Лабораторная работа № 14
Производные и дифференциалы высших порядков

Необходимые понятия и теоремы: производная n-го порядка, дифференциал n-го порядка, формула Лейбница, формулы производных n-го порядка для некоторых элементарных функций.

Литература: [1] с. 244 – 250, [2] с. 157 – 164.

1 Для данной функции $y = f(x)$, заданной в естественной области определения, найти производную второго порядка. Записать d^2y.

№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	1.11	$y=(1+x^2)\cdot arctgx$
1.2	$y=arctg(x+\sqrt{x^2+1})$	1.12	$y=tg^2x$
1.3	$y=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	1.13	$y=e^{\sin x}$
1.4	$y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$	1.14	$y=e^{\cos x}$
1.5	$y=(x^2+x+1)\cdot e^{-x}$	1.15	$y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$
1.6	$y=x\cdot(\cos\ln x+\sin\ln x)$	1.16	$y=x\cdot\cos x^2$
1.7	$y=x\cdot\sqrt[3]{(x-5)^2}$	1.17	$y=(3-x^2)\cdot\ln^2 x$
1.8	$y=arctg\dfrac{2+x^2}{2-x^2}$	1.18	$y=\dfrac{\ln x}{x^3}$
1.9	$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	1.19	$y=(1-x-x^2)\cdot e^{(x-1)/2}$
1.10	$y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$	1.20	$y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$

2 Проверить, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$, заданная в естественной области определения, данному уравнению.

№	$y=f(x)$, уравнение	№	$y=f(x)$, уравнение
2.1	$y=1+\cos(e^x)+\sin(e^x)$, $y''-y'+e^{2x}\cdot y=0$	2.11	$y=e^{-3x}(9+2x)$, $y''+6y'+9y=0$
2.2	$y=(x+\sqrt{1+x^2})^{10}$, $(1+x^2)y''+xy'-100y=0$	2.12	$y=e^{3x}(\cos 3x+2\sin 3x)$, $y''-6y'+18y=0$
2.3	$y=e^{10\arcsin x}$, $(1-x^2)y''-xy'+100y=0$	2.13	$y=x(\ln x-1)+1$, $y''\cdot x\cdot\ln x-y'=0$
2.4	$y=\cos(10\arccos x)$, $(1-x^2)y''-xy'+100y=0$	2.14	$y=e^x(x-1)+x^2$, $xy''-y'-x^2e^x=0$
2.5	$y=3e^x+2e^{-x}-\dfrac{1}{x}$, $y''-y=\dfrac{x^2-2}{x^3}$	2.15	$y=\dfrac{1}{2}\cdot\ln^2 x+\ln x+2$, $x^2y''+xy'-1=0$
2.6	$y=(7\cos 3x+2\sin 3x)\cdot e^{-x}$, $y''+2y'+10y=0$	2.16	$y=\arcsin^2 x+2\arcsin x$, $(1-x^2)y''-xy-2=0$
2.7	$y=8e^{3x}+3e^{-3x}$, $y''-9y=0$	2.17	$y=4\ln x+\dfrac{1}{x}+8$, $x^3y''+x^2y'-1=0$
2.8	$y=2e^{3x}+7e^{-2x}$, $y''-y'-6y=0$	2.18	$y=(x+3)\ln x-2x$, $xy''+y'-\ln x=0$
2.9	$y=x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))$, $x^2y''-xy'+2y=0$	2.19	$y=2e^x(x-1)+x^2/2$, $xy''-y'-2x^2e^x=0$
2.10	$y=e^{(1+\sqrt{5})x}+2e^{(1-\sqrt{5})x}$, $y''-2y'-4y=0$	2.20	$y=x\cdot\ln^2 x-2x\ln x+2x$, $y''\cdot x\cdot\ln x-2y'=0$

3 Пусть $f(x)$ – трижды дифференцируемая функция на всей числовой прямой. Найти y'' и y''' для сложной функции $f(\varphi(x))$, заданной на естественной области определения.

№	y	№	y	№	y	№	y
3.1	$f(e^x)$	3.6	$f\left(\frac{1}{x+1}\right)$	3.11	$f(\sqrt{x})$	3.16	$f(\ln(1-x))$
3.2	$f(x^2)$	3.7	$f(\sin x)$	3.12	$f(\sqrt{x})$	3.17	$f(\cos(1-x))$
3.3	$f\left(\frac{1}{x}\right)$	3.8	$f(\cos x)$	3.13	$f\left(\frac{1}{x-1}\right)$	3.18	$f(\sqrt{x^3})$
3.4	$f(\ln x)$	3.9	$f(e^{3x})$	3.14	$f(\sin 2x)$	3.19	$f(2^x)$
3.5	$f(x^3)$	3.10	$f(tgx)$	3.15	$f((x+1)^2)$	3.20	$f(ctgx)$

4 Найти производную *n*-го порядка для функции, заданной на естественной области определения.

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
4.1	$y=e^{-3x}$	4.6	$y=\ln(1+x)$	4.11	$y=\left(\frac{1}{x+1}\right)$	4.16	$y=2^{1-3x}$
4.2	$y=\sin x$	4.7	$y=\ln(ax+b)$	4.12	$y=\left(\frac{1}{x-1}\right)$	4.17	$y=\sin^2 x$
4.3	$y=\cos x$	4.8	$y=e^{ax}$	4.13	$y=\left(\frac{1}{x+a}\right)$	4.18	$y=\cos^2 x$
4.4	$y=e^{5x}$	4.9	$y=2^x$	4.14	$y=a^x$	4.19	$y=\cos(\alpha x)$
4.5	$y=e^{2x+1}$	4.10	$y=\ln(x+a)$	4.15	$y=3^{2x+1}$	4.20	$y=\sin(\alpha x)$

5 Используя, формулу Лейбница найти производную указанного порядка *k* функции $y=f(x)$, заданной на естественной области определения.

№	k	$y=f(x)$	№	k	$y=f(x)$
5.1	25	$y=x^3\cdot\sin(2x+3)$	5.11	22	$y=(x^2-x-7)\cdot\sin(1+2x)$
5.2	72	$y=x^2\cdot e^{-2x}$	5.12	99	$y=(x+1)^2\cdot e^{-2x}$
5.3	38	$y=(1-x^2)\cdot\cos 3x$	5.13	77	$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-5x}}$
5.4	18	$y=(x^3-1)\cdot\sin x$	5.14	20	$y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}$
5.5	30	$y=(x^2+x+1)\cdot e^x$	5.15	17	$y=x^3\cdot\ln(x+1)$
5.6	40	$y=x^3\cdot\ln(x+1)$	5.16	10	$y=(e^x+x)\cdot x^{-1}$
5.7	35	$y=(x^2+2x+3)\cdot 2^{x-1}$	5.17	98	$y=(x^2+7)\cdot\cos x$
5.8	27	$y=(3-2x)^2\cdot e^{2-3x}$	5.18	20	$y=x^3\cdot\sin 4x$
5.9	20	$y=\ln(x-1)^{2x^2}$	5.19	6	$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$
5.10	33	$y=(2x-1)\cdot 2^{3x}\cdot 3^{2x}$	5.20	24	$y=e^{\alpha\cdot x}\cdot(x^2-1)$

6 Найти $y^{(n)}(x)$ для данной функции, заданной на естественной области определения.

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
6.1	$y=\sin 3x\cdot\sin 5x$	6.11	$y=\ln(x^2-3x+2)$
6.2	$y=\sin^4 x$	6.12	$y=2x\cdot\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$
6.3	$y=\sin^2 x$	6.13	$y=2x\cdot\cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

6.4	$y=\cos^4 x$	6.14	$y=\cos x\cdot\cos 3x$
6.5	$y=\dfrac{x}{x^2-4x-12}$	6.15	$y=\dfrac{1}{x\cdot(1-x)}$
6.6	$y=\dfrac{1+x}{1-x}$	6.16	$y=\sin^3 x$
6.7	$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$	6.17	$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-5x}}$
6.8	$y=x^2\cdot\sin x$	6.18	$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$
6.9	$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$	6.19	$y=\dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$
6.10	$y=\ln\dfrac{3+x}{3-x}$	6.20	$y=\sin^2 x\cdot\sin 3x$

7 Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции заданной параметрически.

№	$x=x(t), y=y(t)$
7.1	$x=\sin t, y=\dfrac{1}{\cos t}, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.2	$x=e^t\cdot\sin t, y=e^t\cdot\sin t, t\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$
7.3	$x=t+\sin t, y=2-\cos t, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.4	$x=\sqrt{t}, y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}, t>0$
7.5	$x=tgt, y=\dfrac{1}{\sin 2t}, t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.6	$x=\sqrt{t}, y=\sqrt[3]{t-1}, t>0$
7.7	$x=\sqrt{t-1}, y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}, t>1$
7.8	$x=\dfrac{1}{t}, y=\dfrac{1}{1+t^2}, t>0$

7.9	$x=\sqrt{t-1}, y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}, t>1$
7.10	$x=\cos^2 t, y=tg^2 t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.11	$x=t-\sin t, y=2-\cos t, t\in R$
7.12	$x=\sin t, y=\ln\cos t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.13	$x=\cos t, y=\ln\sin t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.14	$x=e^t, y=\arcsin t, t\in R$
7.15	$x=2(t-\sin t), y=4(2+\cos t), t\in R$
7.16	$x=\dfrac{1}{t^2}, y=\dfrac{1}{t^2+1}, t>0$
7.17	$x=\cos t+t\sin t, y=\sin t-t\cos t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$
7.18	$x=\cos t, y=\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right), t\in(0;\pi)$
7.19	$x=arctgt, y=\dfrac{t^2}{2}, t\in R$
7.20	$x=\ln t, y=arctgt, t>0$

8 Для функции $y=y(x)$, заданной неявно в окрестности точки x_0 и имеющий в этой окрестности вторую производную, найти $y''(x_0)$.

