## Лабораторная работа № 6
# Предел и неравенства

*Необходимые понятия и теоремы:* фундаментальная последовательность, критерий Коши, теорема о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, число $e$, бесконечно малые последовательности, теорема о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную, теоремы о пределах, связанные с неравенствами, частичные пределы, верхний и нижний пределы последовательности.

*Литература:* [1] с. 90 – 95, 97 – 99, [4] с. 87 – 111, 136.

**1** Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость или расходимость последовательности $x_n$:

| № | $x_n$ | № | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\frac{\sin n}{2^n}$ | 1.11 | $\frac{\sin 1}{3}+\frac{\sin 2}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n}{3^n}$ |
| 1.2 | $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ | 1.12 | $\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}\ldots+\frac{n+1}{(n+2)^2}$ |
| 1.3 | $\frac{\cos 1}{2}+\frac{\cos 2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos n}{2^n}$ | 1.13 | $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ |
| 1.4 | $\frac{1}{2^3}+\frac{2^2}{3^3}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)^3}$ | 1.14 | $\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\ldots+\frac{n}{(n+1)^2}$ |
| 1.5 | $\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$ | 1.15 | $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ |
| 1.6 | $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ | 1.16 | $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}$ |
| 1.7 | $\frac{\sin 1!}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2!}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{\sin n!}{n\cdot(n+1)}$ | 1.17 | $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2^2}+\ldots+\arcsin\frac{1}{2^n}$ |
| 1.8 | $\frac{\cos 1!}{5+1}+\frac{\cos 2!}{5^2+1}+\ldots+\frac{\cos n!}{5^n+1}$ | 1.18 | $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$ |
| 1.9 | $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ | 1.19 | $a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $\lvert a_k\rvert<M$, $\lvert q\rvert<1$ |
| 1.10 | $1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ | 1.20 | $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ \forall k=\overline{1,n}$ |

**2** Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $x_n$:

| № | $x_n$ | № | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 2.1 | $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\ldots+\frac{1}{9^n}$ | 2.11 | $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ |
| 2.2 | $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\ldots+\frac{1}{2^n+n}$ | 2.12 | $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{корней}}$ |
| 2.3 | $1+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$ | 2.13 | $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$ |
| 2.4 | $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!}$ | 2.14 | $\frac{1}{7+1}+\frac{1}{7^2+2}+\ldots+\frac{1}{7^n+n}$ |
| 2.5 | $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ | 2.15 | $1+\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\ldots+\frac{2}{10^n}$ |
| 2.6 | $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ | 2.16 | $\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$ |
| 2.7 | $\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}}_{n\ \text{корней}}$ | 2.17 | $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$ |
| 2.8 | $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$ | 2.18 | $\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4^2+2}+\ldots+\frac{1}{4^n+n}$ |
| 2.9 | $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}$ | 2.19 | $\underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{5}}}}}_{n\ \text{корней}}$ |
| 2.10 | $\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+2}+\ldots+\frac{1}{3^n+n}$ | 2.20 | $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ |

**3** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

| № | $x_n$ | | |
|---|---|---|---|
| | А | Б | В |
| 3.1 | $(\sqrt{2n^2-1}-2n)$ | $\left(1+\frac{1}{8n}\right)^{8n+5}$ | $\frac{(-1)^n+7}{7n^3+2}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.2 | $(\sqrt{9n^2-5n}-3n)$ | $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+7}$ | $\frac{\sin n!}{\sqrt[3]{n+1}}$ |
| 3.3 | $(\sqrt{n^2-4n-5}-n)$ | $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+3}$ | $\frac{\ln(5+1/n)}{n^2+1}$ |
| 3.4 | $(\sqrt{n(n+5)}-n)$ | $\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n+3}$ | $\frac{\arccos 1/n}{n^2+4}$ |
| 3.5 | $(\sqrt{n^2+5}-n)$ | $\left(\frac{5n+2}{5n}\right)^{5n/2+1}$ | $\frac{\cos n!}{\sqrt{n+4}}$ |
| 3.6 | $(n+\sqrt[3]{4-n^3})$ | $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+3}$ | $\frac{\operatorname{arctg} n^2}{2n^2+n}$ |
| 3.7 | $(\sqrt{9n^2+4}-3n)$ | $\left(\frac{1+11n}{11n}\right)^{11n+1}$ | $\frac{(-1)^n+3}{4n^3+2}$ |
| 3.8 | $(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2})$ | $\left(\frac{n+6}{n}\right)^{n/6+6}$ | $\frac{\arcsin 1/n}{n^2+4}$ |
| 3.9 | $(\sqrt{n^2-8n+5}-n)$ | $\left(\frac{3+2n}{2n}\right)^{2n/3+1}$ | $\frac{\cos n^2}{2n^2+n}$ |
| 3.10 | $(\sqrt{4n^2-1}-2n)$ | $\left(\frac{7n+1}{7n}\right)^{7n+7}$ | $\frac{\sin n!}{\sqrt{n+1}}$ |
| 3.11 | $(\sqrt{n^2+4n+8}-n)$ | $\left(\frac{4+n}{n}\right)^{n+9}$ | $\frac{\operatorname{arctg} n!}{3^n+5}$ |
| 3.12 | $(\sqrt{2n^2-6}-\sqrt{2n^2-7n})$ | $\left(\frac{1+9n}{9n}\right)^{9n+9}$ | $\frac{\cos n!}{\sqrt[3]{7n^2-1}}$ |
| 3.13 | $(\sqrt{n^2+1}-n)$ | $\left(\frac{13n+1}{13n}\right)^{13n+13}$ | $\frac{(-1)^n+8}{3^n+5^n}$ |
| 3.14 | $(\sqrt{4n^2-6}-\sqrt{4n^2-5n})$ | $\left(\frac{10n+1}{10n}\right)^{10n+10}$ | $\frac{2n\sin 2n}{n^2+1}$ |
| 3.15 | $(\sqrt{n^2+1}-n)$ | $\left(\frac{0{,}1n+1}{0{,}1n}\right)^{0{,}1n+5}$ | $\frac{(-1)^n\cos n}{7^n+2\cdot 5^n}$ |
| 3.16 | $(\sqrt{16n^2-3n}-4n)$ | $\left(\frac{25n+1}{25n}\right)^{25n+1}$ | $\frac{(-1)^n+8}{3^n+5^n}$ |
| 3.17 | $(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$ | $\left(\frac{0{,}3n+1}{0{,}3n}\right)^{0{,}3n+3}$ | $\frac{\operatorname{arcctg} n^2}{e^{n+1}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3.18 | $(\sqrt{9n^2-3}-3n)$ | $\left(\frac{2n+9}{2n}\right)^{2n/9+7}$ | $\frac{\ln(2+1/n)}{n^2}$ |
| 3.19 | $(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$ | $\left(\frac{1+0,2n}{0,2n}\right)^{0,2n+3}$ | $\frac{2n\cos n}{n^2+4}$ |
| 3.20 | $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n\ \ +1}$ | $\left(\frac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}$ | $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ |

