = |b_1 + \ldots + b_k| \leqslant B \in \mathbb{R}_+$$

для всех $k = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \right| \leqslant B \cdot a_1 \,. \tag{4.28}$$

◀ Используя равенство (4.27)), имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \right| = \left| a_n \cdot B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant |a_n \cdot B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |(a_k - a_{k+1}) B_k| = a_n |B_n| + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| \leqslant$$

$$\leqslant a_n B + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B =$$

$$= (a_n + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} - a_n) B = B \cdot a_1 \,.$$

Отсюда непосредственно следует неравенство (4.28). ▶

Замечание. Если предположить, что выполняются неравенства

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \,,$$

то с помощью аналогичных оценок можно получить еще одно неравенство Абеля, а именно:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \right| \leqslant B \cdot (a_1 + 2a_n) \,.$$

4. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов

Приведем здесь еще два признака, с помощью которых можно исследовать ряды не только на абсолютную, но и на условную сходимость.

Теорема 88 (признак Дирихле[12]). *Пусть* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *— монотонная и стремящаяся к нулю последовательность вещественных чисел. Предположим, что последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничена. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

◀ По условию

$$\exists B \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant B.$$

Отсюда для любого отрезка ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n+p} b_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leqslant B + B = 2B\,. \quad (4.29)$$

Предполагая для определенности, что последовательность (a_n) не возрастает, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant n_\varepsilon \ : \ 0 < a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2B}\,.$$

При тех же значениях n, используя неравенства (4.28) и (4.29), находим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant a_{n+1} \cdot \sup_p \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| \leqslant a_{n+1} \cdot 2B \leqslant \frac{\varepsilon}{2B} \cdot 2B = \varepsilon\,.$$

Таким образом, для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ выполнено условие критерия Коши, значит, этот ряд сходится. ▶

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где $(a_n) \searrow 0$. Полагая $b_n := (-1)^{n-1}$, имеем: $|b_1 + \ldots + b_n| = |1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1}| \leqslant 1$. Таким

[12]*Дирихле́* Петер Густав Лежён (1805—1859) — немецкий математик.

образом, для данного ряда выполнены все условия признака Дирихле, поэтому он сходится. Иначе говоря, признак Лейбница является следствием признака Дирихле. А так как признак Лейбница может быть использован для исследования рядов на условную сходимость, то и признак Дирихле может быть использован для этой же цели.

Теорема 89 (признак Абеля). *Если последовательность* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *монотонна и ограничена, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

◀ Так как последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то она сходится: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность его частичных сумм сходится, а значит, она ограничена. Отсюда на основании признака Дирихле заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ сходится. Следовательно, должен сходиться и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\,,$$

что и требовалось. ▶

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1-2^{-n}}{\sqrt{n}}$ сходится, так как последовательность с общим членом $a_n = 1 - 2^{-n}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ сходится (по признаку Лейбница). Так как $\dfrac{1-2^{-n}}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \to \infty$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то сходимость данного ряда — условная.

§ 4. Перестановки членов ряда. Умножение рядов

1. Понятие о перестановке членов ряда

Переставляя некоторые члены данного числового ряда, будем получать, вообще говоря, новые ряды. Если перестановка касается только конечного числа членов данного ряда, то с точки зрения свойств сходимости и суммы новый ряд не отличается от исходного. Это следует из свойства коммутативности операции сложения[13], благодаря которому все члены последовательностей частичных сумм обоих рядов, имеющие достаточно большие номера, равны между собой. Если же перестановка касается бесконечного числа членов данного ряда, то ситуация усложняется и потому требует более детального изучения. Начнем с определения понятия перестановки членов ряда.

Определение 100. *Говорят, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *можно получить из ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *перестановкой членов, если существует биективное отображение* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *такое, что* $\forall k \in \mathbb{N} : b_k = a_n$, *где* $n = \varphi(k)$.

Так как для биективного отображения φ существует обратное $\varphi^{-1} = \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ будет $k = \psi(n)$ и, значит, в обозначениях из определения 100 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также можно получить из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ перестановкой членов.

2. Перестановки членов абсолютно сходящихся рядов

Теорема 90. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно к сумме* s, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *полученный из исходного ряда перестановкой членов, сходится абсолютно к той же сумме* s.

◀ Предположим сначала, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — положительный ряд. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ тоже положительный, и пусть σ — его сумма. Далее,

[13] Обращаю внимание читателя на то, что свойство коммутативности применимо только к суммам *конечного* числа слагаемых.

для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leqslant \sum_{j=1}^{N} a_j \leqslant s\,, \tag{4.30}$$

где $N := \max\{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничены сверху числом s. Значит, этот ряд сходится. Переходя в (4.30) к пределу при $n \to \infty$, получим $\sigma \leqslant s$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также можно получить из ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ перестановкой его членов, то, рассуждая аналогично, можно заключить, что $s \leqslant \sigma$. Таким образом, $\sigma = s$.

Предположим теперь, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ — вещественные и знакопеременные ряды. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то по теореме 82 положительные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$ сходятся. Введем обозначения для их сумм:

$$s_+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2}\,, \quad s_- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2}\,.$$

В этих обозначениях $s = s_+ - s_-$. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ перестановкой его членов, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|b_k| \pm b_k}{2}$ получаются той же перестановкой из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n| \pm a_n}{2}$ соответственно. Применяя доказанную часть теоремы, заключаем, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|b_k| \pm b_k}{2}$ сходятся, причем

$$s_+ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k| + b_k}{2} \qquad s_- = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k| - b_k}{2}\,.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно, а его сумма равна $s_+ - s_- = s$.

Если абсолютно сходящийся ряд $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — комплексный, то оба вещественных ряда $\operatorname{Re} s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\operatorname{Im} s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ тоже сходятся абсолютно. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ получен из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ перестановкой его членов, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_k$ получены соответственно из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ с помощью той же перестановки членов. Применяя доказанную часть теоремы, заключаем, что оба новых ряда сходятся абсолютно, причем $\operatorname{Re} s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_k$, $\operatorname{Im} s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_k$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} b_k + i \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} b_k$ сходится абсолютно к сумме $\operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s = s$. ▶

Замечание. Доказанная теорема означает, что относительно перестановок членов абсолютно сходящиеся ряды ведут себя аналогично конечным суммам: *от перестановки членов абсолютная сходимость ряда не нарушается, а его сумма не изменяется.*

3. Перестановки членов условно сходящихся рядов

Поведение условно сходящихся рядов при перестановках их членов резко отличается от поведения абсолютно сходящихся рядов при перестановках их членов и описывается следующей теоремой, восходящей к Б. Риману[14].

Теорема 91 (теорема об условно сходящихся рядах). *Пусть $\sum a_n$ — условно сходящийся ряд с вещественными членами, и пусть произвольно заданы α, $\beta \in \widetilde{\mathbb{R}}$ такие, что $\alpha \leqslant \beta$. Существует перестановка данного ряда такая, что для последовательности $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда, полученного в результате этой перестановки, справедливы следующие равенства:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n = \alpha\,, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n = \beta\,. \tag{4.31}$$

[14] *Риман* Бернгард (1826—1866) — знаменитый немецкий математик.

◀ Так как добавление или отбрасывание нулевых членов не влияет ни на сходимость ряда, ни на его сумму, то будем считать, что все члены данного ряда $\sum a_n$ отличны от нуля. Так как ряд $\sum a_n$ сходится условно, то в силу теоремы 84 оба ряда:

$$\sum \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{и} \quad \sum \frac{|a_n| - a_n}{2} \tag{4.32}$$

расходятся. Поскольку эти ряды положительные, то их расходимость означает, что суммы обоих этих рядов равны $(+\infty)$. Обозначим теперь через $(p_1\,,\ p_2\,,\ p_3\,,\ldots)$ подпоследовательность последовательности $(a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ldots)$, состоящую из всех положительных членов ряда $\sum a_n$, а через $(q_1\,,\ q_2\,,\ q_3\,,\ldots)$ — последовательность модулей отрицательных членов ряда $\sum a_n$, взятых в том же порядке, что и в данном ряде. Так как данный ряд сходится, то в силу необходимого признака сходимости при $n \to \infty$ должно быть: $a_n \to 0$ и, значит, $p_n \to 0$ и $q_n \to 0$.

Ряды (4.32) отличаются соответственно от рядов $\sum p_n$ и $\sum q_n$ только наличием нулевых членов, поэтому и эти последние ряды расходятся, причем $\sum p_n = +\infty$ и $\sum q_n = +\infty$.

Построим теперь такие возрастающие последовательности натуральных чисел $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(k_n)_{n=1}^{\infty}$, что ряд

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + \ldots + \\ + p_{m_2} - q_{k_1+1} - \ldots - q_{k_2} + \ldots\,, \tag{4.33}$$

полученный, очевидно, из ряда $\sum a_n$ перестановкой его членов, будет удовлетворять условию (4.31).

С этой целью, учитывая неравенство $\alpha \leqslant \beta$, возьмем две последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ вещественных чисел так, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \leqslant \beta_n \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha\,, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \beta\,. \end{cases}$$

Пусть $m_1\,,\ k_1$ — *наименьшие* натуральные числа такие, что

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} > \beta_1\,,\ p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} < \alpha_1\,. \tag{4.34}$$

Пусть m_2, k_2 — *наименьшие* натуральные числа такие, что

$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} > \beta_2 ,$$
$$p_1 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + \ldots + p_{m_2} - \\ - q_{k_1+1} - \ldots - q_{k_2} < \alpha_2 \quad (4.35)$$

и т. д. Этот процесс допускает неограниченное продолжение, так как $\sum p_n = +\infty$ и $\sum q_n = +\infty$. Так строится ряд (4.33) и очевидно, что он получен из ряда $\sum a_n$ перестановкой его членов.

Пусть $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда (4.33). Обозначим $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ее подпоследовательности, выделенные по следующему принципу: последним слагаемым суммы x_n пусть является p_{m_n}, а последним слагаемым суммы y_n — $(-q_{k_n})$. Из (4.34) и (4.35) видно, что

$$|x_n - \beta_n| \leqslant p_{m_n} \quad \text{и} \quad |y_n - \alpha_n| \leqslant q_{k_n} . \qquad (4.36)$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что при этом $p_{m_n} \to 0$, $q_{n_m} \to 0$, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \alpha .$$

И наконец,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma_n , \sigma_{n+1} , \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \sup_{m_\nu \geqslant n} \{x_\nu , x_{\nu+1} , \ldots\} = \\ = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = \beta ,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{\sigma_n , \sigma_{n+1} , \ldots\} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k_\mu \geqslant n} \{y_\mu , y_{\mu+1} , \ldots\} = \\ = \lim_{\mu\to\infty} y_\mu = \alpha .$$

Таким образом, равенства (4.31) выполняются. ▶

Замечания. 1. В частном случае $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$ приведенное выше доказательство можно значительно упростить, полагая $\alpha_n \equiv \beta_n \equiv \alpha = \beta$.

2. Из доказанной теоремы следует, в частности, что если наперед задать $\alpha = \beta \in \widetilde{\mathbb{R}}$, то существует перестановка любого условно сходящегося ряда такая, что ряд, полученный в результате этой перестановки, будет иметь сумму α.

4. Умножение рядов

Прежде всего необходимо ответить на вопрос: что следует понимать под произведением рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$? Пытаясь перемножать ряды аналогично тому, как перемножаются конечные суммы, приходим к равенству

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} a_m \cdot b_n \,, \tag{4.37}$$

где в правой части находится сумма бесконечного множества слагаемых вида $a_m \cdot b_n$. В связи с этим возникают такие вопросы: как упорядочивать слагаемые в правой части (4.37) и не следует ли их как-то сгруппировать, поскольку все это может влиять на сходимость суммы, а в случае сходимости на ее величину? Опуская рассмотрение этих вопросов в общем виде, рассмотрим здесь один наиболее часто встречающийся способ упорядочивания и группировки, предложенный О. Коши.

Определение 101. *Произведением (по Коши) рядов*[15] $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *называется ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *с общим членом*

$$c_k := a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 \,.$$

В развернутом виде это определение можно записать так:

$$\begin{gathered}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) = \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots \,.\end{gathered} \tag{4.38}$$

Для частичных сумм рядов из (4.38) введем следующие обозначения:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \,, \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} b_k \,, \quad \zeta_n := \sum_{k=0}^{n} c_k \,. \tag{4.39}$$

Обозначим через s, σ, ζ суммы соответствующих рядов, если эти суммы существуют. Поскольку равенство $s_n \cdot \sigma_n = \zeta_n$, вообще говоря, не выполняется, то не ясно, будет ли справедливым равенство $s \cdot \sigma = \zeta$. Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

[15] В этом контексте удобнее начинать нумерацию членов ряда с нуля, что в принципе не существенно.

Теорема 92 (Мертенс). *Предположим, что ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

сходятся к суммам s и σ соответственно, причем хотя бы один из этих рядов сходится абсолютно. Тогда произведение (по Коши) этих рядов, т. е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ из определения 101, *сходится к сумме $s \cdot \sigma$.*

◀ Будем использовать обозначения (4.39), и тогда нам предстоит доказать равенство $\zeta = s \cdot \sigma$. Для определенности предположим, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно. Полагая $\beta_n := \sigma_n - \sigma$, преобразуем частичную сумму ряда-произведения:

$$\zeta_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n_1} + \ldots + a_n b_0) =$$
$$= a_0 \sigma_n + a_1 \sigma_{n-1} + \ldots + a_n \sigma_0 =$$
$$= a_0(\sigma + \beta_n) + a_1(\sigma + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(\sigma + \beta_0) =$$
$$= s_n \sigma + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0) = s_n \sigma + \gamma_n ,$$

где обозначено $\gamma_n := a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0$. Таким образом, имеем: $\zeta_n = s_n \cdot \sigma + \gamma_n$, и для доказательства достаточно убедиться в том, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Обозначим $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\, a_k|$. Имеем $\alpha \in \mathbb{R}_+$, поскольку ряд $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} (\sigma_n - \sigma) = 0 ,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant N \ : \ |\beta_n| \leqslant \varepsilon .$$

При тех же значениях n имеем

$$|\gamma_n| = |(\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}) + (\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0)| \leqslant$$

$$\leqslant |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon \cdot \alpha \,.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим

$$0 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon \cdot \alpha \,,$$

откуда при $\varepsilon \to +0$ находим $\varlimsup\limits_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0$ и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$. ▶

Замечание. Покажем на примере, что условие абсолютной сходимости в теореме 92 существенно. С этой целью условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

возведем в квадрат

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots \,.$$

Обозначая символом c_n общий член этого ряда-произведения, имеем

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \,.$$

Так как среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, то имеем неравенство

$$(n-k+1)(k+1) \leqslant \left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 ,$$

используя которое, находим

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} = \frac{2}{n+2} \sum_{k=0}^{n} 1 =$$
$$= \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2 \quad \text{при} \quad n \to \infty \,.$$

Таким образом, для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ не выполнен необходимый признак сходимости, значит, он расходится. Иначе говоря, не выполнено заключение теоремы 92.

Задачи к главе 4

4.1. Вычислить суммы следующих рядов, предварительно исследовав их на сходимость:

a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-1}} + \ldots;$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots;$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots;$

d) $\frac{1}{4} + \frac{4}{7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots;$

e) $q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \ldots + q^n \cos n\alpha + \ldots\,, \quad |q| < 1;$

f) $q\sin\alpha + q^2\sin 2\alpha + \ldots + q^n \sin n\alpha + \ldots\,, \quad |q| < 1;$

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\,.$

4.2. Исследовать на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx\,.$

4.3. Используя критерий Коши, исследовать на сходимость следующие ряды:

a) $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots\,,$ где $|a_n| < 10\,;$

b) $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots;$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}\,;$

d) $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots;$

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots;$

f) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$

g) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}} + \ldots\,.$

4.4. Исследовать на сходимость следующие положительные ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\dfrac{4+3k}{2+4k}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n n!}{n^n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(999+n)!}{999!(2n-1)!!}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$; i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$; k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$; l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$; n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$; o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$;

p) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+n}$; q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$; r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1000^n}{n!}$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2k+1}})$; t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{2^n+3^n}$; u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,

где $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{если } n=m^2,\\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{если } n\neq m^2.\end{cases}$

4.5. Исследовать на сходимость следующие ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$;

e) $\sum\limits_{n=}^{\infty}\left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$, $(q>0)$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!e^n}{n^{n+p}}$; h) $\dfrac{a(a+d)}{b(b+d)}+\dfrac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\dots$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$; j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\dfrac{1}{n^q}$; l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n^q n!}$.

4.6. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ — сходящийся строго положительный ряд. Доказать, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

4.7. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся строго положительный ряд, а $s_n :=$ $:= a_1 + \ldots + a_n$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$ расходится.

4.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$;

c) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$;

d) $a_n = \dfrac{1}{1+z^n}$ где $z \in \mathbb{C}$.

4.9. Доказать, что из сходимости положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

4.10. Исследовать на сходимость произведение следующих двух сходящихся рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}.$$

4.11. Следующие ряды исследовать на абсолютную и условную сходимость:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin\dfrac{1}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \ln^2(n+1)}{2^n + 3^n}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot n}{5^{n/2} - n^2}$; j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n(n-1)/2}}{n\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$; l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arccos\dfrac{n-1}{n+1}$; n) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n \ln\ln n}$;

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)^{n-1}}{(2n+3)^{n+1}}$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4+5\cdot(-1)^n}{10}\right)^n$;

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)\cos 2n}{n^3 - \ln n}$;

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^3 n}{\sqrt{n}}$;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n} \sin\dfrac{\pi n}{6}$;

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2}{n^2}$;

w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-3n+1}}{(-1)^n}$.

Глава 5

ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1. Пределы функций

1. Определения и примеры

Под *функциями* будем понимать отображения числовых множеств. Точнее, *функцией вещественного переменного* будем называть всякое отображение вида

$$f \,:\, X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad X \subset \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Функцией комплексного переменного будем называть всякое отображение вида

$$f \,:\, X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \text{где} \quad X \subset \mathbb{C}. \tag{5.2}$$

Чтобы ввести понятие предела функции (5.1) или (5.2) при $x \to a$, необходимо предположить, что a — *точка прикосновения* множества X. Напомним, что a называется точкой прикосновения множества X, если для любой окрестности $U(a)$ точки a выполняется условие: $X \cap U(a) \neq \varnothing$. Здесь a — либо число, либо один из трех элементов: ∞, $+\infty$, $-\infty$. Если a не является числом, то под окрестностью точки a понимается окрестность в топологии соответствующей расширенной системы чисел.

Определение 102. *Пусть $f \,:\, X \longrightarrow Y$ — функция, a и A — точки прикосновения множеств X и Y соответственно. Говорят, что предел функции f при $x \to a$, $x \in X$ равен A, если для любой окрестности $V(a)$ точки A существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $f(U(a) \cap X) \subset V(A)$.*

Обозначается это так: $\lim\limits_{\substack{x \to a,\\ x \in X}} f(x) = A$. Если нет опасности путаницы, то применяются более краткие обозначения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ либо $\lim f(x) = A$. Используя эти обозначения, перепишем определение

102 в сокращенном виде:

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = A \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \forall V(A)\ \ \exists U(a)\ :\ f(U(a)\cap X)\subset V(A)\,. \tag{5.3}$$

Определение 102 будем называть определением «на языке окрестностей». Оно является наиболее общим, так как имеет смысл для произвольных топологических пространств X и Y. В случае, когда a и A — числа, в качестве окрестностей можно брать (открытые или замкнутые) круги (интервалы), например множества $|y-A|\leqslant\varepsilon$ и $|x-a|\leqslant\delta$, где ε и δ — положительные числа. В таких случаях получаем следующее определение, равносильное определению 102 и часто называемое определением «на языке ε-δ».

Определение 103. *Говорят, что предел функции $f\ :\ X\longrightarrow Y$ при $x\to a$ равен A, если для любого $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ существует такое $\delta\in\mathbb{R}_+$, что $\forall x\in X$ из неравенства $|x-a|\leqslant\delta$ вытекает неравенство $|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$.*

Перепишем это определение в сокращенном виде

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = A \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow}\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X:\ |x-a|\leqslant\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-A|\leqslant\varepsilon\,, \tag{5.4}$$

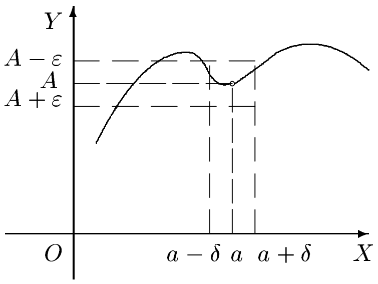

Рис. 14. К определению 103

где a, A, $\varepsilon>0$, $\delta>0$ — числа. Если f — функция вещественного переменного, то определение (5.4) можно геометрически истолковать следующим образом (см. рис. 14). Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $x\in[a-\delta\,,\ a+\delta]$, то расположенная над этим отрезком часть графика функции f должна лежать в горизонтальной полосе $A-\varepsilon\leqslant y\leqslant A+\varepsilon$.

Числовая последовательность есть частный случай функции ($X=\mathbb{N}$). Данное в главе 2 понятие предела последовательности есть частный случай понятия предела функции (при $x\to+\infty$, $x\in\mathbb{N}$).

Рассмотрим несколько **примеров** на применение определения понятия предела функции.

1) Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x\neq 0}} \left(x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

◀ Задавая $\varepsilon > 0$ и полагая $\delta = \varepsilon$, при $0 < |x| \leqslant \delta$ имеем

$$0 \leqslant \left|x\cdot\sin\frac{1}{x} - 0\right| = |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \leqslant \delta = \varepsilon\,,$$

т. е. $\left|x\cdot\sin\dfrac{1}{x} - 0\right| \leqslant \varepsilon$. ▶

2) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, где

$$f(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0\,,\\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

◀ В отличие от предыдущего примера здесь переменной x разрешено принимать значение 0, и решение предыдущего примера проходит при $|x| \leqslant \delta$. ▶

3) Пусть

$$g(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0\,,\\ 1\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ не существует.

◀ Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда по определению должно быть

$$\forall\varepsilon\in(0\,;1)\ \ \exists\delta>0\ :\ |x|\leqslant\delta \implies |g(x)-A|\leqslant\varepsilon\,. \tag{5.5}$$

Полагая в последнем неравенстве $x = 0$, получим: $|1-A| \leqslant \varepsilon$, откуда ввиду произвольной малости ε заключаем, что должно быть: $A = 1$. Но это невозможно, так как из неравенства (5.5) в пределе при $x\to 0; x\neq 0$ получаем: $A \leqslant \varepsilon < 1$. ▶

4) Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

◀ Задавая произвольно $\varepsilon\in(0\,,\,2]$, решим неравенство $|\cos x - 1| \leqslant \varepsilon$, равносильное неравенству

$$2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 \leqslant \varepsilon\,,\quad \text{откуда}\quad \left|\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon/2}\,,$$

или

$$-2\arcsin\sqrt{\varepsilon/2} \leqslant x \leqslant 2\arcsin\sqrt{\varepsilon/2}\,.$$

Итак, достаточно положить $\delta := 2\arcsin\sqrt{\varepsilon/2}$. ▶

5) Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ не существует.

◀ Предположим противное: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|} = A \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\forall\varepsilon \in (0\,,\,1)\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x \neq 0:\quad |x| \leqslant \delta \implies \left|\frac{x}{|x|} - A\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Из последнего неравенства соответственно при $x > 0$ и при $x < 0$ вытекают следующие неравенства: $|1 - A| \leqslant \varepsilon$ и $|1 + A| \leqslant \varepsilon$. Используя их, находим

$$2 = 1 + 1 = (1 - A) + (1 + A) \leqslant |1 - A| + |1 + A| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.$$

Отсюда получаем: $\varepsilon \geqslant 1$ — противоречие. ▶

2. Общие свойства пределов функций

Теорема 93. (a) *Если функция $f : X \longrightarrow Y$ — постоянная в некоторой окрестности точки a, то предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен этой постоянной.*

(b) *Если предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, то он — единственный.*

(c) *Если предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ — число, то функция f ограничена в некоторой окрестности*[1] *точки a.*

◀ (a) Пусть $f(x) \equiv A$ для всех $x \in U_0 \cap X$, где U_0 — некоторая окрестность точки a. Взяв любую окрестность $V(A)$ точки A и положив $U(a) := U_0$, получим $f(U_0) = \{A\} \subset V(A)$, т. е. выполнено условие определения 102.

(b) Предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2$, причем $A_1 \neq A_2$. По свойству отделимости существуют окрестности $V(A_1)$ и $V(A_2)$ такие, что $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$. По определению 102 существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $\forall x \in U(a) \cap X$ будет $f(x) \in V(A_1)$ и $f(x) \in V(A_2)$. Отсюда получаем противоречие $f(x) \in V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$.

(c) Функция f называется ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу) на множестве X, если соответствующим свойством ограниченности обладает множество ее значений $f(X)$.

[1] Или, как говорят, *финально ограничена* при $x \to a$.

Задавая $\varepsilon = 1$, найдем окрестность $U_1(a)$ точки a такую, что

$$\forall x \in U_1(a) \cap X \ : \ |f(x) - A| \leqslant 1\,.$$

Последнее равносильно неравенствам $A - 1 \leqslant f(x) \leqslant A + 1$. Таким образом, $\{f(x) \mid x \in U_1(a) \cap X\}$ — ограниченное множество. ►

3. Предел и неравенства

В этом пункте будем предполагать, что $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, т. е. рассматривать только вещественные функции вещественного переменного.

Теорема 94. (a) *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $A > B$ $(A < B)$, *то существует окрестность* $U(a)$ *точки* a *такая, что:*

$$\forall x \in U(a) \cap X \ : \ f(x) > B \quad (f(x) < B)\,.$$

(b) *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ *и* $f(x) \leqslant g(x)$ *в некоторой окрестности* U_0 *точки* a, *то* $A \leqslant B$.

(c) *Если в некоторой окрестности* U_0 *точки* a *выполнены неравенства* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *и если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

◄ (a) Пусть $A > B$. Выберем окрестность $V(A)$ точки A в виде промежутка, не содержащего B. Тогда $\forall y \in V(A) \ : \ y > B$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то

$$\exists U(a) \ \ \forall x \in U(a) \cap X \ \ : \ \ f(x) \in V(A)$$

и, значит, $f(x) > B$. Аналогично можно рассмотреть случай $A < B$.

(b) Предположим противное: $A > B$. По свойству отделимости существуют непересекающиеся окрестности $V(A)$ и $V(B)$ точек A и B соответственно. Взяв эти окрестности в виде промежутков и учитывая, что $V(A) \cap V(B) = \varnothing$, заключаем, что

$$\forall y_1 \in V(A) \ \ \forall y_2 \in V(B) \ : \ y_1 > y_2\,.$$

Найдем теперь окрестность $U(a) \subset U_0$ точки a такую, что

$$\forall x \in U(a) \cap X \ : \ \begin{cases} f(x) \in V(A)\,, \\ g(x) \in V(B)\,. \end{cases}$$

Отсюда следует неравенство $f(x) > g(x)$, противоречащее условию.

(c) Зададим окрестность $V(A)$ точки A в виде промежутка. По определению предела имеем:

$$\begin{cases} \exists U_1(a) \ \forall x \in U_1(a) \cap X \ : \ f(x) \in V(A)\,, \\ \exists U_2(a) \ \forall x \in U_2(a) \cap X \ : \ h(x) \in V(A)\,. \end{cases}$$

Построим окрестность $U(a)$ точки a, полагая

$$U(a) := U_0 \cap U_1(a) \cap U_2(a)\,.$$

Тогда получим

$$\forall x \in U(a) \cap X \ : \ \begin{cases} f(x) \in V(A)\,, \\ h(x) \in V(A)\,. \end{cases}$$

Поскольку $V(A)$ — промежуток, то $[f(x)\,,\, h(x)] \subset V(A)$, а так как

$$g(x) \in [f(x)\,,\, h(x)]\,,$$

то

$$\forall x \in U(a) \cap X \ : \ g(x) \in V(A)\,.$$

Таким образом, предел $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существует и равен A. ▶

Теорема 95 («первый замечательный предел»). *Справедливо следующее равенство:* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

◀ Сначала предположим, что $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. На координатной плоскости (см. рис. 15) возьмем окружность с центром в точке O радиуса 1, и пусть x — величина центрального угла $\angle AOB$ (в радианах). Плоские фигуры на рис. 15 связаны очевидными соотношениями:

$$\triangle\ OAB \subset \text{сектор } OAB \subset \triangle\ OAC\,.$$

Отсюда в силу свойства монотонности площади вытекают следующие неравенства для площадей этих фигур:

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сектора}\, OAB} < S_{\Delta OAC}\,.$$

Вычислив и удвоив эти площади, получим следующие неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,.$$

Из этих неравенств находим

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1\,. \tag{5.6}$$

Так как все три входящие в эти неравенства функции — четные, то неравенства (5.6) справедливы и при $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, из (5.6) на основании теоремы 94(c) заключаем, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,. \ \blacktriangleright$$

4. Предел и арифметические операции

Определение 104. *Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется бесконечно малой (б. м.) при $x \to a, x \in X$, если* $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = 0$.

Например, функция $f(x) \equiv x$ — бесконечно малая при $x \to 0$. Так как $0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|$, то отсюда в силу теоремы 94(c) следует, что функция $\sin$ — бесконечно малая при $x \to 0$.

Теорема 96. (a) *Если функции f и g — бесконечно малые при $x \to a$, то и функция $f + g$ — бесконечно малая при $x \to a$.*

(b) *Если функция f — бесконечно малая при $x \to a$, а функция φ — финально ограниченная при $x \to a$, то функция $\varphi \cdot f$ — бесконечно малая при $x \to a$.*

(c) *Существование конечного предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ равносильно тому, что разность $\alpha(x) := f(x) - A$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.*

◀ (a) Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем окрестность $U(a)$ точки a такую, что

$$\forall x \in X \cap U(a) \ : \ |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

При тех же значениях переменной x имеем

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x) + |g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 0$.