№	$F(x,y)=0$	№	$F(x,y)=0$
8.1	$x^2\sin y+y=\pi$, $x_0=0$	8.11	$x^2+2y^2+4x-4y=0$, $x_0=0, y>1$
8.2	$xe^y+ye^x=1$, $x_0=0$	8.12	$(1-x)y=x^3e^y$, $x_0=0$
8.3	$y^4-4x^4-6xy=0$, $x_0=1, y>0$	8.13	$xy+\ln y=1$, $x_0=0$

8.4	$x^2+y^2-2x+6y=0,$ $x_0=0, y>-3$	8.14	$x^2+xy+y^2=1,$ $x_0=0, y>0$
8.5	$x^3+y^3-x-y=6,$ $x_0=1, y>0$	8.15	$x^2+y^2-6x+10y-11=0,$ $x_0=0, y>0$
8.6	$x^2+y^2-4e^x=0,$ $x_0=0, y>0$	8.16	$e^y+xy=e,$ $x_0=0$
8.7	$x^2-5y^2+4xy-1=0,$ $x_0=1, y>0$	8.17	$e^{xy}+x^2+y^3=2,$ $x_0=1$
8.8	$x^4-2x^2y^2+y^3=0,$ $x_0=1$	8.18	$e^{x-y}-x-y=0,$ $x_0=1/2$
8.9	$3y^2x-x^3+2=0,$ $x_0=-1, y>0$	8.19	$e^{2y}-2\ln x-1=0,$ $x_0=1$
8.10	$x^2/4+y^2/16=1,$ $x_0=\sqrt{15}/2, y>0$	8.20	$x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0,$ $x_0=1, y>0$

Решение типичных задач

1.20 Для данной функции $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, заданной в естественной области определения, найти производную второго порядка. Записать d^2y.

Решение Найдём сначала y':

$$y'=\frac{(\ln(x-1))'\sqrt{x-1}-\ln(x-1)(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}-\dfrac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{2-\ln(x-1)}{2(x-1)^{3/2}}.$$

Теперь

$$y'' = \left(\frac{2-\ln(x-1)}{2(x-1)^{3/2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2-\ln(x-1))'(x-1)^{3/2} - (2-\ln(x-1))((x-1)^{3/2})'}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-\dfrac{(x-1)^{3/2}}{x-1} - (2-\ln(x-1)) \cdot \dfrac{3}{2} \cdot (x-1)^{1/2}}{(x-1)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2 + (2-\ln(x-1)) \cdot 3}{(x-1)^{5/2}} =$$

$$= \frac{3\ln(x-1) - 8}{4(x-1)^{5/2}}.$$

$$d^2 y = \frac{3\ln(x-1) - 8}{4(x-1)^{5/2}} (dx)^2.$$

2.20 Проверить, удовлетворяет ли данная функция, заданная в естественной области определения, данному уравнению:

$$y = x \cdot \ln^2 x - 2x\ln x + 2x, \; y'' \cdot x \cdot \ln x - 2y' = 0.$$

Решение Найдём $y' = \ln^2 x + \dfrac{x \cdot 2\ln x}{x} - 2\ln x - 2x \cdot \dfrac{1}{x} + 2 = \ln^2 x$. Теперь

$$y'' = \frac{2\ln x}{x}.$$

Подставим y' и y'' в данное уравнение:

$$\frac{2\ln x}{x} \cdot x\ln x - 2\ln^2 x = 0.$$

Получили верное равенство. Значит, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

3.20 Пусть $f(x)$ – трижды дифференцируемая функция на всей числовой прямой. Найти y'' и y''' для сложной функции $f(ctgx)$, заданной на естественной области определения.

Решение Если $y = f(ctgx)$, f – дифференцируемая функция, то

$$y' = f'(ctgx) \cdot (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot f'(ctgx) = -\sin^{-2} x \cdot f'(ctgx).$$

Тогда $y'' = 2\sin^{-3} x \cdot \cos x \cdot f'(ctgx) + \sin^{-4} x \cdot f''(ctgx)$,

$$y''' = (-6\sin^{-4} x \cdot \cos^2 x + 2\sin^{-3} x \cdot (-\sin x)) \cdot f'(ctgx) +$$

$$+ 2\sin^{-3} x \cdot \cos x \cdot f''(ctgx) \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} + (-4\sin^{-5} x \cdot \cos x) \cdot f''(ctgx) +$$

$$+\sin^{-4}x\cdot f'''(ctgx)\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}=-\frac{2}{\sin^2 x}(3ctg^2x+1)\cdot f'(ctgx)-$$
$$-6\cdot\frac{\cos x}{\sin^5 x}\cdot f''(ctgx)-\frac{f'''(ctgx)}{\sin^6 x}.$$

4.20 Найти производную *n*-го порядка для функции $y=\sin(\alpha\cdot x)$, заданной на естественной области определения.

Решение Для $y=\sin(\alpha x)$ найдём несколько производных:

$y'=\alpha\cdot\cos(\alpha x)$, $y''=-\alpha^2\sin(\alpha x)$, $y'''=-\alpha^3\cos(\alpha x)$, $y^{IV}=\alpha^4\sin(\alpha x)$, …

Заметим, что

$$y'=\alpha\cdot\cos(\alpha x)=\alpha\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''=-\alpha^2\sin(\alpha x)=\alpha^2\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{2\pi}{2}\right),$$
$$y'''=-\alpha^3\cos(\alpha x)=\alpha^3\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{3\pi}{2}\right),$$
$$y^{IV}=\alpha^4\sin(\alpha x)=\alpha^4\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{4\pi}{2}\right).$$

Теперь можно заметить, что $y^{(n)}=\alpha^n\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{\pi n}{2}\right)$ (более строго это можно доказать, используя метод математической индукции).

5.20 Используя, формулу Лейбница найти производную указанного порядка *k*=24 функции $y=e^{\alpha\cdot x}\cdot(x^2-1)$, заданной на естественной области определения.

Решение Воспользуемся формулой Лейбница:

$$(UV)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot U^{(k)}\cdot V^{(n-k)},\text{ где } C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пусть $U=x^2-1$, $V=e^{\alpha\cdot x}$. Тогда $U'=2x$, $U''=2$. Для $k\geq 3$ $U^{(k)}=0$.

$$V'=\alpha\cdot e^{\alpha\cdot x},\ V''=\alpha^2\cdot e^{\alpha\cdot x},\ \dots,\ V^{(k)}=\alpha^k\cdot e^{\alpha\cdot x}.$$

По формуле Лейбница

$$y^{(24)}=C_{24}^0\cdot U\cdot V^{(24)}+C_{24}^1\cdot U'\cdot V^{(23)}+C_{24}^2\cdot U''\cdot V^{(22)}=$$
$$=\frac{24!}{0!24!}\cdot(x^2-1)\cdot\alpha^{24}\cdot e^{\alpha\cdot x}+\frac{24!}{0!23!}\cdot 2x\cdot\alpha^{23}\cdot e^{\alpha\cdot x}+\frac{24!}{0!22!}\cdot 2\cdot\alpha^{22}\cdot e^{\alpha\cdot x}=$$

$$=(x^2-1)\cdot\alpha^{24}\cdot e^{\alpha\cdot x}+48x\cdot\alpha^{23}\cdot e^{\alpha\cdot x}+23\cdot 24\cdot\alpha^{22}\cdot e^{\alpha\cdot x}=$$
$$=\alpha^{22}\cdot e^{\alpha\cdot x}\left(x^2-1+48x\alpha+552\right)=\alpha^{22}\cdot e^{\alpha\cdot x}(x^2+48x\alpha+551).$$

6.20 Найти $y^{(n)}(x)$ для данной функции $y=\sin^2 x\cdot\sin 3x$,заданной на естественной области определения.

Решение Преобразуем данную функцию:

$$y=\sin^2 x\cdot\sin 3x=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin 3x=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{2}\sin 3x\cdot\cos 2x=$$
$$=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{4}(\sin 5x+\sin x)=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 5x-\frac{1}{4}\sin x.$$

Используя формулу $(\sin\alpha x)^{(n)}=\alpha^n\cdot\sin\left(\alpha x+\frac{\pi n}{2}\right)$, получим

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\cdot 3^n\cdot\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot 5^n\cdot\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{4}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

7.20 Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции заданной параметрически:

$$x=\ln t,y=arctgt,t>0.$$

Решение Равенства $x=\ln t,y=arctgt,t>0$ задают параметрически функцию $y=y(x)$, так как при $t>0$ функция $x(t)=\ln t$ монотонно возрастает. Согласно теореме о производной функции, заданной параметрически, $y(x)$ дифференцируема.

