

## Тесты по спецкурсу "Классы групп"

1. Линейные группы: определение и примеры.
2. Будет ли (абелевой) подгруппой в группе  $S_4$  следующее множество перестановок:  $\{e, (23), (24), (34), (234), (243)\}$ ?
3. Напишите таблицу сложения и умножения для элементов поля  $\mathbb{Z}_7$ . Укажите каждому элементу противоположный и обратный.
4. Порядки линейных групп над конечными полями.
5. Определена ли операция умножения на множестве

$$S = \{e, (13)(24), (1234), (1432)\} \subseteq S_4?$$

Будет ли  $S$  подгруппой группы  $S_4$ ?

6. Вычислите противоположную и обратную матрицы над полем  $\mathbb{Z}_5$  для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Подгруппы проективной линейной группы.
8. Является ли множество всех диагональных  $n \times n$ -матриц с ненулевыми элементами из поля на диагонали мультипликативной (аддитивной) группой?
9. В симметрической группе  $S_4$  найдите коммутатор  $[\tau_1, \tau_2]$  элементов  $\tau_1 = (1234)$ ,  $\tau_2 = (13)(24)$ .
10. Теоремы Силова. Доказательство существования примарных подгрупп.
11. Укажите порядки всех элементов циклической группы порядка 96.
12. Вычислите порядки линейных групп  $GL(3, 3^2)$ ,  $PSL(3, 13^2)$ . Найдите порядок центра группы  $SL(3, 13)$ .
13. Примеры силовских подгрупп. Силовская  $p$ -подгруппа группы  $GL(n, q)$  и  $SL(n, q)$ .
14. В диэдральной группе  $D = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, a^b = a^3 \rangle$  порядка 8 вычислите  $a^3bab$ .
15. В циклической группе  $\langle a \rangle$  порядка 24 найдите все элементы  $g$ , удовлетворяющие условию  $g^6 = 1$ , и все элементы порядка 24.
16. Группа порядка 15.
17. Является ли множество всех  $n \times n$ -матриц с определителем, равным 1,  $-1$ , мультипликативной (аддитивной) группой?
18. В группе  $SL(2, \mathbb{C})$  найдите коммутатор  $[a, b]$  элементов

$$a = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}.$$

19. Лемма Фраттини с доказательством (лемма 1.66).
20. В диэдральной группе  $D = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, a^b = a^3 \rangle$  порядка 8 перечислите все элементы группы и найдите их порядки.
21. В симметрической группе  $S_4$  найдите коммутатор  $[\tau_1, \tau_2]$  элементов  $\tau_1 = (12)$ ,  $\tau_2 = (123)$ .
22. Примарные группы, их свойства.
23. В группе кватернионов  $Q = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, a^b = a^3 \rangle$  порядка 8 перечислите все элементы группы и найдите их порядки.

24. Найдите в группе  $GL(2, \mathbb{Z}_{11})$  коммутатор  $[a^{-1}, b]$  элементов

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

25. Нильпотентные группы, их свойства.

26. Укажите порядки всех элементов циклической группы порядка 12.

27. Вычислите порядки и перечислите подгруппы группы  $PSL(2, 2^6)$ .

28. Подгруппа Фраттини и ее свойства.

29. В диэдральной группе  $D = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1, a^b = a^3 \rangle$  порядка 8 вычислите  $a^2bab$ .

30. Вычислите порядки линейных групп  $SL(3, 13^2)$ ,  $PGL(3, 3^2)$ . Найдите порядки центров групп  $GL(3, 3^2)$ ,  $SL(3, 13)$ .

31. Инъекторы разрешимых групп. Примеры.

32. В группе кватернионов  $Q = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2, a^b = a^3 \rangle$  порядка 8 вычислите  $a^3bab$ .

33. Определена ли операция умножения на множестве

$$S = \{e, (13)(24), (1234), (1432)\} \subseteq S_4?$$

Будет ли  $S$  подгруппой группы  $S_4$ ?

34. Радикалы и радикальные произведения классов.

35. Покажите, что функции

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}, \quad f_4(x) = -\frac{1}{x},$$

определенные на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , с операцией умножения (композиция функций) образуют группу. Постройте таблицу умножения элементов этой группы. Укажите единичный элемент. Для каждого элемента группы найдите обратный.

36. Пусть  $f : (3\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$  — такое отображение, что  $f : 3k \mapsto 6k$ . Докажите, что  $f$  — гомоморфизм. Найдите ядро и образ. Будет ли  $f$  мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

37. Коммутант и его свойства.

38. Будет ли множество

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

подгруппой мультипликативной группы  $GL(4, \mathbb{R})$ ?

39. Докажите, что в группе порядки элементов  $ab^{-1}$  и  $ba^{-1}$  равны.

40. Классы Фиттинга. Примеры.