(b) В силу финальной ограниченности функции φ имеем

$$\exists U_0(a) \ \ \exists M \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall x \in U_0(a) \cap X \ : \ |\varphi(x)| \leqslant M\,.$$

Задавая $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, найдем такую окрестность $U(a)$, что

$$\forall x \in U(a) \cap X \ : \ |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

Положим, далее, $U_\varepsilon(a) := U_0(a) \cap X$. Тогда $\forall x \in U_\varepsilon(a)$ будем иметь

$$|\varphi(x) \cdot f(x)| = |\varphi(x)| \cdot |f(x)| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x) \cdot f(x)] = 0$.

(c) Запишем определение того, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists U(a) \ \ \forall x \in U(a) \cap X \ : \ |f(x) - A| \leqslant \varepsilon\,.$$

Однако в такой же форме можно представить и определение того, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, где $\alpha(x) = f(x) - A]$,. ▶

Теорема 97. *Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, где A и B — числа. Тогда:*

(a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = A + B$;

(b) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *если $B \neq 0$.*

◀ (a) Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\alpha(x) := f(x) - A$ — б. м. при $x \to a$. Так как $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\beta(x) := g(x) - B$ — б. м. при $x \to a$. Далее, функция

$$f(x) + g(x) - A - B = [f(x) - A] + [g(x) - B] = \alpha(x) + \beta(x)$$

— б. м. по теореме 96(a). Применяя теорему 96(c), заключаем, что

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = A + B\,.$$

(b) Имеем $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б. м. при $x \to a$. Далее, имеем

$$f(x)\cdot g(x) = [A+\alpha(x)][B+\beta(x)] = A\cdot B+[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)]\,.$$

Функция в квадратных скобках — б. м. как сумма трех б. м. при $x \to a$.

(c) Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Найдем окрестность $U_\varepsilon(a)$ такую, что

$$\forall x \in U_\varepsilon(a) \cap X \;:\; |g(x) - B| \leqslant \min\left\{\frac{|B|}{2}\,,\; \frac{|B|^2}{2}\cdot\varepsilon\right\}\,.$$

При тех же значениях переменной x имеем

$$\frac{|B|}{2} \geqslant |B - g(x)| \geqslant |B| - |g(x)|\,,$$

откуда $|g(x)| \geqslant \dfrac{|B|}{2}$. Используя полученные неравенства, находим

$$\forall x \in U_\varepsilon(a) \cap X \;:\; \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - g(x)|}{|B\cdot g(x)|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|B|^2}{2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{|B|\cdot|g(x)|} \leqslant \frac{|B|^2}{2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{2}{|B|^2} = \varepsilon\,.$$

Отсюда заключаем, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$. И наконец, используя доказанную часть теоремы, имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} = A\cdot\frac{1}{B} = \frac{A}{B}\,. \;\blacktriangleright$$

Определение 105. *Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется бесконечно большой (б. б.) при $x \to a$; $x \in X$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, т. е. если*

$$\forall E \in \mathbb{R}_+ \quad \exists U(a) \quad \forall x \in U(a) \cap X \ : \ |f(x)| \geqslant E\,. \tag{5.7}$$

Частными случаями бесконечно больших функций при $x \to a$ являются такие, для которых

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\,.$$

Сформулировать соответствующие определения в виде, аналогичном (5.7), предлагаем читателю.

Замечание. Отметим, что, вообще говоря, пределы одной и той же функции f при $x \to a$ могут быть различными при различных значениях a. Одна и та же функция f в зависимости от выбора a может иметь конечный предел, быть бесконечно малой, бесконечно большой или вовсе не иметь предела. Поэтому, *говоря о пределе функции, необходимо каждый раз указывать, к какой точке стремится ее аргумент.* Дополним теорему 97(c) следующими фактами.

Теорема 98. *Если функция f не обращается в нуль, то равносильны следующие утверждения:*

(a) *функция f — бесконечно большая при $x \to a$;*

(b) *функция $\dfrac{1}{f}$ — бесконечно малая при $x \to a$.*

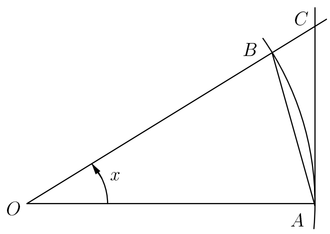

Рис. 15. К теореме 95

◀ (a)$\Rightarrow$(b) Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. По числу $E := 1/\varepsilon$ найдем окрестность $U_E(a)$ такую, что

$$\forall x \in U_E(a) \cap X \ : \ |f(x)| \geqslant E\,.$$

Отсюда находим

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} \leqslant \frac{1}{E} = \varepsilon\,,$$

т. е. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

(b)$\Rightarrow$(a) Зададим $E \in \mathbb{R}_+$. По числу $\varepsilon := 1/E$ найдем окрестность $U_\varepsilon(a)$ такую, что $\forall x \in U_\varepsilon(a) \cap X$: $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \leqslant \varepsilon$. При тех же значениях x $|f(x)| \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} = E$, т. е. f – бесконечно большая функция при $x \to a$. ▶

Замечание. Используя теорему 98, можно придать смысл, например, следующим равенствам: $\dfrac{1}{\infty} := 0$ и $\dfrac{1}{0} := \infty$. В аналогичных ситуациях выражения

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad +\infty - \infty$$

остаются неопределенными. Вычисление их конкретных числовых значений (так называемое *раскрытие неопределенностей*) — одна из основных задач теории пределов.

5. Пределы монотонных функций

Для монотонных функций имеют место факты, аналогичные теореме существования предела монотонной последовательности.

Теорема 99. *Пусть* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$ — *монотонная функция, и пусть* $a := \inf X$, $b := \sup X$ — *предельные точки множества* X. *Тогда существуют пределы* $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x>a}} f(x)$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to b,\\ x<b}} f(x)$.

◀ Рассмотрим случай неубывающей функции f и докажем существование предела $\lim f(x)$ при $x \to b,\ x < b$. Обозначим

$$B := \sup\{f(x) \mid x \in X,\ x < b\}.$$

Если функция f ограничена сверху, то B — число, в противном случае $B = +\infty$. Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to b,\\ x<b}} f(x) = B$. С этой целью возьмем окрестность $V(B)$ точки B в виде промежутка. Существует точка $x_0 \in X$, $x_0 < b$ такая, что $f(x_0) \in V(B)$. В силу неубывания функции f имеем: $x_0 < x \implies f(x_0) < f(x)$, а так как $V(B)$ — промежуток, то $[f(x_0),\ f(x)] \subset V(B)$. Взяв теперь окрестность точки b в виде $U(b) := [x_0, +\infty)$, получим $f(U(b) \cap X) \subset V(B)$, т. е. $\lim f(x) = B$ при $x \to b,\ x < b$.

Аналогично можно рассмотреть все остальные случаи. ▶

6. Предел композиции функций

Теорема 100. *Пусть заданы функции*

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{\textit{и}} \quad g : Y \longrightarrow Z\,,$$

для которых существуют пределы

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = A \quad \text{\textit{и}} \quad \lim_{\substack{y\to A,\\ y\in Y}} g(y) = B\,.$$

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} g(f(x)) = B$.

◀ Из условия теоремы следует, что a является точкой прикосновения множества X, а точка A — точкой прикосновения множества Y. Зададим произвольную окрестность $V(B)$ точки B. Так как $\lim g(y) = B$ при $y \to A$, $y \in Y$, то существует окрестность $W(A)$ точки A такая, что $g(W(A) \cap Y) \subset V(B)$. Далее, так как $\lim f(x) = A$ при $x \to a$, $x \in X$, то существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $f(U(a) \cap X) \subset W(A)$. Учитывая, что

$$f(U(a) \cap X) \subset f(X) \subset Y,$$

имеем $f(U(a) \cap X) \subset W(A) \cap Y$. Действуя на последнее соотношение отображением g, получим

$$g(f(U(a) \cap X)) \subset g(W(A) \cap Y) \subset V(B)\,,$$

т. е. $\lim\limits_{\substack{x\to a;\\ x\in X}} g(f(x)) = B$. ▶

Следствие 1. *Предположим, что:*

(a) $\lim g(x) = A$ *при* $x \to a$, $x \in X$;

(b) $E \subset X$ и a — *точка прикосновения множества* E. *Тогда* $\lim g(y) = A$ *при* $y \to a$, $y \in E$.

◀ Рассмотрим функцию $f : E \longrightarrow X$, определяемую равенством $f(x) \equiv x$ для всех $x \in E$. Для нее имеем $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in E}} f(x) = \lim\limits_{x\to a} x = a$. Применяя теорему 100, получим

$$\lim_{\substack{y\to a,\\ y\in E}} g(y) = \lim_{\substack{x\to a,\\ x\in E}} g(f(x)) = A\,. \ ▶$$

Следствие 2. *Пусть* $\lim g(x) = A$ *при* $x \to a, x \in X$, *и* a *— предельная точка множества* X. *Если* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *— любая последовательность точек* $x_n \in X$ *такая, что* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$.

◀ Достаточно применить теорему 100 к композиции отображения $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$, где $f : n \longmapsto x_n$, и отображения $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. ▶

Примеры. 1) Покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

◀ Используя монотонность степенно́й и показательной функций, имеем

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}, \tag{5.8}$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Правая часть (5.8) есть композиция функций $g(n) := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ и $f(x) := [x]$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}[x] = +\infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = e\,.$$

Аналогично можно показать, что и левая часть неравенств (5.8) стремится к e. Переходя в неравенствах (5.8) к пределу, получим требуемое. ▶

2) Покажем, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

◀ Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1} = e\,. \quad ▶$$

3) Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

◀ Имеем

$$\left(1+\frac{1}{|x|}\right)^{|x|} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1+\frac{1}{-|x|}\right)^{-|x|}.$$

Так как крайние члены этих неравенств стремятся к e, то и $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ стремится к e. ▶

4) Покажем, что $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e$.

◀ Используя пример 3), имеем:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\,. \ ▶$$

5) Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$.

◀ При $a=0$ утверждение очевидно. Если же $a\neq 0$, то имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t/a}=a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=a\,. \ ▶$$

7. Критерий Коши существования предела функции

Теорема 101 (критерий Коши). *Существование конечного предела функции $f:X\longrightarrow Y$ при $x\to a$, $x\in X$ равносильно выполнению следующего условия:*

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}\ \ \exists U(a)\ \ \forall x',x''\in U(a)\cap X\ :\ |f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon\,. \tag{5.9}$$

◀ Предположим, что предел $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in E}}f(x)=A$ — число. Задавая $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, найдем окрестность $U(a)$ точки a такую, что

$$\forall x\in U(a)\cap X\ :\ |f(x)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Отсюда, используя неравенство треугольника, $\forall x',\,x''\in U(a)\cap X$ имеем

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|A-f(x'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Таким образом, условие (5.9) выполнено.

Обратно, предположим, что условие (5.9) выполнено. Найдем убывающую последовательность окрестностей

$$U_1(a)\supset U_2(a)\supset\ldots\supset U_n(a)\supset\ldots\,,$$

такую, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x',\, x'' \in U_n(a) \cap X \ : \ |f(x') - f(x'')| \leqslant \frac{1}{n}\,.$$

Так как все множества $U_n(a) \cap X$ — не пустые, то $\exists x_n \in U_n(a) \cap X$. Значит, имеем последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Поскольку

$$\forall n, p \in \mathbb{N} \ : \ x_n\,, x_{n+p} \in U_n(a) \cap X\,,$$

то

$$|f(x_n) - f(x_{n+p})| \leqslant \frac{1}{n}\,,$$

и значит, последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная. По критерию Коши для последовательностей существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Чтобы показать, что $\lim f(x) = A$ при $x \to a$, $x \in X$, зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Найдем $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\forall n \geqslant n_\varepsilon$ было $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. При тех же значениях n и $\forall x \in U_{n_\varepsilon}(a)$ имеем

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Определение 106. *Колебанием функции $f : X \longrightarrow Y$ на множестве $A \subset X$ называется величина*

$$\omega(f; A) := \sup_{x', x'' \in A} |f(x') - f(x'')|\,.$$

Если в условии (5.9) взять супремум по всем $x', x'' \in U(a) \cap X$, то это условие перепишется в виде

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists U(a) \ : \ \omega(f; U(a) \cap X) \leqslant \varepsilon\,. \tag{5.10}$$

Из условия (5.10) в свою очередь следует условие (5.9). Таким образом, они равносильны, и потому допустима следующая равносильная формулировка теоремы.

Теорема 102 (критерий Коши). *Существование конечного предела функции $f : X \longrightarrow Y$ при $x \to a$, $x \in X$ равносильно выполнению условия* (5.10).

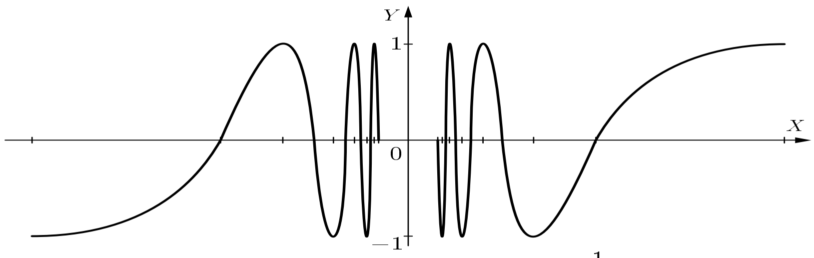

Рис. 16. График функции $y = \sin\dfrac{1}{x}$

Замечание. Критерий Коши удобно применять, например, в тех случаях, когда надо доказать отсутствие конечного предела. В качестве конкретного примера рассмотрим функцию $f(x) := \sin\dfrac{1}{x}$, график которой показан на рис. 16. Чтобы доказать, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует, достаточно убедиться в том, что колебание функции $\sin\dfrac{1}{x}$ в любой окрестности U_0 нуля ограничено снизу положительным числом. Но это последнее условие выполняется, поскольку очевидно, что $\omega\left(\sin\dfrac{1}{x}\,;\ U_0\right) = 2$.

8. Сравнение асимптотического поведения функций и вычисление некоторых пределов

Пусть f и g — функции с одной и той же областью определения X, и a — точка прикосновения множества X.

Определение 107. *Говорят, что функция f имеет порядок*

(a) *не выше порядка функции g на X, если*

$$\exists M\in\mathbb{R}_+\ \ \forall x\in X\ :\ |f(x)|\leqslant M\cdot|g(x)|\,;$$

(b) *не выше порядка функции g при $x\to a\,,\ x\in X$, если*

$$\exists U(a)\ \ \exists M\in\mathbb{R}_+\ \ \forall x\in X\cap U(a)\ :\ |f(x)|\leqslant M\cdot|g(x)|\,.$$

Обозначения: «$f(x) = O(g(x))$» в случае (a) и «$f(x) = O\,(g(x))$ при $x\to a\,,\ x\in X$» в случае (b). Например, ограниченность функции синус можно выразить условием $\sin x = O(1)$. Верно и такое утверждение:

$$\forall a \in \widetilde{\mathbb{R}} \ : \ \sin x = O(1) \text{ при } x \to a \,.$$

Определение 108. *Функция f называется бесконечно малой по сравнению с функцией g при $x \to a$, $x \in X$, если*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \ \exists U(a) \ \ \forall x \in U(a) \cap X \ : \ |f(x)| \leqslant \varepsilon \cdot |g(x)| \,.$$

Обозначение «$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, $x \in X$». В частности, запись «$f(x) = o(1)$ при $x \to a$» означает, что функция f — бесконечно малая при $x \to a$ в смысле определения 104. Очевидно также, что если $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

В теории числовых последовательностей было установлено, что

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall a \in (1, +\infty) \ : \ n^\alpha = o(a^n) \ \text{ при } \ n \to \infty \,.$$

Покажем, что при тех же значениях a и α выполняется следующее:

$$x^\alpha = o(a^x) \ \text{ при } \ x \to +\infty \,.$$

(В этом равенстве $x \in \mathbb{R}$, в отличие от предыдущего, где $n \in \mathbb{N}$.)

◀ Чтобы убедиться в этом, оценим сверху и снизу отношение $x^\alpha \big/ a^x$:

$$\frac{n^\alpha}{a^{n+1}} \leqslant \frac{x^\alpha}{a^x} \leqslant \frac{(n+1)^\alpha}{a^n} \,, \tag{5.11}$$

где $n = [x]$ — целая часть числа x. Очевидно, что

$$n \to \infty \iff x \to +\infty \,.$$

Переходя в неравенствах (5.11) к пределу при $x \to +\infty$, получим $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$, что равносильно доказываемому соотношению. ▶

Покажем, что при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ выполняется следующее равенство:

$$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta) \text{ при } x \to +\infty \,,$$

т. е. *любая положительная степень логарифмической функции бесконечно малá по сравнению со степеннóй функцией x^β, $\beta > 0$, при $x \to +\infty$.*

◀ Имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{(e^t)^\beta} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{a^t} = 0 \,,$$

где $a := e^\beta > 1$, так как $\beta > 0$. ▶

Определение 109. *Говорят, что функции f и g имеют одинаковый порядок при $x \to a$, $x \in X$, если выполняются оба соотношения $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to a$, $x \in X$.*

Обозначается это так: $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to a$, $x \in X$. Например, если $a \neq 0$ и $M \neq 0$, то $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c} \asymp \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Определение 110. *Функции f и g называются эквивалентными при $x \to a$, $x \in X$, если* $\lim\limits_{\substack{x \to a, \\ x \in X}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Обозначается это так: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, $x \in X$.

Приведем примеры эквивалентных функций:

$\sin x \sim x$ при $x \to 0\,, x \neq 0\,,$ так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\,;$

$\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \sim e$ при $x \to \infty\,,$ так как $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e\,;$

$(1+t)^{1/t} \sim e$ при $t \to 0,\ t \neq 0\,,$ так как $\lim\limits_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e\,.$

Если $\begin{cases} M \neq 0, \\ a \neq 0, \end{cases}$ то $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c} \sim \dfrac{M}{a} \cdot \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty\,.$

Теорема 103. *Справедливы следующие соотношения:*

(a) $\ln(1+x) \sim x$ *при* $x \to 0\,;$

(b) $e^x - 1 \sim x$ *при* $x \to 0\,;$

(c) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ *при* $x \to 0\,,$ *если* $\alpha \neq 0\,.$

◀ (a) Производя замену $(1+x)^{1/x} = t$, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln\left((1+x)^{1/x}\right) = \lim_{t \to e} \ln t = 1\,.$$

Последнее равенство можно доказать следующим образом. Так как функция логарифм — возрастающая, то существуют пределы:

$$\lim_{\substack{t \to e, \\ t < e}} \ln t = \lambda \leqslant 1 \leqslant \mu = \lim_{\substack{t \to e, \\ t > e}} \ln t\,.$$

Если предположить, что $\lambda < \mu$, то логарифмическая функция нигде не будет принимать значений, принадлежащих интервалу $(\lambda\,,\,\mu)$. Значит, обратная к ней функция (экспонента) не будет определена в точках этого интервала. Последнее противоречит тому факту, что экспонента определена всюду на $\mathbb{R}$. Значит, $\lambda = \mu = 1$.

(b) Производя замену $e^x - 1 = t \iff x = \ln(1+t)$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$$

согласно пункту (a).

(c) Производя очевидные замены, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\cdot\ln(1+x)} - 1}{\alpha\cdot\ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha\cdot\ln(1+x)}{x} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\alpha\cdot\ln(1+x)}{x} = \alpha\,,$$

т. е.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, что равносильно доказываемому равенству. ▶

§ 2. Непрерывные и разрывные функции. Локальные свойства непрерывных функций

1. Понятие непрерывной и разрывной функций в точке

Понятие непрерывной функции можно получить из интуитивного представления об ее графике как о сплошной (непрерывной) линии. Рассмотрим графики функций f_1 и f_2, изображенные на рис. 17. Отметим различие между этими графиками: график функции f_1 представляет собой одну сплошную линию, а график функции f_2 состоит из двух отдельно лежащих сплошных линий и точки с координатами $(a\,,\,f_2(a))$. Ввиду такого различия между графиками функцию f_1

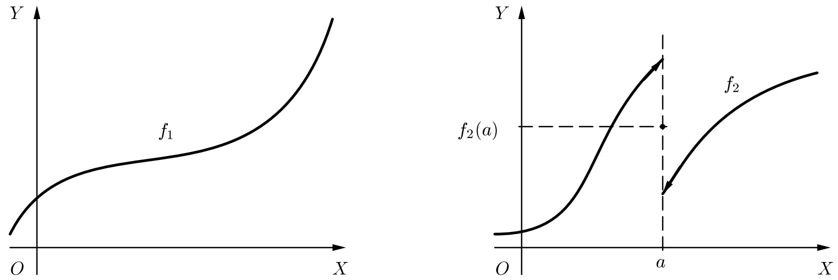

Рис. 17. Графики непрерывной и разрывной функций

естественно считать всюду непрерывной, а функцию f_2 — разрывной в точке a. Чтобы перейти к точным определениям понятия непрерывности функции в точке, обратим внимание читателя на то, что колебание функции f_1 в окрестности любой точки можно сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно малой окрестности этой точки, а колебание функции f_2 в любой окрестности точки a ограничено снизу положительным числом

$$\Big|\lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} f_2(x) - \lim_{\substack{x\to a,\\ x<a}} f_2(x)\Big|\,.$$

Вспоминая критерий Коши существования предела функции, заключаем, что предел $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ существует, а предел $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ не существует. Таким образом, понятие непрерывности (и разрывности) функции в точке может быть выражено через понятие предела функции в точке.

Определение 111. *Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если существует предел $\lim f(x)$ при $x \to a, x \in X$. Она называется разрывной в точке $a \in X$, если этот предел не существует.*

Теорема 104. *Если функция $f : X \longrightarrow Y$ непрерывна в точке $a \in X$, то $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = f(a)$, или, что равносильно,*

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = f\big(\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} x\big)\,.$$

◀ Предположим противное: $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = A \neq f(a)$. В силу свойства отделимости существует окрестность $V(A)$ точки A такая, что $f(a) \notin V(A)$. Далее, так как $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = A$, то

$$\exists U(a) : f(U(a) \cap X) \subset V(A).$$

Так как $a \in U(a) \cap X$, то $f(a) \in f(U(a) \cap X) \subset V(A)$, откуда $f(a) \in V(A)$ — противоречие. И наконец, так как $a = \lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} x$, то равенство $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = f(a)$ равносильно равенству

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} f(x) = f\big(\lim_{\substack{x\to a,\\ x\in X}} x\big). \ ▶$$

Теорема 105. *Если $a \in X$ — изолированная точка множества X, то любая функция $f : X \longrightarrow Y$ непрерывна в точке a.*

◀ Так как $a \in X$ — изолированная точка, то существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $U(a) \cap X = \{a\}$. Взяв любую окрестность $V(f(a))$ точки $f(a)$, имеем

$$f(U(a) \cap X) = f(\{a\}) = \{f(a)\} \subset V(f(a)),$$

т. е. существует предел $\lim f(x) = f(a)$ при $x \to a$, $x \in X$. ▶

Замечания. 1. На основании теоремы 105 можно утверждать, например, что любая последовательность $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в каждой точке $n \in \mathbb{N}$, поскольку все точки множества $\mathbb{N}$ — изолированные.

2. Теорема 105 показывает, что случай, когда $a \in X$ — изолированная точка, не представляет интереса с точки зрения непрерывности, так как в достаточно малой окрестности изолированной точки непрерывные функции ничем не отличаются от произвольных функций.

Если же ограничиваться случаем, когда точка a — предельная точка множества X, то определение непрерывности можно представить в следующем равносильном виде.

Определение 112. *Функция $f : X \longrightarrow Y$ называется непрерывной в предельной точке $a \in X$, если*

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\neq a}} f(x) = f(a). \tag{5.12}$$

Простое обоснование равносильности определений 111 и 112 опускаем. Часто используется равносильное им определение непрерывности, использующее понятие *приращения*.

Определение 113. *Приращением аргумента* x *в точке* a *называется разность* $x - a$.

Приведем часто используемые обозначения для приращения аргумента:

$$h = \Delta x := x - a\,.$$

Определение 114. *Приращением функции* f *в точке* a, *соответствующим приращению аргумента, равному* h, *называют разность* $f(a+h) - f(a)$.

Обозначения:

$$\Delta_h f(a) := f(a+h) - f(a) \quad \text{или} \quad \Delta f(a) = f(x) - f(a)\,,$$

где $x = a + \Delta x$. Очевидно, что равенство (5.12) равносильно такому:

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x\neq a}} [f(x) - f(a)] = 0\,,$$

и в соответствии с этим определение 112 равносильно следующему определению.

Определение 115. *Функция* $f : X \longrightarrow Y$ *считается непрерывной в точке* $a \in X$, *если бесконечно малому приращению аргумента* x *в точке* a *соответствует бесконечно малое приращение функции.*

2. Точки разрыва и их классификация

Согласно определению 111, функция $f : X \longrightarrow Y$ разрывна в точке $a \in X$, если *не существует* предел $\lim f(x)$ при $x \to a$, $x \in X$. Это, однако, не исключает возможности существования предела $\lim f(x)$ при $x \to a$, $x \in E$, для некоторых подмножеств $E \subset X$. Например, разрывная функция может быть *непрерывной слева* или *непрерывной справа* в зависимости от выполнения одного из следующих равенств:

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ x<a}} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to a,\\ x>a}} f(x) = f(a)\,. \tag{5.13}$$

Возможность выделения таких подмножеств $E \subset X$, для которых существует предел $\lim f(x)$ при $x \to a$, $x \in E$, может служить основой для классификации точек разрыва. Ниже приводится первоначальная, самая грубая классификация точек разрыва вещественных функций вещественного переменного.

1) **Точкой устранимого разрыва** функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется такая точка $a \in X$, что существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to a, \\ x \neq a}} f(x) = A$, но $A \neq f(a)$. Вводя новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{если } x \neq a\,, \\ A\,, & \text{если } x = a\,, \end{cases}$$

получим $\lim\limits_{\substack{x \to a, \\ x \neq a}} f_1(x) = A = f_1(a)$, т. е. новая функция f_1 оказалась непрерывной в точке a. Таким образом, произведено *устранение разрыва* путем надлежащего изменения значения функции f в точке a.

Например, точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}\,, & \text{если } x \neq 0\,, \\ 0\,, & \text{если } x = 0\,, \end{cases}$$

так как $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ x \neq 0}} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$. В этом примере для устранения разрыва достаточно положить (см. рис. 18)

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}\,, & \text{если } \ x \neq 0\,, \\ 1\,, & \text{если } \ x = 0\,. \end{cases}$$

2) **Точкой разрыва 1-го рода** функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется точка $a \in X$ такая, что существуют конечные пределы

$$f(a-0) := \lim_{\substack{x \to a, \\ x < a}} f(x) \quad \text{(предел слева)}$$

и

$$f(a+0) := \lim_{\substack{x \to a, \\ x > a}} f(x) \quad \text{(предел справа)},$$

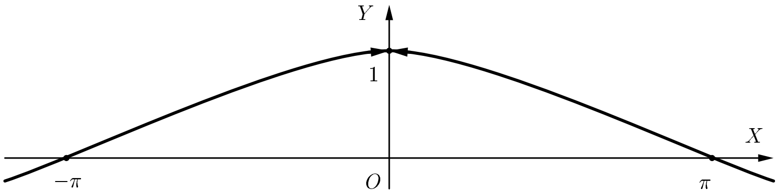

Рис. 18. Фрагмент графика функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$

причем $f(a-0) \neq f(a+0)$. Если, в частности, $f(a-0) = f(a)$, то функция f называется *непрерывной слева*; если же $f(a+0) = f(a)$, то функция f называется *непрерывной справа.* На рис. 19 показаны графики функций, имеющих точки разрыва 1-го рода.

3) **Точкой разрыва 2-го рода** функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется любая ее точка разрыва $a \in X$, которая не является ни точкой устранимого разрыва, ни точкой разрыва 1-го рода. Для таких точек разрыва по меньшей мере один из двух пределов

$$\lim_{\substack{x \to a,\\ x<a}} f(x)\ , \quad \lim_{\substack{x \to a,\\ x>a}} f(x) \tag{5.14}$$

не существует или равен бесконечности. Ниже приводится несколько примеров функций, имеющих точки разрыва 2-го рода.

В качестве первого примера рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0\,, \\ A\,, & x = 0 \end{cases}$$

с точкой разрыва $x = 0$. Для нее оба предела (5.14) $\lim\limits_{x \to -0} \sin \dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x \to +0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существуют (см. рис. 16).

Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

имеем $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$ (см. рис. 20).

Для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

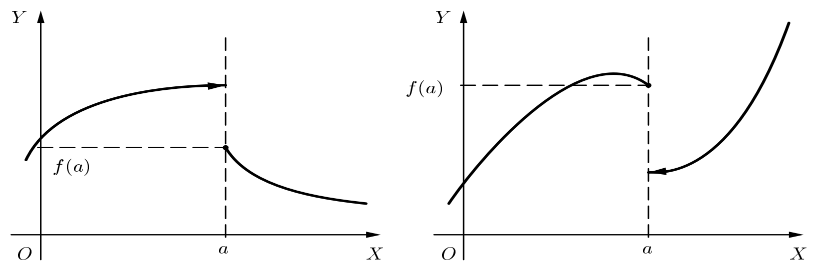

Рис. 19. Разрывные функции, непрерывные в точке a с одной стороны

имеем $\lim\limits_{x\to-0} e^{1/x} = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$, $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$ (см. рис. 21).