Найдём сначала $x'_t=\frac{1}{t}$, $y'_t=\frac{1}{1+t^2}$. Тогда $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t}{1+t^2}$.

Для нахождения y''_{xx} найдём сначала

$$(y'_x)'_t=\left(\frac{t}{1+t^2}\right)'=\frac{1+t^2-t\cdot 2\cdot t}{(1+t^2)^2}==\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Теперь $y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}:\frac{1}{t}=\frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$.

Замечание 1 Для нахождения y''_{xx} можно было воспользоваться формулой:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x''_{t} - x''_{tt} \cdot y'_{t}}{\left(x'_{t}\right)^{3}}.$$

Замечание 2 В данном случаем из равенства $x = \ln t$ логично выразить явно $t = e^{x}$, тогда $y = arctg(e^{x})$, и производные можно вычислить непосредственно.

8.20 Для функции $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, заданной неявно в окрестности точки $x_0 = 1, y > 0$ и имеющей в этой окрестности вторую производную, найти $y''(x_0)$.

Решение Найдём сначала $y'(x_0)$. Продифференцируем обе части данного равенства но *x*, учитывая, что *y* есть функция от *x*. Получим:

$$2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 4 + 2y' = 0.$$

Отсюда $y'(2x + 2y + 2) = 4 - 2x - 2y$, $y' = \dfrac{2 - x - y}{1 + x + y}$.

Подставив в данное в условии равенство $x_0 = 1$, найдём $y_0 = 1$.
Тогда $y'(x_0) = \dfrac{2 - 1 - 1}{3} = 0$.

Теперь $y'' = \left(\dfrac{2 - x - y}{1 + x + y}\right)'_x = \dfrac{(-1 - y')(1 + x + y) - (2 - x - y)(1 + y')}{(1 + x + y)^2}$.

Подставив сюда $x = 1$, $y = 1$, $y' = 0$, получим $y''(x_0) = \dfrac{-3 - 0}{9} = -\dfrac{1}{3}$.

Лабораторная работа № 15

Основные теоремы дифференциального исчисления: примеры применения теорем. Правило Лопиталя.

Необходимые понятия и теоремы: теорема Ролля, теорема Лагранжа, формула конечных приращений, правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $0^0, \infty^0$, $\infty-\infty$.

Литература: [1] с. 254 – 263, [2] с. 164 – 172.

1 Проверить справедливость теоремы Ролля для данной функции $y=f(x)$ на указанном отрезке $[a;b]$:

№	$f(x)$	$[a;b]$
1.1	$y=2^{\sin x}$	$[0;\pi]$
1.2	$y=x^3+4x^2-7x-10$	$[-1;2]$
1.3	$y=\frac{5}{7}\left(x^2+\frac{6}{x}\right)$	$[1;2]$
1.4	$y=4\sqrt{3}x^3+9x^2-4\sqrt{3}x$	$[-1;1]$
1.5	$y=\ln\sin x$	$\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$
1.6	$y=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$	$[1;2]$
1.7	$y=x^3-6x^2+11x-6$	$[1;3]$
1.8	$y=2\sin x+\cos 2x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
1.9	$y=e^{2x-x^2}$	$[-1;3]$
1.10	$y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$	$[0;\sqrt{2}]$

1.11	$y=x^3-6x^2+11x-6$	[illegible];2
1.12	$y=\ln\cos x$	$\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]$
1.13	$y=\sin x-\cos^2 x-1$	[illegible];π
1.14	$y=3^{-x^2-3\cdot x}$	[illegible]$-2;-1$
1.15	$y=x^3+4x^2-7x-10$	[illegible]$-5;-1$
1.16	$y=2\sin x+\sin 2x$	[illegible];π
1.17	$y=4^{\sin x}$	[illegible];π
1.18	$y=x^3-2x^2-x+2$	[illegible];2
1.19	$y=x^4-8x^2+3$	$[\sqrt{3};\sqrt{5}]$
1.20	$y=e^{\cos 2x}$	$\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

2 Для данной функции $y=f(x)$ и указанного отрезка $[a;b]$ найдите точку $\xi\in(a,b)$, такую, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$ (или покажите, что такая точка ξ существует):

№	$f(x)$	$[a;b]$	№	$f(x)$	$[a;b]$
2.1	$y=3x^2-2\sqrt{x}$	[illegible];4	2.11	$y=2x+\frac{5}{x-2}$	[illegible]$-1;1$
2.2	$y=4x^3-5x^2+x-2$	[illegible];2	2.12	$y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}x-1$	[illegible];8
2.3	$y=x^3+3x^2+6$	[illegible];2	2.13	$y=5x^3+15x$	[illegible];2
2.4	$y=\ln x$	$[1;e^2]$	2.14	$y=e^{2x}$	[illegible];2

2.5	$y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$	$[0;1]$	2.15	$y=x^3-2x^2-x+2$	$[0;2]$
2.6	$y=\ln\sin x$	$\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$	2.16	$y=\frac{1}{x}$	$\left[\frac{1}{2};4\right]$
2.7	$y=\sqrt{1+x^2}$	$[0;\sqrt{3}]$	2.17	$y=\sqrt{x^2-2x}$	$[3;8]$
2.8	$y=x^3+4x^2-7x-10$	$[0;2]$	2.18	$y=x+\frac{1}{x}$	$[2;4]$
2.9	$y=x^2+\frac{6}{x}$	$[1;3]$	2.19	$y=x+\frac{4}{x}$	$[1;2]$
2.10	$y=x^3-6x^2+11x-6$	$[2;4]$	2.20	$y=x^4-8x^2+3$	$[1;2]$

3 Используя теорему Лагранжа, докажите неравенство при указанных значениях переменных:

№	неравенство
3.1	$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}\quad ,0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$
3.2	$n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}\quad ,0<a<b, n\in N$
3.3	$\frac{x-y}{x}<\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}\quad ,0<y<x$
3.4	$x+\frac{1}{x}\ge y+\frac{1}{y}+\left(1-\frac{1}{y}\right)(x-y)\ ,x>0, y>0$
3.5	$\lvert\operatorname{arcctg}x - \operatorname{arcctg}y\rvert\le\lvert x-y\rvert\ ,x,y\in R$
3.6	$\lvert\sqrt{x}-\sqrt{y}\rvert\le\frac{1}{2}\lvert x-y\rvert\ ,x\ge1, y\ge1$
3.7	$\lvert\cos x-\cos y\rvert\le\lvert x-y\rvert\ ,x,y\in R$
3.8	$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ ,\mathrm{x}>0$
3.9	$\lvert\operatorname{arctg}x - \operatorname{arctg}y\rvert\le\lvert x-y\rvert\ ,x,y\in R$

3.10	$(1+x)^{\alpha} \geq 1+\alpha \cdot x, x>-1\ , \alpha \geq 1$
3.11	$\lvert \sin x-\sin y \rvert \leq \lvert x-y \rvert\ , x, y \in R$
3.12	$\sin \alpha-\sin \beta \leq(\alpha-\beta) \cos \beta\ , \alpha, \beta \in [0;\pi]$
3.13	$\ln (1+x)<x\ , x>0$
3.14	$e^{x}>e x\ , x>1$
3.15	$\frac{1}{n^{\alpha+1}}<\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}-\frac{1}{n^{\alpha}}\right), n \in N, \alpha>0$
3.16	$\lvert \arcsin x-\arcsin y \rvert \geq \lvert x-y \rvert\ , x, y \in(-1;1)$
3.17	$\lvert \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y} \rvert \leq \frac{1}{3} \lvert x-y \rvert\ , x, y \geq 1$
3.18	$\ln (x+\sqrt{1+x^{2}})<2 x\ , x>0$
3.19	$e^{\sin x}-1 \leq e x\ , 0<x \leq \frac{\pi}{2}$
3.20	$e^{x} \geq 1+x\ , \forall x \in R$

4 С помощью правила Лопиталя вычислить следующие пределы:

№	а)	б)
4.1	$\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2 x}{\ln \cos 4 x}$	$\lim\limits_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2}+\sin x}{e^{x}+\cos x}$
4.2	$\lim\limits_{x \rightarrow 3} \frac{\ln (x^{2}-8)}{2 x^{2}-5 x-3}$	$\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} \frac{x^{10}}{2^{x}}$
4.3	$\lim\limits_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a x-\sin b x}{\operatorname{sh} a x-\operatorname{sh} b x}\ , a \neq b$	$\lim\limits_{x \rightarrow+\infty} \frac{x^{2}}{2 x^{2}+\ln ^{2} x}$

4.4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^{10}}$
4.5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\mathrm{tg}^2 x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+\ln x}{x^3+\cos x}$
4.6	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\mathrm{ctg}\, 2x}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}}{x\ln^2 x}$
4.7	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-3x^2+7x-5}{x^4-5x+4}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2\ln x}{e^{x}}$
4.8	$\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\mathrm{arctg}(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$
4.9	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x^3-x}-2x}{\sqrt[5]{x^2}-1}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln \mathrm{tg}\, x}$
4.10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\mathrm{tg}\, x-x}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\ln(x-\frac{\pi}{2})}{\mathrm{tg}\, x}$
4.11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}-2x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin x}{\mathrm{ctg}\, x}$
4.12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{x}}{\sin x-x}$	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$
4.13	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-3x+4}{x\sqrt{x}-5x+8\sqrt{x}-4}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-2\mathrm{tg}\, x}{1+3\mathrm{ctg}\, 2x}$
4.14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\mathrm{arctg}\, x}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

4.15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{\sin^2 x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$
4.16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg}2x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{2+\operatorname{ctg}\pi x}$
4.17	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}\pi x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{(0{,}01)^x}$
4.18	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2x}{x^2\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2}{\operatorname{ctg}3x}$
4.19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{0{,}001}}$
4.20	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$	$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}\quad ,a,b>0$

5 Установить вид неопределенности в данных пределах. Преобразовав имеющиеся неопределенности к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, вычислить предел с помощью правила Лопиталя.