**4** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

| № | $x_n$ | | |
|---|---|---|---|
| | А | Б | В |
| 4.1 | $\sqrt[5n]{5n+5}$ | $\frac{3^n}{n!}$ | $\sqrt[n]{\frac{n^2+4^n}{n+5^n}}$ |
| 4.2 | $\sqrt[n]{n^2}$ | $\frac{1}{0,3^n n!}$ | $\frac{\log_5(n^2+1)}{n}$ |
| 4.3 | $\sqrt[n]{\frac{3n+2}{n+5}}$ | $\frac{n}{2^n}$ | $\frac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2}$ |
| 4.4 | $\sqrt[n]{5n}$ | $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+3}$ | $\frac{(-3)^{n^2-n}}{(n^3)!}$ |
| 4.5 | $\sqrt[n^2]{6}$ | $\frac{n^{20}}{20^n}$ | $\sqrt[3n]{\frac{n^4-2n+3}{n^2+1}}$ |
| 4.6 | $\sqrt[2n]{2n}$ | $\frac{1}{0,8^n n!}$ | $\frac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)}$ |
| 4.7 | $\sqrt[n]{8^n+3^n}$ | $\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{n+1}$ | $\sqrt[n]{\frac{10}{n}-\frac{1}{1,2^n}}$ |
| 4.8 | $\sqrt[n]{n+5}$ | $\frac{200^n}{n!}$ | $\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right)$ |
| 4.9 | $\sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$ | $\left(\frac{1+3n}{3n}\right)^{n-3}$ | $n\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ |
| 4.10 | $\sqrt[n]{2n+4}$ | $\frac{100^n}{n!}$ | $\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2n}}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.11 | $\sqrt[n]{2^n+5^n}$ | $\left(\frac{1+9n}{9n}\right)^{n-1}$ | $\frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!}$ |
| 4.12 | $\sqrt[2n]{0,5}$ | $\frac{n^3}{3^n}$ | $n^{1/\sqrt{n}}$ |
| 4.13 | $\sqrt[13n]{13n+13}$ | $\left(\frac{1+7n}{7n}\right)^{n+2}$ | $\left(\frac{3}{1-\sqrt[n]{8}}-\frac{5}{1-\sqrt[n]{32}}\right)$ |
| 4.14 | $\sqrt[n^2]{9}$ | $\frac{n^2}{5^n}$ | $\frac{\ln(n^2-n+1)}{\ln(n^{10}+n+1)}$ |
| 4.15 | $\sqrt[n^2]{2n^2+8}$ | $\frac{n}{5^n}$ | $\frac{2^{n/2}+(n+1)!}{n(3^n+n!)}$ |
| 4.16 | $\sqrt[n^3]{5}$ | $\frac{(-2)^n}{(n+2)!}$ | $\left(\sqrt[n^2]{\frac{n-1}{n+1}}+\sqrt[n]{3^n n^3+2}\right)$ |
| 4.17 | $\sqrt[3n]{125}$ | $\frac{n^{10}}{10^n}$ | $\frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-10n^2+1}$ |
| 4.18 | $\sqrt[n]{\frac{n+2}{n+5}}$ | $\left(1+\frac{1}{25n}\right)^{n-25}$ | $n^2\left(\left(1+\frac{10}{n}\right)^{20}-\left(1+\frac{20}{n}\right)^{10}\right)$ |
| 4.19 | $\sqrt[n]{n^3+3n}$ | $\frac{n}{7^n}$ | $\frac{\ln(n^3-n+1)}{\ln(n^6+n+1)}$ |
| 4.20 | $\sqrt[3n]{8}$ | $\frac{2^n}{n!}$ | $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}$ |

**5** Для последовательности $x_n$ найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$:

| № | $x_n$ | № | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 5.1 | $\cos(\pi n/3)$ | 5.11 | $n\cos(\pi n/2)$ |
| 5.2 | $n^{(-1)^n}$ | 5.12 | $3^{(-1)^n n}$ |
| 5.3 | $\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$ | 5.13 | $\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{1+(-1)^n}{2}$ |
| 5.4 | $\frac{n^2\sin(\pi n/2)+1}{n+1}$ | 5.14 | $\frac{n^2\cos(\pi n/2)+3}{n+2}$ |
| 5.5 | $\cos(\pi n/4)+(-1)^n$ | 5.15 | $\sin(\pi n/4)-(-1)^n$ |
| 5.6 | $5^{(-1)^{n+1}}$ | 5.16 | $(n+1)^{(-1)^n}$ |
| 5.7 | $\sin(\pi n/3)$ | 5.17 | $n\sin(\pi n/4)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.8 | $\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n}+\dfrac{2+(-1)^n\cdot 3}{7}$ | 5.18 | $\dfrac{(-1)^n(1-n^3)}{1+n^3}+\dfrac{1+(-1)^n}{3}$ |
| 5.9 | $(2n)^{(-1)^n}$ | 5.19 | $e^{(-1)^n n}$ |
| 5.10 | $\dfrac{((-1)^n-1)n^2+n+1}{n}$ | 5.20 | $\dfrac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}$ |

**Решение типовых примеров**

**1.19** Пользуясь критерием Коши, установить сходимость или расходимость последовательности

$$x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n \text{, где } |a_k| < M \quad \forall k = \overline{1,n},\ |q| < 1.$$

*Решение*. Согласно критерию Коши, последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall n \geq N_\varepsilon \ \ \forall p \in \mathbb{N} : \left| x_{n+p} - x_n \right| \leq \varepsilon .$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$\left| x_n - x_{n+p} \right| = \left| a_{n+p} q^{n+p} + a_{n+p-1} q^{n+p-1} + \ldots + a_{n+1} q^{n+1} \right| \leq$$

$$\leq M \left| q^{n+p} \right| + \ldots + M \left| q^{n+1} \right| = M \ \ |q|^{n+1} + \ldots + |q|^{n+p} \ \ =$$

$$= M \frac{|q|^{n+1} \ \ 1 - |q|^p}{1 - |q|} < M \frac{|q|^{n+1}}{1 - |q|} .$$

Найдем теперь $t$ из неравенства $M \dfrac{|q|^{t+1}}{1-|q|} \leq \varepsilon$. Имеем $|q|^{t+1} \leq \dfrac{\varepsilon \ \ 1-|q|}{M}$. Следовательно, $t \geq \log_{|q|} \dfrac{\varepsilon \ \ 1-|q|}{M} - 1$. Полагая теперь $N_\varepsilon = \left[ \log_{|q|} \dfrac{\varepsilon \ \ 1-|q|}{M} \right]$, получим, что при $\forall n \geq N_\varepsilon$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\left| x_n - x_{n+p} \right| \leq \varepsilon$.

Таким образом, последовательность $x_n$ является фундаментальной и, согласно критерию Коши, сходится.

**1.20** Пользуясь критерием Коши, установить сходимость или расходимость последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

*Решение.* Покажем, что данная последовательность не сходится. Для этого достаточно показать, что она не удовлетворяет критерию Коши, то есть

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \geq N \ \ \exists p \in \mathbb{N} : \left| x_{n+p} - x_n \right| > \varepsilon_0 .$$

В нашем случае

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right| \geq p \cdot \frac{1}{n+p} .$$

Пусть $p = n$. Тогда получим $\left| x_{2n} - x_n \right| \geq \frac{1}{2}$. Рассмотрим $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. В этом случае $\forall N \ \exists n = p ,\ p \in \mathbb{N}, p \geq N : \ \left| x_{2n} - x_n \right| > \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит, и не сходится.

**2.20** Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

*Решение.* Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 ,$$

то $x_n$ – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Учитывая неравенство $\ln(x+1) \leq x ,\ x \geq 0$, имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

т.е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$. Значит, $x_n$ – монотонна и ограничена. Тогда по теореме о сходимости монотонной и ограниченной последовательности $x_n$ сходится.

**3.20** Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}\right)$, Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}$, В). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

*Решение.*

А) Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=$$

$$=\left[\!\!\left[\begin{array}{l}\textit{Имеем неопределенность вида}\\ (\infty-\infty).\textit{Умножим и разделим}\\ \textit{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{array}\right]\!\!\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Б) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{27n+1}{27n}\right)^{27n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{27n}\right)^{27n}=\left[\!\!\left[\begin{array}{c}\textit{сделаем замену}\\ k=27n\end{array}\right]\!\!\right]=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e.$$

В) Поскольку $-1\le\sin n\le 1,\ \forall n\in\mathbb{N}$, а последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ является бесконечно малой, то произведение $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin n$ также будет бесконечно малой последовательностью, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin n=0.$$

**4.20** Вычислить пределы:

А) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{8}$, Б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$, В) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

*Решение.*

А) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{8}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{2^3}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1.$$

Б) Если $k \ge 4,$ то $2/k \le 1/2$. Поэтому при $n \ge 4$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\ldots 2}{4\ldots n} \le \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = \frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{32}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$.