3. Функция Дирихле и функция Римана

1) Ф у н к ц и я Д и р и х л е $\mathcal{D} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{D}(x) := \begin{cases} 1\,, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0\,, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

В силу свойства плотности множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ в любой окрестности любого числа $a \in \mathbb{R}$ имеются как рациональные, так и иррациональные точки. Поэтому колебание функции Дирихле в любой окрестности $U(a)$ любой точки $a \in \mathbb{R}$ равно 1, т. е.

$$\omega(\mathcal{D};\, U(a)) = 1\,.$$

Отсюда, применяя критерий Коши, заключаем, что предел $\lim\limits_{x\to a} \mathcal{D}(x)$ не существует *ни при каком* $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, *функция Дирихле разрывна во всех точках числовой оси.*

2) Ф у н к ц и я Р и м а н а $\mathcal{R} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\mathcal{R}(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ \dfrac{1}{q}\,, & \text{если } x = \dfrac{p}{q} \text{ (несократимая дробь).} \end{cases}$$

Применяя свойство плотности, заключаем, что $\omega(\mathcal{R}; U(\frac{p}{q})) \geqslant 1/q$ и, значит, в силу критерия Коши предел $\lim\limits_{x\to p/q} \mathcal{R}(x)$ не существует. Таким образом, *функция Римана разрывна во всех рациональных точках.*

Пусть теперь точка a — иррациональная. Задавая $\varepsilon \in (0\,,1)$, найдем такое $q_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что $q_\varepsilon \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Затем введем в рассмотрение множество

$$\mathbb{R}\setminus \left\{ \frac{n}{q_\varepsilon!} \;\middle|\; n\in\mathbb{Z} \right\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{n}{q_\varepsilon!}\;;\;\frac{n+1}{q_\varepsilon!} \right).$$

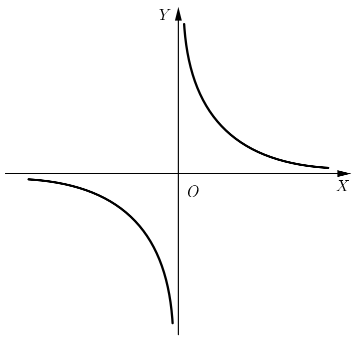

Рис. 20. График функции $y = 1/x$

Обозначим через $U_\varepsilon(a)$ тот из интервалов

$$\left(\frac{n}{q_\varepsilon!}\;;\;\frac{n+1}{q_\varepsilon!} \right),$$

которому принадлежит точка a, и пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Покажем, что тогда $\mathcal{R}(x) < \varepsilon$. Действительно, если число x — иррациональное, то $\mathcal{R}(x) = 0 < \varepsilon$. Если же число x — рациональное, то, представляя его в виде несократимой дроби $x = \dfrac{p}{q}$, имеем $q > q_\varepsilon$. Действительно, предполагая противное $q \leqslant q_\varepsilon$, заключаем, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ должно иметь место равенство $x = \dfrac{p}{q} = \dfrac{n}{q_\varepsilon!}$, из которого следует, что $x \notin U_\varepsilon(a)$, и мы пришли к противоречию. И наконец, имеем

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_\varepsilon} \leqslant \varepsilon\,.$$

Последнее означает, что *функция Римана непрерывна во всех иррациональных точках.*

4. Локальные свойства непрерывных функций

Определение 116. *Локальными (местными) свойствами функции $f : X \longrightarrow Y$ называются такие свойства, которые зави-*

сят только от значений функции f в сколь угодно малой окрестности данной точки $a \in X$.

Глобальными свойствами функции $f : X \longrightarrow Y$ называются такие ее свойства, которые зависят от значений этой функции во всей области ее определения X.

Например, свойство функции быть непрерывной в одной точке — локальное, а свойство функции быть непрерывной во всех точках — глобальное. Свойство функции быть ограниченной — глобальное, а свойство функции быть *финально* ограниченной (т. е. ограниченной при $x \to a$) — локальное.

Теорема 106. *Если функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in X$, то*:

(a) *она финально ограничена при $x \to a$;*

(b) *если $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $\forall x \in U(a) \cap X$ значения $f(x)$ имеют тот же знак, что и $f(a)$.*

◄ (a) Записывая условие непрерывности в виде

$$\lim_{\substack{x \to a, \\ x \in X}} f(x) = f(a)\,,$$

используем теорему о финальной ограниченности функции, имеющей конечный предел.

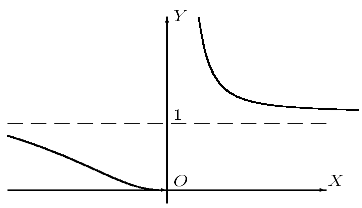

Рис. 21. График функции $y = \exp 1/x$

(b) Взяв окрестность $V(f(a))$ в виде интервала, не содержащего точку 0, достаточно найти такую окрестность $U(a)$, для которой выполняется включение

$$f(U(a) \cap X) \subset V(f(a))\,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 107. *Если функции f и g непрерывны в точке a, то*:

(a) *$f + g$ непрерывна в точке a;*

(b) *$f \cdot g$ непрерывна в точке a;*

(c) *f/g непрерывна в точке a, если $g(a) \neq 0$.*

◄ Доказательство заключается в простом применении теоремы о пределе суммы, произведения и частного функций. ►

Теорема 108. *Если функция $f : X \longrightarrow Y$ непрерывна в точке $a \in X$, а функция $g : Y \longrightarrow Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$, то композиция $g \circ f : X \longrightarrow Z$ непрерывна в точке a.*

◀ Для доказательства достаточно применить теорему о пределе композиции функций. ▶

§ 3. Глобальные свойства непрерывных функций

1. Теоремы Больцано — Коши и Вейерштрасса

Напомним, что *глобальными* называются такие свойства функции, которые зависят от значений данной функции во всей ее области определения.

Определение 117. *Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Теорема 109 (Больцано — Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, а на его концах принимает значения разных знаков, то существует точка $c \in (a\,,\,b)$ такая, что $f(c) = 0$.*

Замечания. 1. Если обозначить символом $C[a\,,\,b]$, множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a\,,\,b]$, то теорему Больцано — Коши можно сформулировать так:

$$\left.\begin{array}{r} f \in C[a\,,\,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in (a,b)\ :\ f(c) = 0\,. \tag{5.15}$$

2. Очевиден геометрический смысл теоремы Больцано — Коши (см. рис. 22). *Если на графике непрерывной на $[a\,,\,b]$ функции f существуют точки, лежащие по разные стороны от оси абсцисс, то на нем должна существовать и точка, лежащая также и на оси абсцисс.* Эта геометрическая интерпретация теоремы Больцано — Коши не может, однако, служить ее строгим доказательством.

◀ Разделим отрезок $[a\,,\,b]$ пополам точкой $(a+b)/2$. Если $f\left((a+b)/2\right) = 0$, то полагаем $c := (a+b)/2$, указывая тем самым точку, в которой $f(c) = 0$. Если же $f\left((a+b)/2\right) \neq 0$, то на концах одного из двух образовавшихся отрезков (обозначим его $[a_1,\,b_1]$)

функция f принимает значения разных знаков, т. е. $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам точкой $(a_1 + b_1)/2$ и повторим предыдущее рассуждение. В результате мы получим либо точку c, в которой $f(c) = 0$, либо новый отрезок $[a_2, b_2]$ со свойством $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$. Продолжая этот процесс, мы в результате либо найдем точку c, в которой $f(c) = 0$, либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$[a\,,\,b] \supset [a_1\,,\,b_1] \supset \ldots \supset [a_n\,,\,b_n] \supset \ldots\,, \tag{5.16}$$

такую, что $\forall n \in \mathbb{N}$ будет $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. Так как

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,,$$

то по лемме о вложенных отрезках существует единственная точка c, лежащая на всех отрезках (5.16), и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ и используя непрерывность функции f, получим $[f(c)]^2 \leqslant 0$, откуда $f(c) = 0$. ▶

Теорема 110 (о промежуточных значениях). *Если функция $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, и $f(a) \neq f(b)$, то для любого $C \in (f(a)\,,\,f(b))$ существует точка $c \in (a\,,\,b)$ такая, что $f(c) = C$.*

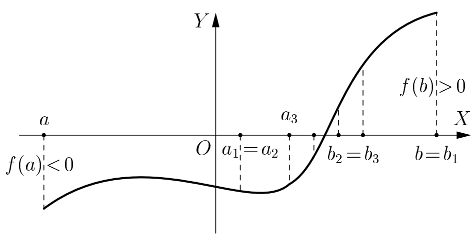

Рис. 22. К теореме Больцано — Коши

◀ Предполагая для определенности, что $f(a) < f(b)$, введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) := f(x) - C$, непрерывную на отрезке $[a\,,\,b]$. Так как $f(a) < C < f(b)$, то

$$\varphi(a) = f(a) - C < 0\,,$$
$$\varphi(b) = f(b) - C > 0\,.$$

Применяя к функции φ теорему Больцано — Коши, заключаем, что $\exists c \in (a\,,\,b)$: $\varphi(c) = 0$, т. е. $f(c) = C$. ▶

Определение 118. *Говорят, что функция* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *принимает в точке* $x^* \in X$ *наибольшее значение, если*

$$\forall x \in X \; : f(x) \leqslant f(x^*)\,.$$

Говорят, что функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *принимает в точке* $x_* \in X$ *наименьшее значение, если*

$$\forall x \in X \; : \; f(x) \geqslant f(x_*)\,.$$

Теорема 111 (Вейерштрасс). *Если функция* $f : [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a\,,\,b]$, *то она ограничена, и на этом отрезке существуют точки, в которых функция* f *принимает свои наибольшее и наименьшее значения.*

◀ Установим сначала ограниченность функции f. Так как f непрерывна в каждой точке $c \in [a\,,\,b]$, то по локальному свойству (т. е. по теореме 106(a)) она финально ограничена при $x \to c$, т. е.

$$\forall c \in [a\,,\,b] \;\; \exists U(c) \;\; \exists M_c \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall x \in U(c) \cap [a\,,\,b] \; : \; |f(x)| \leqslant M_c\,. \tag{5.17}$$

Условимся окрестности $U(c)$ брать в виде открытых интервалов. Семейство $\{U(c) \,|\, c \in [a\,,\,b]\}$ всех интервалов из (5.17) является, очевидно, открытым покрытием отрезка $[a\,,\,b]$. По лемме Гейне — Бореля это покрытие содержит конечное подпокрытие

$$\{U(c_1)\,, U(c_2)\,, \ldots\,, U(c_n)\}\,, \qquad \bigcup_{k=1}^{n} U(c_k) \supset [a\,,\,b]\,.$$

Полагая $K := \max\{M_{c_1}\,, \ldots\,, M_{c_n}\}$, имеем $K \in \mathbb{R}_+$ и

$$\forall x \in [a\,,\,b] \;\; \exists k \in \mathbb{N} \; : \begin{cases} x \in U(x_k)\,, \\ |f(x)| \leqslant M_{c_k} \leqslant K, \end{cases}$$

т. е.

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall x \in [a\,,\,b] \; : \;\; |f(x)| \leqslant K\,.$$

Таким образом, ограниченность функции f установлена.

Введем в рассмотрение точные границы

$$m := \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\,, \quad M := \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\,. \tag{5.18}$$

Так как функция f ограничена, то m и M — числа. Предполагая противное, а именно, что не существует точек x, в которых $f(x) = M$, заключаем, что функция $\varphi(x) := \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на $[a\,,\,b]$ как частное непрерывных функций с необращающимся в нуль знаменателем. По доказанной части теоремы из непрерывности функции φ следует ее ограниченность, т. е. выполняется следующее условие:

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \ \ \forall x \in [a,b] \ : \ 0 < \frac{1}{M - f(x)} \leqslant C. \tag{5.19}$$

Решая последнее неравенство относительно $f(x)$, получим

$$\forall x \in [a\,,\,b] \ : \ f(x) \leqslant M - \frac{1}{C}\,.$$

Взяв здесь супремум по всем $x \in [a\,,\,b]$, получим $M \leqslant M - \dfrac{1}{C}$, откуда видно, что $M < M$ — противоречие.

Аналогично можно показать, что существует точка x_*, в которой $f(x_*) = m$. ►

Замечание. Можно показать, что теорема Вейерштрасса остается справедливой и для функций, непрерывных на произвольных компактных множествах.

2. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение 119. *Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x', x'' \in X \ : \\ |x' - x''| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon\,. \tag{5.20}$$

Отметим, что *из равномерной непрерывности функции f следует ее непрерывность.*

◄ Зафиксируем в (5.20) точку $x'' = c$ и положим $x' = x$. Тогда получим

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ : \ |x - c| \leqslant \delta \ \Longrightarrow \ |f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon\,, \tag{5.21}$$

что равносильно непрерывности функции f в точке c, а поскольку точка $c \in X$ взята произвольно, то и на множестве X. ▶

Обратное утверждение, однако, неверно, т. е. *из непрерывности функции на множестве не следует ее равномерная непрерывность на этом множестве.*

◀ Например, функция $f(x) := x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$, но *не является* равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Предполагая противное, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, c \in \mathbb{R} : \; |x - c| \leqslant \delta \implies |x^2 - c^2| \leqslant \varepsilon .$$

В частности, $|x-c| = \delta \implies |x^2 - c^2| \leqslant \varepsilon$. Из последнего неравенства имеем $\delta \cdot |2c + \delta| \leqslant \varepsilon$. Отсюда в пределе при $c \to +\infty$ получим

$$+\infty \leqslant \varepsilon \;\; — \;\; \text{противоречие.} \;\; ▶$$

Теорема 112 (Кантор[2]). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, то она и равномерно непрерывна на нем.*

◀ Зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. В силу непрерывности функции f на отрезке $[a\,,\,b]$ имеем:

$$\forall c \in [a, b] \;\; \exists \eta = \eta(c) > 0 \;\; \forall x \in [a, b] \; : $$
$$|x - c| \leqslant \eta(c) \implies |f(x) - f(c)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5.22)$$

Обозначим $U(c) := \left(c - \dfrac{\eta(c)}{2}\,;\, c + \dfrac{\eta(c)}{2}\right)$. Множество всех интервалов $\{U(c) \mid c \in [a\,,\,b]\}$ есть открытое покрытие отрезка $[a\,,\,b]$. По лемме Гейне — Бореля это покрытие содержит конечное подпокрытие

$$\{U(c_1)\,, \ldots\,, U(c_n)\} \subset \{U(c) \mid c \in [a\,,\,b]\}\,,$$

т. е. $[a\,,\,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U(c_k)$. Положим $\delta := \min\left\{\dfrac{\eta(c_1)}{2}\,, \ldots\,, \dfrac{\eta(c_n)}{2}\right\}$ — наименьшему из радиусов интервалов $U(c_k)$. Пусть $x', x'' \in [a\,,\,b]$ — любые две точки, для которых $|x' - x''| \leqslant \delta$. Существует j такое, что $x'' \in U(c_j)$, и значит, $|x'' - c_j| \leqslant \dfrac{\eta(c_j)}{2}$. Далее,

$$|x' - c_j| \leqslant |x' - x''| + |x'' - c_j| \leqslant \delta + \frac{\eta(c_j)}{2} \leqslant \frac{\eta(c_j)}{2} + \frac{\eta(c_j)}{2} = \eta(c_j)\,.$$

[2] *Кантор* Георг (1845—1918) — немецкий математик, создатель теории множеств.

Отсюда, согласно (5.22), имеем

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(c_j)| + |f(c_j) - f(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Теорема Кантора остается справедливой и для функций, непрерывных на произвольных компактных множествах.

3. Критерий непрерывности функции на множестве. Теорема о непрерывности обратной функции

Определение 120. *Пусть T — топологическое пространство, и $X \subset T$. Подмножество $A \subset X$ называется открытым относительно X, если его можно представить в виде: $A = U \cap X$, где U — открытое подмножество пространства T.*

Понятия «открытое множество» и «множество, открытое относительно X» совпадают тогда и только тогда, когда X — открытое подмножество пространства T.

Теорема 113. *Равносильны следующие утверждения:*

(a) *функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ непрерывна на множестве X;*

(b) *полный прообраз любого открытого множества открыт относительно X.*

$\blacktriangleleft$ (a)$\Rightarrow$(b) Пусть $V \subset \mathbb{R}$ — произвольное открытое множество, а $f^{-1}(V)$ — его полный прообраз, $f^{-1}(V) \subset X$. Если $f^{-1}(V) = \varnothing$, то справедливо и такое равенство $f^{-1}(V) = \varnothing \cap X$. Так как множество $\varnothing$ — открытое, то множество $\varnothing \cap X$ открыто относительно X.

Предположим теперь, что $f^{-1}(V) \neq \varnothing$, и пусть $x \in f^{-1}(V)$. Тогда $f(x) \in V$, а так как V открыто, то V — окрестность точки $f(x)$. Пользуясь непрерывностью функции f, заключаем, что существует открытая окрестность $U(x)$ точки $x \in X$ такая, что $f(U(x) \cap X) \subset V$, или, что равносильно, $U(x) \cap X \subset f^{-1}(V)$. Взяв объединение этих множеств по всем $x \in f^{-1}(V)$, получим

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} (U(x) \bigcap X) \subset \\ \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V) = f^{-1}(V)\,.$$

Отсюда находим $f^{-1}(V) = U \cap X$, где через U обозначено множество $U := \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U(x)$, которое открыто как объединение семейства открытых множеств $U(x)$.

(b)$\Rightarrow$(a) Пусть $a \in X$ — произвольная точка, $b = f(a)$ — ее образ. Возьмем произвольную открытую окрестность $V(b)$ точки b. По условию имеем $f^{-1}(V) = U(a) \cap X$, где $U(a)$ — некоторое открытое множество, содержащее точку a. Значит, $\lim\limits_{\substack{x \to a,\\ x \in X}} f(x) = b = f(a)$, т. е. f непрерывна в любой точке $a \in X$. ►

Теорема 114. *Если функция* $f : [a\,,\,b] \longrightarrow Y$, *где* $Y = f([a\,,\,b])$, *строго монотонна и непрерывна на отрезке* $[a\,,\,b]$, *то обратная функция* $f^{-1} : Y \longrightarrow [a\,,\,b]$ *непрерывна на* Y.

◄ В теореме 2 (глава 1, § 3, п. 5) было показано, что в условиях теоремы существует единственная обратная функция f^{-1}, которая притом строго монотонна в том же смысле, что и f. Остается только установить непрерывность этой обратной функции.

Предположим для определенности, что функция f возрастает, и пусть $a < b$. Обозначим $c := f(a)$, $d := f(b)$. Учитывая строгое возрастание функции f и теорему о промежуточных значениях, заключаем, что $f([a\,,\,b]) = [c\,,\,d]$. На основании тех же соображений имеем: если $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то $f((x_1\,,\,x_2)) = (y_1\,,\,y_2)$, где $y_1 := f(x_1)\,,\, y_2 := f(x_2)$. Отсюда легко найти полный прообраз любого интервала $(x_1\,,\,x_2) \subset \mathbb{R}$ при отображении f^{-1}, т. е. образ любого интервала при отображении f. Имеем

$$f((x_1\,,\,x_2)) = \begin{cases} \varnothing\,, & \text{если } (x_1, x_2) \cap [a,b] = \varnothing\,, \\ (y_1, y_2)\,, & \text{если } (x_1, x_2) \subset [a,b]\,, \\ (y_1, d]\,, & \text{если } x_1 \in [a,b]\,,\ x_2 \notin [a,b]\,, \\ [c, y_2)\,, & \text{если } x_1 \notin [a,b]\,,\ x_2 \in [a,b]\,, \\ [c, d]\,, & \text{если } (x_1, x_2) \supset [a,b]\,. \end{cases}$$

Из этих равенств видно, что при отображении f^{-1} полный прообраз любого интервала $(x_1\,, x_2)$ открыт относительно отрезка $[c\,, d]$. А так как открытые множества — это объединения интервалов, то при отображении f^{-1} полный прообраз любого открытого множества открыт относительно отрезка $[c\,, d]$. Отсюда на основании теоремы 113 заключаем, что функция f^{-1} непрерывна на отрезке $[c\,, d]$.

Если функция f убывает, то функция $g := -f$ возрастает. По доказанному обратная к ней функция g^{-1} непрерывна, а отсюда легко заключить, что и $f^{-1} = -g^{-1}$ непрерывна. ▶

§ 4. Элементарные функции и их непрерывность

1. Понятие элементарной функции

В анализе и его приложениях (особенно при рассмотрении различных примеров) часто рассматриваются функции, называемые *элементарными.* Чтобы их определить, сначала вводят так называемые *основные элементарные функции.* К ним относят функции следующих семи типов.

1) **Целые рациональные функции.** Целой рациональной функцией называется всякая функция, представимая в виде многочлена от независимой переменной x следующим образом:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\,,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ — параметры[3]. Областью определения любой целой рациональной функции является множество $\mathbb{R}$.

Примеры целых рациональных функций: *постоянная* $y = a_0$, *линейная* $y = a_0x + a_1$ и *квадратичная* $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$, графики которых (при некоторых значениях параметров) представлены на рис. 23.

2) **Дробные рациональные функции.** Дробной рациональной

[3] *Пара́метром* называется величина, которая считается постоянной в данной конкретной задаче, но может изменяться при переходе к другим аналогичным задачам.

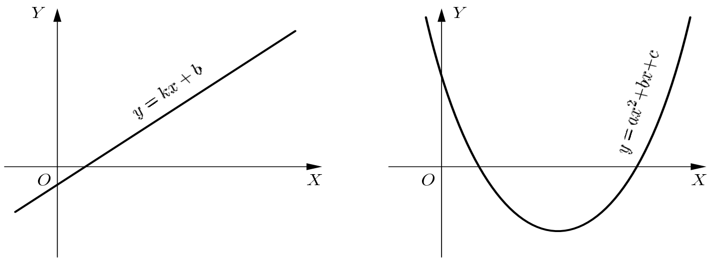

Рис. 23. Графики линейной и квадратичной функций

функцией называется любая функция от x, представимая в виде отношения двух многочленов

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}\,, \tag{5.23}$$

где $a_0\,, a_1\,, \ldots\,, a_n\,, b_0\,, b_1\,, \ldots\,, b_n \in \mathbb{R}$ — параметры. Областью определения дробной рациональной функции, представленной в виде (5.23), считается множество всех $x \in \mathbb{R}$, кроме тех значений переменной x, в которых знаменатель в (5.23) обращается в нуль.

Примером дробной рациональной функции является дробно-линейная функция $y = \dfrac{a_0x + a_1}{b_0x + b_1}$, графиком которой при $b_0 \neq 0$ является гипербола с асимптотами, параллельными координатным осям (рис. 20).

3) **Показательная функция** — это функция, задаваемая уравнением $y = a^x$, где x — аргумент, a — параметр, $a > 0\,, a \neq 1$. Областью ее определения является множество $\mathbb{R}$, а областью значений — множество $\mathbb{R}_+$. Графики показательных функций (при некоторых конкретных значениях параметра a) показаны на левом рис. 24. При $a = e$, где e — основание натуральных логарифмов, показательная функция называется экспонентой и обозначается символом $\exp$.

4) **Логарифмическая функция** — это функция, обратная к показательной. Обозначение: $y = \log_a x$, где a — параметр, называемый *основанием* логарифмов ($a > 0\,, a \neq 1$). Логарифмы с основанием $a = e$ называются *натуральными*, а соответствующая логарифмическая функция обозначается символом $\ln$. Логарифмы с основанием $a = 10$ называются *десятичными*, а соответствующая логариф-

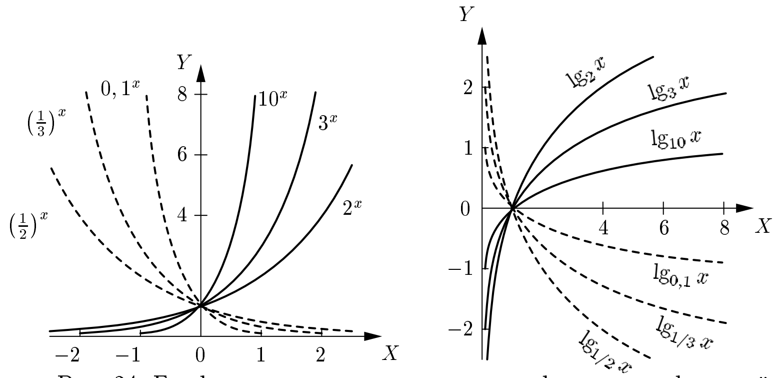

Рис. 24. Графики показательных и логарифмических функций

мическая функция обозначается символом lg. Областью определения логарифмической функции является множество $\mathbb{R}_+$, а областью значений — множество $\mathbb{R}$. Графики логарифмических функций (при некоторых конкретных значениях параметра a) показаны на правом рис. 24.

5) **Степенна́я функция** задается уравнением $y = x^\mu$, где $\mu \in \mathbb{R}$ — параметр. Если число μ — целое, то степенная функция является рациональной. Если $\mu = 1/m$, где $m \in \mathbb{N}$, то областью определения степенной функции является множество $\mathbb{R}$ при нечетном m, и множество[4] $\overline{\mathbb{R}_+}$ — при четном m. На рис. 25 представлены графики степенных функций при различных значениях показателя степени. Если $\mu \in \mathbb{Q}$, то область определения и область значений степенной функции могут зависеть от представления рационального числа μ в виде отношения двух целых чисел $\mu = m/n$ и от того, какое из двух следующих представлений $x^\mu := (x^m)^{1/n}$ или $x^\mu := (x^{1/n})^m$ следует взять в качестве определения степенной функции. Читателю предлагается самостоятельно исследовать возникающие здесь различные случаи. В общем же случае (например, когда $\mu \in \mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$) степенную функцию естественно определить в виде композиции $x^\mu := \exp\{\mu \cdot \ln x\}$, и тогда областью ее определения будет множество $\mathbb{R}_+$.

[4]Напомним, что под $\mathbb{R}_+$ понимается множество всех положительных чисел, а $\overline{\mathbb{R}_+} = [0\,;+\infty)$ — замыкание множества $\mathbb{R}_+$.

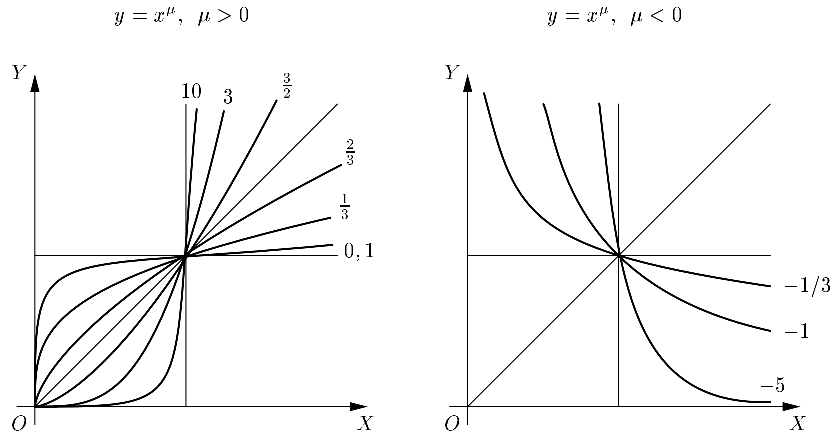

Рис. 25. Графики степенных функций

6) **Тригонометрические функции** — это известные из школьного курса функции $\sin$, $\cos$, tg, ctg, определяемые для аргумента x, выраженного в радианах. Они реализуют следующие сюръективные отображения:

$$\sin\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,,\,+1]\,;$$
$$\cos\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,,\,+1]\,;$$
$$\operatorname{tg}\ :\ \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\tfrac{\pi}{2} + k\pi\,,\ \tfrac{\pi}{2} + k\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R};$$
$$\operatorname{ctg}\ :\ \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi\,,\ \pi + k\pi) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Функция $\cos$ — четная, функции $\sin$, tg, ctg — нечетные. Тригонометрические функции — периодические. Основной период функций $\sin$ и $\cos$ равен 2π, а основной период функций tg и ctg равен π. Графики тригонометрических функций показаны на рис. 26 и 27.

7) **Обратные тригонометрические функции.** Из свойства периодичности тригонометрических функций следует, что для них не существует (однозначных) обратных функций. В связи с этим обратные тригонометрические функции $\arcsin$, $\arccos$, arctg, arcctg определяются как функции, обратные соответственно к сужениям функций $\sin$, $\cos$, tg, ctg на определенные промежутки, где эти функции

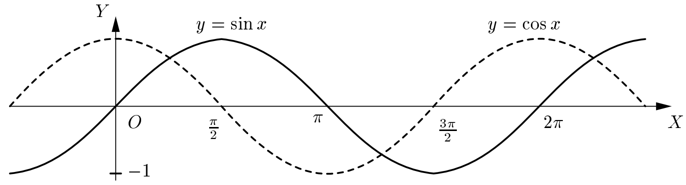

Рис. 26. Графики функций sin и cos

непрерывны и строго монотонны. Именно:

arcsin — функция, обратная к сужению $\sin\big|_{[-\pi/2\,,\,\pi/2]}$;

arccos — функция, обратная к сужению $\cos\big|_{[0\,,\,\pi]}$;

arctg — функция, обратная к сужению $\mathrm{tg}\big|_{(-\pi/2\,,\,\pi/2)}$;

arcctg — функция, обратная к сужению $\mathrm{ctg}\big|_{(0\,,\pi)}$.

Таким образом, имеем следующие биективные отображения:

$$\arcsin\,:\;[-1\,,+1]\longrightarrow[-\pi/2\,,+\pi/2]\,;$$
$$\arccos\,:\;[-1\,,+1]\longrightarrow[0\,,\,\pi]\,;$$
$$\mathrm{arctg}\,:\;(-\pi/2\,,\,\pi/2)\longrightarrow\mathbb{R};$$
$$\mathrm{arcctg}\,:\;(0\,,\,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Графики этих функций показаны на рис. 28 — 31.