№	а)	б)	в)
5.1	$\lim\limits_{x\to 1}(\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
5.2	$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+3^x)^{\frac{1}{x}}$
5.3	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$

5.4	$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} 3x \cdot \ln x^2$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}(1+x)^{\ln x}$
5.5	$\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$
5.6	$\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$
5.7	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 \cdot e^{-x^3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x^x\right)$
5.8	$\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{3}{1+\ln x}}$
5.9	$\lim\limits_{x\to +0} x^{0,1} \cdot \ln x$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{5}{1-x^5}\right)$	$\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$
5.10	$\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}(2\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$
5.11	$\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\cdot\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
5.12	$\lim\limits_{x\to +\infty} x(\pi-2\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$	$\lim\limits_{x\to 0}(x^{-2}-\operatorname{ctg}^2 x)$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
5.13	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x-(1-\sin x)^{-1})$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$
5.14	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{10}{1-x^{10}}-\frac{20}{1-x^{20}}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

5.15	$\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{3x})\operatorname{ctg} 7x$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{4}{1-2\ln x}}$
5.16	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{1}{\cos x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}+1\right)^{x}$
5.17	$\lim\limits_{x\to +0}\sqrt{x}\cdot\ln^2 x$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^{-1}}{2}-\dfrac{1}{\arcsin 2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$
5.18	$\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\dfrac{x+1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} 3x-\dfrac{1}{3x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2-2x)^{\operatorname{tg}\pi x}$
5.19	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-x\ln^2 x)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$
5.20	$\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln^{10} x$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$

Решение типовых примеров

1.20 Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y=e^{\cos 2x}$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Решение Данная функция непрерывна на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$, дифференцируема на интервале $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Кроме того, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^0=1$. Значит, на интервале $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$ существует точка C такая, что $y'(C)=0$, т. е. теорема Ролля для данной функции справедлива.

В данном примере точку C можно найти. Действительно, рассмотрим уравнение $y'(x)=0$.

$$-2\sin 2x\cdot e^{\cos 2x}=0,$$
$$\sin 2x=0,$$
$$x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Решение уравнения $y'(x)=0$ $C=\dfrac{\pi}{2}$, действительно, принадлежит интервалу $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Теорема Ролля выполняется.

2.20 Для данной функции $y=f(x)$ и отрезка $[a;b]$ найти точку $\xi\in(1;2)$ такую, что $f(a)-f(b)=f'(\xi)\cdot(b-a)$, или показать, что такая точка существует.

$$f(x)=x^4-8x^2+3,\ [1;2]$$

Решение В данном случае $a=1,\ b=2,\ f'(x)=4x^3-16x,$

$$f(a)=f(1)=-4,\ f(b)=f(2)=-13.$$

Равенство $f(a)-f(b)=f'(\xi)\cdot(b-a)$ принимает вид:

$$-13+4=(4\xi^3-16\xi)\cdot 1.$$

Получаем уравнение $4\xi^3-16\xi+9=0$. Покажем, что оно имеет корень на интервале $(1;2)$. Обозначим $g(\xi)=4\xi^3-16\xi+9$. Так как $g(1)=-3<0$, $g(2)=9>0$, то по свойствам непрерывных функций, функция $g(\xi)$ имеет ноль на интервале $(1;2)$, и данное равенство выполняется в этой точке.

3.20 Используя теорему Лагранжа, доказать неравенство при указанных значениях переменной x.

$$e^x\ge 1+x,\ x\in(-\infty;+\infty)$$

Решение Пусть $x>0$. По теореме Лагранжа для функции $f(x)=e^x$, $x\in[0;x]$, существует точка $\xi\in(0;x)$, что

$$e^x-e^0=e^{\xi}(x-0),\ \text{т.е. } e^x-1=e^{\xi}\cdot x$$

Так как функция e^{ξ} возрастает на отрезке $[0;x]$, то она принимает минимальное значение в точке $x=0$. Поэтому

$$e^x-1\ge e^0\cdot x \quad \text{или} \quad e^x\ge 1+x,\quad \forall x>0.$$

Пусть теперь $x<0$. Применим теорему Лагранжа к функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[x;0]$. Тогда для некоторого $\xi\in(x;0)$ имеем

$$e^0-e^x=e^{\xi}\cdot(-x).$$

Поскольку $-x$ здесь величина положительная, а e^{ξ} достигает максимального значения при $\xi=0$, то

$$e^0-e^x\le e^0\cdot(-x)\ \text{ или }\ 1-e^x\le x.$$

Таким образом, при $x<0$ опять получим $e^x\ge 1+x$.

При $x=0$ $e^0=1+0$, т.е. неравенство тоже выполняется.

4.20 С помощью правила Лопиталя вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$ $,a,b>0$.

Решение а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3\cdot 4}{\cos^2 x}-\dfrac{12}{\cos^2 x}}{3\cdot 4\cos 4x-12\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 4x}{\cos^2 4x\cdot\cos^2 x(\cos 4x-\cos x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 4x}{\cos^2 4x\cdot\cos^2 x}=-\frac{1+1}{1\cdot 1}=-2.$$

б) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\dfrac{1}{\sin ax}\cdot a\cos ax}{\dfrac{1}{\sin bx}\cdot b\cos bx}=\dfrac{a}{b}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin bx}{\sin ax}=$

$$=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to +0}\frac{\sin bx}{\sin ax}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to +0}\frac{b\cos bx}{a\cos ax}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

5.20 Установить вид неопределенности в данных пределах. Преобразуя имеющиеся неопределенности к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$**,** вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln^{10}x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Решение а) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем ее к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Получим

$$\lim_{x\to +0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln^{10}x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln^{10}x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +0}\frac{10\ln^9 x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=-30\lim_{x\to +0}\frac{\ln^9 x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-30\lim_{x\to +0}\frac{9\ln^8 x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=10\cdot 9\cdot 3^2\lim_{x\to +0}\frac{\ln^8 x}{x^{-\frac{1}{3}}}.$$

Продолжая этот процесс далее, применив правило Лопиталя ещё 7 раз, получим

$$-10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 3^9\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{3}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-3^9\cdot 10!\cdot\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}=3^{10}\cdot 10!\cdot\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{3}}=0.$$

б) Имеем неопределённость вида $\infty-\infty$. Преобразуем её к виду $\frac{0}{0}$ и далее используем асимптотическую формулу $\sin x\sim x$ при $x\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}\cos x=1+1=2,$$

то исходный предел равен $\frac{2}{3}$.

в) Имеем неопределённость вида 0^0. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$(\pi-2x)^{\cos x}=e^{\cos x\cdot\ln(\pi-2x)}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\cos x\cdot\ln(\pi-2x)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\cdot\ln(\pi-2x)}$.

Так как

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln(\pi-2x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln(\pi-2x)}{\frac{1}{\cos x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos^2 x}{\pi-2x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\sin x}=-2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{-2}=0,$$

то исходный предел равен e^0, то есть 1.

Лабораторная работа № 16
Приложения дифференциального исчисления

Необходимые понятия и теоремы: монотонные функции, критерий монотонности функции, точки локального и глобального экстремума функции, необходимые и достаточные условия существования локального экстремума.

Литература: [1] с. 261 – 266, [4] с. 317 – 327.