В) Так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$ и при $n > 2$

$$2 = \left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n} = \left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n} > \left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{n} =$$

$$= \left[\!\left[(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k\right]\!\right] =$$

$$= 1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)+\ldots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n > n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),$$

т.е. $0 < 2^{\frac{1}{2^n}}-1 < \frac{2}{n}$, то по теореме о предельном переходе в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{1/2^n}-1\right) = 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/2^n} = 1$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}) = 2.$$

**5.20** Для последовательности $x_n = \frac{(3\cos(\pi n/2)-1)n+1}{n}$ найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

*Решение.*

При $n=4k$ имеем $x_n=\dfrac{2n+1}{n}=2+\dfrac{1}{n}$, и, значит, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k}=2$, $2<x_{4k}\le 2+1/4$, причем $x_4=9/4$.

При $n=4k+1$ или $n=4k+3$ имеем $x_n=\dfrac{-n+1}{n}=-1+\dfrac{1}{n}$, и, значит, $-1<x_n<0$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k+3}=-1$.

При $n=4k+2$ имеем $x_n=\dfrac{-4n+1}{n}=-4+\dfrac{1}{n}$, значит, $-4<x_n<0$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{4k+2}=-4$.

Таким образом, числа $2,-1,-4$ являются частичными пределами данной последовательности. Рассмотренные четыре подпоследовательности $x_{4k}$ , $x_{4k+1}$ , $x_{4k+2}$ , $x_{4k+3}$ составляют вместе всю данную последовательность. Отсюда следует, что других частичных пределов данная последовательность не имеет.

Очевидно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=2$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n-4$.

## Лабораторная работа № 7
# Предел функции

*Необходимые понятия и теоремы:* различные определения предела функции, общие свойства предела функции, предел и неравенства, предел и арифметические операции, предел композиции, критерий Коши существования предела, односторонние пределы, бесконечные пределы, частичные пределы.

*Литература:* [1] с. 163 – 180, [2] с. 47 – 72.

**1** Для функции $y = f(x)$, $x \in D\ \ f$ , заданных $a$, $A$ и $\varepsilon = \varepsilon_i$ найти такое $\delta$, чтобы для любых $x \in D\ \ f$ , удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнялось условие $|f(x) - A| < \delta$

| № | $f(x)$ | $D\ \ f$ | $a$ | $A$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | $2x+1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 1 | 0,1 | 0,001 |
| 1.2 | $x^2$ | $\mathbb{R}$ | 1 | | 0,01 | 0,001 |
| 1.3 | $2x^2-1$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 1 | 0,1 | 0,002 |
| 1.4 | $\sin x$ | $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0,01 | 0,001 |
| 1.5 | $\cos x$ | $(0, \pi)$ | 0 | 1 | 0,1 | 0,01 |
| 1.6 | $\frac{1}{x}$ | $(0, 2)$ | 1 | 1 | 0,01 | 0,001 |
| 1.7 | $\frac{x^2-9}{x-3}$ | $(3, 10]$ | 3 | 6 | 0,1 | 0,001 |
| 1.8 | $\frac{x-1}{x+1}$ | $(-1, 1)$ | 0 | $-1$ | 0,02 | 0,002 |
| 1.9 | $3x^2-2$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 1 | 0,3 | 0,003 |
| 1.10 | $x^3$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 1 | 0,1 | 0,01 |
| 1.11 | $3x+1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 1 | 0,2 | 0,01 |
| 1.12 | $x^2-1$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 0 | 1 | 0,001 |
| 1.13 | $\sin 2x$ | $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{\pi}{4}$ | 1 | 0,01 | 0,001 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.14 | $\cos 2x$ | $(0,\pi)$ | $\frac{\pi}{2}$ | -1 | 0,1 | 0,002 |
| 1.15 | $\frac{1}{3}x^2+1$ | $\mathbb{R}$ | 3 | 4 | 1 | 0,0001 |
| 1.16 | $100x+1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 1 | 0,1 | 0,001 |
| 1.17 | $\frac{x^2}{100}+1$ | $(0,1)$ | 0 | 1 | 0,1 | 0,01 |
| 1.18 | $1000x$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 0 | 0,1 | 0,001 |
| 1.19 | $\frac{x^2-1}{x-1}$ | $(1,5]$ | 1 | 2 | 0,2 | 0,01 |
| 1.20 | $\frac{x^3-1}{x-1}$ | $(1,4)$ | 1 | 3 | 0,1 | 0,001 |

**2** Пользуясь определением предела по Коши (на «языке $\varepsilon-\delta$»), доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

| № | $f(x)$ | $D\ f$ | $a$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| 2.1 | $x^2$ | $\mathbb{R}$ | 3 | 9 |
| 2.2 | $2x+1$ | $(1,2)$ | 1 | 3 |
| 2.3 | $3x$ | $(1,4)$ | 2 | 6 |
| 2.4 | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 1 |
| 2.5 | $\cos x$ | $(0,\pi)$ | $\pi$ | –1 |
| 2.6 | $\frac{x^2-1}{x+1}$ | $(-1,1)$ | –1 | –2 |
| 2.7 | $x^2-1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | –1 |
| 2.8 | $x^3$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 1 |
| 2.9 | $\frac{x^2}{100}-1$ | $(0,2)$ | 0 | –1 |
| 2.10 | $100x+1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 1 |
| 2.11 | $3x+1$ | $(-1,5)$ | 5 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2.12 | $\frac{x}{100}+100$ | $\mathbb{R}$ | 100 | 100 |
| 2.13 | $100x^2-100$ | $(1, 4)$ | 1 | 0 |
| 2.14 | $\sin 2x$ | $(0, \pi)$ | $\frac{\pi}{4}$ | 1 |
| 2.15 | $\cos 2x$ | $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ | $\frac{\pi}{4}$ | 0 |
| 2.16 | $\frac{x^2-1}{x-1}$ | $(1, 2)$ | 1 | 2 |
| 2.17 | $\frac{x^3-1}{x-1}$ | $(1, 3)$ | 1 | 3 |
| 2.18 | $4x^2-1$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 3 |
| 2.19 | $\frac{1}{x}$ | $(0, +\infty)$ | 1 | 1 |
| 2.20 | $3x^2-1$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 2 |

**3** Используя определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей), доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

| № | $f(x)$ | $a$ | № | $f(x)$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.1 | $\begin{cases} 2x, x\le 1 \\ x, x>1 \end{cases}$ | 1 | 3.10 | $ctg\ x$ | $\infty$ |
| 3.2 | $\sin x$ | $+\infty$ | 3.11 | $sign\ x$ | 0 |
| 3.3 | $\cos x$ | $+\infty$ | 3.12 | $\sin\frac{1}{x}$ | 0 |
| 3.4 | $\begin{cases} 2x, x\le 1 \\ 2-x, x>1 \end{cases}$ | 1 | 3.13 | $\begin{cases} x^2+2, x\le 0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$ | 0 |
| 3.5 | $\begin{cases} x^2, x<0 \\ x+2, x\ge 0 \end{cases}$ | 0 | 3.14 | $\begin{cases} 2x, x<0 \\ 2x^2+1, x\ge 0 \end{cases}$ | 0 |
| 3.6 | $\begin{cases} -x+1, x\le 2 \\ x+1, x>2 \end{cases}$ | 2 | 3.15 | $\frac{\lvert x\rvert}{x}$ | 0 |
| 3.7 | $\begin{cases} x^2, x\le 0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$ | 0 | 3.16 | $\frac{x-1}{\lvert x-1\rvert}$ | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.8 | $\begin{cases} -x+1, x\le 0 \\ 2+x, x>0 \end{cases}$ | 0 | 3.17 | $\cos\dfrac{1}{x}$ | 0 |
| 3.9 | $\begin{cases} -2, x<1 \\ x+2, x\ge 1 \end{cases}$ | 1 | 3.18 | $\sin\dfrac{1}{x-1}$ | 1 |