Общее понятие элементарной функции дается с помощью следующего рекурсивного определения.

Определение 121. (a) *Все основные элементарные функции считаются элементарными функциями.*

(b) *Если f и g — элементарные функции, то*

$$f+g\,,\quad f-g\,,\quad f\cdot g\,,\quad \frac{f}{g}\,,\quad f\circ g$$

также считаются элементарными функциями.

(c) *Не существует никаких других элементарных функций, кроме тех, которые можно получить в результате применения конечное число раз (в любом порядке) пунктов* (a) *и* (b) *этого определения.*

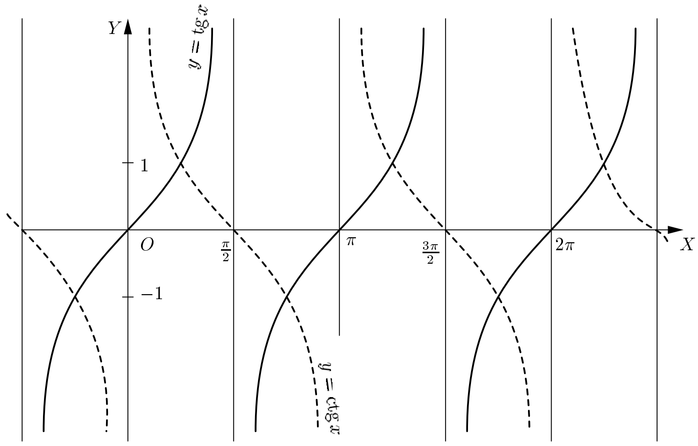

Рис. 27. Графики функций tg и ctg

Следует отметить, что в пункте (b) под операциями над функциями понимаются соответствующие операции над сужениями этих функций на максимальные множества, где эти операции определены и дают в результате вещественные числа. Таким образом, каждую элементарную функцию можно задать явно уравнением $y = F(x)$, где под F понимается формула, позволяющая по некоторым значениям переменной $x \in \mathbb{R}$ вычислять соответствующие им значения переменной $y \in \mathbb{R}$. В связи с этим вводится понятие *естественной области определения* элементарной функции.

Определение 122. *Естественной областью определения элементарной функции F называется множество $X \subset \mathbb{R}$, состоящее из всех значений $x \in \mathbb{R}$, для которых имеет смысл выражение $F(x)$, причем должно быть $F(x) \in \mathbb{R}$.*

В этом определении выражение *имеет смысл* означает, что не только $F(x)$, но и результаты всех промежуточных вычислений по формуле F в точке x должны быть вещественными числами.

Важными примерами элементарных функций являются так называемые **гиперболические функции**[5] sh, ch, th, cth и **обратные к ним функции**[6] arsh, arch, arth, arcth. Гиперболические функции определя-

[5]Приводимые здесь символы читаются так: *синус гиперболический* и т. д.

[6]Приводимые здесь символы читаются так: *áреасинус гиперболический* и т. д.

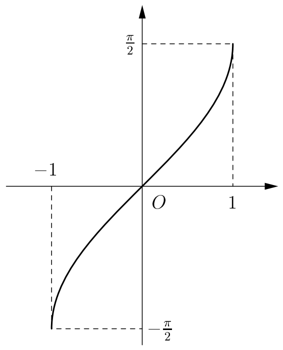

Рис. 28. График функции arcsin

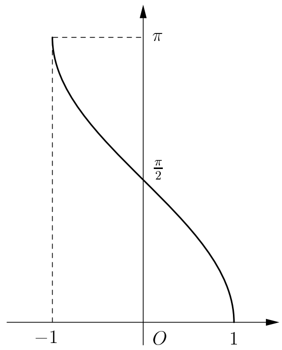

Рис. 29. График функции arccos

ются следующими равенствами:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, && x \in \mathbb{R}\,;\\
&\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, && x \in \mathbb{R}\,;\\
&\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,, && x \in \mathbb{R}\,;\\
&\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\,, && x \in \mathbb{R}\setminus\{\,0\}\,.
\end{aligned}
$$

Функция ch — четная, а функции sh, th, cth — нечетные. Свойства гиперболических функций во многом аналогичны известным свойствам круговых (т. е. тригонометрических) функций cos, sin, tg, ctg. Например, известное тождество $\cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1$ показывает, что система уравнений

$$
\begin{cases} u = \cos x\,,\\ v = \sin x \end{cases}
$$

представляет собой параметрические уравнения окружности $u^2 + v^2 = 1$. Аналогично, легко проверяемое тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1$ показывает, что система уравнений

$$
\begin{cases} u = \operatorname{ch} x\,,\\ v = \operatorname{sh} x \end{cases}
$$

представляет собой параметрические уравнения гиперболы $u^2 - v^2 = 1$. Графики гиперболических функций показаны на рис. 32 и 33.

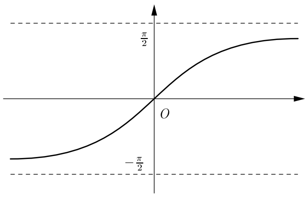

Рис. 30. График функции arctg

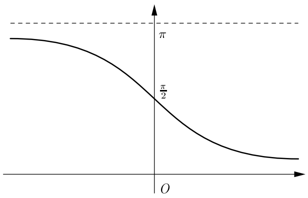

Рис. 31. График функции arcctg

Обратные гиперболические функции определяются следующим образом:

arch — функция, обратная к сужению $\mathrm{ch}\,|_{[0,+\infty)}$;

arsh — функция, обратная к функции sh;

arth — функция, обратная к функции th;

arcth — функция, обратная к функции cth.

Графики обратных гиперболических функций можно увидеть на тех же рис. 32 и 33, посмотрев на них с обратной стороны того листа, на котором они нарисованы, причем ось OX надо направить вверх.

Вообще говоря, функция, обратная к элементарной, может не быть элементарной. Известно, например, что функция, обратная к целой рациональной функции: $y = x^5 + x + 1$, не является элементарной. Однако *обратные гиперболические функции являются элементарными функциями.*

◄ Для доказательства решим уравнения

$$\mathrm{ch}\, y = x\,, \quad \mathrm{sh}\, y = x\,, \quad \mathrm{th}\, y = x\,, \quad \mathrm{cth}\, y = x$$

относительно y. Имеем

$$\mathrm{ch}\, y = x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2x \cdot e^y + 1 = 0\,.$$

Из последнего уравнения, учитывая неотрицательность функции arch, находим

$$y = \mathrm{arch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,, \quad x \geqslant 1\,,$$

и, значит, функция arch — элементарная. Далее, имеем

$$\mathrm{sh}\, y = x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2x \cdot e^y - 1 = 0\,.$$

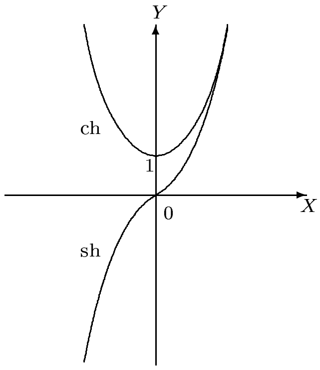

Рис. 32. Графики функций ch и sh

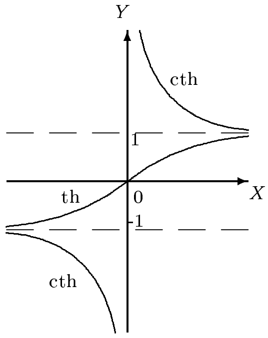

Рис. 33. Графики функций th и cth

Из последнего уравнения, учитывая неотрицательность экспоненты, находим

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

и, значит, функция arsh — элементарная. Далее, имеем

$$\operatorname{th} y = x \iff \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \iff \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x \iff (1-x)e^{2y} = 1 + x\,.$$

Из последнего уравнения находим

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

и, значит, функция arth — элементарная. И наконец, имеем

$$\operatorname{cth} y = x \iff \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = x \iff \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} = x \iff (x-1)e^{2y} = x+1\,.$$

Из последнего уравнения находим

$$y = \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1,$$

и, значит, функция arcth — элементарная. ▶

2. Непрерывность элементарных функций

Теорема 115. *Каждая элементарная функция непрерывна во всех точках своей естественной области определения.*

◄ Прежде всего следует отметить, что естественная область определения элементарной функции может содержать изолированные точки, а в изолированных точках все функции непрерывны (теорема 105). Например, естественная область определения элементарной функции $y = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ представляет собой множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, которое состоит только из изолированных точек. Значит, исследование на непрерывность достаточно провести только в предельных точках, лежащих в естественной области определения.

Установим сначала непрерывность основных элементарных функций. Постоянная функция $y = c_0$ и функция $y = x$ непрерывны, так как $\lim\limits_{x\to a} c_0 = c_0$ и $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Целая и дробная рациональные функции непрерывны, так как они могут быть получены из постоянных функций и из функции $y = x$ с помощью конечного числа арифметических операций. Экспонента непрерывна, так как

$$e^{x+h} - e^x = e^x \cdot (e^h - 1) \sim e^x \cdot h \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0\,,$$

т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение экспоненты. Показательная функция $y = a^x$ представима в виде $y = e^{x\cdot \ln a}$ и, значит, непрерывна как композиция непрерывных функций $t = x \cdot \ln a$ и $y = e^t$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ непрерывна согласно теореме 114 (как обратная к показательной функции, которая строго монотонна и непрерывна).

Функция $y = x^{1/m}$, где $m = 2, 3, \ldots$, непрерывна как обратная к целой рациональной функции $x = y^m$, которая строго монотонна на $[0, +\infty)$ при m четном и всюду на $\mathbb{R}$ при m нечетном. Функция $y = x^{n/m} = \left(x^{1/m}\right)^n$ непрерывна как композиция непрерывных функций. При произвольном $\mu > 0$ степенная функция $y = x^\mu$ непрерывна на $[0, +\infty)$. Ее непрерывность в точке $x = 0$ следует из неравенств $0 \leqslant x^\mu \leqslant x^{[\mu]+1} \to 0$ при $x \to 0$, а непрерывность при $x > 0$ — из следующего представления ее в виде композиции непрерывных функций $x^\mu = \exp(\mu \cdot \ln x)$.

Функции $\sin$ и $\cos$ непрерывны, так как

$$0 \leqslant |\sin(x+h) - \sin x| = \left| 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2} \right| \leqslant |h| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0\,,$$

$$0 \leqslant |\cos(x+h) - \cos x| = \left| 2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2} \right| \leqslant |h| \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0\,.$$

Из непрерывности функций $\sin$ и $\cos$ следует непрерывность функций tg и ctg, так как

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

И наконец, обратные тригонометрические функции непрерывны как обратные к строго монотонным и непрерывным сужениям соответствующих тригонометрических функций.

Итак, все основные элементарные функции непрерывны. По определению 121 любую элементарную функцию можно получить из основных элементарных функций по формуле, включающей в себя конечное число арифметических операций и операций образования композиции. Так как все эти операции, будучи проведенными над непрерывными функциями, могут привести только к непрерывным функциям, то *любая элементарная функция непрерывна в своей естественной области определения.* ▶

§ 5. Некоторые свойства непрерывных отображений топологических пространств

1. Связные множества

Важным для анализа свойством множеств является их *свя́зность*. Образно говоря, связность точечного множества — это его свойство заполнять один сплошной кусок пространства. Перейдем теперь к точным определениям.

Определение 123. *Топологическое пространство называется связным, если не существует представления его в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.*

Исходя из этого определения, сформулируем условие, означающее, что топологическое пространство X *не является* связным: существуют открытые множества $U \subset X$ и $V \subset X$, обладающие следующими свойствами:

$$U \neq \varnothing\,, \quad V \neq \varnothing\,, \quad U \cap V = \varnothing\,, \quad U \sqcup V = X.$$

Отсюда следует, что $U = X \diagdown V$, $V = X \diagdown U$, а так как дополнение к открытому множеству является замкнутым, то оба множества U и V — замкнутые, а значит, и *открыто-замкнутые.* Введем теперь понятие связности подмножества топологического пространства.

Определение 124. *Множество E, лежащее в топологическом пространстве X, называется связным, если оно является связным как топологическое пространство с индуцированной топологией.*

Примеры связных множеств: пустое множество $\varnothing$, а также множество $\{x\}$, состоящее из одной точки $x \in X$, так как объединение двух непустых непересекающихся множеств содержит не менее двух точек. Оказывается, что все связные подмножества числовой оси допускают весьма простое описание, содержащееся в следующей теореме.

Теорема 116. *Числовое множество $E \subset \mathbb{R}$, содержащее более одной точки, является связным, если и только если оно является числовым промежутком*[7] *$E = \langle \alpha\,, \beta \rangle$, где $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.*

◀ Покажем сначала, что числовой промежуток $E = \langle \alpha\,, \beta \rangle$ связен. Предполагая противное, заключаем, что должны существовать открытые множества U и V такие, что

$$U \cap E \neq \varnothing\,, \quad V \cap E \neq \varnothing\,, \quad U \cap V \cap E = \varnothing\,, \quad (U \cup V) \cap E = E. \tag{5.24}$$

Построим функцию $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$f(x) := \begin{cases} -1\,, & \text{если } x \in U \cap E\,, \\ +1\,, & \text{если } x \in V \cap E\,. \end{cases} \tag{5.25}$$

Из этого определения видно, что полный прообраз $f^{-1}(W)$ любого открытого множества $W \subset \mathbb{R}$ может быть только одним из следующих четырех множеств:

$$\varnothing\,, \quad U \cap E\,, \quad V \cap E\,, \quad E \tag{5.26}$$

[7] Условимся символом $\langle \alpha\,, \beta \rangle$ обозначать здесь промежуток, начальная α и концевая β точки которого могут как принадлежать, так и не принадлежать ему.

в зависимости от того, какое из следующих соотношений выполняется:

$$\begin{aligned}
&W \cap \{-1, +1\} = \varnothing\,;\\
&W \cap \{-1, +1\} = \{-1\}\,;\\
&W \cap \{-1, +1\} = \{+1\}\,;\\
&W \supset \{-1, +1\}\,.
\end{aligned}$$

Но все множества (5.26) открыты относительно E. Применяя критерий непрерывности (теорему 113), заключаем, что функция (5.25) непрерывна на E. Из неравенств (5.24) следует, что $\exists a \in U \cap E$, $\exists b \in V \cap E$. Предполагая для определенности, что $a < b$, из того, что E — промежуток, заключаем, что $[a\,,\,b] \subset E$. Функция $f|_{[a\,,\,b]}$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, а на его концах принимает значения разных знаков, а именно: $f(a) = -1$, $f(b) = +1$. Отсюда в силу теоремы Больцано — Коши вытекает существование точки $c \in [a\,,\,b] \subset E$, в которой $f(c) = 0$, что противоречит определению (5.25) функции f.

Докажем теперь обратное, т. е. что любое непустое связное подмножество E числовой оси — промежуток, т. е. что

$$\forall x, y \in E \;\; \forall z \in \mathbb{R} \;:\; x < z < y \implies z \in E.$$

Предположим противное

$$\exists x, y \in E \;\; \exists z \in \mathbb{R} \;:\begin{cases} x < z < y\,,\\ z \notin E\,.\end{cases}$$

Тогда для открытых множеств $U := (-\infty, z)$ и $V := (z, +\infty)$ будем иметь

$$x \in U \cap E\,, \quad y \in V \cap E\,,$$

$U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = \mathbb{R}\diagdown\{z\} \supset E$.

Из этих соотношений имеем

$$U \cap E \neq \varnothing \quad V \cap E \neq \varnothing\,, \quad U \cap V \cap E = \varnothing\,, \quad (U \cup V) \cap E = E,$$

т. е. множество E не является связным, что противоречит условию. ▶

2. Непрерывные отображения топологических пространств

Пусть X и Y — топологические пространства, а $f : X \longrightarrow Y$ — отображение, непрерывное на X. Для таких отображений также справедлив критерий непрерывности: *непрерывность отображения* $f : X \longrightarrow Y$ *на* X *равносильна тому, что полный прообраз любого открытого в* Y *множества открыт в* X. Принимая этот факт без доказательства, установим некоторые его следствия. Прежде всего, переходя к дополнениям, получаем следующий критерий. *Непрерывность отображения* $f : X \longrightarrow Y$ *на* X *равносильна тому, что полный прообраз любого замкнутого в* Y *множества замкнут в* X. Для таких отображений имеют место следующие утверждения, обобщающие теорему Вейерштрасса о максимуме и минимуме и теорему о промежуточных значениях.

Теорема 117. *Если отображение топологических пространств* $f : X \longrightarrow Y$ *непрерывно на* X, *то при этом отображении:*

(a) *образы компактных множеств компактны;*

(b) *образы связных множеств связны.*

◀ (a) Пусть $A \subset X$ — компактное множество, а $f(A) \subset Y$ — его образ. Пусть $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — открытое покрытие множества $f(A)$. Надо показать, что оно содержит конечное подпокрытие. Так как отображение f непрерывно, то все прообразы $U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$ открыты. Поскольку

$$f(A) \subset \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha ,$$

то

$$A \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha ,$$

и, значит, семейство $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ — открытое покрытие множества A. Так как множество A — компактное, то это покрытие содержит конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$, т. е. $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$. Отсюда $f(A) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}$, т. е. $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$ — конечное подпокрытие исходного покрытия.

(b) Не ограничивая общности, будем считать, что само пространство X связно, а $f(X) = Y$. Предполагая противное, т. е. что множество Y не связное, заключаем, что существуют открытые множества V_1 и V_2 такие, что

$$V_1 \neq \varnothing , \quad V_2 \neq \varnothing , \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing , \quad V_1 \sqcup V_2 = Y. \tag{5.27}$$

Так как отображение f непрерывно, то множества $U_1 := f^{-1}(V_1)$ и $U_2 := f^{-1}(V_2)$ открыты. Переходя в соотношениях (5.27) к прообразам при отображении f, получим

$$U_1 \neq \varnothing , \quad U_2 \neq \varnothing , \quad U_1 \cap U_2 = \varnothing , \quad U_1 \sqcup U_2 = X.$$

Эти соотношения означают, что пространство X — не связное, что противоречит условию. ▶

Определение 125. *Отображение топологических пространств* $f: X \longrightarrow Y$ *называется гомеоморфным (или гомеоморфизмом), если оно непрерывно на* X, *биективно, а обратное к нему отображение* $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ *непрерывно на* Y.

Здесь требование непрерывности обратного отображения существенно, так как имеются биективные и всюду непрерывные отображения, обратные к которым не являются всюду непрерывными. Например, комплекснозначная функция

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

непрерывна $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ как линейная комбинация непрерывных функций. Так как

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \equiv 1\,,$$

то образом числовой оси при данном отображении является единичная окружность $|z| = 1$. Сужение данного отображения на полуинтервал $[0\,;\,2\pi)$ — биективное. Для отображения $\varphi = \varphi(z)$, обратного к этому сужению, имеем

$$\lim_{\substack{z\to 1,\\ \operatorname{Im} z>0}} \varphi(z) = 0\,;\quad \lim_{\substack{z\to 1,\\ \operatorname{Im} z<0}} \varphi(z) = 2\pi\,.$$

Поэтому отображение φ, обратное к сужению данного, разрывно в точке $z = 1$.

Теорема 118. *Образами открытых, замкнутых, компактных и связных множеств при любых гомеоморфизмах являются открытые, замкнутые, компактные и связные множества соответственно.*

Эта теорема является простым следствием теорем 113 и 117.

Отметим в заключение, что *топологическими* свойствами множеств называются такие их свойства, которые сохраняются при любых гомеоморфизмах. Последняя теорема, таким образом, утверждает, что открытость, замкнутость, компактность и связность — топологические свойства.

Задачи к главе 5

5.1. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$; h) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$; j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right)$.

5.2. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{x/(2x+1)}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(4+5e^{6x}\right)}{\ln\left(1+2e^{3x}\right)}$.

5.3. Доказать, что если функция $f:[a\,,\,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ инъективна и непрерывна, то она и строго монотонна.

5.4. Доказать, что множество всех точек разрыва любой монотонной функции $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ — конечное или счетное.

5.5. Исследовать на непрерывность функции $f\circ g$ и $g\circ f$, если:

a) $f(x)=\operatorname{sign}x$, $g(x)=1+x^2$;

b) $f(x)=\operatorname{sign}x$, $g(x)=x(1-x^2)$;

c) $f(x)=\operatorname{sign}x$, $g(x)=1+x-[x]$, где $[x]$ — целая часть числа x.

5.6. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^4+2x^2-1} - \sqrt{x^4-2x^2-1})$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^3+7x-1)^6}{(2x^6-13x^2+x)^3}$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$;

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$;

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right)$;

n) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$;

o) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^2}+\dfrac{1}{x-1}\right)$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$, $\quad m,n\in\mathbb{N}$;

r) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

s) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

t) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$;

u) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$;

v) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$;

w) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$;

x) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

y) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

z) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

5.7. Обязательно ли будут разрывными в точке x_0 сумма и произведение функций f и g, если в этой точке:

a) функция f непрерывна, а функция g разрывна?

b) обе функции f и g разрывны?

Глава 6

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

Содержание предыдущих глав было лишь введением в анализ. Сам анализ начинается только с дифференциального исчисления, т. е. с этой главы. В основе дифференциального исчисления и его практических приложений лежит идея приближенного представления функции $y = f(x+h)$ (от приращения h) линейной функцией $y = k \cdot h + b$ или, более общо, многочленом от h. Для широкого класса функций оказывается возможным *разумно* определить такие приближения и на этой основе получить результаты, имеющие исключительно большое теоретическое и прикладное значение.

§ 1. Дифференцируемые функции. Понятия производной и дифференциала

1. Основные понятия и простейшие факты

Пусть $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ — функция, и $x \in X$. Всюду в этом параграфе мы будем считать, что x — *внутренняя* точка множества X, т. е. $x \in X^0$.

Определение 126. *Функция f называется дифференцируемой в точке x, если существует такое $k \in \mathbb{R}$, что приращение функции f в точке x можно представить в следующем виде:*

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0\,, \tag{6.1}$$

или, что равносильно, в виде

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + \alpha(h) \cdot h\,, \quad \text{где} \quad \alpha(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0\,. \tag{6.2}$$

В (6.1) и (6.2) величина x считается постоянной, поэтому зависимость правых частей этих равенств от x не показывается. Приращение аргумента, обозначенное в равенствах (6.1) и (6.2) через h, обозначают также через Δx или dx, т. е. $\Delta x = dx := h$. Для соответствующего приращения функции f также используются различные обозначения, например следующие:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)\,.$$

Таким образом, условие дифференцируемости (6.1) можно записать, например, в следующем виде:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0\,.$$

Определение 127. *Пусть $y = f(x)$ — функция, дифференцируемая в точке x. Дифференциалом функции f в точке x называется входящая в равенство* (6.1) *линейная однородная функция $h \longmapsto k \cdot h$ от переменного приращения h.*

На рис. 40 показан график дифференциала. Запишем различные, используемые в учебной литературе обозначения для дифференциала[1]:

$$dy = df = df(x) = df(x)(h) = Df(x)(h) := k \cdot h\,.$$

Если $k \neq 0$, то в правой части равенства (6.1) слагаемое $k \cdot h$ является *главной частью*, а слагаемое $o(h)$ — бесконечно малое по сравнению с ним при $h \to 0$. На этом основании *дифференциал функции f в точке x на приращении h* определяют как *главную часть приращения функции f* в точке x, линейную относительно h. Это определение корректно и равносильно определению 127 при $k \neq 0$.

Определение 128. *Производной от функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции f в точке x к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т. е.*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,. \tag{6.3}$$

Приведем другие, встречающиеся в литературе обозначения производной

$$f'(x) = y'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}\,.$$

[1]Обозначение $Df(x)(h)$ является наиболее точным и читается так: *дифференциал функции f в точке x на приращении h.*

Если предел (6.3) существует и является числом, то говорят, что *функция* f *имеет в точке* x *конечную производную.* Предел (6.3) может существовать и быть равным ∞, $+\infty$, $-\infty$ (в таких случаях принято говорить о *бесконечных производных*), может и не существовать (в таких случаях считается, что *в точке* x *функция* f *не имеет производной*).

Теорема 119. *Дифференцируемость функции* f *в точке* x *равносильна существованию конечной производной* $f'(x)$.

◀ Предположим, что функция f дифференцируема в точке x, т. е.

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + \alpha(h) \cdot h\,, \text{ где } \alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to 0\,.$$

Разделив это равенство на h, получим

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k + \alpha(h)\,.$$

Переходя здесь к пределу при $h \to 0$, находим

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k\,,$$

т. е. производная существует и равна k.

Обратно, пусть $f'(x) = k \in \mathbb{R}$. Тогда имеем

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + o(1) = k + o(1) \quad \text{при} \quad h \to 0\,,$$

откуда

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + h \cdot o(1) = k \cdot h + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0\,.$$

Значит, функция f дифференцируема в точке x. ▶

Очевидно, что если f дифференцируема в точке x, то значение ее дифференциала в точке x на приращении h равно

$$Df(x)(h) = f'(x) \cdot h\,,$$

т. е. число $f'(x)$ равно угловому коэффициенту дифференциала функции f в точке x.

Теорема 120. *Если функция f дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

◀ Записывая условие дифференцируемости функции f точке x, имеем

$$f(x+h)-f(x)=k\cdot h+o(h) \quad \text{при} \quad h\to 0\,.$$

Переходя здесь к пределу при $h\to 0$, получим: $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$, т. е. функция f непрерывна в точке x. ▶

Замечание. Доказанная теорема означает, что непрерывность функции в точке является необходимым условием ее дифференцируемости в этой точке. Однако *непрерывность функции в точке не является достаточным условием для дифференцируемости ее в этой точке.* Покажем это на примерах.

Примеры. 1) Функция $f(x):=|x|$, график которой показан на рис. 34, непрерывна всюду на $\mathbb{R}$ (как элементарная функция с областью определения $\mathbb{R}$), однако она не дифференцируема в точке $x=0$.

◀ В самом деле, применяя критерий Коши существования предела функции, заключаем, что предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0}\operatorname{sign}\,h$$

не существует, так как колебание функции sign в любой окрестности нуля равно 2, и потому его невозможно сделать сколь угодно малым (см. рис. 35). ▶

2) Функция $f(x):=x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$, и $f(0):=0$, график которой показан на рис. 36, непрерывна на $\mathbb{R}$, но не дифференцируема в точке $x=0$.

◀ В самом деле, предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

не существует, так как колебание функции $\sin\dfrac{1}{h}$ в любой окрестности точки $h=0$ равно 2, и его невозможно сделать сколь угодно малым (см. рис. 36). ▶

3) Определим функцию φ на $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[2k-1,2k+1]$, полагая

$$\forall k\in\mathbb{Z}\;:\;\varphi(x):=|x-2k|$$

при

$$2k-1\leqslant x\leqslant 2k+1\,.$$

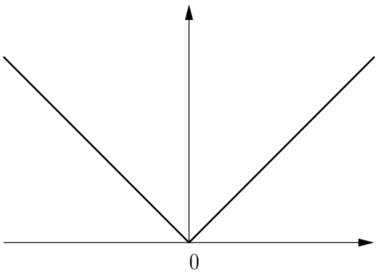

Рис. 34. График функции $|\cdot|$

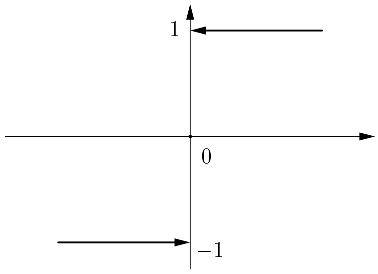

Рис. 35. График функции sign

График функции φ показан на рис. 37. Очевидно, что эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Однако ни в одной целой точке $x = k \in \mathbb{Z}$ она не является дифференцируемой. Это проверяется так же, как и для функции $f(x) = |x|$.

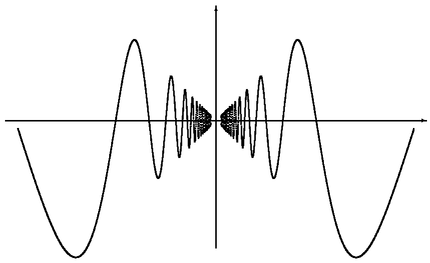

Рис. 36. График функции $x \longmapsto x \cdot \sin \dfrac{1}{x}$

4) Возникает вопрос: насколько мощным может быть множество точек, в которых некоторая непрерывная функция не будет дифференцируемой? Оказывается, что *существуют функции, непрерывные всюду на* $\mathbb{R}$, *но не дифференцируемые ни в одной точке.* Таким свойством обладает, например, известная функция Ван-дер-Вардена[2] $f_0(x)$, определяемая равенством

$$f_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(4^k x)}{4^k}\,, \tag{6.4}$$

где φ — функция из предыдущего примера. Доказательство этого последнего утверждения будет дано в части 4 этого учебного пособия.

[2] *Ван-дер-Варден* Бартель Лендерт (р. 1903) — голландский математик.

2. Дифференцируемость вектор-функций

Пусть

$$\boldsymbol{r} : T \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ T \subset \mathbb{R},$$

— вектор-функция, и пусть t — внутренняя точка множества T. *Вектор-функция*[3] $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ *называется дифференцируемой в точке* t, *если существует вектор* $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^3$ *такой, что приращение функции* $\boldsymbol{r}$ *можно представить в виде*

$$\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{l} \cdot h + \boldsymbol{\alpha}(h), \tag{6.5}$$

где $|\boldsymbol{\alpha}(h)| = o(h)$ *при* $h \to 0$.