41. Найдите все элементы подгруппы  $M = \langle (153)(24) \rangle$  мультипликативной группы  $S_5$  и индекс подгруппы  $M$  в группе  $S_5$ .

42. Пусть  $\phi$  — отображение мультипликативной группы

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

в мультипликативную группу

$$N = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}.$$

Будет ли  $\phi$  гомоморфизмом? Если  $\phi$  — гомоморфизм, то найдите  $\text{Ker}\phi$  и  $\text{Im}\phi$ . Будет ли  $\phi$  мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

43. Разрешимые группы, их свойства.

44. Найдите порядок элемента  $g = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ , принадлежащего мультипликативной группе  $\mathbb{C}^\#$  комплексных чисел. Вычислите  $g^{100}$ .

45. Найдите все элементы циклической подгруппы  $H = \langle -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \rangle$  мультипликативной группы  $\mathbb{C}^\#$  комплексных чисел.

46. Формации, насыщенные формации. Примеры.

49. Пусть  $A = \langle (1234) \rangle$  и  $B = \langle (234) \rangle$  — подгруппы симметрической группы  $S_4$ . Найдите число элементов множества  $AB$ . Будет ли подгруппой произведение  $AB$ ?

50. Составьте таблицу сложения элементов группы  $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ .

51. Подгруппа Фиттинга и ее свойства.

52. Составьте таблицу сложения элементов группы  $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ .

53. Найдите все элементы циклической подгруппы  $H = \langle -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \rangle$  мультипликативной группы  $\mathbb{C}^\#$  комплексных чисел.

54. Холловы подгруппы разрешимых групп. Примеры холловых подгрупп в разрешимой группе данного порядка.

55. Пусть  $\phi$  — отображение мультипликативной группы

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

в мультипликативную группу

$$N = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}.$$

Будет ли  $\phi$  гомоморфизмом? Если  $\phi$  — гомоморфизм, то найдите  $\text{Ker}\phi$  и  $\text{Im}\phi$ . Будет ли  $\phi$  мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

56. Докажите, что в группе порядки элементов  $ab^{-1}$  и  $ba^{-1}$  равны.

57. Сверхразрешимые группы и их свойства.

58. Пусть  $f : (3\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$  — такое отображение, что  $f : 3k \mapsto 6k$ . Докажите, что  $f$  — гомоморфизм. Найдите ядро и образ. Будет ли  $f$  мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

59. Определена ли операция умножения на множестве

$$S = \{e, (13)(24), (1234), (1432)\} \subseteq S_4?$$

Будет ли  $S$  подгруппой группы  $S_4$ ?

60. Картеровы и гашюцевы подгруппы.

61. Вычислите порядки линейных групп  $\text{SL}(3, 13^2)$ ,  $\text{PGL}(3, 3^2)$ . Найдите порядки центров групп  $\text{GL}(3, 3^2)$ ,  $\text{SL}(3, 13)$ .

62. В симметрической группе  $S_4$  найдите коммутатор  $[\tau_1, \tau_2]$  элементов  $\tau_1 = (12)$ ,  $\tau_2 = (123)$ .

63. Проекторы, примеры. Проекторы в разрешимых группах.

64. Укажите разложение циклической группы порядка 36 в прямое произведение циклических примарных подгрупп.

65. Найдите в группе  $\text{GL}(2, \mathbb{Z}_{11})$  коммутатор  $[a^{-1}, b]$  элементов

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

66. Корадикальные произведения.

67. Пусть  $A = \langle (1234) \rangle$  и  $B = \langle (234) \rangle$  — подгруппы симметрической группы  $S_4$ . Найдите число элементов множества  $AB$ . Будет ли подгруппой произведение  $AB$ ?

68. Вычислите порядки и перечислите подгруппы группы  $\text{PSL}(2, 2^6)$ .

69. Прimitивные группы и их свойства.

70. Найдите все элементы циклической подгруппы  $H = \langle -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \rangle$  мультипликативной группы  $\mathbb{C}^\#$  комплексных чисел.

71. Вычислите порядки линейных групп  $\text{SL}(3, 13^2)$ ,  $\text{PGL}(3, 3^2)$ . Найдите порядки центров групп  $\text{GL}(3, 3^2)$ ,  $\text{SL}(3, 13)$ .

72. Классы Шунка и их свойства.

73. Докажите, что в группе порядки элементов  $ab^{-1}$  и  $ba^{-1}$  равны.

74. Пусть  $f : (3\mathbb{Z}, +) \rightarrow (2\mathbb{Z}, +)$  — такое отображение, что  $f : 3k \mapsto 6k$ . Докажите, что  $f$  — гомоморфизм. Найдите ядро и образ. Будет ли  $f$  мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом?

75. Корадикал и его свойства. Абелевы и нильпотентные корадикалы.