**4** Используя логические символы (на языке «$\varepsilon-\delta$») сформулировать утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и привести соответствующие примеры.

| № | $x_0$ | $A$ | № | $x_0$ | $A$ | № | $x_0$ | $A$ | № | $x_0$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.1 | $\infty$ | $b$ | 4.6 | $a$ | $\infty$ | 4.11 | $a+0$ | $-\infty$ | 4.16 | $+\infty$ | $-\infty$ |
| 4.2 | $-\infty$ | $b$ | 4.7 | $a-0$ | $+\infty$ | 4.12 | $a+0$ | $+\infty$ | 4.17 | $+\infty$ | $+\infty$ |
| 4.3 | $+\infty$ | $b$ | 4.8 | $a-0$ | $-\infty$ | 4.13 | $-\infty$ | $-\infty$ | 4.18 | $+\infty$ | $\infty$ |
| 4.4 | $a$ | $+\infty$ | 4.9 | $a-0$ | $\infty$ | 4.14 | $-\infty$ | $+\infty$ | 4.19 | $a-0$ | $b$ |
| 4.5 | $a$ | $-\infty$ | 4.10 | $a+0$ | $\infty$ | 4.15 | $-\infty$ | $\infty$ | 4.20 | $a+0$ | $b$ |

**5** Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ или показать, что эти пределы не существуют. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, найти его.

| № | $f(x)$ | $a$ | № | $f(x)$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | $\sin\dfrac{1}{x}$ | 0 | 5.10 | $\begin{cases} \sin x, x<0 \\ \cos x, x\ge 0 \end{cases}$ | 0 |
| 5.2 | $\cos\dfrac{1}{x}$ | 0 | 5.11 | $tg\ x$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |
| 5.3 | $\begin{cases} 1, x\le 0 \\ -1, x>0 \end{cases}$ | 0 | 5.12 | $ctg\ x$ | $\pi$ |
| 5.4 | $\begin{cases} 2x^2, x\le 1 \\ 1-x, x>1 \end{cases}$ | 1 | 5.13 | $\dfrac{x}{\lvert x\rvert}$ | 0 |
| 5.5 | $e^{\frac{1}{x}}$ | 0 | 5.14 | $\sin^2\dfrac{1}{x}$ | 0 |
| 5.6 | $\sin\dfrac{1}{x-1}$ | 1 | 5.15 | $\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ 2x-1, x>1 \end{cases}$ | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.7 | $\dfrac{\lvert x-2\rvert}{x-2}$ | 2 | 5.16 | $\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ 2x+1, x>1 \end{cases}$ | 1 |
| 5.8 | $\lvert x\rvert$ | 0 | 5.17 | $x$ *\ | 1 |
| 5.9 | $\begin{cases} x+1, x\le 1 \\ 1-x, x>1 \end{cases}$ | 1 | 5.18 | $\sin\dfrac{1}{\lvert x-2\rvert}$ | 2 |

*\ $x$ – целая часть $x$.

**6** Пользуясь определение предела по Коши, доказать, что число $A$ не является $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

| № | $f(x)$ | $D\ f$ | $a$ | $A$ |
|---|---|---|---|---|
| 6.1 | $x^2-1$ | $(0,1)$ | 1 | 1 |
| 6.2 | $3x^2-1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 2 |
| 6.3 | $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ | $(-1,1)$ | –1 | 1 |
| 6.4 | $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 0 |
| 6.5 | $\dfrac{x}{100}-1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 4 |
| 6.6 | $x^3-x$ | $(0,10)$ | 1 | 1 |
| 6.7 | $\dfrac{\lvert x\rvert}{x}-x$ | $(-1,0)$ | 0 | 2 |
| 6.8 | $100x+1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | –1 |
| 6.9 | $2\lvert x\rvert-1$ | $(-1,1)$ | 1 | 0 |
| 6.10 | $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ | $(1,10)$ | 1 | 2 |
| 6.11 | $2x-1$ | $(0,1)$ | 0 | 2 |
| 6.12 | $x^3+1$ | $(0,2)$ | 0 | 2 |
| 6.13 | $100x^2-100$ | $\mathbb{R}$ | 1 | 1 |
| 6.14 | $\dfrac{1}{x}$ | $(0,10]$ | 1 | 4 |
| 6.15 | $\lvert x\rvert\cdot x$ | $(0,4)$ | 1 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6.16 | $\dfrac{\lvert x\rvert}{x}+x$ | (0, 1) | 0 | 2 |
| 6.17 | $\sin\lvert x\rvert$ | (0, 1) | 0 | 1 |
| 6.18 | $\dfrac{x^2}{100}+x$ | $\mathbb{R}$ | 10 | 1 |
| 6.19 | $-x^2+1$ | $\mathbb{R}$ | 0 | 2 |
| 6.20 | $\dfrac{1}{x}+x$ | (1, 3) | 1 | 0 |

**7** Если для некоторой последовательности $x_n \to a$ $x_n \neq a$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$, то число (или символ $\infty$) $A$ называют частичным пределом функции $f(x)$ в точке $a$. Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначают $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$ и называют соответственно нижним и верхним пределами $f(x)$ в точке $a$. Найти $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$.

| № | $f(x)$ | $D\,f$ | $a$ | № | $f(x)$ | $D\,f$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7.1 | $\sin\dfrac{1}{x}$ | (0, 1) | 0 | 7.10 | $\sin^2 x$ | $\mathbb{R}$ | $-\infty$ |
| 7.2 | $\sin^2\dfrac{1}{x}$ | (0, 1) | 0 | 7.11 | $\sin^2\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$ | $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | 0 |
| 7.3 | $x\cos\dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | 0 | 7.12 | $\cos^2\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$ | (0, 2) | 0 |
| 7.4 | $\cos^2\dfrac{1}{x}$ | $(1, +\infty)$ | 0 | 7.13 | $\sin\dfrac{1}{x-1}$ | (1, 3) | 1 |
| 7.5 | $x\sin\dfrac{1}{x}$ | (0, 1) | 0 | 7.14 | $\cos\dfrac{1}{x-1}$ | $(-1, 1)$ | 1 |
| 7.6 | $x^2\cos\dfrac{1}{x-1}$ | (1, 2) | 1 | 7.15 | $x\cos\dfrac{1}{x-2}$ | $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ | 2 |
| 7.7 | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $+\infty$ | 7.16 | $\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}$ | $\mathbb{R}$ | $+\infty$ |
| 7.8 | $2^{\sin x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $+\infty$ | 7.17 | $2^{\sin\frac{1}{x}}$ | $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | 0 |
| 7.9 | $x^2\cos^2 x$ | $\mathbb{R}$ | $+\infty$ | 7.18 | $2^{\cos\frac{1}{x}}$ | $(1, +\infty)$ | 1 |

**Решение типовых примеров**

**1.20.** Для функции $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x\in(1,4)$, $a=1$, $A=3$ и $\varepsilon_1=0{,}1$, $\varepsilon_2=0{,}001$ найти $\delta$, чтобы для любых $x\in(1,4)$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнялось условие $|f(x)-A|<\delta$.

*Решение.* Так как $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, $x\in(1,4)$, $a=1$, $A=3$, то

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=\left|x^2+x+1-3\right|\le$$

$$\le|(x-1)(x+1)|+|x-1|=|x-1|\cdot(|x+1|+1).$$

Будем искать нужное $\delta$ среди $\delta:\delta\le 1$. Для $x\in(1,4)$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-1|\le\delta\le 1$, имеем $0<x\le 2$ и $|x+1|+1\le 4$. Поэтому

$$|f(x)-A|<4\delta.$$

Теперь если $\varepsilon=\varepsilon_1=0{,}1$, то для него $\delta$ найдем из равенства $4\delta=0{,}1$, то $\delta_1=\dfrac{1}{40}$. Если же $\varepsilon=\varepsilon_2=0{,}001$, то полагаем $4\delta=0{,}001$ т.е. $\delta_2=\dfrac{1}{4000}$. Заметим, что найденные $\delta_i\le 1$.