Производной от вектор-функции $\boldsymbol{r}$ *в точке* t *называется предел*

$$\boldsymbol{r}'(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}. \tag{6.6}$$

Считается, что производная существует, если предел (6.6) существует и лежит в $\mathbb{R}^3$. Равенства (6.5), (6.6) и вообще равенства векторов понимаются в том смысле, что должны быть равными соответствующие координаты векторов. Учитывая это, легко установить следующий факт.

Теорема 121. *Существование производной вектор-функции*

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

равносильно существованию конечных производных всех ее координатных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, *причем справедливо следующее равенство:*

$$\boldsymbol{r}'(t) = x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j} + z'(t)\boldsymbol{k}.$$

Из этой теоремы, в частности, следует, что для вектор-функций справедливы теоремы 119 и 120.

[3] Символами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ принято обозначать единичные векторы, направленные соответственно вдоль координатных осей OX, OY, OZ прямоугольной декартовой системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$.

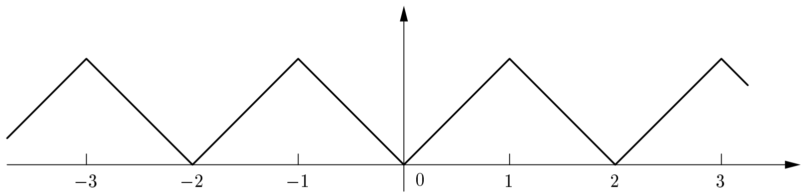

Рис. 37. График функции φ

3. $\mathbb{C}$-дифференцируемость и аналитичность функций комплексного переменного

Пусть $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, — комплекснозначная функция комплексного переменного, а z — внутренняя точка множества A, т. е. такая точка, которая содержится в A вместе с некоторым кругом.

Функция f называется $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $z \in A$, если существует число $k \in \mathbb{C}$ такое, что

$$f(x+h) - f(x) = k \cdot h + o(h) \text{ при } h \to 0\,. \tag{6.7}$$

Производной от функции f в точке $z \in A$ называется предел

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\,. \tag{6.8}$$

Здесь и в равенстве (6.7) приращение h — комплексная переменная. Считается, что производная от функции комплексного переменного существует, если предел (6.8) существует и является числом.

Понятия $\mathbb{C}$-дифференцируемости и производной для функций комплексного переменного по форме не отличаются от соответствующих понятий для функций вещественного переменного. Теоремы 119 и 120 остаются справедливыми и для функций комплексного переменного.

Для функций комплексного переменного с помощью понятия $\mathbb{C}$-дифференцируемости очень просто вводится новое понятие *аналитичности.*

Определение 129. *Функция комплексного переменного $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, называется аналитической в точке $z \in A$, если она $\mathbb{C}$-дифференцируема во всех точках некоторой окрестности точки z.*

§ 2. Геометрический и физический смысл производной. Односторонние и бесконечные производные

1. Касательная к графику функции

Пусть функция $f:\ (a\,,\,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in (a\,,\,b)$. Обозначим $y_0 := f(x_0)$, и пусть

$$\Gamma_f := \big\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a\,,\,b)\,,\ y = f(x)\big\} \tag{6.9}$$

— график[4] функции f. Введем в рассмотрение *пучок прямых*[5], проходящих через точку $M_0(x_0\,,\,y_0) \in \Gamma_f$. Поставим такую задачу: *среди прямых пучка найти ту, которая финально при $x \to x_0$ наиболее тесно прилегает к графику Γ_f*. Эта прямая и будет называться *касательной к графику Γ_f в точке M_0*. Дадим теперь более точное определение.

Определение 130. *Прямая γ называется касательной к графику Γ_f в точке $M_0 \in \Gamma_f$, если:*

(a) *точка M_0 лежит на прямой γ;*

(b) *расстояние от точки $M(x\,,\,f(x))$ до прямой γ является бесконечно малым по сравнению с расстоянием между точками M и M_0 при $x \to x_0$.*

Теорема 122. *Существование касательной к графику Γ_f функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,,\,y_0) \in \Gamma_f$ равносильно существованию производной $f'(x_0)$, причем эта производная равна угловому коэффициенту касательной.*

◀ Предположим сначала, что существует касательная γ к графику функции f в точке $(x_0, y_0) \in \Gamma_f$. Пусть

$$(y - y_0)\cos\alpha - (x - x_0)\sin\alpha = 0 \tag{6.10}$$

— уравнение касательной, где α — угол ее наклона к оси абсцисс, и можно считать, что $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Из аналитической геометрии известно, что число

[4]Опять возникла путаница в обозначениях: в формуле (6.9) под $(x\,,\,y)$ понимается упорядоченная пара, а под $(a\,,\,b)$ — интервал числовой оси.

[5]Так иногда называют множество всех прямых, лежащих в плоскости и проходящих через данную точку.

$$|(f(x) - f(x_0)) \cdot \cos\alpha - (x - x_0) \cdot \sin\alpha| \tag{6.11}$$

равно расстоянию от точки $(x\,,\, f(x))$ до прямой γ. Так как касательная по предположению существует, то, согласно определению 130, должно быть

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x\neq x_0}} \frac{|(f(x) - f(x_0)) \cdot \cos\alpha - (x - x_0) \cdot \sin\alpha|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2}} = 0\,. \tag{6.12}$$

При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ последнее равенство равносильно такому

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x\neq x_0}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^2}} = 0\,. \tag{6.13}$$

Отсюда видно, что

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0,\\ x\neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty\,.$$

Таким образом, в этом случае производная $f'(x_0)$ существует и равна ∞, т. е. угловому коэффициенту касательной $x = x_0$ (см. рис. 38, а также рис. 42—45).

В случае $|\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$ равенство (6.12) равносильно тому, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0,\\ x\neq x_0}} \varepsilon(x) = 0$, где обозначено

$$\varepsilon(x) := \frac{\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \operatorname{tg}\alpha\right|}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^2}}\,. \tag{6.14}$$

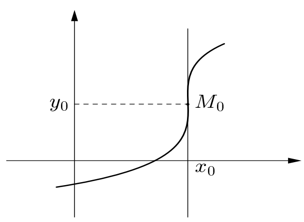

Рис. 38. Вертикальная касательная

Обозначая, далее,

$$T(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

переписываем равенство (6.14) в следующем равносильном виде:

$$|T(x) - \operatorname{tg}\alpha| = \varepsilon(x) \cdot \sqrt{1 + (T(x))^2}\,.$$

Решая это уравнение относительно $T(x)$, найдем

$$T(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - \left\{1 - [\varepsilon(x)]^2\right\}\left\{\operatorname{tg}^2\alpha - [\varepsilon(x)]^2\right\}}}{1 - [\varepsilon(x)]^2}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, $x \neq x_0$ и учитывая, что при этом $\varepsilon(x) \to 0$, получим

$$\lim_{\substack{x \to x_0,\\ x \neq x_0}} T(x) = \operatorname{tg}\alpha\,, \quad \text{т. е.} \quad f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Таким образом, и в этом случае существует производная $f'(x_0)$, которая притом равна угловому коэффициенту касательной (6.10).

Обратно, предположим, что существует предел

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0,\\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Если $f'(x_0) = \infty$, то выполняется равенство (6.13), которое равносильно равенству (6.12) при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, в этом случае прямая $x = x_0$ — касательная. Если $f'(x_0)$ — число, то, полагая $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, заключаем, что $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to x_0$, что равносильно равенству (6.12). Таким образом, касательная существует, а ее уравнение можно найти из (6.12) в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

(см. рис. 39). ▶

Доказанная теорема выражает геометрический смысл производной $f'(x_0)$ (конечной или бесконечной) как *углового коэффициента касательной к графику функции* f *в точке* $(x_0, f(x_0))$.

Предполагая, что $f'(x_0)$ — число, выясним геометрический смысл дифференциала. Используя классические обозначения

$$\begin{cases} dx := x - x_0\,, \\ dy := f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,, \end{cases}$$

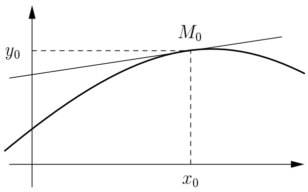

Рис. 39. Наклонная касательная

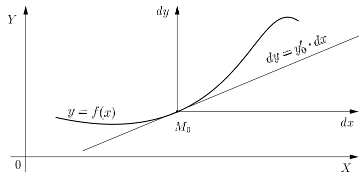

Рис. 40. Касательная — график дифференциала

запишем уравнение касательной в таком виде:

$$dy = f'(x_0) \cdot dx\,.$$

Отсюда очевидно, что *касательная к графику* Γ_f *функции* f *в точке* $(x_0, y_0) \in \Gamma_f$ *— это график дифференциала функции* f *в системе координат, за начало которой выбрана точка* $M_0(x_0, y_0)$, *а координатные оси параллельны исходным координатным осям и одинаково с ними направлены* (см. рис. 40).

2. Физический смысл производной

Движение материальной точки M в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ можно задать с помощью вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, выражающей зависимость радиуса-вектора $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ движущейся точки M от времени t. В каждый момент времени t конец радиуса-вектора указывает место, где в этот момент находится материальная точка. Задавая приращение Δt времени, рассмотрим соответствующее приращение радиуса-вектора:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{MM'}.$$

Это приращение приближенно можно считать вектором пути, который прошла материальная точка за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$. Чтобы вычислить среднюю скорость движения материальной точки на указанном промежутке времени, надо разделить $\Delta \mathbf{r}$ на Δt:

$$\mathbf{v}_{\text{средняя}}([t, t + \Delta t]) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}\,.$$

Устремляя здесь Δt к нулю, получим в пределе (предполагая, что он существует) *мгновенную скорость движения материальной точки в момент времени* t:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \mathbf{r}'(t)\,.$$

Таким образом, *мгновенная скорость движения материальной точки в момент времени* t *равна производной в точке* t *радиуса-вектора движущейся точки по времени* t. Взяв производную по t от обеих частей равенства

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\,,$$

получим

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}\,.$$

Таким образом, *проекции вектора скорости на координатные оси равны производным соответствующих проекций радиуса-вектора движущейся точки.*

3. Односторонние и бесконечные производные

Односторонними прозводными от функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, называются следующие пределы:

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &:= \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{при } x \to x_0\,,\ x < x_0\,; \\ f'_+(x_0) &:= \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \text{при } x \to x_0\,,\ x > x_0\,. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Они называются соответственно производными слева и справа и применяются в тех случаях, когда в точке x_0 не существует производной, либо когда функция f определена только в левой, либо только в правой окрестности точки x_0. В соответствии с понятиями левой и правой производных можно рассматривать левую и правую касательные к графику функции f в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Так, если обе производные (6.15) существуют и конечны, то левая и правая касательные представляют собой лучи, имеющие соответственно уравнения:

$$y = y_0 + f'_-(x_0) \cdot (x - x_0)\,, \qquad y = y_0 + f'_+(x_0) \cdot (x - x_0)\,,$$

приближенно представляющие функцию f в левой и правой окрестностях точки x_0 соответственно (см. рис. 41).

С понятием бесконечной производной мы уже встречались. *Односторонние бесконечные производные* могут возникать в тех случаях, когда один или оба предела (6.15) равны бесконечности.

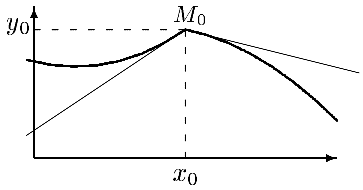

Рис. 41. Односторонние касательные в точке M_0

На рис. 42—45 показаны фрагменты графиков функций в окрестности точки $(x_0\,, y_0)$, когда обе производные (6.15) бесконечны:

(a) $f'(x_0) = +\infty\,;$ (b) $f'(x_0) = -\infty\,;$

(c) $\begin{cases} f'_-(x_0) = -\infty\,, \\ f'_+(x_0) = +\infty\,; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} f'_-(x_0) = +\infty\,, \\ f'_+(x_0) = -\infty\,. \end{cases}$

Читателю предлагается самостоятельно построить эскизы графиков функций в окрестности точки $(x_0\,, y_0)$ в тех случаях, когда один из пределов (6.15) конечен, а другой бесконечен.

§ 3. Основные правила вычисления производных. Производные элементарных функций

1. Основные правила вычисления производных

Теорема 123. (a) *Если* $f(x) \equiv c$, *то* $f'(x) \equiv 0$.

(b) *Если* $f(x) \equiv x$, *то* $f'(x) \equiv 1$.

(c) *Если* $f(x) \equiv |x|$, *то* $f'(x) \equiv \operatorname{sign} x$ *при* $x \neq 0$.

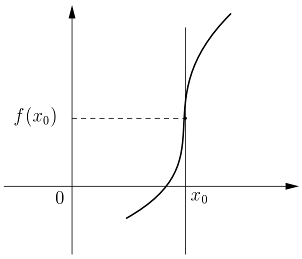

Рис. 42. $f'(x_0) = +\infty$

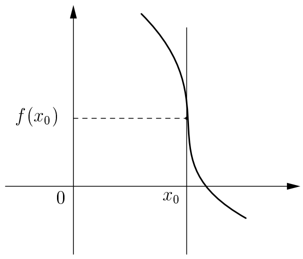

Рис. 43. $f'(x_0) = -\infty$

◀ (a) Если $f(x) \equiv c$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

(b) Если $f(x) \equiv x$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,.$$

(c) Если $f(x) = |x|$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}\,.$$

Отсюда при $x > 0$ имеем

$$\frac{d}{dx}|x| = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,.$$

Аналогично при $x < 0$ получаем

$$\frac{d}{dx}|x| = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1\,.$$

Таким образом, $\dfrac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$. ▶

Теорема 124. *Предположим, что функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, а c — постоянная. Тогда*

(a) *сумма $u + v$ дифференцируема в точке x, причем*

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)\,;$$

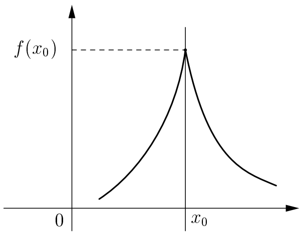

Рис. 44. $\begin{cases} f'_-(x_0) = +\infty, \\ f'_+(x_0) = -\infty \end{cases}$

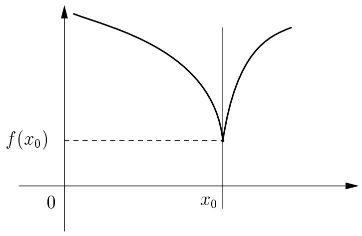

Рис. 45. $\begin{cases} f'_-(x_0) = -\infty, \\ f'_+(x_0) = +\infty \end{cases}$

(b) *произведение* $u \cdot v$ *дифференцируемо в точке* x, *причем*

$$(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\,;$$

(c) $(c \cdot u)'(x) = c \cdot u'(x)$, *где* c *— постоянная;*

(d) *если* $v(x) \neq 0$, *то частное* $\dfrac{u}{v}$ *дифференцируемо в точке* x, *причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}\,.$$

◄ (a) Имеем

$$(u+v)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(u(x+h) + v(x+h)) - (u(x) + v(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)\,.$$

(b) Имеем

$$(u \cdot v)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x+h) + u(x)[v(x+h) - v(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left(v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) =$$
$$= u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\,.$$

(c) Полагая в (b) $v(x) \equiv c$ и учитывая, что $\dfrac{d}{dx}c \equiv 0$, получим

$$\frac{d}{dx}(c \cdot u(x)) = u(x) \cdot \frac{d}{dx}c + c \cdot \frac{d}{dx}u(x) = c \cdot u'(x)\,.$$

(d) Имеем

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x) - v(x+h)u(x)}{h \cdot v(x+h) \cdot v(x)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)]v(x) - [v(x+h) - v(x)]u(x)}{h \cdot v(x+h) \cdot v(x)} =$$
$$= \frac{1}{(v(x))^2}\left(\lim_{h\to 0} v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \lim_{h\to 0} u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right) =$$
$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}\,. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Отметим, что теорема о производной произведения допускает обобщение на случай трех и бо́льшего числа сомножителей. Например:

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'\,.$$

В случае n сомножителей формула для производной произведения приобретает следующий вид:

$$(u_1u_2\ldots u_n)' = u_1'u_2\ldots u_n + u_1u_2'\ldots u_n + \ldots + u_1u_2\ldots u_n'\,.$$

Читателю предлагается самостоятельно доказать эти формулы. Теоремы 123 и 124 позволяют вычислять производные от любых рациональных функций. Например:

$$\frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}x \cdot x = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x\,;$$
$$\frac{d}{dx}\frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{1 \cdot (x^2-x+1) - (2x-1)(x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2x-x^2}{(x^2-x+1)^2}\,.$$

Теорема 125. *Если функция* $f : X \longrightarrow Y$ *дифференцируема в точке* $x \in X$, *а функция* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* $f(x) = y \in Y$, *то композиция* $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *дифференцируема в точке* x, *причем*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,. \tag{6.16}$$

◀ В силу дифференцируемости функции g имеем при $h \to 0$:

$$g[f(x+h)] - g[f(x)] = g'(f(x)) \cdot [f(x+h) - f(x)] + o[f(x+h) - f(x)]\,.$$

Деля это равенство на $h \neq 0$ и переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g[f(x+h)] - g[f(x)]}{h} &= \\
= g'(f(x)) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to)} \frac{o(f(x+h) - f(x))}{h} &= \\
= g'(f(x)) \cdot f'(x) + \lim_{h\to)} \frac{o(f(x+h) - f(x))}{h} &= \\
= g'(f(x)) \cdot f'(x) + \lim_{h\to 0} \frac{o(O(h))}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.& \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

В качестве простого примера на применение формулы (6.16) продифференцируем функцию $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, представляя ее в виде композиции функций

$$y = t^2\,,\ t = \frac{x-1}{x+1}\,.$$

Имеем

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\frac{x-1}{x+1} = 2\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}\,.$$

Формула, аналогичная (6.16), справедлива для производной композиции трех и бо́льшего числа функций. Например,

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)\,. \tag{6.17}$$

Формулу для производной композиции функций называют иногда *цепным правилом.* Читателю рекомендуется самостоятельно сформулировать и доказать цепное правило для вычисления производной от композиции n функций.

Теорема 126 (об инвариантности формы дифференциала). *Дифференциал композиции $y = f(x(t))$ можно записать в такой форме: $dy = f'(x) \cdot dx$, т. е. так, как если бы переменная x была независимой.*

◀ Используя формулу (6.16), имеем

$$dy = (f \circ x)'(t) \cdot dt = f'(x(t)) \cdot x'(t) \cdot dt = f'(x(t)) \cdot dx(t) = f'(x) \cdot dx \,. \ \blacktriangleright$$

Теорема 127. *Пусть функция $f : [a\,, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна, непрерывна и имеет производную в точке $x \in [a\,, b]$. Тогда обратная функция f^{-1} имеет производную в точке $y = f(x)$, причем*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \,. \tag{6.18}$$

◀ Пусть Δx — приращение аргумента в точке x. Символом $\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x)$ обозначим соответствующее ему приращение функции f. Так как обе функции f и f^{-1} строго монотонны и непрерывны, то имеет место такая равносильность:

$$\Delta x \to 0\,,\, \Delta x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta y \to 0\,,\, \Delta y \neq 0\,.$$

Учитывая это, имеем

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{f'(x)} \,. \ \blacktriangleright$$

Замечание. В теореме 127 не исключаются такие возможности: $f'(x) = 0$ и $f'(x) = \infty$. В этих случаях формула (6.18) приобретает вид $\infty = \dfrac{1}{0}$ и $0 = \dfrac{1}{\infty}$ соответственно.

2. Вычисление табличных производных

1) Непосредственно применяя определение 128, вычислим производную функции $y = \ln x$. Имеем

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \ln \left[\lim_{h\to 0} \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right)^{1/x} \right] =$$

$$= \ln \left(\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right)^{1/x} = \ln \left(\exp \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\,.$$

Таким образом, $\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$.

Если $y = \log_a x$, то

$$y' = \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \left[\frac{\ln x}{\ln a}\right] = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

Если же $y = \log_a |x|$, то на основании теоремы о производной композиции при $x \neq 0$ имеем

$$y' = \frac{1}{|x| \ln a} \cdot \frac{d}{dx} |x| = \frac{1}{|x| \ln a} \cdot \operatorname{sign} x = \frac{1}{x \ln a}\,.$$

2) Производную от функции $y = a^x$ найдем с помощью теоремы о производной обратной функции:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy} \log_a y} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{y \ln a}\right)} = y \ln a = a^x \ln a\,.$$

Отсюда при $a = e$ получаем формулу для производной от экспоненты

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x\,, \text{ так как } \ln e = 1\,.$$

3) Найдем производную от степенной функции $y = x^\alpha$. При $x > 0$ имеем

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d}{dx} e^{\alpha \cdot \ln x} = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{d}{dx} \ln x = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}\,.$$

Если степенная функция определена и при $x < 0$, то для ее производной справедлива та же формула, что и при $x > 0$ (доказать).

4) Вычислим производные от тригонометрических функций. Имеем

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} = \cos x\,.$$

Таким образом, $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$. Далее,

$$\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x\,,$$

т. е.

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\,.$$

Далее,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

И наконец,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x = \frac{d}{dx}\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

5) Производные от обратных тригонометрических функций

$$y = \arcsin x\,,\ y = \arccos x\,,\ y = \operatorname{arctg} x\,,\ y = \operatorname{arcctg} x$$

можно вычислить на основании теоремы о производной обратной функции. Имеем:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\cos y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\operatorname{tg} y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\operatorname{ctg} y} = \frac{1}{-\dfrac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Полученные результаты вычислений сведем в следующую *таблицу производных*:

$f(x)$	$f'(x)$	Ограничения
c	0	
x	1	
x^α	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$x>0$
$\|x\|$	$\operatorname{sign} x$	$x\neq 0$
a^x	$a^x\cdot\ln a$	$a>0$
e^x	e^x	
$\log_a\|x\|$	$1/(x\ln a)$	$a>0\,,a\neq 1\,,x\neq 0$
$\ln\|x\|$	$1/x$	$x\neq 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$	$x\neq k\cdot\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\|x\|<1$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\|x\|<1$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$	
$\operatorname{arcctg} x$	$-1/(1+x^2)$	

В дополнение к табличным производным вычислим производные *гиперболических функций*. Имеем:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ch} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sh} x = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{th} x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{cth} x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} x \cdot \dfrac{d}{dx}\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,.$$

Итак, получены следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x\,, \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x\,,$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{cth} x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,.$$

Используя их и теорему о производной обратной функции, можно вычислить производные *обратных гиперболических функций* (читателю рекомендуется сделать это самостоятельно). Здесь же воспользуемся явными формулами, полученными в § 4 гл. 4. Имеем

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arch} x = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \frac{\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ,\ |x| > 1\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arsh} x = \frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arth} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}\ ,\ |x| < 1\,;$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcth} x = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{x^2-1}\ ,\ |x| > 1\,.$$

3. Некоторые другие правила вычисления производных

1) **Логарифмическое дифференцирование.** Если функция f дифференцируема в точке x и $f(x) \neq 0$, то на основании теоремы о производной композиции имеем

$$\frac{d}{dx} \ln |f(x)| = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x) \,,$$

откуда

$$\frac{d}{dx} f(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} \ln |f(x)| \,. \tag{6.19}$$

Эта последняя формула лежит в основе приема вычисления производных, известного под названием *логарифмического дифференцирования.* Эффект применения формулы (6.19) основан на том, что для некоторых функций f производная $\dfrac{d}{dx} \ln |f(x)|$ вычисляется проще, чем $f'(x)$.

Например, для функции $f(x) = x^x$, $x > 0$ имеем

$$\ln(x^x) = x \cdot \ln x \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} \ln(x^x) = 1 + \ln x \,.$$

Применяя теперь формулу (6.19), находим

$$\frac{d}{dx}(x^x) = x^x \cdot (1 + \ln x) \,.$$

2) **Вычисление производных от функций, заданных параметрически.** Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \,, \\ y = \psi(t) \,, \end{cases} \qquad t \in [t_0 \,, T] \,, \tag{6.20}$$

где φ и ψ — некоторые функции. Предполагая, что для функции φ существует обратная функция φ^{-1}, исключим из равенств (6.20) переменную t. В результате получится следующая функция переменного x:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \,. \tag{6.21}$$

Принято считать, что эта функция *задана параметрически* уравнениями (6.20).

Теорема 128. *Если функции φ и ψ дифференцируемы в точке $t \in [t_0\,, T]$ и $\varphi'(t) \neq 0$, то функция* (6.21), *заданная параметрически уравнениями* (6.20), *дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$, причем*

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \tag{6.22}$$

◀ Дифференцируемость функции (6.21) вытекает из теорем о производных сложной и обратной функций. Используя их, имеем

$$y'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,. \quad ▶$$

В качестве примера найдем производную $y'(x)$ от функции, заданной параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cdot (t - \sin t)\,, \\ y = a \cdot (1 - \cos t)\,, \end{cases} \qquad 0 < t < 2\pi\,.$$

Имеем

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \cdot \sin t}{a \cdot (1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \dfrac{t}{2} \cos \dfrac{t}{2}}{2 \sin^2 \dfrac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\,.$$

3) **Вычисление производных от функций, заданных неявно.** Говорят, что функция $y = y(x)$, $x \in (a\,, b)$, задана неявно уравнением

$$F(x\,, y) = 0\,, \tag{6.23}$$

если при всех $x \in (a\,, b)$ выполняется равенство $F[x\,, y(x)] = 0$. Дифференцирование заданных так функций основано на следующем утверждении.

Если существуют частные производные[6] F'_x, F'_y, *и*

$$F'_y(x\,, y(x)) \neq 0\,,$$

[6] *Частной производной* функции нескольких переменных называется ее производная по одной переменной при фиксированных значениях остальных переменных.

то функция $y = y(x)$, *заданная неявно уравнением* (6.23), *дифференцируема в точке* x, *причем*

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x\,,\,y)}{F'_y(x\,,\,y)}\,. \tag{6.24}$$

Это утверждение будет доказано в дальнейшем, а здесь используем его только для вычисления производных. Вычислим, например, производную от функции $y = y(x)$, заданную неявно уравнением

$$F(x\,,\,y) \equiv x^3 + y^3 - 3axy = 0\,.$$

Сначала вычисляем частные производные:

$$F'_x(x\,,\,y) = 3x^2 - 3ay\ ; \quad F'_y(x\,,\,y) = 3y^2 - 3ax\,.$$

Применяя формулу (6.24), получим

$$y'(x) = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\,.$$

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Производные высших порядков

Предположим, что множество $X \subset \mathbb{R}$ — открытое, а функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке множества X. Сопоставляя каждому значению $x \in X$ значение производной $f'(x)$, получим[7] *производную функцию* $f' : x \longmapsto f'(x)$. Постановка вопроса о дифференцируемости функции f' приводит к понятию *производной второго порядка* от функции f.

Определение 131. *Производная второго порядка* $f''(x)$ *от функции* f *в точке* x *определяется равенством*

$$f''(x) := (f')'(x)\,.$$

[7]Обращаю внимание читателя на различие между понятиями: *производная* (т. е. число $f'(x)$) и *производная функция* (т. е. отображение $f' : x \longmapsto f'(x)$).

Производная n-го порядка $f^{(n)}$ определяется по индукции равенством

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)\,,$$

где $f^{(n-1)} : x \longmapsto f^{(n-1)}(x)$ — производная функция порядка $(n-1)$.

С точки зрения этого определения исходную функцию иногда удобно рассматривать как *производную нулевого порядка,* т. е.

$$f^{(0)}(x) := f(x)\,.$$

В отличие от $f^{(0)}$ и f' производные f'', f''', ... , $f^{(n)}$, ... называются *производными высших порядков.*

Если для функции f при любом $x \in X$ существуют конечные производные до порядка n включительно, то эта функция называется *n-кратно дифференцируемой* на множестве X. Если для функции f при любом $x \in X$ существуют производные любого порядка n, то эта функция называется *бесконечно дифференцируемой* на множестве X.

В главе 4 мы ввели множество $C[X]$ всех функций, непрерывных на множестве X. Аналогично символом $C^n[X]$ принято обозначать множество всех функций $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, имеющих непрерывные на множестве X производные до порядка n включительно. Символом $C^\infty[X]$ принято обозначать множество всех функций $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, имеющих непрерывные на множестве X производные любого порядка $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим важные **примеры** вычисления производных высших порядков от некоторых часто встречающихся элементарных функций.

1) Пусть $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ — многочлен степени n от x. Его последовательные производные равны

$$\begin{aligned}
&P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}\,;\\
&P''(x) = 2!a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}\,;\\
&P'''(x) = 3!a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}\,;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P^{(n)}(x) = n!a_n\,.
\end{aligned}$$

Поскольку производная порядка n — постоянная, то все производные более высоких порядков тождественно равны нулю, т. е.

$$P^{(n+1)}(x) \equiv P^{(n+2)}(x) \equiv \ldots \equiv 0\,.$$

2) Найдем последовательные производные показательной функции $f(x) := a^x$. Имеем

$$f'(x) = a^x \ln a\,,\ f''(x) = a^x (\ln a)^2\,, \ldots\,,\ f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n\,, \ldots\,.$$

Полагая здесь $a = e$ и учитывая, что $\ln e = 1$, получим

$$e^x = \frac{d}{dx}e^x = \frac{d^2}{dx^2}e^x = \ldots = \frac{d^n}{dx^n}e^x = \ldots\,,$$

т. е. *производная любого порядка от экспоненты равна самóй экспоненте.*

3) Для функции $f(x) = \sin x$ имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{6.25}$$

◀ Сначала находим

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\,;$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\,;$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \frac{d}{dx}\sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Для обоснования общей формулы (6.25) следует применить метод полной индукции. ▶

4) Для функции $f(x) = \cos x$ имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Это равенство доказывается аналогично равенству (6.25).