1 Найти естественную область определения функции $f(x)$, ее интервалы монотонности и точки экстремума:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$x-e^x$	1.8	x^2e^{-x}	1.15	$x-\sin x$
1.2	$x+\cos x$	1.9	$x-2\ln x$	1.16	$x/\ln x$
1.3	$x-\sqrt{2-x}$	1.10	$x+\sqrt{x-3}$	1.17	e^x/x
1.4	$x^2(1-x\sqrt{x})$	1.11	$x\ln x$	1.18	x^3-3x^2-9x+1
1.5	$2x^2-\ln x$	1.12	$x-2\cos x$	1.19	$\sqrt{2x-x^2}$
1.6	$(x-2)^5(2x+1)^4$	1.13	$x\sqrt{x-x^2}$	1.20	$\dfrac{\lvert x-1\rvert}{x^2}$
1.7	$\ln(x^2+1)$	1.14	$-x^2\sqrt{x^2+2}$	1.21	x^3-3x^2+x-20

2 Найти глобальный экстремум функции $f(x)$, определенной на $[a;b]$:

№	$f(x)$	$[a;b]$	№	$f(x)$	$[a;b]$
2.1	$x^2+\dfrac{4}{x}-4$	[1; 5]	2.11	$x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$	[2; 5]
2.2	$4-x-\dfrac{4}{x^2}$	[1; 4]	2.12	$\dfrac{4x}{x^2+4}-4$	[-4; 2]
2.3	$2\sqrt{x}-x$	[0; 4]	2.13	$2\sqrt{x-1}-x+2$	[1; 5]
2.4	$x-\dfrac{6}{x}$	[-3; 3]	2.14	$8x+\dfrac{4}{x^2}-15$	[1; 4]
2.5	$x-2\sqrt{x}+5$	[1; 9]	2.15	x^3-3x^2+3x-4	[1; 2]
2.6	$3-x-\dfrac{4}{(x+2^2)}$	[-1; 2]	2.16	$\dfrac{4}{x^2}-8x-4$	[-2; 0,5]
2.7	$-0.5x^2+\dfrac{8}{x}+8$	[-4; -1]	2.17	$x^2+\dfrac{16}{x+2}+4x-9$	[-1; 2]
2.8	x^4+4x	[-2; 2]	2.18	$2\sqrt{x}-x$	[0; 9]

2.9	$x^3-12x+7$	[0; 3]	2.19	$x-4\sqrt{x}+6$	[1; 16]
2.10	x^3-3x+3	[-1; 5]	2.20	x^3-6x^2+9x	[-1; 4]

3 Найти глобальный экстремум функции $f(x)$, определенной на $(a;b)$:
(расставить акценты)

№	$f(x)$	$(a;b)$	№	$f(x)$	$(a;b)$
3.1	$\frac{1}{x}+x^2$	$(-1;1)$	3.11	$\frac{1}{x}e^{-1/x}$	$(-1;1)$
3.2	$\frac{x^2+4x+1}{x+4}$	$(-5;5)$	3.12	$\frac{9}{x}+\frac{25}{1-x}$	$(0;1)$
3.3	$\frac{1}{x}e^{-x}$	$(-2;2)$	3.13	$(x-3)^3e^{\lvert x+1\rvert}$	$(-2;4)$
3.4	$x+\frac{1}{x-2}$	$(-4;4)$	3.14	$\frac{x^3-3x^2+1}{x-3}$	$(0;3)$
3.5	$2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$	$(-\pi/2;\pi/2)$	3.15	$\ln x-x$	$(0;e)$
3.6	$\lvert\sin(x+\pi/4)\rvert$	$(-\pi/2;\pi/2)$	3.16	$(x^2+4)e^{\lvert x\rvert}$	$(-2;2)$
3.7	$xe^{-1/x}$	$(-5;5)$	3.17	$\lvert\cos(x-\pi/4)\rvert$	$(0;\pi/2)$
3.8	$\ln x-1$	$(0;e)$	3.18	$e^{x\lvert x-1\rvert}$	$(-2;2)$
3.9	$2\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^2x$	$(0;\pi)$	3.19	$\lvert\operatorname{tg}(x-\pi/4)\rvert$	$(-\pi/2;\pi/2)$
3.10	$(x-3)e^{\lvert x+1\rvert}$	$(-2;4)$	3.20	$(x-3)^2e^{1/x}$	$(-1;4)$

4 Решить геометрическую задачу:

4.1 Найдите прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

4.2 При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

4.3 В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник наибольшей площади.

4.4 В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

4.5 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объём пирамиды является наибольшим?

4.6 В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объёма.

4.7 В данный шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объёма.

4.8 В шар радиусом R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

4.9 Около шара радиуса r описать конус наименьшего объёма.

4.10 Через вершину M квадрата $CEMK$ провести прямую, пересекающую лучи CK и CE в точках A и B так, чтобы площадь ΔABC была наименьшей.

4.11 Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма является наибольшей?

4.12 Найти наибольший объём конуса с образующей l.

4.13 В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

4.14 Найти кратчайшее расстояние точки $M(p,p)$ от параболы $y^2 = 2px$.

4.15 Найти наибольшую хорду эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad 0<b<a$, проходящую через вершину $B\ \ 0;-b$.

4.16 Через точку эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник наименьшей площади.

4.17 Найти основания и высоту равнобочной трапеции, которая при данной площади S имеет наименьший периметр; угол при большем основании трапеции равен α .

4.18 Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра d, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

4.19 В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

4.20 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

5 Решить физическую задачу:

5.1 Тяжелую балку длиной 13 м, расположенную вертикально, опускают на землю так, что нижний её конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она пройдёт расстояние 5 м?

5.2 Антенна радара находится на расстоянии 1000 м по горизонтали от стартовой площадки и все время направлена на ракету, которая поднимается с постоянным ускорением 20 м/с^2. Какова угловая скорость антенны в момент, когда ракета находится не высоте 1000 м?

5.3 Лошадь бежит по окружности со скоростью 20 м/с. В центре окружности находится фонарь. Забор касается окружности в точке, из которой лошадь начинает бег. С какой скоростью перемешается тень лошади вдоль забора в момент, когда лошадь пробежит 1/8 окружности?

5.4 Резервуар, имеющий форму полушара радиуса R_0, заполняется водой. Скорость заполнения резервуара равна V_0. Определите скорость подъёма воды в резервуаре в момент, когда вода поднялась на высоту h_0.

5.5 Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает отодвигаться от стены с постоянной скоростью 2 м/с. Чему равно ускорение верхнего конца лестницы в момент, когда нижний конец отодвинулся от стены на 1 м?

5.6 Канат висячего моста, имеющего форму цепной линии, т. е. графика функции $y = a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим друг от друга на расстоянии 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точки подвеса. Чему равен угол между канатом и опорой в точке подвеса (для определения a можно воспользоваться равенством $\mathrm{ch}\,x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$)?

5.7 В точках A и B находятся источники света силы J_1 и J_2 соответственно, $AB = 27$. Найдите на отрезке AB наименее освещенную точку (освещенность прямо пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него).

5.8 Бревно длиной 10 м с помощью подъёмного крана поднимается вертикально вверх за один из его концов. При этом второй конец волочится по земле со скоростью 0,05 м/с. С какой скоростью перемещается верхний конец бревна в момент, когда его нижний конец находится на расстоянии 3 м от вертикали?

5.9 Мальчик надувает воздушный шар, радиус которого возрастает с постоянным ускорением 0,2 см/с^2. С какой скоростью увеличивается объём шара в момент, когда площадь его поверхности равна 4π см^2 (радиус шара в начальный момент времени равнялся нулю)?

5.10 Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от точечного источника света, расположенного на высоте 3 м, с постоянным ускорением 0,1 м/с^2. С каким ускорением перемещается тень его головы?

5.11 Скорость тела, движущегося по окружности радиуса 1 м, меняется по закону $v = v_0 t + {at^2}/{2}$. Найдите величину ускорения тела в момент времени $t = 1$ с.

5.12 Зависимость пути, пройденного телом, движущимся по окружности радиуса R, от времени задается уравнением $S = kt^3$ ($k > 0$). Чему равна величина скорости тела в момент, когда оно пройдёт путь S_0?

5.13 Частица движется с постоянной по величине скоростью v по кривой $y = x^3$. Найдите величину ускорения частицы в момент, когда $x = 0$.

5.14 При изобарном нагревании ν молей идеального газа его объём с течением времени меняется по закону $V = V_0 + at + bt^2$ ($V_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$). С каким ускорением меняется температура газа *T*, если его давление $p = p_0$?

5.15 Зависимость электрического заряда, проходящего через проводник с сопротивлением *R*, от времени имеет вид $Q(t) = te^{-t}$. Исследуйте на экстремум функцию $W\ \ t$, выражающую зависимость от времени мгновенной тепловой мощности, выделяемой в проводнике.

5.16 Предмет, находившийся первоначально на расстоянии $d_0 > F$ от собирающей линзы, начинают удалять от неё с постоянным ускорением *a*. Чему равна скорость движущегося изображения в момент, когда предмет находится от линзы на расстоянии d?

5.17 Дождевая капля, начальная масса которой m_0 падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так, что убыль массы пропорциональна времени с коэффициентом пропорциональности *k*. В какой момент времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей (сопротивлением воздуха пренебречь)?

5.18 Груз весом *P*, лежащий на горизонтальной плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина её будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

5.19 Найдите максимальную возможную температуру ν молей идеального газа, если его давление *p* и объём *V* связаны зависимостью $\alpha p^3 + \beta V^3 = p_0$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p_0 > 0$).

5.20 Баржу, палуба которой на $h = 4$м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v = 2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние *l*=8м (по горизонтали)?

Решение типовых примеров

1.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$, ее интервалы монотонности и точки экстремума

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x^2}.$$

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Производная этой функции имеет вид

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3} & \text{при } x\in(-\infty;0)\cup(0;1),\\[2mm] \dfrac{2-x}{x^3} & \text{при } x\in(1;+\infty)\end{cases}$$

и обращается в нуль в точке $x=2$. При этом производная не существует в точках $x=0$ и $x=1$. Поэтому точками возможного экстремума являются $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Они разбивают область определения на четыре интервала монотонности: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Видно, что $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$, $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(1;2)$[1]; монотонно убывает при $x\in(0;1)$ и $x\in(2;+\infty)$. Согласно первому достаточному условию локального экстремума, в точке $x_3=2$ функция имеет локальный максимум, $f_{\max}=f(2)=\dfrac{1}{4}$, а в точке $x_2=1$ – локальный минимум, $f_{\min}=f(1)=0$.