**2.20**. Пользуясь определением предела по Коши (на «языке $\varepsilon-\delta$»), доказать, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

*Решение.* Так как $f(x)=3x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, $a=1$, $A=2$, то

$$|f(x)-A|=\left|3x^2-3\right|=3|x-1|\cdot|x+1|.$$

Возьмем $\forall\varepsilon>0$ и будем искать нужное $\delta$ среди $\delta:\delta\le 1$. Тогда $0<|x-1|<\delta\le 1\Rightarrow 0<x\le 2$. Поэтому $3|x+1|\le 9$ и

$$|f(x)-A|<9\delta.$$

Тогда, если $9\delta=\varepsilon$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$ для всех $x\in D(f)$и $0<|x-1|<\delta$. Поэтому, положив $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$, будем иметь, что $\forall\varepsilon>0$ при $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{9}\right\}$ для $\forall x\in D(f)$ и $0<|x-1|<\delta$ справедливо неравенство

$$|f(x)-2|<\varepsilon.$$

Итак, показано, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-1)=2$.

**3.18.** Используя определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей), доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$, $a=1$.

*Решение.* Для последовательности

$$x_n'=1+\frac{1}{n\pi}\to 1,\ f(x_n')=\sin n\pi\to 0.$$

С другой стороны,

$$x_n''=1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to 1,\text{ а }\ f(x_n'')=\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\to 1.$$

Из определения предела по Гейне следует, что предел $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$ не существует.

**4.20.** Используя логические символы (на языке «$\varepsilon-\delta$») сформулировать утверждение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и привести соответствующие примеры, если $x_0=a+0$, $A=b$.

*Решение.* На языке «$\varepsilon-\delta$» $\exists\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x\in D(f)\ 0<x-a<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$.

*Пример:* $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $a=0$, $b=1$ $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{x}=1$.

**5.18.** Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$, где $f(x)=\sin\dfrac{1}{|x-2|}$, $a=2$, или показать, что эти пределы не существуют. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, найти его.

*Решение.* Покажем, что не существует $\lim\limits_{x\to 2+0}\sin\dfrac{1}{|x-2|}$. Для доказательства воспользуемся определением предела по Гейне: при $n\to\infty$

$$x_n'=2+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to 2+0, \qquad f\left(x_n'\right)=\sin\frac{\pi}{2}\to 1;$$

$$x_n''=2+\frac{1}{n\pi}\to 2+0, \qquad f\left(x_n''\right)=\sin n\pi\to 0.$$

Итак, показано, что не существует $\lim\limits_{x\to 2+0}\sin\dfrac{1}{|x-2|}$. Аналогично показывается, что не существует $\lim\limits_{x\to 2-0}\sin\dfrac{1}{|x-2|}$. Таким образом, показано, что не существует $\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{1}{|x-2|}$.

**6.20** Пользуясь определение предела по Коши, доказать, что число $A$ не является $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$, $x\in(1,3)$, $a=1$, $A=0$.

*Решение.* Нужно показать, что $\exists\varepsilon>0$ такое, что $\forall\delta>0$ $\exists x'\in D(f)$, удовлетворяющее условию $0<|x'-1|<\delta$, для которого $|f(x')-0|\ge\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon=1$. Для любого $0<\delta<1$ положим $x'=1+\dfrac{\delta}{2}$. Тогда $x'\in(1,3)$

$$0<|x'-1|=\frac{\delta}{2}<\delta \text{ и } |f(x')-0|=1+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}}\ge 1=\varepsilon .$$

Нужное утверждение доказано.

**7.18** Если для некоторой последовательности $x_n \to a$ $x_n \neq a$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, то число (или символ $\infty$) $A$ называют частичным пределом функции $f(x)$ в точке $a$. Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначают $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$ и называют соответственно нижним и верхним пределами $f(x)$ в точке $a$. Найти $\varliminf\limits_{x\to a} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x)$, если $f(x) = 2^{\cos\frac{1}{x}}$, $x \in (0,+\infty)$, $a = 1$.

*Решение.* Так как $-1 \leq \cos t \leq 1$, то $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$. Поэтому если $A$ – частичный предел $f(x)$ в точке $a = 1$, то $\frac{1}{2} \leq A \leq 2$. С другой стороны, имеем: при $n \to \infty$

$$x_n' = 1 + \frac{1}{\pi + 2n\pi} \to 1, \quad \text{а} \quad f(x_n') = 2^{\cos\pi} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2};$$

$$x_n'' = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 1, \quad \text{а} \quad f(x_n'') = 2^{\cos\frac{\pi}{2}} = 2 \to 2.$$

Следовательно, $\varliminf\limits_{x\to a} f(x) = \frac{1}{2}$, а $\varlimsup\limits_{x\to a} f(x) = 2$.

## Лабораторная работа № 8
# Замечательные пределы. Вычисление пределов.

*Необходимые понятия и теоремы:* первый и второй замечательные пределы, предел и арифметические операции, пределы монотонной функции, предел композиции, критерии Коши существования предела.

*Литература:* [1] с. 170 – 180; [2] с. 56 – 66; [3] с. 98 – 102, 128–137.

**1** Используя свойства пределов и известные пределы, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

| № | A | | B | | C | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $f(x)$ | $a$ | $f(x)$ | $a$ | $f(x)$ |
| 1.1 | 0 | $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ | 4 | $\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ | 0 | $\dfrac{x^2}{\lvert x\rvert}$ |
| 1.2 | 1 | $\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ | 16 | $\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ | 1 | $\dfrac{\lvert x-1\rvert^3}{x^2-1}$ |
| 1.3 | $+\infty$ | $\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+1}$ | 8 | $\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ | –2 | $\dfrac{\lvert x+2\rvert}{\lvert x-1\rvert}$ |
| 1.4 | –1 | $\dfrac{x^3+1}{x+1}$ | 2 | $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ | 0 | $x\sin\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$ |
| 1.5 | 1 | $2+x^{\;5}$ | 1 | $\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$ | 0 | $\lvert x\rvert\times\sin\dfrac{1}{x}$ |
| 1.6 | 2 | $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ | 1 | $\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ | 1 | $\lvert x-1\rvert\times\cos\dfrac{1}{\lvert x-1\rvert}$ |
| 1.7 | 1 | $\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$ | 0 | $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ | 0 | $x\times sign x$ |
| 1.8 | 3 | $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ | –8 | $\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ | 1 | $\lvert x-1\rvert\times sign(x-1)$ |
| 1.9 | 1 | $\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ | 1 | $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ | –3 | $\lvert x+3\rvert\times sign(\sin x)$ |
| 1.10 | –1 | $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x-6}$ | 1 | $\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$ | $+\infty$ | $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ |
| 1.11 | –1 | $\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$ | –2 | $\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$ | $+\infty$ | $\sqrt{(x+1)(x+2)}-x$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.12 | 1 | $\frac{x^5-1}{x^3-1}$ | 1 | $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4x}-2}$ | 1 | $x\lvert x\rvert-\frac{1}{\lvert x\rvert}$ |
| 1.13 | 0 | $\frac{(1+x)(1-2x)-1}{x}$ | 0 | $\frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$ | $+\infty$ | $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ |
| 1.14 | 1 | $\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{x^2}-1}{\sqrt{x}-4}$ | $+\infty$ | $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ |
| 1.15 | 1 | $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ | 16 | $\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ | $+\infty$ | $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$ |
| 1.16 | –1 | $\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$ | 1 | $\frac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}$ | $+\infty$ | $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}$ |
| 1.17 | –1 | $\frac{x^5+1}{x+1}$ | 4 | $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ | $+\infty$ | $\frac{\lvert x\rvert}{x}$ |
| 1.18 | 1 | $\frac{x^3+2x-3}{x-1}$ | 1 | $\frac{\sqrt{4x^2}-2}{\sqrt{x}-1}$ | –1 | $\frac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-1}$ |
| 1.19 | –1 | $\frac{x^2-1}{2x^2+x-1}$ | 1 | $\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2-1}$ | –16 | $\frac{\sqrt[4]{-x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-4}$ |
| 1.20 | 1 | $\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}$ | 1 | $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}$ | 1 | $\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-1}$ |