5) Для функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(1+x) = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,. \tag{6.26}$$

◀ Последовательно дифференцируя данную функцию, находим

$$\frac{d}{dx}\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}\,;$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\ln(1+x)=-\frac{1!}{(1+x)^2}\,;$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\ln(1+x)=\frac{2!}{(1+x)^3}\,.$$

Для обоснования общей формулы (6.26) следует применить метод индукции. ▶

6) Для функции $f(x)=(1+x)^\mu$ имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\mu=\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}\,. \tag{6.27}$$

◀ Последовательно дифференцируя данную функцию, получим:

$$\frac{d}{dx}(1+x)^\mu=\mu(1+x)^{\mu-1}\,;$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(1+x)^\mu=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}\,;$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(1+x)^\mu=\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3}\,.$$

Для обоснования общей формулы (6.27) следует применить метод полной индукции. ▶

7) Для гиперболических функций ch и sh, учитывая формулы (**??**), имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{ch}x=\begin{cases}\operatorname{ch}x & \text{при } n \text{ четном},\\ \operatorname{sh}x & \text{при } n \text{ нечетном};\end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{sh}x=\begin{cases}\operatorname{sh}x & \text{при } n \text{ четном},\\ \operatorname{ch}x & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Приведем один результат общего характера, касающийся вычисления производных высших порядков от произведения двух функций.

Теорема 129 (формула Лейбница). *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют конечные производные до n-го порядка включительно, то*

$$(u\cdot v)^{(n)} = u\cdot v^{(n)} + \binom{n}{1} u'\cdot v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u''\cdot v^{(n-2)} + \ldots + u^{(n)}\cdot v\,, \quad (6.28)$$

где $\displaystyle\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ *— биномиальные коэффициенты.*

Замечание. Учитывая, что $u(x) = u^{(0)}(x)$, можно записать формулу Лейбница (6.28) в следующем виде, аналогичном формуле бинома Ньютона:

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}\,. \quad (6.29)$$

◀ При $n = 1$ по теореме о производной произведения имеем

$$(u\cdot v)' = uv' + u'v\,.$$

Дифференцируя это равенство, при $n = 2$ получим

$$(u\cdot v)'' = uv'' + 2u'v' + u''v\,.$$

Дифференцируя это равенство, при $n = 3$ получим

$$(u\cdot v)''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v\,.$$

Таким образом, для значений $n = 1\,,\,2\,,\,3$ формула Лейбница (6.29) установлена. Желая применить метод полной индукции, предположим, что тождество (6.29) справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и покажем, что оно остается справедливым после замены $n \longmapsto (n+1)$. С этой целью продифференцируем тождество (6.29) по переменной

x и преобразуем полученный результат

$$(u\cdot v)^{(n+1)} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d}{dx}\left(u^{(k)}v^{(n-k)}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(u^{(k)}v^{(n-k+1)} + u^{(k+1)}v^{(n-k)}\right) =$$
$$= u^{(0)}v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}u^{(k+1)}v^{(n-k)} + u^{(n+1)}v^{(0)} =$$
$$= u^{(0)}v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right)u^{(k)}v^{(n-k)} + u^{(n+1)}v^{(0)} =$$
$$= u^{(0)}v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{(k)}v^{(n+1-k)} + u^{(n+1)}v^{(0)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{(k)}v^{(n+1-k)}\,.$$

В этих преобразованиях было использовано тождество

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\,,$$

доказанное в главе 2, § 1, п. 3. ▶

В качестве **примера** вычислим

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(P(x)\cdot e^{\lambda x}\right)\,,$$

где $P(x)$ — многочлен степени $m \leqslant n$. Так как $\dfrac{d^k}{dx^k}P(x) \equiv 0$ при $k > m$, то формула Лейбница дает $(n \geqslant m)$:

$$\frac{d^n}{dx^n}P(x)e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{d^k}{dx^k}P(x)\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{m}\lambda^{n-k}\binom{n}{k}P^{(k)}(x)\,.$$

Возьмем более конкретный пример

$$\frac{d^3}{dx^3}(x^3e^x) = \left(x^3 + 3\frac{d}{dx}x^3 + 3\frac{d^2}{dx^2}x^3 + \frac{d^3}{dx^3}x^3\right)e^x = (x^3 + 9x^2 + 18x + 6)e^x\,.$$

2. Дифференциалы высших порядков

Предположим, что у функции $y = f(x)$ в точке x существует конечная производная n-го порядка, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение 132. *Дифференциалом n-го порядка функции f в точке x называется однородная функция степени n от приращения h, определяемая следующим равенством:*

$$D^n f(x)(h)^n := f^{(n)}(x) \cdot h^n \,. \tag{6.30}$$

Кроме того, удобно считать это равенство пригодным и для определения *дифференциала порядка нуль*, т. е. полагать

$$D^0 f(x)(h)^0 := f(x) = f^{(0)}(x) \,.$$

Обозначив левую часть равенства (6.30) символом $d^n f(x)$ и полагая в правой части $h = dx$, получим другую (*классическую*) форму записи дифференциала n-го порядка:

$$d^n f(x) := f^{(n)}(x) \cdot dx^n \,,$$

которая часто встречается в литературе. Разделив последнее равенство на dx^n, получим другое (в виде дроби) выражение для производной n-го порядка в точке x:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \,,$$

которое было неоднократно использовано выше.

В заключение этого пункта отметим, что, вообще говоря, *дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности* (в отличие от дифференциалов 1-го порядка).

◄ В самом деле, если $y = f(x(t))$, то $d^2 y = (f \circ x)''(t) \cdot dt^2$, где

$$\begin{aligned}(f \circ x)''(t) = \frac{d}{dt}(f \circ x)'(t) = \frac{d}{dt}[f'(x(t)) \cdot x'(t)] = \\ = f''(x(t)) \cdot (x'(t))^2 + f'(x(t)) \cdot x''(t) \,.\end{aligned}$$

Используя этот результат, получим

$$d^2 y = \left[f''(x(t))(x'(t))^2 + f'(x(t))x''(t)\right] dt^2 = f''(x) \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2 x \,.$$

Если же переменная x — независимая, то

$$d^2y = f''(x) \cdot dx^2 .$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, видим, что они отличаются слагаемым $f'(x) \cdot d^2x$, которое в общем случае не равно нулю. Таким образом, даже дифференциал второго порядка не инвариантен (не говоря уже о дифференциалах более высоких порядков). ►

Задачи к главе 6

6.1. Продифференцировать следующие функции:

a) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; b) $y = \dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x+1}$;

c) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; d) $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$;

e) $y = \sin(\cos^2 x) + \cos(\sin^2 x)$; f) $y = \sin\left[\sin(\sin x)\right]$;

g) $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$; h) $y = (x^2-2x+2)e^x$;

i) $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$; j) $y = \ln(\ln(\ln x))$;

k) $y = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2(1+x)}$; l) $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$;

m) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$; n) $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}$;

o) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; p) $y = \exp(\operatorname{tg}(x^x))$.

6.2. Используя логарифмическое дифференцирование, найти производные следующих функций:

a) $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; b) $y = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_n)^{\alpha_n}$;

c) $y = (x+\sqrt{1+x^2})^n$; d) $y = \dfrac{x^2}{1-x} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$;

e) $y = \dfrac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$; f) $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$;

g) $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$; h) $y = \left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$;

i) $y = (\sin x)^{\cos x}$; j) $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

6.3. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ функций $y = y(x)$, заданных параметрически следующими уравнениями (параметр t считается положительным):

a) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $\quad y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$;

b) $x = \sin^2 t$, $\quad y = \cos^2 t$;

c) $x = a\cos t$, $\quad y = b\sin t$;

d) $x = a\,\mathrm{ch}\, t$, $\quad y = b\,\mathrm{sh}\, t$;

e) $x = e^{2t}\cos^t$, $\quad y = e^{2t}\sin^2 t$;

f) $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\quad y = \arccos\dfrac{1}{1+t^2}$.

6.4. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ функций $y = y(x)$, заданных неявно следующими уравнениями:

a) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$; $\quad$ b) $y^2 = 2px$;

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $\quad$ d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$;

e) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

f) $r = a\cdot\varphi$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$;

g) $r = a\cdot e^{m\varphi}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}$.

6.5. Найти y'', если:

a) $y = x\sqrt{1+x^2}$; $\quad$ b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $y = e^{-x^2}$; $\quad$ d) $y = \mathrm{tg}\, x$;

e) $y = x\cdot[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$; $\quad$ f) $y = x\ln x$;

g) $y = x^x$. $\quad$ h) $y = (1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x$;

i) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad$ j) $y = \ln f(x)$.

6.6. Найти производные n-го порядка от следующих функций:

a) $y = \sin ax \cos bx$; b) $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$; c) $y = e^x \cos x$;

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$; e) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$; f) $y = \sin^2 x$;

g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; h) $y = \sin^3 x$; i) $y = \cos^3 x$;

j) $y = \sin ax \sin bx$; k) $y = \cos ax \cos bx$; l) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$;

m) $y = \sin^2 ax \cos bx$; n) $y = \cos^2 x$; o) $y = x \cos ax$;

p) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{e^x}$; q) $y = \dfrac{e^x}{x}$; r) $y = x^2 \sin ax$;

s) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$; t) $y = e^x \sin x$; u) $y = \ln \dfrac{a+bx}{c+dx}$.

Глава 7

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Теоремы «о средних значениях». Правило Лопиталя

1. Теоремы «о средних значениях»

Сначала напомним определение понятия локального экстремума.

Определение 133. *Точка $x_0 \in X$ называется точкой локального экстремума функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что $\forall x \in U(x_0) \cap X$, $x \neq x_0$, выполняется хотя бы одно из следующих неравенств*:

(a) $f(x) < f(x_0)$ (строгий локальный максимум);
(b) $f(x) \leqslant f(x_0)$ (локальный максимум);
(c) $f(x) > f(x_0)$ (строгий локальный минимум);
(d) $f(x) \geqslant f(x_0)$ (локальный минимум).

Функция, график которой показан на рис. 46, имеет экстремумы в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, причем в точках x_1, x_3, x_5 — минимумы, а в точках x_1, x_2, x_3, x_4 — максимумы.

Теорема 130 (Ферма[1]). *Если внутренняя точка x_0 множества X является точкой локального экстремума функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ и если существует производная $f'(x_0) \in \widetilde{\mathbb{R}}$, то $f'(x_0) = 0$.*

◀ Предположим для определенности, что в точке x_0 функция f имеет *локальный максимум* (случай локального минимума можно рассмотреть аналогично). Так как x_0 — внутренняя точка множества X, то существует интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ такой, что

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies f(x) \leqslant f(x_0).$$

[1] *Ферма́* Пьер (1601—1665) — французский математик.

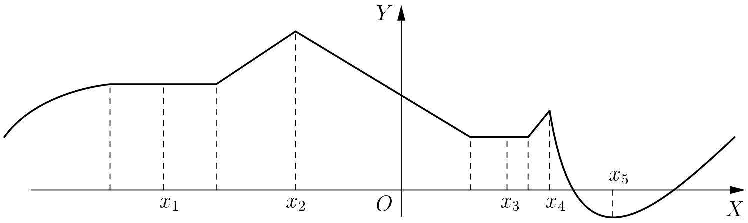

Рис. 46. График функции, имеющей экстремумы

Отсюда при $x_0 - \delta < x < x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Переходя здесь к пределу при $x \to x_0$, $x < x_0$, получим $f'(x_0) \geqslant 0$. Если же $x_0 < x < x_0 + \delta$, то $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, откуда в пределе при $x \to x_0$, $x > x_0$ получим $f'(x_0) \leqslant 0$. Оба неравенства, полученные для $f'(x_0)$, выполняются только при $f'(x_0) = 0$. ►

Отметим геометрический смысл теоремы Ферма. *Если функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема во внутренней точке $x_0 \in X^0$, которая является точкой ее локального экстремума, то касательная к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси абсцисс* (см. рис. 47).

Теорема 131 (Дарбу[2]). *Если функция $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то в некоторых точках интервала (a, b) производная функция $f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ принимает любое значение, заключенное между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

◄ Предположим сначала, что $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки, например $f'(b) < 0 < f'(a)$. Покажем, что в этом случае существует точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная равна нулю. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теоремам Вейерштрасса она ограничена, и существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой она

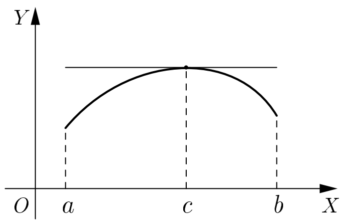

Рис. 47. К теореме Ферма

достигает своего максимального значения. Так как функция f дифференцируема и $f'(b) < 0 < f'(a)$, то при всех достаточно малых

[2]*Дарбу́* Жан Гастон (1842—1917) — французский математик.

$h > 0$ справедливы следующие неравенства:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + o(h) > f(a)\,,$$

$$f(b-h) = f(b) + f'(b) \cdot (-h) + o(h) > f(b)\,.$$

Эти неравенства означают, что наибольшее значение функции f не может достигаться ни в точке a, ни в точке b. Значит, $\xi \in (a\,,\,b)$, но тогда по теореме Ферма должно быть $f'(\xi) = 0$.

Исключим теперь сделанное выше предположение о знаках производных и предположим для определенности, что $f'(a) < f'(b)$. Возьмем произвольное $C \in (f'(a)\,,\,f'(b))$ и введем вспомогательную функцию $F(x) := f(x) - C \cdot x$. Она дифференцируема, причем

$$F'(x) \equiv f'(x) - C\,, \quad F'(a) = f'(a) - C < 0\,, \quad F'(b) = f'(b) - C > 0\,.$$

На основании доказанного выше $\exists \xi \in (a\,,\,b) \,:\, F'(\xi) = 0$, т. е. $f'(\xi) = C$. Предположим теперь, что $f'(a) = f'(b) =: A$. Введем вспомогательную функцию $F(x) := f(x) - A \cdot x$, для которой $F'(a) = F'(b) = 0$. Если функция F — постоянная, то $f'(x) \equiv A$, и в качестве точки ξ можно взять любую точку интервала $(a\,,\,b)$. Если же F отлична от постоянной, то в качестве точки ξ следует взять одну из точек ее экстремума, а именно ту, которая лежит на интервале $(a\,,\,b)$. ▶

Теорема 132 (Ролль[3]). *Если функция $f\,:\,[a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, дифференцируема на интервале $(a\,,\,b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a\,,\,b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

◀ Предположим сначала, что функция f — постоянная, т. е. $f(x) \equiv C$. В этом случае $f'(x) \equiv 0$, и поэтому в качестве точки ξ можно взять любую точку интервала $(a\,,\,b)$.

Предположим теперь, что функция f отлична от тождественной постоянной. Отсюда заключаем, что $m < M$, где

$$m := \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\,, \quad M := \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)\,,$$

а из теоремы Вейерштрасса об ограниченности вытекает, что m и M — числа. Поскольку они различные, то по меньшей мере одно из них не совпадает с $f(a) = f(b)$. Предположим для определенности,

[3] *Ролль* Мишель (1652—1719) — французский математик.

что $M \neq f(a) = f(b)$. По теореме Вейерштрасса о максимуме существует точка $\xi \in [a\,,\,b]$, в которой $f(\xi) = M$. В силу последнего неравенства точка ξ не может совпадать с концами отрезка, значит, $\xi \in (a\,,\,b)$. Итак, ξ — внутренняя точка локального максимума функции f, и в силу теоремы Ферма должно быть $f'(\xi) = 0$. Аналогично можно рассмотреть случай $m \neq f(a) = f(b)$. ►

Замечания. 1. Отметим геометрический смысл теоремы Ролля. *При выполнении условий теоремы Ролля существует точка $\xi \in (a\,,\,b)$ такая, что касательная к графику функции f в точке $(\xi\,,\,f(\xi))$ параллельна оси абсцисс* (см. рис. 48).

2. Отметим существенность всех трех условий теоремы Ролля: если хотя бы одно из условий теоремы Ролля не выполняется, то легко строятся примеры функций, на графиках которых нет точек, в которых касательная была бы параллельна оси абсцисс. Читателю предлагается сделать это самостоятельно.

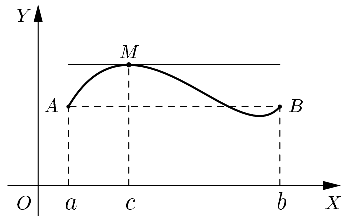

Рис. 48. К теореме Ролля

Теорема 133 (Лагранж[4]). *Если функция $f\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, дифференцируема на интервале $(a\,,\,b)$, то существует точка $\xi \in (a\,,\,b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)\,. \tag{7.1}$$

◄ Введем вспомогательную функцию

$$F(x) := f(x) - \lambda\cdot x\,,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр. Очевидно, что функция F непрерывна на $[a\,,\,b]$ и дифференцируема на $(a\,,\,b)$. Подберем значение параметра λ так, чтобы выполнялось равенство $F(a) = F(b)$. Имеем

$$f(a) - \lambda\cdot a = f(b) - \lambda\cdot b\,, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Таким образом, для функции $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$ выполнены все условия теоремы Ролля. Применяя ее, заключаем, что

[4] *Лагра́нж* Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик.

$\exists c \in (a\,,\,b)\ :\ F'(c) = 0$, а это равенство равносильно следующему:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,, \tag{7.2}$$

которое в свою очередь равносильно равенству (7.1). ▶

Замечания. 1. Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа. С этой целью построим график функции f и будем использовать обозначения, указанные на рис. 49. Обозначим также

$$A(a, f(a))\,,\ B(b, f(b))\,,\ M(c, f(c))\,.$$

Прямолинейный отрезок AB назовем *хордой.* Из $\triangle ABC$ видно, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \angle BAC$, т. е. правая часть равенства (7.2) равна угловому коэффициенту хорды $[A\,,\,B]$. Производная $f'(c)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику в точке M. Равенство (7.2) угловых коэффициентов двух прямых означает, что эти прямые параллельны. Итак, *при выполнении условий теоремы Лагранжа на графике функции* $f\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *существует точка* $M(c, f(c))$, *касательная в которой параллельна хорде* $[A\,,\,B]$.

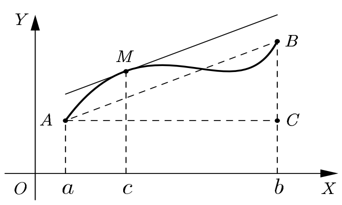

Рис. 49. К теореме Лагранжа

2. Теорему 133 часто называют *теоремой о конечных приращениях.* Это название связано с тем, что равенство (7.1) дает выражение для *конечного* приращения функции f, в отличие от равенства (6.1), дающего выражение для *бесконечно малого* приращения функции f.

Теорема 134 (Коши). *Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a\,,\,b]$, дифференцируемы на интервале $(a\,,\,b)$ и*

$$\forall x \in [a\,,\,b]\ :\ g'(x) \neq 0\,,$$

то существует точка $\xi \in (a\,,\,b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{7.3}$$

◀ Введем вспомогательную функцию

$$F(x) := f(x) - \lambda \cdot g(x)\,,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр. Очевидно, что функция F непрерывна на $[a\,,\,b]$ и дифференцируема на $(a\,,\,b)$. Подберем значение параметра λ так, чтобы выполнялось равенство: $F(a) = F(b)$. Имеем

$$f(a) - \lambda \cdot g(a) = f(b) - \lambda \cdot g(b)\,,$$

откуда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Таким образом, для функции $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot x$ выполнены все условия теоремы Ролля. Применяя ее, заключаем, что $\exists \xi \in (a\,,\,b)\,:\,F'(\xi) = 0$, а это равенство равносильно равенству

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi)\,. \tag{7.4}$$

Разделив последнее равенство на $g'(\xi)$, получим (7.3). ▶

Замечание. *Геометрический смысл теоремы Коши — такой же, как и теоремы Лагранжа.* Чтобы это показать, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x = g(t)\,, \\ y = f(t)\,, \end{cases} \quad t \in [a\,,\,b]\,. \tag{7.5}$$

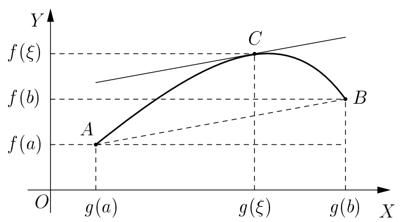

Рис. 50. К теореме Коши

При условиях, перечисленных в теореме Коши, уравнения (7.5) задают параметрически некоторую функцию[5] $y = y(x)$. В обозначениях, показанных на ее графике (см. рис. 50), имеем

$$A(g(a), f(a))\,, \quad B(g(b), f(b))\,, \quad C(g(\xi), f(\xi))\,.$$

[5]Именно из условия $g'(x) \neq 0$, как будет показано в главе 8, вытекает строгая монотонность функции g. Из строгой монотонности в силу теоремы 2 из главы 1 вытекает существование обратной функции g^{-1}. Таким образом, $y(x) = f(g^{-1}(x))$.

Угловой коэффициент хорды $[A\,,\,B]$ равен $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Угловой коэффициент касательной в точке $C(g(\xi), f(\xi))$ на основании теоремы 128 равен $y'(\xi) = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Таким образом, равенство (7.3) выражает параллельность касательной в точке C и хорды AB.

2. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

Теорема 135 (правило Лопиталя[6]). *Предположим, что функции*

$$f\,,\ g\ :\ [a\,,\,b] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty\,,$$

дифференцируемы на $(a\,,\,b)$, $g'(x) \neq 0$ *для всех* $x \in (a\,,\,b)$, *и пусть* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \widetilde{\mathbb{R}}$. *Если, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

(a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
(b) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$;
(c) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$,

то предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *существует и равен* A.

◀ Предположим сначала, что выполнено условие (a). В случае, когда a — число, доопределим функции f и g в точку a по непрерывности, полагая $f(a) = g(a) := 0$. Тогда на отрезке $[a\,,\,x] \subset [a\,,\,b]$ выполнены все условия теоремы Коши. Применяя ее, заключаем, что существует точка $\xi(x) \in (a\,,\,x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}\,.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} \xi(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то по теореме о пределе композиции функций имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A\,.$$

[6] *Лопита́ль (L'Hôpital)* Гийом Франсуа Антуан де (1661—1704) — маркиз, французский математик, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696), написанного по лекциям И. Бернулли (1667—1748). Правило Лопиталя на самом деле принадлежит И. Бернулли.

В случае, когда $a = -\infty$, рассматриваем функции $f\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ и $g\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ в правой окрестности точки $t = 0$. Тогда получим

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0}\frac{f\left(-\dfrac{1}{t}\right)}{g\left(-\dfrac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to+0}\frac{f'\left(-\dfrac{1}{t}\right)\dfrac{1}{t^2}}{g'\left(-\dfrac{1}{t}\right)\dfrac{1}{t^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A\,.$$

Предположим теперь, что выполнено условие (b). Применяя теорему Коши, заключаем, что существует точка ξ такая, что $a < x < \xi < y < b$ и $\dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, откуда

$$f(x) = f(y) + [g(x)-g(y)]\cdot\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Разделив последнее равенство на $g(x)$, получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{g(y)}{g(x)}\cdot\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{7.6}$$

Предполагая, что $A \in \mathbb{R}$, зададим $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и найдем такое $c \in (a\,,\,b)$, чтобы $\forall\xi \in (a\,,\,c]$ было $\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \leqslant M$ при некотором $M \in \mathbb{R}_+$. Фиксируя, далее, $y \in (a\,,\,c]$, найдем $x_0 \in (a\,,\,y)$ так, чтобы $\forall x \in (a\,,\,x_0)$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\,.$$

При тех же значениях переменной x, используя тождество (7.6), получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right| \leqslant \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+M\cdot\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon\,,$$

т. е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

Предполагая, что $A=+\infty$, зададим $E\in\mathbb{R}_+$. Найдем сначала $c\in(a\,,b)$ так, чтобы $\forall t\in(a\,,c]$ было $\dfrac{f'(t)}{g'(t)}\geqslant 3E$. Фиксируя, далее, $y\in(a\,,c)$, найдем $x_0\in(a\,,y)$ так, чтобы $\forall x\in(a\,,x_0)$ выполнялись неравенства

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|\leqslant\frac{E}{2}\quad\text{и}\quad\left|1-\frac{g(y)}{g(x)}\right|\geqslant\frac{1}{2}\,.$$

При тех же значениях переменного x имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\right|-\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|\geqslant 3E\cdot\frac{1}{2}-\frac{E}{2}=E\,.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

Случай $A=-\infty$ можно рассмотреть аналогично.

Доказательство для случая, когда выполнено условие (c), можно провести аналогично случаю (b), можно даже свести его к случаю (b). Соответствующие рассуждения опускаем. ▶

Замечания. 1. Теорема 135 доказана для предела при $x\to a$, $x>a$. Утверждение, аналогичное этой теореме, справедливо и для предела при $x\to b$, $x<b$.

2. Содержащееся в теореме 135 утверждение (правило Лопиталя) часто выражают, опуская ограничения, следующим образом: *предел отношения функций равен пределу отношения их производных, если этот последний предел существует.*

3. В качестве примера на применение правила Лопиталя установим следующий факт. *Если функция f определена в окрестности, а дифференцируема в проколотой окрестности*[7] *точки a, и если существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a,\\ x\neq a}}f'(x)=A$, то существует и производная $f'(a)$, причем $f'(a)=A$.*

◀ Применяя определение производной и правило Лопиталя, имеем

$$f'(a)=\lim_{\substack{x\to a,\\ x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a,\\ x\neq a}}f'(x)=A\,.\ ▶$$

[7] *Проколотой окрестностью* точки a называется любая ее окрестность, из которой удалена сама точка a.

§ 2. Формула Тейлора

1. Формула Тейлора для многочлена

Лемма 1. *Если в некоторой точке x_0 значения многочлена и всех его производных равны нулю, то этот многочлен тождественно равен нулю.*

◀ Пусть $Q(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$ — многочлен степени не выше n, и пусть

$$Q(x_0) = Q'(x_0) = \ldots = Q^{(n-1)}(x_0) = Q^{(n)}(x_0) = 0\,.$$

Отсюда следует, что коэффициенты многочлена Q удовлетворяют следующей треугольной однородной системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0 = c_0x_0^n + c_1x_0^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x_0 + c_n\,; \\ 0 = nc_0c_0^{n-1} + \ldots + 1!c_{n-1}\,; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = n!c_0x_0 + (n-1)!c_1\,; \\ 0 = n!c_0\,. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = c_n = 0$, и, значит, $Q(x) \equiv 0$. ▶

Теорема 136 (формула Тейлора для многочлена). *Если f — многочлен степени не выше n от x, а $x_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная точка, то справедливо тождество:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,. \quad (7.7)$$

◀ Для многочлена Тейлора (т. е. правой части равенства (7.7))

$$P_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

справедливы следующие очевидные равенства:

$$P_n(x_0) = f(x_0)\,, \quad P_n'(x_0) = f'(x_0)\,, \ \ldots\,, \ P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,.$$

Таким образом, для многочлена $Q(x) := f(x) - P_n(x)$ выполнены все условия леммы 1, и, значит, $Q(x) \equiv 0$. Отсюда получаем $f(x) = P_n(x)$, что равносильно равенству (7.7). ▶

2. Формула Тейлора для произвольной функции

Очевидно, что если у функции f существует конечная производная $f^{(n)}(x_0)$, то существует и функция r_n такая, что в некоторой окрестности точки x_0 имеет место тождество

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \quad (7.8)$$

называемое *формулой Тейлора степени* n *для функции* f *в окрестности точки* x_0. Сумма

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (7.9)$$

называется *многочленом Тейлора* функции f с центром в точке x_0, а последнее слагаемое $r_n(x)$ в (7.8) — *остаточным членом* формулы Тейлора.

Замечания. 1. Учитывая введенное в конце предыдущей главы понятие дифференциала любого порядка, можем переписать формулу Тейлора в следующем равносильном виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k f(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + r_n(x). \quad (7.10)$$

2. Очевидным свойством многочлена Тейлора[8] является то, что при $x \to x_0$ каждый следующий его член бесконечно мал по сравнению со всеми предыдущими[9], что удобно с точки зрения приближенных вычислений. В связи с этим представляют интерес различные оценки для остаточного члена $r_n(x)$ в окрестности точки x_0.

Теорема 137 (локальная форма остаточного члена). *Если существует конечная производная* $f^{(n)}(x_0)$, *то для остаточного члена формулы Тейлора* (7.8) *справедлива следующая асимтотическая оценка:*

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \quad (7.11)$$

[8] *Тéйлор (Taylor)* Брук (1685—1731) — английский математик.

[9] Точнее говоря, только с теми из них, которые отличны от тождественного нуля.

◀ Достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. С этой целью заметим, что

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{при} \quad x\to x_0\,,$$

так как $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0 по условию, а

$$P_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)\,,$$

что непосредственно следует из (7.9). Учитывая это и применяя $(n-1)$ раз правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{n\cdot(x-x_0)^{n-1}} = \ldots =$$
$$= \frac{1}{n!}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0} = \frac{1}{n!}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = 0\,. \quad ▶$$

Замечания. 1. Соотношение (7.11) называется *представлением остаточного члена в форме Пеано*[10]. Отметим частные случаи формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. При $n=0$ формула Тейлора приобретает такой вид:

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad \text{при} \quad x\to x_0$$

и равносильна непрерывности функции f в точке x_0. При $n=1$ она имеет следующий вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{при} \quad x\to x_0$$

и равносильна дифференцируемости функции f в точке x_0. При $n>1$ ее можно переписать в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{D^k f(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{при} \quad x\to x_0\,, \tag{7.12}$$

что равносильно n-кратной дифференцируемости функции f в точке a.

2. Из предыдущего замечания и из оценки (7.11) следует, что в формуле Тейлора (7.12) остаточный член бесконечно мал по сравнению с многочленом Тейлора[11] при $x\to x_0$. Отбрасывая остаточный член в (7.12),

[10] *Пеано* Джузеппе (1858—1932) — итальянский математик.