2.20 Найти глобальный экстремум функции $f(x)$, определенной на $[-1;4]$:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x.$$

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(f)=\mathbb{R}$.

Определяем точки возможного экстремума (стационарные точки) функции $f(x)$:

---

[1] Выражение $x\in(-\infty;0)$ и $x\in(1;2)$ при определении интервалов возрастания функции обусловлено тем, что использование символа $\cup$ не корректно. Например, при $x_1=-1/4$, $x_2=4/3$ таких, что $x_1,x_2\in(-\infty;0)\cup(1;2)$ и $x_1<x_2$, имеем, $f(x_1)=20>3/16=f(x_2)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает на каждом из интервалов $(-\infty;0)$, $(1;2)$, но функция не является монотонно возрастающей на множестве $(-\infty;0)\cup(1;2)$.

$$f'(x)=3x^2-12x+9,\ 3x^2-12x+9=0.$$

Значит, $x_1=1$ и $x_2=3$.

Так как при $-1<x<1$ имеем $f'>0$, при $1<x<3$ имеем $f'<0$, то $x_1=1$ является точкой максимума. Так как при $1<x<3$ имеем $f'<0$ и при $3<x<4$ имеем $f'>0$, то $x_2=3$ является точкой минимума.

Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка $[-1;4]$ и в стационарных точках, принадлежащих отрезку:

$$f(-1)=-16,\ f(4)=4,\ f(1)=4,\ f(3)=0.$$

Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x)=\min\{-16,4,4,0\}=-16,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x)=\max\{-16,4,4,0\}=4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x=-1$, наибольшее – в точке $x=1$ и на правом конце отрезка в точке $x=4$. График данной функции изображен на рисунке ?

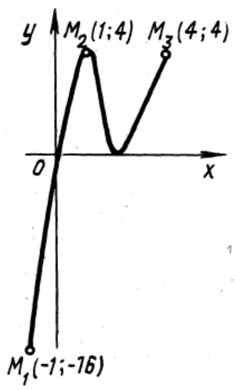

Рисунок 18 – График функции $f(x)=x^3-6x^2+9x$ на отрезке $[-1;4]$

3.20 Найти глобальный экстремум функции $f(x)=(x-3)^2e^{1/x}$, определенной на $(-1;4)$.

Решение. Естественной областью определения данной функции является множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Для определения наибольшего и наименьшего значений функции на интервале $(-1;4)$. найдем локальные экстремумы. Вычислим производную:

$$f'(x)=e^{1/x}(x-3)\frac{2x^2-x+3}{x^2},\ x\in(-1;0)\cup(0;4).$$

В точке $x=0$ производная не существует. Критическими точками являются точки $x=0$, $x=3$. Для всех $x \in D(f)$ справедливо неравенство $f(x) \geq 0$ и $f(3)=0$. Поэтому наименьшее значение данной функции на $(-1;4)$ равно нулю.

Рассмотрим точку $x=0$. Заметим, что $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)=+\infty$. Поэтому наибольшее значение данной функции на $(-1;4)$ не существует (см. рис.?).

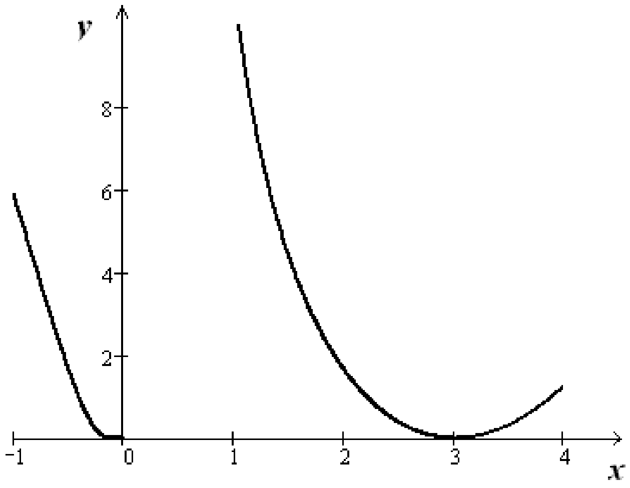

Рисунок 19 – График функции $f'(x)=e^{1/x}(x-3)\dfrac{2x^2-x+3}{x^2}$,

$x \in (-1;0) \cup (0;4)$

4.20 Решить геометрическую задачу:

Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

Решение. На рисунке ? изображена трапеция $ABCD$. Пусть $AB=a$. Тогда по условию $AB=CD=BC=a$. Пусть BE и CF – высоты трапеции; $BE=CF$. Полагая $\angle BAD=\alpha$, выразим площадь трапеции как функцию от α:

$$S=S\ \alpha\ ,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

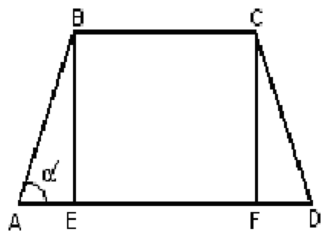

Рисунок 20 – Геометрическая интерпретация задачи 3.20

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{\text{ABCD}} = S_{ABE} + S_{BCFE} + S_{CDF}\,.$$

Из геометрических соображений имеем:

$$S_{ABE} = S_{CDF} = \frac{1}{2} AE \cdot BE = \frac{1}{2} a\cos\alpha \cdot a\sin\alpha = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha\,,$$

$$S_{BCFE} = BC \cdot BE = a^2 \sin\alpha\,.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S\ \ \alpha\ \ = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin\alpha\,.$$

Исследуем функцию $S\ \ \alpha\ \ $, определенную при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, на экстремум.

$$S^{'}(\alpha) = a^2\ \ \cos 2\alpha + \cos\alpha\ \ .$$

Решая уравнение $S'(\alpha) = 0$, получим:

$$\cos 2\alpha + \cos\alpha = 0 \ \Rightarrow\ \cos\alpha = -1 \text{ и } \cos\alpha = \frac{1}{2}\,.$$

Отсюда $\alpha_1 = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Единственным решением этого уравнения, лежащим на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ является $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Убедимся, что при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает максимума.

$$S^{''}(\alpha) = -a^2\ \ 2\sin 2\alpha + \sin\alpha\ \ .$$

Так как $\sin\frac{2\pi}{3} > 0$, $\sin\frac{\pi}{3} > 0$, $a > 0$, то $S^{''}\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$. Значит, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ функция $S\ \ \alpha\ \ $ достигает наибольшего значения на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Угол при большем основании трапеции равен $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

5.20 Решить физическую задачу:

Баржу, палуба которой на $h = 4$м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v = 2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние l=8м (по горизонтали)?

Решение. Пусть через t секунд после начала движения баржа (рисунок ?) находится на расстоянии $l\ \ t$ м от пристани (по горизонтали).

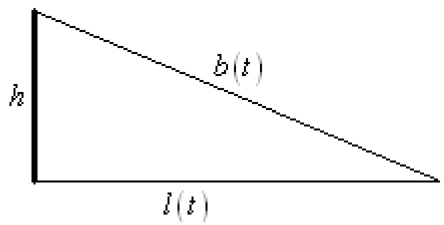

Рисунок 21– Геометрическая интерпретация задачи 4.20

Тогда длина каната представляет собой функцию

$$b(t)=\sqrt{l^2(t)+h^2},\ t\in(0;+\infty),$$

производная которой в момент времени t равна

$$b'(t)=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Поскольку канат подтягивают, то по условию задачи $b'(t)=-2$. Отсюда

$$-2=\frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t)+h^2}}.$$

Разрешая относительно $l'(t)$, получим скорость движения баржи

$$l'(t)=\frac{-2\sqrt{l^2(t)+h^2}}{l(t)}=-2\frac{b(t)}{l(t)}.$$

Ускорение движения баржи есть вторая производная от функции $l(t)$:

$$a(t)=-l''(t)=2\frac{b'(t)\cdot l(t)-b(t)\cdot l'(t)}{l^2(t)}.$$

Если t_0 – тот момент времени, когда $l(t_0)$ =8, то

$$b(t_0)=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5},$$

$$l'(t_0)=\frac{-2\cdot 4\sqrt{5}}{8}=-\sqrt{5},$$

$$a(t_0)=2\frac{b'(t_0)\cdot l(t_0)-b(t_0)\cdot l'(t_0)}{l^2(t_0)}=\frac{1}{8}\ (\text{м/с}^2).$$

Лабораторная работа № 17
Исследование функций

Необходимые понятия и теоремы: условия выпуклости, точки перегиба, необходимые и достаточные условия существования точек перегиба, асимптоты графика функции.

Литература: [1] с. 267 – 278, [4] с. 307 – 309.