**2** Используя свойства пределов и первый замечательный предел, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ :

| № | A | | B | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $f(x)$ | $a$ | $f(x)$ |
| 2.1 | 0 | $\frac{\sin 5x}{x}$ | 1 | $\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$ |
| 2.2 | 0 | $\frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$ | 0 | $\frac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$ |
| 2.3 | 0 | $\frac{1-\cos 2x}{2x^2}$ | 1 | $\frac{\sin \pi x}{x-1}$ |
| 2.4 | 0 | $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 5x}$ | 1 | $\frac{\sin x-\sin 1}{x-1}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 0 | $\dfrac{1-\cos x^2}{\sin^4(x/2)}$ | 0 | $\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ |
| 2.6 | π | $\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ | 1 | $\dfrac{x-1}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ |
| 2.7 | 0 | $\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin 7x}$ | 1 | $\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x-1)}$ |
| 2.8 | 1 | $\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin(x-1)}$ | 0 | $\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ |
| 2.9 | 0 | $\dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$ | 1 | $\dfrac{\sin^2(x-1)}{\sin^2 \pi x}$ |
| 2.10 | 0 | $\dfrac{1-\cos x^2}{\sin^2 2x}$ | 0 | $\dfrac{tg\ \ x-\sin x}{x^3}$ |
| 2.11 | 0 | $\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ | 1 | $\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$ |
| 2.12 | 0 | $\dfrac{\arcsin x}{x\frac{\cos x-\cos 2}{x-2}}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ |
| 2.13 | 2 | $\dfrac{\cos x-\cos 2}{x-2}$ | 0 | $\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$ |
| 2.14 | 0 | $\dfrac{\sin x^2}{1-\cos 2x}$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$ |
| 2.15 | 0 | $\dfrac{\sin^2 2x}{\sin 2x^2}$ | 2 | $\dfrac{\sin x-\sin 2}{x-2}$ |
| 2.16 | π | $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$ | 0 | $\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos x}$ |
| 2.17 | 1 | $\dfrac{(x-1)^2}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ | 0 | $\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}$ |
| 2.18 | 0 | $\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ | 0 | $\dfrac{x}{\sin 3x}$ |
| 2.19 | 0 | $\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos 2x}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2.20 | $\dfrac{\pi}{6}$ | $\dfrac{\sin^2(x-\frac{\pi}{6})}{1-2\sin x}$ | –1 | $\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}$ |

**3** Используя свойства пределов, второй замечательный предел и равенства $\lim\limits_{x\to a} \ln g(x) = \ln(\lim\limits_{x\to a} g(x))$, $\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

| № | A | | B | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $f(x)$ | $a$ | $f(x)$ |
| 3.1 | 0 | $1+2x^{\frac{1}{x}}$ | $\infty$ | $\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$ |
| 3.2 | 0 | $\left(1+\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{5}{x}}$ | $\infty$ | $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ |
| 3.3 | $\infty$ | $\left(1+\dfrac{1}{4x+1}\right)^{8x}$ | 0 | $\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ |
| 3.4 | $\infty$ | $\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)^{4x-1}$ | 1 | $\left(\dfrac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ |
| 3.5 | $\infty$ | $\left(1+\dfrac{7}{x-6}\right)^{x-1}$ | $\infty$ | $\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ |
| 3.6 | $\infty$ | $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ | 0 | $\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ |
| 3.7 | 0 | $\sqrt[x]{1-2x}$ | 0 | $(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ |
| 3.8 | $\infty$ | $\left(\dfrac{x-14}{x-10}\right)^{x-2}$ | 0 | $\sqrt[x^2]{\cos x}$ |
| 3.9 | 0 | $\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$ | 0 | $(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$ |
| 3.10 | 0 | $\sqrt[x]{1-4x}$ | 0 | $(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ |
| 3.11 | 0 | $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$ | $\infty$ | $\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3.12 | 0 | $\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$ | 0 | $1+x^2 \;{}^{\mathrm{ctg}^2 x}$ |
| 3.13 | ∞ | $\left(1+\frac{6}{3x+4}\right)^{2x}$ | 0 | $\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ |
| 3.14 | ∞ | $\left(1-\frac{1}{4x+3}\right)^{x+4}$ | 2 | $\left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ |
| 3.15 | ∞ | $\left(1+\frac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$ | 0 | $x+e^x \;{}^{\frac{1}{x}}$ |
| 3.16 | ∞ | $\left(\frac{x}{x+3}\right)^{x+2}$ | 0 | $\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$ |
| 3.17 | 0 | $\sqrt[2x]{1+3x}$ | 0 | $\cos x \;{}^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$ |
| 3.18 | ∞ | $\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+4}$ | 0 | $\sin x+\cos x \;{}^{\frac{1}{x}}$ |
| 3.19 | ∞ | $\left(\frac{2x-1}{1-2x}\right)^{3x}$ | 0 | $1+3x^2 \;\; \frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 3.20 | 0 | $\sqrt[3x]{1+2x}$ | 0 | $\cos x-\sin x \;{}^{\frac{1}{x}}$ |

**4** Используя свойства пределов, известные пределы, предел $\lim\limits_{x\to\varphi_0}\cos x=\cos\varphi_0$, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

| № | A | | B | |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $f(x)$ | $a$ | $f(x)$ |
| 4.1 | 0 | $\frac{2^x-1}{x}$ | 1 | $\frac{\ln x}{x-1}$ |
| 4.2 | ∞ | $\frac{\ln\ \ 2+e^{3x}}{\ln(3+e^{2x})}$ | 1 | $1-x\ \ \log_x 2$ |
| 4.3 | +∞ | $\frac{\ln\ \ x^2-x+1}{\ln\ \ x^{10}+x+1}$ | 1 | $1+\sin\pi x \;{}^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4.4 | 0 | $\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ | 0 | $x\log_{1-x}2$ |
| 4.5 | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\sin x^{\ \operatorname{tg}x}$ | 2 | $\dfrac{2^x-4}{x-2}$ |
| 4.6 | 0 | $\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x^2}$ | 0 | $\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin 5x}$ |
| 4.7 | e | $\dfrac{\ln\ln x}{x-e}$ | $\pi$ | $\dfrac{\ln\frac{x}{\pi}}{x-\pi}$ |
| 4.8 | 1 | $\dfrac{\lg\frac{x+1}{2}}{x-1}$ | $\infty$ | $x\ln\dfrac{2x+1}{2x}$ |
| 4.9 | 0 | $\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$ | 2 | $\dfrac{x^x-4}{x-2}$ |
| 4.10 | 0 | $\dfrac{shx}{x}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ | $1-\cos x^{\ \operatorname{tg}^2 x}$ |
| 4.11 | 0 | $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ | $\infty$ | $x\ln\dfrac{x+1}{x}$ |
| 4.12 | 2 | $\dfrac{\ln x-\ln 2}{x-2}$ | $+\infty$ | $\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ |
| 4.13 | 0 | $\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $(\operatorname{tg}\ x)^{\operatorname{tg}\ 2x}$ |
| 4.14 | 0 | $\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ | 1 | $\dfrac{x^x-1}{x-1}$ |
| 4.15 | 0 | $\left[tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$ | 0 | $\dfrac{e^{2x}-1}{x^2}$ |
| 4.16 | 3 | $\dfrac{2^x-8}{\sin\ \pi x}$ | e | $\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}$ |
| 4.17 | 0 | $(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$ | 2 | $\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4.18 | 7 | $\dfrac{\ln x-\ln 7}{x-7}$ | 0 | $\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ |
| 4.19 | $+\infty$ | $\dfrac{x^4}{2^x}$ | 2 | $\dfrac{\log_2 \frac{x}{2}}{x-2}$ |
| 4.20 | 1 | $(1-\sin\pi x)^{\operatorname{ctg} x}$ | 2 | $\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}$ |