[11] Если, конечно, многочлен Тейлора отличен от тождественного нуля.

получаем приближенную формулу

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (7.13)$$

которая тем точнее, чем меньше число $|x - x_0|$. Формула (7.13) широко применяется в приближенных вычислениях.

Теорема 138 (следствие). *Если существует конечная производная* $f^{(n+1)}(x_0)$, *то для остаточного члена формулы Тейлора* (7.8) *справедлива следующая асимптотическая оценка:*

$$r_n(x) = O\left((x - x_0)^{n+1}\right) \quad \text{при} \quad x \to x_0. \quad (7.14)$$

◄ Так как существует число $f^{(n+1)}(x_0)$, то для функции f в окрестности точки x_0 имеет смысл формула Тейлора с многочленом степени $(n + 1)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + r_{n+1}(x). \quad (7.15)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (7.8), находим зависимость между их остаточными членами

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + r_{n+1}(x).$$

Разделив это равенство на $(x - x_0)^{n+1}$ и перейдя к пределу при $x \to x_0$, получим с использованием теоремы 137

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \lim_{x \to x_0} \frac{r_{n+1}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

что равносильно соотношению (7.14). ►

Замечание. Очевидно, что из оценки (7.14) вытекает оценка (7.11), поэтому (7.14) несет больше информации, чем (7.11). Обе эти оценки дают локальные (т. е. при $x \to x_0$) представления для остаточного члена. При некоторых дополнительных ограничениях на функцию f остаточный член может быть представлен в других (глобальных) формах, несущих больше информации, чем локальные.

Теорема 139. *Если конечная производная* $f^{(n+1)}(x)$ *существует для всех* x *из некоторого интервала* $(x_0 - \delta\,, x_0 + \delta)$, *то для любого* $x \in (x_0 - \delta\,, x_0 + \delta)$ *и для любого* $p \in \mathbb{N}$ *существует точка* $\xi \in (x_0\,, x)$ *такая, что*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot p} \cdot (x - \xi)^{n+1-p} \cdot (x - x_0)^p\,. \tag{7.16}$$

◀ Фиксируя $x \in (x_0 - \delta\,, x_0 + \delta)$, станем искать остаточный член формулы Тейлора (7.8) в виде

$$r_n(x) = (x - x_0)^p \cdot H\,, \tag{7.17}$$

где H — некоторое число. Желая его вычислить, введем вспомогательную функцию

$$\Phi(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k + (x - t)^p \cdot H \quad \text{при} \quad t \in [x_0\,, x]\,. \tag{7.18}$$

Очевидно, что эта функция дифференцируема при $t \in [x_0\,, x]$. Вычисляя ее значения в точках $t = x_0$ и $t = x$, имеем

$$\Phi(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) = f(x)\,,$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x - x)^k + (x - x)^p \cdot H = f(x)\,.$$

Таким образом, для функции $\Phi(t)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Применяя ее, заключаем, что

$$\exists \xi \in (x_0\,, x) \;:\; \Phi'(\xi) = 0\,.$$

Исходя из определения (7.18), вычислим $\Phi'(t)$:

$$\Phi'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} \right) -$$

$$- p \cdot (x - t)^{p-1} H = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n - p \cdot (x - t)^{p-1} H\,.$$

Полагая здесь $t = \xi$, получим

$$0 = \Phi'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x - \xi)^n - p \cdot (x - \xi)^{p-1} \cdot H\,,$$

откуда находим

$$H = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n! \cdot p} \cdot (x - \xi)^{n-p+1} .$$

Подставляя это значение величины H в (7.17), получим (7.16). ▶

Замечание. При конкретных значениях параметра p получаются частные случаи формулы (7.16), важные с точки зрения тех или иных приложений. Полагая $p = n+1$, получаем *остаточный член в форме Лагранжа*:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} . \tag{7.19}$$

Полагая $p = 1$, получаем *остаточный член в форме Коши*:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x - \xi)^n \cdot (x - x_0) . \tag{7.20}$$

Преобразуем его, полагая $\xi - x_0 = \theta \cdot (x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$. В этих обозначениях имеем $x - \xi = (x - x_0) - (\xi - x_0) = (1 - \theta)(x - x_0)$. Тогда формула (7.20) приобретает следующий вид:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot (x - x_0))}{n!} \cdot (1 - \theta)^n \cdot (x - x_0)^{n+1} . \tag{7.21}$$

3. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена

Полагая в формуле Тейлора (7.8) $x_0 = 0$, получим ее частный случай, называемый иногда *формулой Маклорена*. Здесь выпишем формулы Маклорена[12] для некоторых часто встречающихся элементарных функций.

Для функции $f(x) = e^x$ при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x|_{x=0} = e^x|_{x=0} = e^0 = 1 .$$

Используя эти равенства и полагая в (7.8) $f(x) = e^x$, получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) . \tag{7.22}$$

[12] *Макло́рен* Колин (1698—1746) — шотландский математик.

Для функции $f(x) = \sin x$ при любом $k \in \mathbb{N}$ находим

$$\frac{d^k}{dx^k} \sin x|_{x=0} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{x=0} = \sin k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2n\,, \\ (-1)^n \text{ при } k = 2n+1\,. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+1}(x)\,. \tag{7.23}$$

Для функции $f(x) = \cos x$ при любом $k \in \mathbb{N}$ находим

$$\frac{d^k}{dx^k} \cos x|_{x=0} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{x=0} = \cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 2n+1\,, \\ (-1)^n \text{ при } k = 2n\,. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r_{2n}(x)\,. \tag{7.24}$$

Полагая, далее, $f(x) = \ln(1+x)$, находим $\dfrac{d}{dx}\ln(1+x) = \dfrac{1}{1+x}$, а при $n > 1$ будем иметь:

$$\frac{d^n}{dx^n}\ln(1+x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1+x)^{-1} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,.$$

Итак,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x)\,. \tag{7.25}$$

Полагая, наконец, $f(x) = (1+x)^\mu$, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\mu = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}|_{x=0} =$$
$$= \mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)\,.$$

Обозначив

$$\binom{\mu}{n} := \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}\,,$$

получим

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \binom{\mu}{2}x^2 + \ldots + \binom{\mu}{n}x^n + r_n(x)\,. \tag{7.26}$$

Замечание. В случае $\mu = n \in \mathbb{N}$ левая часть тождества (7.26) есть многочлен степени n. Отсюда и из оценки $r_n(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ следует, что в правой части (7.26) должно быть $r_n(x) \equiv 0$, и, значит, при $n \in \mathbb{N}$ тождество (7.26) переходит в формулу бинома Ньютона.

§ 3. Степенные ряды. Ряды Тейлора. Формулы Эйлера

1. Степенные ряды

Сначала познакомимся с общим понятием функционального ряда.

Определение 134. *Функциональным рядом называется ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, *все члены которого — функции. Областью сходимости (расходимости) функционального ряда называется множество всех тех значений аргумента* x, *для которых числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *сходится (расходится).*

Функциональные ряды будем подразделять на вещественные и комплексные в зависимости от того, являются ли члены данного ряда вещественнозначными функциями вещественной переменной или комплекснозначными функциями комплексной переменной. Вещественные переменные условимся обозначать x, $y, \ldots$ (возможно, с индексами), а комплексные переменные — z, $w, \ldots$ (возможно, с индексами). Весьма частными случаями функциональных рядов являются так называемые *степенны́е* ряды. Их рассмотрим здесь несколько подробнее.

Определение 135. *Степенным рядом с центром в точке* z_0 *называется функциональный ряд следующего вида:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n = c_0 + c_1 \cdot (z-z_0) + c_2 \cdot (z-z_0)^2 + \\ + \ldots + c_n \cdot (z-z_0)^n + \ldots, \quad (7.27)$$

где c_0, $c_1, \ldots$, $c_n, \ldots$ *— числа, называемые его коэффициентами.*

Определение 136. *Радиусом сходимости степенного ряда* (7.27) *называется величина* $R \in [0, +\infty]$, *вычисляемая по следующей формуле Коши — Адамара*[13]:

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (7.28)$$

в которой приняты соглашения $\dfrac{1}{+\infty} := 0$, $\dfrac{1}{0} := +\infty$.

Теорема 140. *Пусть* R *— радиус сходимости степенного ряда* (7.27). *Тогда этот ряд сходится абсолютно при* $|z-z_0| < R$ *и расходится при* $|z-z_0| > R$.

[13] *Адама́р* Жак Соломон (1865—1963) — французский математик.

◀ Желая исследовать ряд (7.27) на абсолютную сходимость, применим признак сходимости Коши

$$\mathcal{K} := \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n\cdot(z-z_0)^n|} = |z-z_0|\cdot\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, то $\mathcal{K} = 0 < 1$, и ряд сходится абсолютно при всех z. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, то при $z \neq z_0$ будет $\mathcal{K} = +\infty > 1$, и ряд расходится. Во всех остальных случаях имеем

$$\mathcal{K} := \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n\cdot(z-z_0)^n|} = \frac{|z-z_0|}{R} \in \mathbb{R}_+\,.$$

Таким образом, $\mathcal{K} < 1$ при $|z-z_0| < R$ и $\mathcal{K} > 1$ при $|z-z_0| > R$. ▶

Определение 137. (a) *Интервалом сходимости вещественного степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n$ *называется интервал*

$$(x_0-R,\ x_0+R)\,,$$

где R *— радиус сходимости этого ряда.*

(b) *Кругом сходимости комплексного степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\cdot(z-z_0)^n$ *называется круг* $|z-z_0| < R$*, где* R *— радиус сходимости этого ряда.*

Замечание. Теорема 140, таким образом, утверждает, что степенной ряд сходится абсолютно во всех внутренних точках его круга (интервала) сходимости и расходится во всех точках, внешних по отношению к этому кругу (интервалу). Что касается граничных точек, то здесь возможны самые разные ситуации. Рассмотрим, например, три степенных ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\,,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,,\qquad \sum_{k=0}^{\infty}x^n\,.$$

В силу равенства $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ интервалом сходимости всех трех рядов является интервал $(-1\,,+1)$. Однако первый из этих рядов сходится абсолютно в обеих точках $x = \pm1$, второй сходится условно при $x = -1$, и расходится при $x = 1$, а третий расходится в обеих точках $x = \pm1$.

2. Ряды Тейлора

Важнейшими частными случаями степенных рядов являются определяемые ниже *ряды Тейлора* бесконечно дифференцируемых функций.

Определение 138. *Пусть функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема в точке $x_0 \in X$. Рядом Тейлора функции f с центром в точке x_0 называется степенной ряд следующего вида:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots . \qquad (7.29)$$

Очевидно, что частичными суммами ряда Тейлора (7.29) являются многочлены Тейлора функции f в окрестности точки x_0, и возникает вопрос об условиях его сходимости, а в случае сходимости — о том, чему равна его сумма. Ответы на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 141. *Ряд Тейлора* (7.29) *сходится к сумме $f(x)$, если и только если выполняется следующее условие:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0\,, \qquad (7.30)$$

где $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора функции f в окрестности точки x_0.

◄ Фиксируя x, запишем представление значения $f(x)$ по формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)\,. \qquad (7.31)$$

Предполагая, что условие (7.30) выполняется и переходя к пределу в равенстве (7.31) при $n \to \infty$, заключаем,что ряд Тейлора сходится к сумме $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k\,. \qquad (7.32)$$

Обратно, предположим, что ряд Тейлора сходится к сумме $f(x)$, т. е. что выполняется равенство (7.32). Сравнивая (7.31) с (7.32), заключаем, что остаточный член равен сумме n-го остатка, т. е.

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k\,. \qquad (7.33)$$

Из сходимости ряда (7.32) следует сходимость любого его остатка и стремление к нулю при $n \to \infty$ последовательности его остатков, т. е. выполнение условия (7.30). ►

Теорема 142. *Справедливы следующие разложения:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \tag{7.34}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \tag{7.35}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \tag{7.36}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,, \quad |x| < 1\,; \tag{7.37}$$

$$(1+x)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} x^n\,, \quad |x| < 1\,. \tag{7.38}$$

◀ В силу теоремы 141 достаточно показать, что при указанных значениях переменной x остаточные члены соответствующих формул Тейлора стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Начнем с функции exp. Фиксируя произвольное значение $x \in \mathbb{R}$, исследуем на абсолютную сходимость ряд (7.34). Применяя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{(n+1)} = 0 < 1\,.$$

Отсюда следует, что ряд (7.34) сходится, а из сходимости вытекает следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,. \tag{7.39}$$

Представляя остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора функции exp в форме Лагранжа, получим

$$r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\xi}\,,$$

где $0 < |\xi| < |x|$. Отсюда находим

$$0 < |r_n(x)| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$ и используя (7.39), получим $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Тем самым равенство (7.34) установлено.

Из равенства (7.39) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0\,. \tag{7.40}$$

Представляя остаточные члены формул Тейлора функций cos и sin в форме Лагранжа, имеем

$$|r_{2n}(x)| = \left| \frac{\cos\left(\xi + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;$$

$$|r_{2n+1}(x)| = \left| \frac{\sin\left(\xi + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Отсюда и из равенств (7.40) следует, что остаточные члены формул Тейлора функций cos и sin стремятся к нулю. Тем самым установлены равенства (7.35) и (7.36).

Применяя признак Даламбера, легко заключить, что ряды (7.37) и (7.38) сходятся абсолютно при $|x| < 1$. Значит, последовательности их общих членов стремятся к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \binom{\mu}{n} x^n = 0\,. \tag{7.41}$$

Чтобы установить равенство (7.37), представим остаточный член формулы Маклорена (7.25) в форме Коши (7.21) и преобразуем его

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \ln(1+t)\big|_{t=\theta x} \cdot (1-\theta)^n \cdot x^{n+1} = \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot (1-\theta)^n \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^n x}{(1+\theta x)} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \cdot x^n\,. \end{aligned}$$

Учитывая, что $-1 < x < 1\,,\ 0 < \theta < 1$, имеем

$$|1 + \theta x| \geqslant 1 - \theta \cdot |x| > 1 - \theta\,,$$

и, значит,

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n < \left| \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} \right|^n < 1\,.$$

Поэтому $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|}{1-\theta} \cdot |x|^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда на основании теоремы 141 заключаем, что равенство (7.37) справедливо.

Чтобы установить равенство (7.38), представим остаточный член формулы Маклорена для функции $(1+x)^{\mu}$ в форме Коши

$$r_n(x) = \binom{\mu}{n}(1+\theta x)^{\mu-n+1}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$

$$= \mu x(1+\theta x)^{\mu-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \binom{\mu-1}{n} x^n, \quad (7.42)$$

где $|x| < 1$, $0 < \theta < 1$. Так как $|1+\theta x| \geqslant 1 - |\theta x| \geqslant 1 - \theta$, то $\left|\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\right| \leqslant 1$. Поэтому из (7.42) имеем

$$0 \leqslant |r_n(x)| \leqslant |\mu x(1+\theta x)^{\mu-1}| \cdot \left|\binom{\mu-1}{n} x^n\right| \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу равенства (7.41). Тем самым разложение (7.38) обосновано. ▶

3. Формулы Эйлера

Степенные ряды (7.34), (7.35) и (7.36) сходятся абсолютно $\forall x \in \mathbb{R}$, поэтому радиус сходимости всех этих рядов равен $+\infty$. Отсюда следует, что если в этих рядах заменить вещественную переменную x на комплексную переменную z, то они будут сходиться абсолютно $\forall z \in \mathbb{C}$, а потому их суммы можно принять в качестве определений экспоненты, синуса и косинуса комплексного аргумента.

Определение 139. *Для любого $z \in \mathbb{C}$ полагаем:*

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots; \quad (7.43)$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots; \quad (7.44)$$

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \quad (7.45)$$

Теорема 143 (формула Эйлера). *Справедливо тождество*

$$\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad (7.46)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$, а $i \in \mathbb{C}$ — мнимая единица.

◀ Используя определение 139, имеем

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \ldots =$$
$$= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\right) + i\cdot\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right) =$$
$$= \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$ ▶

Замечания. 1. Мы знаем две формы представления комплексных чисел: *алгебраическую* $z = x + iy$ и *тригонометрическую* $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Используя формулу Эйлера, получаем еще одну форму, *показательную* $z = r\cdot e^{i\varphi}$. Таким образом,

$$z = x + i\cdot y = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}\,,$$

где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

2. С помощью формул Эйлера можно выразить функции cos и sin через экспоненту с чисто мнимым показателем. С этой целью, заменяя в (7.46) φ на $(-\varphi)$, получим такое тождество:

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}\,.$$

Из этого равенства и из (7.46) находим

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\,,\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\,.$$

Эти тождества позволяют из свойств показательной функции получать свойства тригонометрических функций и наоборот.

3. Заменяя в равенстве (7.43) z на $(-z)$, получим следующее равенство:

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\cdot\frac{z^n}{n!} + \ldots\,,\ z\in\mathbb{C}\,. \tag{7.47}$$

Образуя полусумму и полуразность равенств (7.43) и (7.47), получим разложения гиперболических функций ch и sh комплексного переменного в степенные ряды

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots\,,\ z\in\mathbb{C}\,; \tag{7.48}$$
$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\,,\ z\in\mathbb{C}\,. \tag{7.49}$$

Из этих равенств и из равенств (7.44) и (7.45) вытекают следующие тождества, связывающие тригонометрические функции с гиперболическими:

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z \ ; \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z \, ; \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z \, ; \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z \, .$$

Пользуясь этими тождествами, можно из свойств тригонометрических функций получить свойства гиперболических функций и наоборот.

Задачи к главе 7

7.1. Доказать, что между двумя вещественными корнями многочлена с вещественными коэффициентами имеется корень его производной.

7.2. Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a\,,\,b]$ и обращается на нем в нуль в $(n+1)$ точках, то $\exists \xi \in (a\,,\,b): \ f^{(n)}(\xi) = 0$.

7.3. Доказать, что корни производной многочлена

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

вещественные, простые и лежат, соответственно, на интервалах

$$(0\,;\,1)\,,\ (1\,;\,2)\,,\ (2\,;\,3)\,,\ (3\,;\ 4)\,.$$

7.4. Доказать, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \ : \quad \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

7.5. Доказать, что если дифференцируемая на конечном интервале $(a\,;\,b)$ функция f не ограничена, то производная функция $f' : (a\,;\,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ тоже не ограничена.

7.6. Доказать, что если функция $f : [0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема n раз, и $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, а $f^{(n)} > 0$, то и $f(x) > 0$ при $x > 0$.

7.7. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$; c) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln \dfrac{2 \operatorname{arctg} x}{\pi}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$; h) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$; i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$;

j) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$; k) $\lim\limits_{x\to +\infty} (3x^2 + 3^x)^{1/x}$; l) $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/2,\\ x<\pi/2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

7.8. Пусть $f \in C^2[0\,;\,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in (0\,;\,1) \ : \ \left|f''(x)\right| \leqslant M\,.$$

Доказать, что $\forall x \in (0\,;\,1) \ : \ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M}{2}$.

7.9. Следующие функции разложить по формуле Маклорена с остаточным членом порядка $o(x^n)$ при $x \to 0$:

a) $\sin(2x + 3)$; b) $\ln(ex + 2)$; c) $(2x + 1)\sqrt{1 - x}$;

d) $(2x - 3)\ln(5x + 6)$; e) $\ln(2 + x - x^2)$; f) $\dfrac{2x + 5}{x^2 + 5x + 4}$;

g) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

7.10. Следующие функции разложить по формуле Маклорена с остаточным членом порядка $o(x^5)$ при $x \to 0$:

a) $(1 - 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$; b) $\ln(1 + x + x^2 + x^3)$; c) $\dfrac{1}{\cos x}$;

d) $e^{x/\sqrt{1+x^2}}$; e) $\ln \dfrac{\sin x}{x}$; f) $\left(1 - \ln^2(1 - x)\right)^{-1}$; g) $(1 + x)^{\sin x}$.

7.11. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln(1 - x^2)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln \cos x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \sqrt{1 + x^2} - x\cos x}{\ln^3(1 - x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^x - 1}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x + 3\cos x - 3\sqrt[3]{1 + x}}{1 + \ln(1 + x) - e^x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \sin x - x\cos x}{e^x + \ln(1 - x) - 1}$.

Глава 8

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Приложения дифференциального исчисления необъятны, и здесь нет возможности останавливаться на них сколько-нибудь подробно. В этой главе будут рассмотрены в основном такие вопросы, которые помогают, используя методы дифференциального исчисления, строить графики некоторых функций, заданных своими уравнениями.

§ 1. Условия монотонности и внутреннего локального экстремума функции

1. Условия монотонности функции

Теорема 144. *Предположим, что для функции* $f\ :\ (a\,,\,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ *существует производная функция* $f'\ :\ (a\,,\,b)\longrightarrow\widetilde{\mathbb{R}}$*, не меняющая знака на* $(a\,,\,b)$*. Тогда функция* f *монотонна (в широком смысле) на* $(a\,,\,b)$*. Более того, справедливы следующие утверждения*[1]:

(a)	$f'\geqslant 0$	$\Longleftrightarrow$	f *не убывает*;
(b)	$f'\leqslant 0$	$\Longleftrightarrow$	f *не возрастает*;
(c)	$f'(x)\equiv 0$	$\Longleftrightarrow$	f — *постоянная*;
(d)	$f'>0$	$\Longrightarrow$	f *возрастает*;
(e)	$f'<0$	$\Longrightarrow$	f *убывает*.

◀ Зададим произвольно точки $x'\,,\,x''\in(a\,,\,b)\,,\ x'<x''$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, заключаем, что существует точка $\xi\in(x'\,,\,x'')$ такая, что

$$f(x'')-f(x')=f'(\xi)\cdot(x''-x')\,. \tag{8.1}$$

[1] Неравенства типа $f'\geqslant 0$ понимаются в следующем смысле: $f'(x)\geqslant 0$ для всех $x\in[a\,,\,b]$.

Так как $x'' - x' > 0$, то разность $f(x'') - f(x')$ либо равна нулю, либо имеет тот же знак, что и $f'(\xi)$. Значит,

$$f'(\xi) \geqslant 0 \iff f(x'') \geqslant f(x'),$$

т. е. в этом случае функция f не убывает. Аналогично

$$f'(\xi) \leqslant 0 \iff f(x'') \leqslant f(x'),$$

т. е. в этом случае функция f не возрастает.

Далее, если $f'(x) \equiv 0$, то из (8.1) видно, что $\forall x'' : \ f(x'') = f(x')$, т. е. функция f — постоянная. С другой стороны, из определения производной следует, что производная постоянной функции равна нулю тождественно. И наконец, из (8.1) очевидно, что если f' строго положительна (строго отрицательна), то f строго возрастает (строго убывает). ►

Примеры. 1) Найти число вещественных корней уравнения

$$x^5 + 2e^x - 7 = 0.$$

◄ Функция $y = x^5 + 2e^x - 7 = 0$ дифференцируема на $\mathbb{R}$. Так как $y' = 5x^4 + 2e^x > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то данная функция строго возрастает на $\mathbb{R}$. Поэтому уравнение $x^5 + 2e^x - 7 = 0$ может иметь не более одного корня. Поскольку

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x^5 + 2e^x - 7) = -\infty, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x^5 + 2e^x - 7) = +\infty, \end{cases}$$

то в силу теоремы Больцано — Коши $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \ x_0^5 + 2e^{x_0} - 7 = 0$. Таким образом, *данное уравнение имеет единственный вещественный корень.* ►

2) Найти интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x + 2$.

◄ Имеем: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) < 0$ при $x \in (-1, +1)$ и $y' > 0$ при $x \in (-\infty, -1) \sqcup (1, +\infty)$. Применяя теорему 144, заключаем, что данная функция возрастает на $(-\infty, -1)$ и на $(1, +\infty)$ и убывает на $(-1, +1)$. ►

2. Необходимое условие локального экстремума

В главе 7 введено понятие локального экстремума функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Теорема Ферма дает необходимое условие того, что внутренняя точка $x_0 \in X$, в которой существует производная $f'(x_0) \in \widetilde{\mathbb{R}}$, является точкой локального экстремума функции f. Для приложений полезно сформулировать необходимое условие в предположениях, несколько отличных от предположений теоремы Ферма.

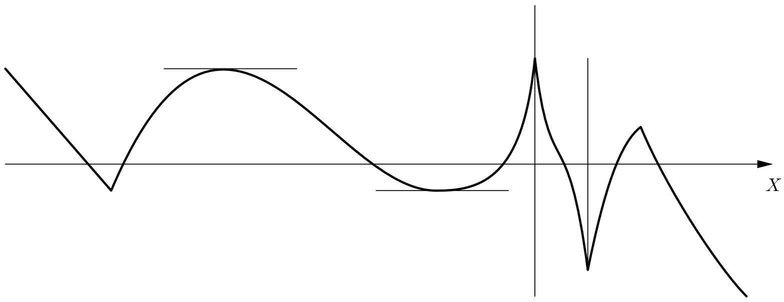

Рис. 51. График функции, имеющей локальные экстремумы

Теорема 145 (необходимое условие экстремума). *Если точка* $x_0 \in (a, b)$ *является точкой локального экстремума функции* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, *то производная* $f'(x_0)$ *либо не существует, либо* $f'(x_0) = 0$, *либо* $f'(x_0) = \infty \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Доказательство этой теоремы простое, и мы его опускаем. На рис. 51 показаны возможные особенности графика функции в окрестности точек, где она имеет локальные экстремумы.

Критическими точками функции f будем называть все те точки, в которых эта функция, возможно, имеет локальные экстремумы. Кроме точек, о которых сказано в теореме 145, к критическим точкам функции f следует отнести все граничные точки ее области определения. *Стационарными точками* функции f будем называть все те ее критические точки, которые лежат внутри ее области определения, и в которых производная равна нулю.

Если ставится задача исследовать данную функцию на экстремум, то сначала следует найти ее критические точки. Затем, обращаясь к определению 133, следует проверить, является ли та или иная критическая точка точкой экстремума, и если да, то какой именно. В следующем пункте будут установлены теоремы, содержащие достаточные условия наличия или отсутствия локальных экстремумов данной функции в ее стационарных точках.

3. Достаточные условия локального экстремума

Теорема 146 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция* f *дифференцируема на некотором интервале, содержащем стационарную точку* x_0, *и пусть существует такое* $\delta > 0$, *что ее произ-*

водная функция f' имеет постоянный знак на каждом из интервалов $(x_0 - \delta\,,\, x_0)$ и $(x_0\,,\, x_0 + \delta)$. Если знаки производной на этих интервалах противоположные, то функция f имеет в точке x_0 строгий локальный экстремум, если же эти знаки одинаковые, то функция f не имеет экстремума в точке x_0.

◀ В силу теоремы 144 функция f строго монотонна на каждом из интервалов $(x_0 - \delta\,,\, x_0)$ и $(x_0\,,\, x_0 + \delta)$. Если знаки ее производной на этих интервалах одинаковые, то функция f строго монотонна на интервале $(x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)$, и потому в точке x_0 экстремума иметь не может. Если при возрастании переменной x знак производной меняется с плюса на минус, то слева от x_0 функция f возрастает, а справа — убывает. Значит, в точке x_0 она имеет строгий локальный максимум. Если же знак производной меняется с минуса на плюс, то слева от x_0 функция f убывает, а справа — возрастает. Значит, в точке x_0 она имеет строгий локальный минимум. ▶

Теорема 147 (второе достаточное условие экстремума). *Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то функция f имеет в стационарной точке x_0 строгий локальный экстремум (максимум при $f''(x_0) < 0$, минимум при $f''(x_0) > 0$).*

◀ Разложим функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + r_2(x)\,.$$

Так как $f'(x_0) = 0$, то имеем

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + r_2(x)\,. \tag{8.2}$$

Так как $r_2(x) = o\left((x - x_0)^2\right)$ при $x \to x_0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)\,,\, x \neq x_0 \; : \; |r_2(x)| < \frac{|f''(x_0)|}{2} \cdot |x - x_0|^2\,.$$

Таким образом, при $x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, знак приращения $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком числа $f''(x_0)$. Значит, при $f''(x_0) < < 0$ будет: $f(x) < f(x_0)$, т. е. x_0 является точкой максимума. Если же $f''(x_0) > 0$, то будет: $f(x) > f(x_0)$, т. е. x_0 является точкой минимума. ▶

Теорема 148 (третье достаточное условие экстремума). *Пусть*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0\,, \quad а \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0\,. \tag{8.3}$$

Если число k — нечетное, то в точке x_0 функция f не имеет экстремума. Если же число k — четное, то функция f имеет в точке x_0 строгий *локальный экстремум. Именно максимум при* $f^{(k)}(x_0) < 0$ *и минимум при* $f^{(k)}(x_0) > 0$.

◀ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 147. Разложим функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{k!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} +$$

$$+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_k(x)\,.$$

Согласно (8.3), имеем следующее тождество, аналогичное (8.2):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_k(x)\,. \qquad (8.4)$$

Так как $r_k(x) = o\left((x - x_0)^k\right)$ при $x \to x_0$ и $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)\,,\, x \neq x_0 \,:\, |r_k(x)| < \frac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!} \cdot |x - x_0|^k\,.$$

Таким образом, при $x \in (x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta)\,,\, x \neq x_0$, знак приращения $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком первого слагаемого правой части (8.4). Если в (8.4) число k — нечетное, то при переходе через точку x_0 функция $(x - x_0)^k$ меняет знак, значит, и приращение меняет знак. Поэтому при нечетном k в точке x_0 экстремума нет. Если же число k — четное, то функция $(x - x_0)^k$ положительна при $x \neq x_0$, и потому приращение $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак при

$$x \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)\,,\ x \neq x_0\,.$$

Это означает, что в точке x_0 функция f имеет строгий локальный экстремум, максимум при $f^{(k)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(k)}(x_0) > 0$. ▶

Примеры. 1) Исследовать на экстремум функцию

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6\,.$$

◀ Сначала вычисляем производную данной функции:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12\,.$$

Приравнивая ее к нулю $6x^2 - 18x + 12 = 0$, находим корни (т. е. стационарные точки) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Для дальнейшего исследования вычислим производную второго порядка: $y'' = 12x - 18$. Далее, при $x = 1$ имеем $y'' = -6 < 0$ — максимум, $y_{\max} = 11$; при $x = 2$ имеем $y'' = 6 > 0$ — минимум, $y_{\min} = 10$. ▶

2) В равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $2R$ единиц, вписан прямоугольник так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Подобрать размеры прямоугольника так, чтобы его площадь стала максимальной.