1 Найти естественную область определения функции $f(x)$, интервалы, где $f(x)$ выпукла, и точки перегиба:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1.1	$2x^4-3x^2+x-1$	1.8	$x-\cos x$	1.15	$2x^2+\ln x$
1.2	$\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$	1.9	$\dfrac{1}{1-x^2}$	1.16	$1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$
1.3	e^{-x^2}	1.10	$(x^2-1)^3$	1.17	$xe^{-\frac{x^2}{4}}$
1.4	$x+36x^2-2x^3-x^4$	1.11	x^5-10x^2+3x	1.18	$\sqrt[3]{x+3}$
1.5	$\dfrac{1}{(x-1)^2}$	1.12	$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$	1.19	$4x^2+\dfrac{1}{x}$
1.6	$x+\sin x$	1.13	$x^4-12x^3+48x^2$	1.20	$\sqrt[3]{(x-5)^5}+2$
1.7	x^4-6x^2+5x	1.14	$e^{\frac{1}{x}}$	1.21	$\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$

2 Найти естественную область определения функции $f(x)$ и асимптоты к её графику:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
2.1	$\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$	2.8	$\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$	2.15	$2^{\frac{1}{1-x}}$
2.2	x^2e^{-x}	2.9	$y=x+\operatorname{arctg}2x$	2.16	$\sin x+\cos x$
2.3	$2x-\dfrac{\cos x}{x}$	2.10	$\dfrac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x$	2.17	$x+\dfrac{\sin x}{x}$
2.4	$2x^2+\ln x$	2.11	$\sqrt[3]{x^3-6x^2}$	2.18	$\sqrt{x}\ln x$
2.5	$-x\operatorname{arctg}x$	2.12	$\log_3(4-x^2)$	2.19	$\ln(1+e^x)$

2.6	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	2.13	$\dfrac{x^2}{x+4}$	2.20	$\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$
2.7	$\arcsin\dfrac{1}{x^2}$	2.14	$\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$	2.21	$\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$

3 Найти естественную область определения функции $f(x)$, провести полное исследование и построить её график:

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
3.1	$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$	3.8	$\dfrac{x^2+8}{x^2-1}$	3.15	$\dfrac{-8x}{x^2+4}$
3.2	$\dfrac{x^2+12}{x+2}$	3.9	$\dfrac{x^2}{x^2-9}$	3.16	$\dfrac{x^3-1}{x+1}$
3.3	$\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$	3.10	$\dfrac{2x^3+1}{x^2}$	3.17	$\dfrac{3x^4+1}{x^3}$
3.4	$\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$	3.11	$\dfrac{x}{x^2+1}$	3.18	$\dfrac{4x}{(x+1)^2}$
3.5	$-x^2+\dfrac{2}{x}$	3.12	$x-\dfrac{4}{x^2}$	3.19	$\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$
3.6	$\dfrac{x^2+2}{x^2-2}$	3.13	$\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$	3.20	$\dfrac{x^3}{3-x^2}$
3.7	$\dfrac{x^3+4}{x^2}$	3.14	$\dfrac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$	3.21	$\dfrac{6-5x-x^2}{x^2-2x+1}$

4 Провести полное исследование и построить кривую, заданную параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t)$:

№	$x(t)$	$y(t)$	№	$x(t)$	$y(t)$
4.1	t^2+1	t^3-3t^2	4.11	t^2+3	t^3+6t^2
4.2	$\dfrac{4}{t^2}$	$t+1$	4.12	$\dfrac{16}{t^2}$	$t+4$
4.3	t^2-1	t^3-6t^2	4.13	$4t^2$	$t-t^4$
4.4	$\dfrac{9}{t^2}$	$t-1$	4.14	t^2+5	$-t^3+6t^2$
4.5	t^2+2	t^3-3t^2	4.15	t^2	t^4-t

4.6	$\frac{1}{t^2}$	$t-3$	4.16	$9t^2$	$\frac{1}{t}+t^2$
4.7	t^2-2	t^3+3t^2	4.17	t^2-5	$-t^3+3t^2$
4.8	$-\frac{4}{t^2}$	t^2+t	4.18	$4t^2-4$	t^4-t
4.9	t^2-3	t^3-6t^2	4.19	$-\frac{16}{t^2}$	t^2-t+1
4.10	$-\frac{9}{t^2}$	t^2-t	4.20	$2t-t^2$	t^2+t-1

Решение типовых примеров

1.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$, её интервалы выпуклости и точки перегиба, если

$$f(x)=\sqrt[3]{\;x-5\;^{5}}+2.$$

Решение. $D(f)=\mathbb{R}$. Имеем:

$$f'(x)=\frac{5}{3}\;x-5\;^{\frac{2}{3}},\; f''(x)=\frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x=5$. В окрестности точки $x=5$ получим при $x<5$, то $f''(x)<0$ и кривая выпукла вверх, при $x>5$, то $f''(x)>0$ и кривая выпукла вниз. Следовательно, $x=5$ – точка перегиба, при этом $f_{\text{пер}}=2$.

2.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$ и асимптоты к её графику, если $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Решение.

1) функция определена на промежутках

$$-\infty;-2\;\cup\;-2;+\infty\;.$$

Так как

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=-\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=+\infty,$$

то прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой.

2) наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x\;\;x+2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right]=-4.$$
Следовательно, наклонная асимптота при $x\to\infty$ имеет вид
$$y=x-4.$$
3) горизонтальных асимптот нет, так как
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x+2}=\infty.$$

2.21 Найти естественную область определения функции $f(x)$ и асимптоты к её графику, если $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$.

*Решение***.** Преобразуем функцию к виду
$$f(x)=|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}.$$
1) функция определена на промежутках
$$\left(-\infty;2\right]\cup\left(3;+\infty\right).$$
Так как
$$\lim_{x\to3+0}|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=+\infty,\text{ а }\lim_{x\to3-0}|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\text{ не существует,}$$
то прямая $x=3$ является вертикальной асимптотой.

2) наклонные асимптоты:
$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=1,$$
$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-k_1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}-x\right)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, наклонная асимптота при $x\to+\infty$ имеет вид
$$y_1=x+\frac{1}{2}.$$
Аналогично,
$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}=-1,$$
$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-k_2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}+x\right)=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, наклонная асимптота при $x \to -\infty$ имеет вид

$$y_2 = -x - \frac{1}{2}.$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to+\infty} |x| \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} |x| \sqrt{\frac{x-2}{x-3}} = +\infty.$$

3.20 Найти естественную область определения функции $f(x)$, провести полное исследование и построить её график, если

$$f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$$

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по приведенной схеме.

1) Находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения есть

$$D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty).$$

Исследуем поведение функции в окрестностях точек $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty.$$

Следовательно, точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода. Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3-x^2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, то функция не ограничена при $x \to \pm\infty$.

График функции пересекает координатные оси только в начале координат, так как $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Функция не является периодичной.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x) = -f(x)$, т. е.

$$\frac{-x\;^{3}}{3-x^{2}}=\frac{-x^{3}}{3-x^{2}}.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \geq 0$.

2) Асимптоты графика функции. Поскольку односторонние пределы в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ равны бесконечности, то прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}=\frac{f\;\;x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3}}{3-x^{2}\;\;x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\;f\;\;x\;-kx\;=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{3}}{3-x^{2}}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{3}+3x-x^{3}}{3-x^{2}}=0,$$

Прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

3) Точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции. Находим первую производную функции:

$$f'(x)=\frac{3x^{2}\;\;3-x^{2}\;\;+2x^{4}}{3-x^{2}\;\;^{2}}=\frac{x^{2}\;\;9-x^{2}}{3-x^{2}\;\;^{2}}.$$

Функция $f'(x)$ определена на $D\;\;f$. В промежутке $0;+\infty$ производная обращается в нуль в точках $x_1=0$, $x_2=3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ для любого $x\geq 0$. Имеем:

$$\frac{x^{2}\;\;9-x^{2}}{3-x^{2}\;\;^{2}}>0,\;9-x^{2}>0\;\Rightarrow\;0<x<3,$$

т. е. функция возрастает на интервалах $0;\sqrt{3}$ и $\sqrt{3};3$.

Аналогично:

$$\frac{x^{2}\;\;9-x^{2}}{3-x^{2}\;\;^{2}}<0,\;9-x^{2}<0\;\Rightarrow\;x>3,$$

т. е. функция убывает на множестве $3;\infty$.

4) Промежутки выпуклости, точки перегиба. Вычисляем вторую производную функции $f(x)=\dfrac{x^{3}}{3-x^{2}}$:

$$f''(x)=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Функция $f''(x)$ определена на области определения $D(f)$.

Находим интервалы выпуклости графика функции из неравенств $f''(x)>0$, $f''(x)<0$ для любого $x\geq 0$. Имеем:

$$\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}>0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 0<x<\sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла вниз на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично:

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}<0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 3<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x>\sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла вверх на $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точке $x=0$ имеем $f''(x)=0$ и $f''(x)<0$ в окрестности $U(\delta;0-0)$, а $f''(x)>0$ в окрестности $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости вниз кривой от ее интервала выпуклости вверх. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой.

5) Локальные экстремумы. Определяем с помощью второй производной $f''(x)$ локальные экстремумы. Так как $f''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции, точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)} f(x)=-4{,}5$, $\min\limits_{x\in U(\delta;-3)} f(x)=4{,}5$.