**Решение типовых примеров**

**1.20** Используя свойства пределов и известные пределы, вычислить

$$\textbf{A)}\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}\right);\ \text{B)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1};\ \text{C)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{|x|}-1}.$$

*Решение.*

**A)** Приведя к общему знаменателю выражение, стоящее под знаком предела, получим

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x\quad 1+x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\ 1+x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}1+\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{1}{2}.$$

**B)** Положим $x=t^{12}$. Тогда, учитывая, что при $x\to 1$ $t\to 1$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^4-t^3}{t^{24}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^3\ \ t-1}{t-1\ \ t^{23}+t^{22}+\ldots+t+1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}t^3}{\lim\limits_{x\to 1}\ 1+t+\ldots+t^{22}+t^{23}}=\frac{1}{24}.$$

**C)** Домножая числитель и знаменатель функции на сопряженные выражения, будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{|x|}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+3x}-2)(\sqrt{1+3x}+2)}{(\sqrt{1+3x}+2)}\cdot\frac{\sqrt{|x|}+1}{(\sqrt{|x|}-1)(\sqrt{|x|}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{|x|}+1}{\sqrt{1+3x}+2}\cdot\frac{3(x-1)}{|x|-1}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{|x|}+1)}{\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{1+3x}+2)}\cdot3=\frac{3}{2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x\to1$ $|x|=x$, и равенствами: $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{|x|}=1$; $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{1+3x}=2$, которые доказываются, например, по определению. Можно опереться на равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, которое также следует из определения предела.

**2.20** Используя свойства пределов и первый замечательный предел, вычислить

$$\textbf{A)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin x};\quad \text{B)}\ \lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{\sin(x+1)}.$$

*Решение.*

**А)** Сделаем замену $x-\frac{\pi}{6}=t$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{1-2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2 t}{1-2\frac{\sqrt3}{2}\sin t-\cos t}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{\frac{1-\cos t}{\sin t}-\sqrt3}=\frac{\lim\limits_{t\to0}\sin t}{\lim\limits_{t\to0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin t}-\sqrt3}=\frac{\lim\limits_{t\to0}\sin t}{\lim\limits_{t\to0}\left[2\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{t}{2}\cdot\frac{t}{\sin t}\right]-\sqrt3}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to0}\sin t}{2\cdot1\cdot0\cdot1-\sqrt3}=\frac{0}{-\sqrt3}=0.$$

Это следует из того, что $\lim\limits_{t\to a}\sin t=\sin a$. Действительно,

$$|\sin t-\sin a|=2\cdot\left|\sin\frac{t-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{t+a}{2}\right|\le2\cdot\left|\sin\frac{t-a}{2}\right|\le|t-a|.$$

Поэтому для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ такое, что из неравенства

$$|t-a|<\delta \Rightarrow |\sin t-\sin a|\le \frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \text{, т.е. } \lim_{t\to a}\sin t=\sin a .$$

**В)** Сделаем замену $x+1=t$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t-\pi)}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot \;-1\; \cdot\frac{\sin \pi t}{\pi t}\cdot \pi =$$

$$=-\pi\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{\pi t}=-\pi ,$$

так как из первого замечательного предела следует, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,\ \lim_{t\to 0}\frac{\sin \pi t}{\pi t}=1.$$

**3.20** Используя свойства пределов, второй замечательный предел и равенства $\lim\limits_{x\to a}\ln g(x)=\ln(\lim\limits_{x\to a} g(x))$, $\quad \lim\limits_{x\to a}e^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, вычислить

$$\textbf{А)}\ \lim_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+2x}\,;\ \text{В)}\ \lim_{x\to 0}\ \cos x-\sin x\ ^{\frac{1}{x}} .$$

*Решение.*

**А)** Преобразовывая функцию, будем иметь:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+2x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}}=\ 2x=t\ =\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{2}{3}\ln\ 1+t\ ^{1/t}}=e^{\frac{2}{3}\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]}=e^{\frac{2}{3}} .$$

**В)** Произведя преобразования, получим

$$\lim_{x\to 0}\ \cos x-\sin x\ ^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ 1-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\ ^{\frac{1}{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x+2\sin x^2\frac{x}{2}}{x}\right)\cdot\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]}=e^{-\ln e}=\frac{1}{e} .$$

Здесь воспользовались равенством из условия, свойствами предела и вторым замечательным пределом.

**4.20** Используя свойства пределов, известные пределы, предел $\lim\limits_{x\to\varphi_0}\cos x=\cos\varphi_0$, вычислить:

$$\text{А) }\lim_{x\to1}\left(1-\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}\textbf{; В) }\lim_{x\to2}\frac{2^x-4}{\sin\pi x}.$$

*Решение.*

**А)** Преобразовывая функцию, будем иметь:

$$\lim_{x\to1}\left(1-\sin\pi x\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=\lim_{x\to1}\left(1-\sin\pi x\right)^{\frac{1}{-\sin\pi x}\cdot\left(-\cos\pi x\right)}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to1}\cos\pi x\cdot\ln\left[\lim\limits_{x\to1}\left(1-\sin\pi x\right)^{-\frac{1}{\sin\pi x}}\right]}=e^{1\cdot\ln e}=e.$$

Мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to1}\cos\pi x=\cos\left(-\pi\right)=-1$ и равенствами из предыдущей задачи.

**В)**. Преобразовав функцию, получим

$$\lim_{x\to2}\frac{2^x-4}{\sin\pi x}=\lim_{x\to2}\left(\frac{2^x-4}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\sin\pi x}\right)=\lim_{x\to2}\frac{2^x-4}{x-2}\cdot\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sin\pi x}.$$

Найдем первый из пределов произведения:

$$\lim_{x\to2}\frac{2^x-4}{x-2}=4\lim_{x\to2}\frac{2^{x-2}-1}{x-2}=4\lim_{t\to0}\frac{2^t-1}{t}=$$

$$=\left[\!\left[\begin{array}{l}2^t-1=u\\ t=\log_2(1+u)\end{array}\right]\!\right]=4\lim_{u\to0}\frac{u}{\log_2(1+u)}=4\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\ln2=$$

$$=4\ln2\cdot\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\left[\!\left[\begin{array}{l}(1+u)^{\frac{1}{u}}=v\\ u\to0\Rightarrow v\to e\end{array}\right]\!\right]=4\ln2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{v\to e}\ln v}=4\ln2.$$

Вычислим второй предел:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sin\pi x}=\left[x-2=t\right]=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin(\pi t+2\pi)}=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{t\to0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}=\frac{1}{\pi}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}=\dfrac{4}{\pi}\ln2$.

**Лабораторная работа № 9**
**Асимптотическое поведение функций. Вычисление пределов**

*Необходимое понятие и теоремы:* бесконечно малые функции при $x \to a$, сравнение бесконечно малых функций, асимптотические равенства, эквивалентные бесконечно малых, применение асимптотических равенств для вычисления пределов.

*Литература:* [1] с. 181-184, 216-218, [2] с.72-77, [3] с. 102-105, 136-137.