◀ Пусть $2x$ — длина основания прямоугольника, а y — его высота. Тогда площадь S этого прямоугольника равна $S = 2xy$. Легко показать, что $y = R - x$. Таким образом, площадь прямоугольника вычисляется по формуле: $S = 2x \cdot (R - x)$, $0 \leqslant x \leqslant R$. Исследуем эту функцию на экстремум:

$$S' = 2R - 4x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{R}{2}.$$

И наконец, $S'' = -4 < 0$, значит, в точке $x = \dfrac{R}{2}$ функция S имеет максимум, равный $S_{\max} = \dfrac{R^2}{2}$. ▶

3) Исследовать на экстремум функцию $y = \cos^3 x + \sin^3 x$.

◀ Так как данная функция — периодическая, с основным периодом 2π, то достаточно найти ее экстремумы на любом промежутке длины 2π. Будем искать их на полуинтервале $[0\,,\,2\pi)$.

Приравнивая к нулю производную данной функции

$$y' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) + 3\sin^2 x \cdot \cos x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x)\,,$$

находим стационарные точки, лежащие на промежутке $[0\,,\,2\pi)$:

$$\sin x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0\,,\ x_2 = \pi\,;$$

$$\cos x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{\pi}{2}\,,\ x_4 = \frac{3\pi}{2}\,;$$

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_5 = \frac{\pi}{4}\,,\ x_6 = \frac{5\pi}{4}\,.$$

Итак, стационарные точки следующие:

$$0\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi\,,\ \frac{5\pi}{4}\,,\ \frac{3\pi}{2}\,.$$

Исследуем эти точки на экстремум, следя за изменением знака первой производной при возрастании переменного x.

При переходе через точку $x = 0$ производная функция меняет знак с плюса на минус, значит, в этой точке максимум.

При переходе через точку $x = \dfrac{\pi}{4}$ производная функция меняет знак с минуса на плюс, значит, в этой точке минимум.

При переходе через точку $x = \dfrac{\pi}{2}$ производная функция меняет знак с плюса на минус, значит, в этой точке максимум.

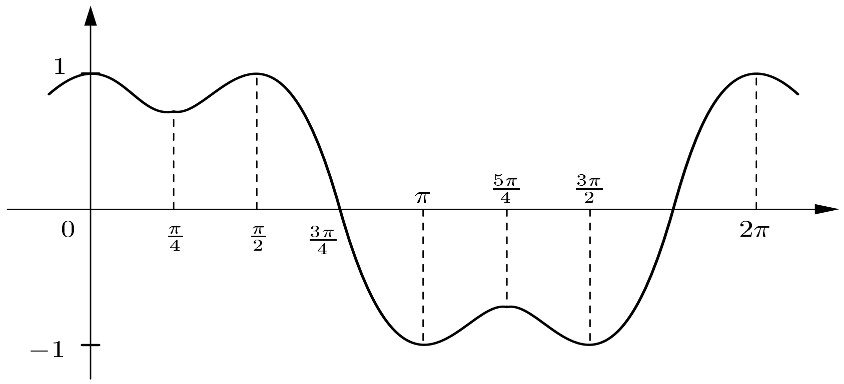

Рис. 52. График функции $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

При переходе через точку $x = \pi$ производная функция меняет знак с минуса на плюс, значит, в этой точке минимум.

При переходе через точку $x = \dfrac{5\pi}{4}$ производная функция меняет знак с плюса на минус, значит, в этой точке максимум.

При переходе через точку $x = \dfrac{3\pi}{2}$ производная функция меняет знак с минуса на плюс, значит, в этой точке минимум.

График функции $y = \cos^3 x + \sin^3 x$ показан на рис. 52. ▶

§ 2. Выпуклость, точки перегиба, асимптоты графика функции

1. Свойство выпуклости

Важным свойством функции $y = f(x)$ является свойство ее графика быть *не извилистым* (или, как принято говорить, *выпуклым*.) Желая описать это свойство в точных терминах, рассмотрим сначала выпуклые графики функций, изображенные на рис. 53 и 54. Возьмем на каждом из этих графиков по две точки:

$$A(x_1\,,\ f(x_1))\,,\qquad B(x_2\,,\ f(x_2))\,,\qquad x_1 < x_2\,,$$

и соединим эти точки отрезком прямой (хордой). Мы видим, что над интервалом $(x_1\,,\ x_2)$ график функции f лежит либо ниже (рис. 53), либо выше

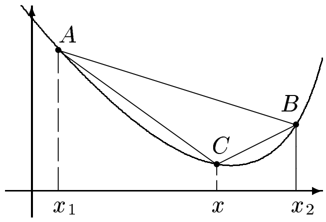

Рис. 53. Выпуклая функция

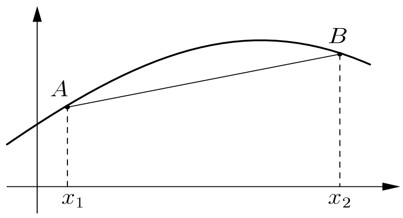

Рис. 54. Вогнутая функция

(рис. 54) хорды AB. В приводимом ниже определении нам потребуется уравнение хорды AB:

$$y = l(x) \equiv \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2 . \tag{8.5}$$

Определение 140. *Функция $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ называется выпуклой вниз (вверх) на интервале $(a, b) \subset X$, если для любых $x_1, x, x_2 \in \in (a, b)$, для которых $x_1 < x < x_2$, выполняется неравенство $f(x) \leqslant l(x)$ (соответственно $f(x) \geqslant l(x)$), где $l(x)$ задается равенством* (8.5).

Функция f называется *строго выпуклой вниз (вверх)*, если в определении 140 выполняется строгое неравенство: $f(x) < l(x)$ (соответственно $f(x) > l(x)$). Функции, выпуклые вниз, часто называются просто *выпуклыми*, а выпуклые вверх — *во́гнутыми*. Ввиду того, что методы изучения выпуклых и вогнутых функций — одинаковые, мы будем подробно изучать только выпуклые функции, а соответствующие утверждения для вогнутых функций можно будет формулировать по аналогии.

Перепишем неравенство $f(x) \leqslant l(x)$ из определения 140 в различных формах. Подставляя в него вместо $l(x)$ правую часть равенства (8.5), получим

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad x_1 < x < x_2 . \tag{8.6}$$

Умножая это неравенство на $(x_2 - x_1)$, перепишем его в следующем равносильном виде:

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2) + (x_1 - x_2) f(x) \geqslant 0 . \tag{8.7}$$

Отсюда, учитывая, что $(x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$, получаем такое неравенство:

$$(x_2 - x)[f(x_1) - f(x)] + (x - x_1)[f(x_2) - f(x)] \geqslant 0 , \tag{8.8}$$

равносильное следующему:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,. \tag{8.9}$$

Геометрический смысл этого последнего неравенства легко усмотреть из рис. 53. Обозначая $C(x\,,\,f(x))\,,\; x_1 < x < x_2$, видим, что неравенство (8.9) выражает тот факт, что *угловой коэффициент хорды AC не превосходит углового коэффициента хорды CB*.

Теорема 149. *Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a\,,\,b)$. Выпуклость функции f вниз (вверх) равносильна неубыванию (невозрастанию) ее производной функции f'. Если f' строго возрастает (строго убывает), то функция f строго выпукла вниз (вверх).*

◀ Предположим для определенности, что функция f выпукла вниз. Тогда для любых $x_1\,,\; x\,,\; x_2 \in (a\,,\,b)\,,\; x_1 < x < x_2$, справедливо неравенство (8.9). Переходя в нем к пределу при $x \to x_1\,,\; x > x_1$, получим

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\,. \tag{8.10}$$

Аналогично из (8.9) в пределе при $x \to x_2\,,\; x < x_2$ находим:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)\,. \tag{8.11}$$

Из неравенств (8.10) и (8.11) следует, что $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, т. е. производная функция f' не убывает.

Обратно, предположим, что производная функция f' не убывает. Задавая произвольно точки $x_1\,,\,x\,,\,x_2 \in (a\,,\,b)\,,\; x_1 < x < x_2$ и применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, заключаем, что существуют точки $\xi \in (x_1\,,\,x)$ и $\eta \in (x\,,\,x_2)$ такие, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi)\,, \qquad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\eta)\,. \tag{8.12}$$

Так как $\xi < \eta$, то в силу неубывания производной будет $f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$, и потому из (8.12) вытекает (8.9). Таким образом, функция f выпукла. Если же f' строго возрастает, то будет $f'(\xi) < f'(\eta)$, поэтому и неравенство (8.9) будет строгим. ▶

Теорема 150. *Предположим, что на интервале $(a\,,\,b)$ существует вторая производная функция f'' от функции f. Выпуклость вниз (вверх) функции f на $(a\,,\,b)$ равносильна тому, что $\forall x \in (a\,,\,b)$ выполнено неравенство $f''(x) \geqslant 0$ (соответственно $f''(x) \leqslant 0$). Если неравенство — строгое, то и выпуклость — строгая.*

◀ Согласно теореме 149, выпуклость функции f равносильна монотонности ее производной f'. В силу теоремы 144 монотонность производной функции f' равносильна выполнению одного из неравенств: $f'' \geqslant 0$ или $f'' \leqslant 0$. Если соответствующее неравенство для f'' — строгое, то и монотонность функции f' будет строгой, а значит, и выпуклость функции f будет строгой. ▶

Примеры. 1. Исследовать на выпуклость показательную $y = a^x$ и логарифмическую $y = \log_a x$ функции.

◀ Так как $\dfrac{d^2}{dx^2}a^x = a^x(\ln a)^2 > 0$, то показательная функция строго выпукла вниз.

Так как вторая производная $\dfrac{d^2}{dx^2}\log_a x = -\dfrac{1}{x^2 \ln a}$ отрицательна при $a > 1$ и положительна при $0 < a < 1$, то логарифмическая функция строго выпукла вверх при $a > 1$ и строго выпукла вниз при $0 < a < 1$. ▶

2. Исследовать на выпуклость функцию $y = \sin x$ на интервале $(0\,,\, 2\pi)$.

◀ Так как вторая производная $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x$ отрицательна при $0 < x < \pi$ и положительна при $\pi < x < 2\pi$, то функция sin строго выпукла вверх на интервале $(0\,,\, \pi)$ и строго выпукла вниз на интервале $(\pi\,,\, 2\pi)$. ▶

Теорема 151. *Для любой дифференцируемой функции*

$$f\ :\quad (a\,,\, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

равносильны следующие утверждения:

(a) *функция f строго выпукла вниз (вверх)*;

(b) *график функции f лежит выше (ниже) любой касательной к нему, исключая точку касания.*

◀ Предположим, что f строго выпукла вниз (рис. 55 a). Символами y_{kr} и y_{kas} обозначим соответственно ординату кривой $y = f(x)$ и ординату касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ к этой кривой в точке $(x_0,\, f(x_0))$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, преобразуем разность между этими ординатами:

$$y_{\mathrm{kr}} - y_{\mathrm{kas}} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0)\,,$$

причем ξ лежит между x и x_0. Если $x > x_0$, то $x > \xi > x_0$, и $f'(\xi) - f'(x_0) > 0$ в силу теоремы 149. Таким образом, $y_{\mathrm{kr}} - y_{\mathrm{kas}} > 0$, т. е. $y_{\mathrm{kr}} > y_{\mathrm{kas}}$. Это же неравенство сохраняется и при $x < x_0$.

Предположим теперь, что график функции f лежит выше любой касательной к нему, исключая точку касания. Возьмем на графике две точки:

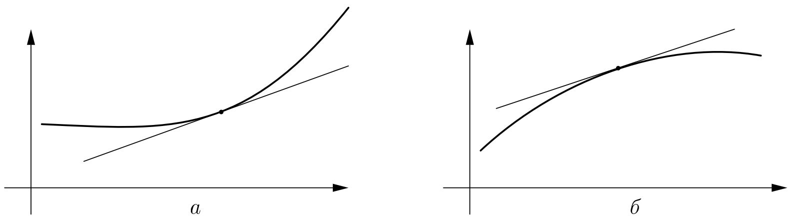

Рис. 55. К теореме 151

$A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, где $x_1 < x_2$. По условию точка B лежит выше касательной, проведенной в точке A, а точка A лежит выше касательной, проведеной в точке B. В результате оказывается, что касательные расположены так, как показано на рис. 56. Поэтому их угловые коэффициенты связаны неравенством: $f'(x_1) < f'(x_2)$. Таким образом, f' строго возрастает, и в силу теоремы 149 функция f строго выпукла вниз.

Аналогично можно рассмотеть случай, когда функция f строго выпукла вверх (рис. 55 *б*). ►

2. Неравенство Иенсена и его применения

Теорема 152 (неравенство Иенсена[2]). *Если на интервале* (a, b) *функция* f *выпукла вниз, то для любых точек* $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ *и любых чисел* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ *таких, что* $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, *выполняется неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{8.13}$$

◄ Покажем сначала, что в условиях теоремы будет

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in (a, b). \tag{8.14}$$

С этой целью запишем неравенства

$$a < x_1 < b, \ \dots, \ a < x_n < b.$$

Умножая первое из них на $\alpha_1 \in [0, 1]$, ..., последнее — на $\alpha_n \in [0, 1]$ и складывая полученные неравенства с учетом того, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1,$$

[2] *Иенсен* Иоган Людвиг (1859—1925) — датский математик.

имеем $a < \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n < b$, что равносильно включению (8.14).

Теперь применим индукцию по числу $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ неравенство (8.13) тривиально: $f(x_1) = f(x_1)$. В случае $n = 2$ оно вытекает из неравенства (8.6). В самом деле, полагая в (8.6)

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\ ; \quad \alpha_2 := \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,,$$

где $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, имеем

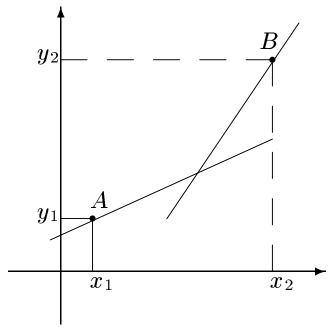

Рис. 56. К теореме 151

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1\ ; \quad 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1\,; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1\,;$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = \frac{x_2 x_1 - x x_1 + x_2 x - x_2 x_1}{x_2 - x_1} = x\,.$$

Таким образом, неравенство (8.6) равносильно такому

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\,.$$

Предположим теперь, что $n > 2$, и пусть выполняется такое неравенство:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1})\,, \tag{8.15}$$

которое получается из (8.13) при $\alpha_n = 0$. Введем следующее обозначение: $\beta := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$. Если $\beta = 0$, то

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0\,, \quad \alpha_n = 1\,,$$

и в этом случае неравенство (8.13) очевидно. Если же $\beta \neq 0$, то, используя уже доказанную часть теоремы, имеем

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n) = \\ &\qquad = f\left(\beta \cdot \frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}{\beta} + \alpha_n x_n\right) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \beta \cdot f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1}}{\beta}\right) + \alpha_n x_n \leqslant \\ &\qquad \leqslant \beta \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} f(x_{n-1})\right) + \alpha_n f(x_n) = \\ &\qquad = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n)\,. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечания. 1. Отметим, что строгой выпуклости соответствует строгое неравенство Иенсена, т. е. если среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ по меньшей мере два отличны от нуля, то знак равенства в неравенстве (8.13) имеет место только при $x_1 = \ldots = x_n$.

2. Для функции, выпуклой вверх, неравенство Иенсена имеет следующий вид:

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \tag{8.16}$$

Рассмотрим **примеры** на применение неравенства Иенсена.

1) Функция $\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ строго выпукла вверх, поэтому в силу (8.16) должно выполняться следующее неравенство:

$$\alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \leqslant \ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n),$$

равносильное следующему:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n, \tag{8.17}$$

где

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1], \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1.$$

Отсюда при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ получаем классическое неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

связывающее среднее геометрическое со средним арифметическим. Знак равенства в этом неравенстве возможен только при $x_1 = \ldots = x_n$. Полагая в (8.17)

$$n = 2, \quad \alpha_1 := \frac{1}{p}, \quad \alpha_2 := \frac{1}{q}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad x_1 = a, \quad x_2 = b,$$

получаем неравенство Юнга

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

2) Пусть $f(x) = x^p$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $p \in (1 : +\infty)$. Поскольку

$$f''(x) = p \cdot (p-1) \cdot x^{p-2} > 0,$$

то функция f строго выпукла вниз. Поэтому имеем неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k^p ,$$

равносильное следующему:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot x_k^p\right)^{1/p} .$$

Полагая здесь

$$q := \frac{p}{p-1}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \alpha_k := \frac{b_k^q}{\sum_k b_k^q}, \quad x_k := \frac{a_k \sum_k b_k^q}{b_k^{1/(p-1)}},$$

получим классическое неравенство Гёльдера[3]

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} .$$

3. Точки перегиба

Будем рассматривать непрерывные функции $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, накладывая на них те или иные дополнительные ограничения.

Определение 141. *Точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба (графика) функции f, если существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что сужения функции f на интервалы $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ — выпуклые функции с противоположными направлениями выпуклости.*

Замечание. На рис. 58 показаны графики функций, имеющие точки перегиба. Излагаемые ниже теоремы содержат условия, при выполнении которых та или иная точка графика является точкой перегиба.

Теорема 153 (необходимое условие перегиба). *Если $(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции f, то либо $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = \pm\infty \in \widetilde{\mathbb{R}}$, либо конечного значения $f''(x_0)$ не существует, либо $f''(x_0) = 0$.*

[3] *Гёльдер* Людвиг Отто (1859—1937) — немецкий математик.

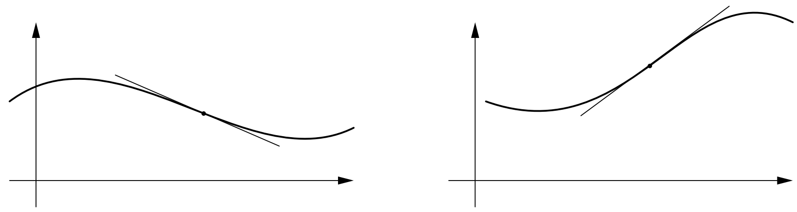

Рис 57. Графики, на которых имеются точки перегиба

◀ Согласно определению 141 существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что направления выпуклости функции f на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ — противоположные. По теореме 149 производная функция f' монотонна на каждом из этих интервалов, причем характер монотонности — противоположный. Значит, если в точке x_0 производная функция f' определена, то она там имеет экстремум. Экстремальное значение производной может быть бесконечным, т. е. возможно, что $f'(x_0) = +\infty$, либо $f'(x_0) = -\infty$. Если экстремальное значение функции f' является числом, то в силу необходимого условия внутреннего локального экстремума должно быть: либо конечного значения $f''(x_0)$ не существует, либо $f''(x_0) = 0$. ▶

Замечание. Необходимое условие перегиба не является достаточным. Например, функция $y = x^4$, график которой показан на рис. 58, строго выпукла всюду на $\mathbb{R}$, однако

$$\frac{d^2}{dx^2}x^4 = 4 \cdot 3 \cdot x^2\big|_{x=0} = 0\,.$$

Теорема 154 (первое достаточное условие перегиба). *Если в окрестности точки x_0 функция f дважды дифференцируема, $f''(x_0) = 0$, а справа и слева от точки x_0 функция f'' имеет постоянные, притом противоположные знаки, то $(x_0, f(x_0))$ — точка перегиба.*

◀ Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы сужения функции f'' на интервалы $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ сохраняли знак. По теореме 150 сужения функции f на эти интервалы — выпуклые функции. Так как знаки функции f'' на этих интервалах — противоположные, то и направления выпуклости — противоположные. Значит, $(x_0, f(x_0))$ —

точка перегиба. ▶

Теорема 155 (второе достаточное условие перегиба). *Пусть*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(k)}(x_0) = 0\,,\ \text{а}\ f^{(k+1)}(x_0) \neq 0\,.$$

Точка $(x_0\,,\ f(x_0)$ *является точкой перегиба при* k *четном, и не является точкой перегиба при* k *нечетном.*

◀ Разложим функцию f'' по формуле Тейлора в окрестности точки x_0

$$f''(x) =$$
$$= f''(x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2} + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + r_{k-1}(x)\,.$$

Отбрасывая здесь равные нулю слагаемые, получим

$$f''(x) = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + r_{k-1}(x)\,. \tag{8.18}$$

Так как $r_{k-1}(x) = o\left((x-x_0)^{k-1}\right)$ при $x \to x_0$, то

$$\exists \delta > 0\ \ \forall x \in (x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta)\,,\ x \neq x_0\ :$$
$$|r_{k-1}(x)| < \left|\frac{f(k+1)(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\right|\,.$$

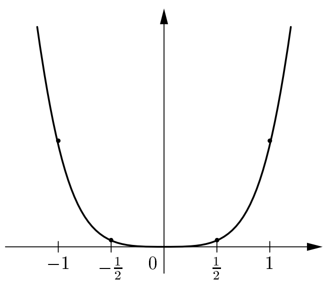

Рис. 58. График функции $y = x^4$

Таким образом, f'' в окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и первое слагаемое правой части равенства (8.18). Но очевидно, что это первое слагаемое меняет знак при k четном и не меняет знака при k нечетном. Поэтому при k четном перегиб есть, а при k нечетном его нет. ▶

4. Асимптоты

Об асимптотах графика функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$, имеет смысл говорить только тогда, когда этот график *не является* ограниченным подмножеством плоскости. Последнее в свою очередь имеет место только тогда, когда по меньшей мере одно из множеств X, $f(X)$ *не является* ограниченным подмножеством числовой оси. Самая грубая классификация асимптот — это подразделение их на *наклонные* (рис. 59 *а*) и *вертикальные* (рис. 59 *б*), и мы их рассмотрим отдельно.

Определение 142. (a) *Прямая с уравнением $y = kx+b$ называется правой наклонной асимптотой графика функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, если множество X не ограничено сверху, и выполняется следующее равенство:*

$$\lim[f(x) - (kx + b)] = 0 \quad \textit{при} \quad x \to +\infty\,,\, x \in X\,. \tag{8.19}$$

(b) *Прямая с уравнением $y = kx+b$ называется левой наклонной асимптотой графика функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, если множество X не ограничено снизу, и выполняется следующее равенство:*

$$\lim[f(x) - (kx + b)] = 0 \quad \textit{при} \quad x \to -\infty\,,\, x \in X\,. \tag{8.20}$$

Задача нахождения правой наклонной асимптоты решается следующей теоремой (аналогичное утверждение справедливо и для левой наклонной асимптоты).

Теорема 156. *Существование у графика функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ правой наклонной асимптоты равносильно неограниченности сверху множества X и существованию следующих двух конечных пределов:*

$$k := \lim \frac{f(x)}{x}\,, \quad b := \lim[f(x) - k\cdot x] \quad \textit{при} \quad x \to +\infty\,,\, x \in X\,. \tag{8.21}$$

◄ Теорема вытекает из того, что равенство (8.19) равносильно равенствам (8.21). ►

Возможны случаи, когда график функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ имеет асимптоты с уравнением $x = x_0$ (вертикальные). Поиск вертикальных асимптот сводится к поиску предельных точек x_0 множества X

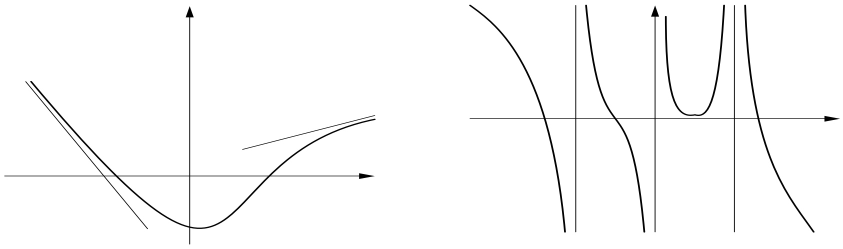

Рис. 59. Графики, имеющие наклонные и вертикальные асимптоты

таких, что при $x \to x_0$, $x \in X$, $x \neq x_0$ выполняется одно из следующих трех равенств:

$$\lim f(x) = \infty\,; \quad \lim f(x) = +\infty\,; \quad \lim f(x) = -\infty\,.$$

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + \sqrt{x^4+1}}{x} + 1$.

◀ Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = 2\,;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - 2x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{x} + 1 - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} + 1 = 1\,.$$

Отсюда находим уравнение наклонной асимптоты $y = 2x + 1$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{x} + 1\right) = \infty$, то существует и вертикальная асимптота с уравнением $x = 0$. ▶

Задачи к главе 8

8.1. Используя методы дифференциального исчисления, построить графики следующих алгебраических функций:

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$; b) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$;

c) $y = \dfrac{2x}{(3 - x^2)(5 - x^2)}$; d) $y = x + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$;

e) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$; f) $y = \dfrac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2 + 9}$;

g) $y = \dfrac{x^3 - 9x}{10}$; h) $y = \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$;

i) $y = \dfrac{4x - 5x^3 + x^5}{10}$; j) $y = \dfrac{x}{3 - x^2}$;

k) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$; l) $y = \dfrac{2}{(3 - x^2)(5 - x^2)}$;

m) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^4 - 2x^2}{x - 1}}$; n) $y = \dfrac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$;

o) $y = \dfrac{3x - 2}{5x^2}$; p) $y = \dfrac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2 + 9}$;

q) $y = x^2\sqrt{x+1}$; r) $y = \sqrt{x^4 - x^6}$;

s) $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$; t) $y = \sqrt{\dfrac{x^5 + 5x^4}{16}}$;

u) $y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$; v) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^4 - 2x^2}{x + 1}}$;

w) $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{x+1}}$; x) $y = \sqrt{\dfrac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}$;

y) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$; z) $y = x - 4 + \dfrac{2}{x+1}$;

a$'$) $y = x + \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$; b$'$) $y = x^2 + \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$;

c$'$)y $= \sqrt[3]{x(x+3)^2}$; d$'$) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x - 3}}$.

8.2. Используя методы дифференциального исчисления, построить графики следующих трансцендентных функций:

a) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$; b) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{3}\cos 3x$;

c) $y = e^{-1/x^2}$; d) $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$;

e) $y = e^{-x^2}$; f) $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$;

g) $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$; h) $y = \begin{cases} \sqrt{x - \ln(1+x)} & \text{при } x \geqslant 0, \\ -\sqrt{x - \ln(1+x)} & \text{при } x \leqslant 0; \end{cases}$

i) $y = e^{1/x^2}$; j) $y = \sin x + \cos^2 x$;

k) $y = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$; l) $y = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$;

m) $y = 2x - \operatorname{tg} x$; n) $y = \sin x \cdot \sin 3x$;

o) $y = \dfrac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$; p) $y = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

q) $y = x \operatorname{arctg} x$; r) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$;

s) $y = \sin x^2$; t) $y = \arccos \dfrac{1-x}{1-2x}$;

u) $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$; v) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

w) $y = e^{2x - x^2}$; x) $y = (1+x^2) \cdot e^{-x^2}$;

y) $y = x^{2/3} e^{-x}$; z) $y = \arccos\left(\dfrac{3}{2} - \sin x\right)$;

a′) $y = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}$; b′) $y = (7 + 2\cos x)\sin x$;

c′) $y = e^{-2x}\sin^2 x$; d′) $y = \operatorname{arctg}(\log_2(\cos(x - \pi/4)))$.

8.3. Доказать следующие неравенства:

a) $1 + \ln(1+x) \leqslant e^x$;

b) $\ln(1+x) \leqslant x$;

c) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$ при $x > 0$;

d) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x$;

e) $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} \cdot x$ при $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

f) $\operatorname{arctg} |x| \leqslant |x|$;

g) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leqslant \sqrt[n]{x-y}$ при $x \geqslant y \geqslant 0$;

h) $\dfrac{x-y}{x} < \ln \dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}$ при $x > y > 0$.

8.4 Исследовать на экстремум следующие функции:

a) $y = x^m (1-x)^n$, где m, $n \in \mathbb{N}$;

b) $y = \cos x + \operatorname{ch} x$;

c) $y = (x+1)^{10} \cdot e^{-x}$;

d) $y = (1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}) \cdot e^{-x}$;

e) $y = x^{1/3} \cdot (1-x)^{2/3}$;

f) $y = \begin{cases} 2 - x^2 \cdot \left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0; \end{cases}$;

g) $y = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0; \end{cases}$

h) $y = \begin{cases} x \cdot e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зорич В. А.* Математический анализ. М., 1997—1998. Ч. I—II.
2. *Толстов Г. П.* Элементы математического анализа. М., 1974. Т. I—II.
3. *Рудин У.* Основы математического анализа. М., 1966.
4. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. Волгоград, 1996.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. СПб., 1997. Т. I—III.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. М., 1968. Т. I—II.
7. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М., 1985.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. М., 1990—1991. Т. I—II.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. М., 1988—1989. Т. 1—3.
10. *Демидович Б. П.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1998.

ОГЛАВЛЕНИЕ