Результаты исследования функции заносим в таблицу ?.

Таблица ? – Результаты исследования функции

x	0	$\left(0;\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};3\right)$	3	$(3;\infty)$
$f'(x)$	0	+	Не сущ.	+	0	–
$f''(x)$	0	+	Не сущ.	–	–	–

$f(x)$	0	↗	Не сущ.	↗	-4,5	↘
	(т.перег)				max	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице ?, строим график данной функции для $x \in 0;\infty$. Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок ?).

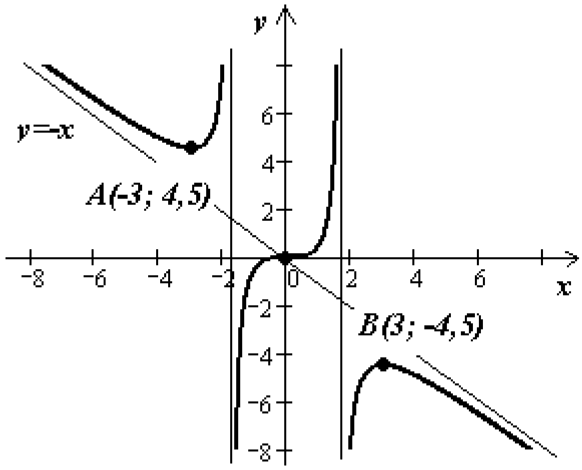

Рисунок 22 – График функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

4.20 Провести полное исследование и построить кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x(t) = 2t - t^2, \; y(t) = t^2 + t - 1.$$

Решение. Решая уравнение $t^2 - 2t + x = 0$ относительно переменной t, получим $t = 1 \pm \sqrt{1 - x}$, при $x \le 1$.

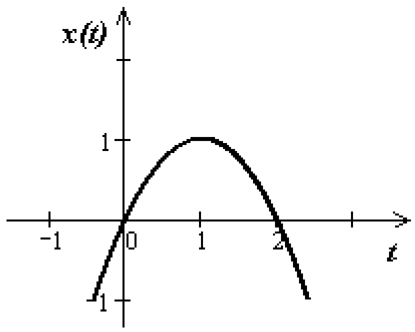

Рисунок 23 – График функции $x(t) = 2t - t^2$

I шаг. При $t \in (-\infty; 1]$ имеем $t = 1 - \sqrt{1 - x}$. Тогда, подставляя t в параметрическое задание кривой для y, получим

$$y=-3\sqrt{1-x}-x+2, \text{ при } x\in(-\infty;1].$$

Проведем полное исследование функции

$$y_1(x)=-3\sqrt{1-x}-x+2, \text{ при } x\in(-\infty;1] \text{ по схеме из задачи 3.20.}$$

1) $D(f)=(-\infty;1]$. Исследуем поведение функции при $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}(-3\sqrt{1-x}-x-2)=+\infty.$$

Находим точки пересечения с осью OX: $A\left(\frac{-5-3\sqrt{5}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{2};0\right)$.

График пересекает ось OY в точке $K(0;-1)$. Функция не является периодической, общего вида.

2) Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y_1(x)}{x}=-1,\ b=\lim_{x\to-\infty}(y_1(x)-kx)=-\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот нет.

3) Находим первую производную функции $y_1(x)$:

$$y_1'(x)=\frac{3}{2\sqrt{1-x}}-1.$$

Производная обращается в ноль в точке $x=-\frac{5}{4}$ и не существует в точке $x=1$. Определяем интервалы монотонности из неравенств $y_1'(x)>0$ и $y_1'(x)<0$ при $x\in(-\infty;1]$. Функция возрастает на $\left(-\frac{5}{4};1\right)$, убывает на $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$. Таким образом, имеем локальный минимум в точке $C\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{4}\right)$.

4) Находим вторую производную функции $y_1(x)$:

$$y_1''(x)=\frac{3}{4}(1-x)^{-3/2}>0 \text{ при } x\in(-\infty;1].$$

Значит, функция $y_1(x)$ выпукла вниз на всей области определения. Результаты исследования заносим в таблицу:

Таблица ? – Результаты исследования функции

x	$\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$	$-\frac{5}{4}$	$\left(-\frac{5}{4};1\right)$	1
$f'(x)$	–	0	+	Не сущ.
$f''(x)$	+	–	+	Не сущ.

$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{4}$	$\nearrow$	1
		min		

Исходя из результатов, содержащихся в таблице ?, строим график данной функции для $x \in (-\infty; 1]$.

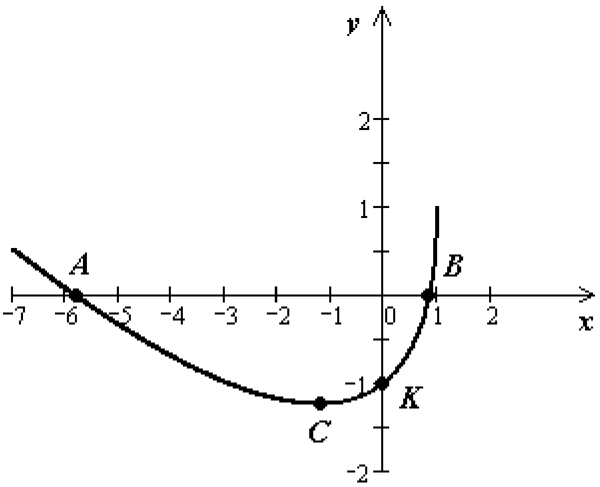

Рисунок 24 – График функции $y_1(x) = -3\sqrt{1-x} - x + 2$, $x \in (-\infty; 1]$

II шаг. При $t \in [1; +\infty)$ имеем $t = 1 + \sqrt{1-x}$. Тогда, подставляя t в параметрическое задание кривой для y, получим

$$y_2 = 3\sqrt{1-x} - x + 2, \text{ при } x \in (-\infty; 1].$$

Проведем полное исследование функции

$$y_2(x) = 3\sqrt{1-x} - x + 2, \text{ при } x \in (-\infty; 1] \text{ по схеме из задачи 3.20.}$$

$D(f) = (-\infty; 1]$. Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} (-3\sqrt{1-x} - x - 2) = +\infty.$$

График функции $y_2(x)$ пересекает ось OY в точке $E(0; 5)$. Функция не является периодической, общего вида. Наклонных асимптот нет.

Находим первую производную функции $y_2(x)$:

$$y_2'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-x}} - 1 < 0 \text{ .при } x \in (-\infty; 1].$$

Таким образом, функция $y_2(x)$ убывает на всей области определения.

Находим вторую производную функции $y_2(x)$:

$$y_2''(x) = -\frac{9}{4}(1-x)^{-3/2} < 0 \text{ при } x \in (-\infty; 1].$$

Значит, функция $y_2(x)$ выпукла вверх на всей области определения.

Исходя из результатов исследования, строим график функции $y_2(x)$ для $x \in (-\infty; 1]$.

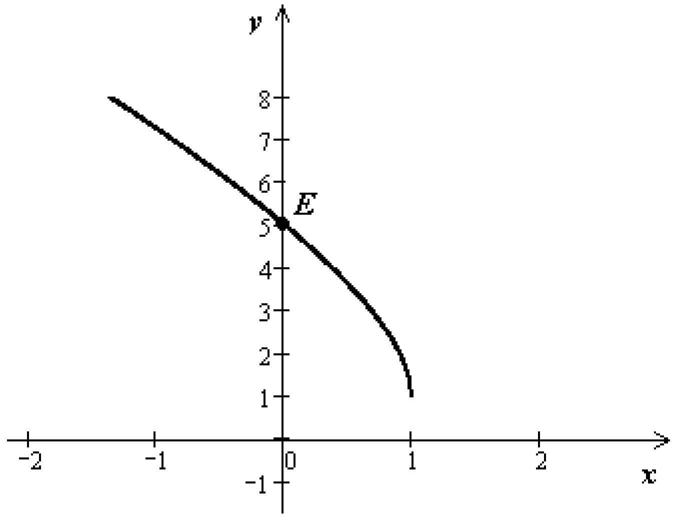

Рисунок 25 – График функции $y_2(x) = 3\sqrt{1-x} - x + 2$, $x \in (-\infty; 1]$

Тогда кривая, заданная параметрическими уравнениями $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = t^2 + t - 1$, имеет вид:

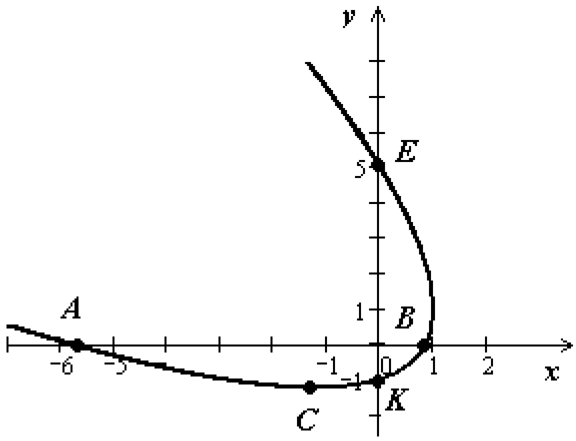

Рисунок 26 – График функции $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = t^2 + t - 1$