**1** Определить порядок относительно x бесконечно малой при $x \to 0$ (при $x \to 0+$) функций $g(x)$:

| № | A | B |
|---|---|---|
| | $g(x)$ | $g(x)$ |
| 1.1 | $x^3 + x$ | $e^{\sqrt{x}} - 1$ |
| 1.2 | $\dfrac{4x^5}{1+x^2}$ | $e^{\sin x} - 1$ |
| 1.3 | $\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{\sin x}$ | $e^{x^2} - \cos^2 x$ |
| 1.4 | $\sqrt{x} tg \dfrac{\pi x}{2}$ | $\ln(1 + x\sin\sqrt{x})$ |
| 1.5 | $\cos x - \sqrt[3]{\cos x}$ | $\dfrac{\cos \pi x - 1}{\sin \sqrt{x}}$ |
| 1.6 | $x \sin^2 x$ | $\arcsin(\sqrt{1+x} - 1)$ |
| 1.7 | $\arcsin x^2$ | $tgx - \sin x$ |
| 1.8 | $\sqrt{x^2+1} - 1$ | $e^{tgx} - x$ |
| 1.9 | $\arcsin(2\sin x)$ | $\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$ |
| 1.10 | $e^{\cos x} - e$ | $\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x})$ |
| 1.11 | $\dfrac{x(x+1)}{1+2x}$ | $e^{x^2} - 1$ |
| 1.12 | $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ | $e^x - \cos x$ |
| 1.13 | $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 1$ | $1 - \cos x$ |
| 1.14 | $\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$ | $\ln(1 + \sin^2 x)$ |
| 1.15 | $\sin\sqrt{1-x} - \sin 1$ | $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sin x}$ |
| 1.16 | $\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}$ | $\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1.17 | $1-\cos 2x^2$ | $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ |
| 1.18 | $\arccos(\sqrt{1+x})$ | $\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}$ |
| 1.19 | $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}$ | $\arccos(\sqrt{1+x^2})$ |
| 1.20 | $\ln(1+\sqrt{x})$ | $\arcsin(1-\cos x)$ |

**2** Для бесконечно малых при $x\to a$ (при $x\to a+0$) функций $f(x)$ и $g(x)$ выяснить, какие из следующих соотношений верны: 1) $f(x)=O(g(x))$, 2) $g(x)=O(f(x))$, 3) $f(x)=o(g(x))$, 4) $g(x)=o(f(x))$, 5) $f(x)\sim g(x)$, 6) $f(x)\asymp g(x)$:

| № | a | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|
| 2.1 | 0 | $\sin x$ | $\arcsin x$ |
| 2.2 | 1 | $tg\pi x$ | $\sqrt{x-1}$ |
| 2.3 | 0 | $\ln(1+\sin x)$ | $\sqrt{1-\cos x}$ |
| 2.4 | $\infty$ | $\sqrt{x^2+1}-\lvert x\rvert$ | $\frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$ |
| 2.5 | 0 | $\arcsin x$ | $\sqrt{x}$ |
| 2.6 | 0 | $\ln(1+\sqrt{x})$ | $\sin\sqrt{x}$ |
| 2.7 | 0 | $\frac{1-\cos 2x}{tgx}$ | $\ln(1+x)$ |
| 2.8 | 1 | $e^{x^2}-1$ | $\sin x^2$ |
| 2.9 | 0 | $e^{\sin x}-1$ | $\ln(1-x)$ |
| 2.10 | 2 | $\frac{2^x-4}{\sqrt{x}}$ | $\sin\sqrt{x}$ |
| 2.11 | 1 | $\cos\frac{\pi}{2}x$ | $\sin(x-1)$ |
| 2.12 | 0 | $\ln(1+x^2)$ | $2x$ |
| 2.13 | $+\infty$ | $\sqrt{x^2-1}-x$ | $\frac{1}{x}$ |
| 2.14 | 0 | $x^2 actgx$ | $\sin^3 x$ |
| 2.15 | 1 | $\sqrt{x-1}\arccos x$ | $\sqrt{(x-1)^3}$ |
| 2.16 | 1 | $\ln(1-\sin^2 x)$ | $tg^2 x$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.17 | 0 | $\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin x}$ | $\sin\dfrac{x}{2}$ |
| 2.18 | $\dfrac{\pi}{2}$ | $\arccos\dfrac{2}{\pi}x$ | $\sin 2x$ |
| 2.19 | 0 | $\arccos\dfrac{1-x}{1+x}$ | $\sin^2 x$ |
| 2.20 | 0 | $\arccos\dfrac{1-x}{1+x}$ | $\sqrt{1-\cos x}$ |

**3** Для бесконечно малой при $x \to a$ (при $x \to a+0$) функции $f(x)$ найти бесконечно малую при $x \to a$ функцию вида $g(x) = cx^{\alpha}$ $(c, \alpha \in \mathbb{R})$ такую что: 1) $f(x) \asymp g(x)$, 2) $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$:

| № | a | A | B |
|---|---|---|---|
| | | $f(x)$ | $f(x)$ |
| 3.1 | 0 | $e^x - 1$ | $\arcsin^2 x$ |
| 3.2 | 0 | $\sqrt{1+x} - 1$ | $\arcsin\sqrt{x}$ |
| 3.3 | 1 | $\sqrt[3]{x} - 1$ | $\arcsin\sqrt{x-1}$ |
| 3.4 | 1 | $\ln^2(2-x)$ | $e^{2x} - e^2$ |
| 3.5 | 0 | $\sqrt[5]{1-x} - 1$ | $\sin^{10}\sqrt{x}$ |
| 3.6 | 0 | $e^{\ln(1-x)} - 1$ | $\arcsin\sqrt[3]{x}$ |
| 3.7 | 0 | $\sqrt[3]{1-\cos x}$ | $\sqrt[4]{1-x} - 1$ |
| 3.8 | 0 | $2^x - 1$ | $\ln(1+\dfrac{x^2}{2})$ |
| 3.9 | 2 | $2^x - 4$ | $\ln(3-x)$ |
| 3.10 | 0 | $sh^2 x$ | $\ln(2-\cos x)$ |
| 3.11 | 0 | $\ln(1-x)$ | $\sin(2\arcsin x)$ |
| 3.12 | 0 | $\sqrt[3]{1+x} - 1$ | $arctg\sqrt{x}$ |
| 3.13 | 0 | $\sqrt[4]{1+x} - 1$ | $\arcsin(\sin^2 x)$ |
| 3.14 | 1 | $\sqrt{\ln x}$ | $e^{\sin x} - e^{\sin 1}$ |
| 3.15 | 0 | $\sqrt[8]{1+2x} - 1$ | $tg^2\sqrt{x}$ |
| 3.16 | 0 | $e^{x^2} - \cos x$ | $\sqrt{1-\cos x}$ |
| 3.17 | 0 | $2^{x^2} - 1$ | $\ln(1-\sin x)$ |
| 3.18 | 0 | $\ln(2-e^x)$ | $\sin(2\arcsin x)$ |
| 3.19 | 3 | $3^x - 27$ | $sh(x-3)$ |

| 3.20 | 0 | $1-chx$ | $2^{\ln(1-x)}-1$ |
|---|---|---|---|

**4** Вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

| № | a | A | B |
|---|---|---|---|
| | | $f(x)$ | $f(x)$ |
| 4.1 | 0 | $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+6x)}$ | $\dfrac{e^{2x}-1}{(1+5x)^6-1}$ |
| 4.2 | 0 | $\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$ | $\dfrac{arctg 3x}{(1+4x)^4-1}$ |
| 4.3 | 1 | $\dfrac{\ln(2-x)}{\arcsin(1-x)}$ | $\dfrac{2^x-2}{\sin(x-1)}$ |
| 4.4 | 0 | $\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$ | $\dfrac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1}$ |
| 4.5 | 3 | $\dfrac{\ln(4-x)}{2^x-8}$ | $\dfrac{\arcsin\sqrt{3-x}}{e^{3-x}-1}$ |
| 4.6 | 1 | $\dfrac{\sqrt[3]{2-x}-1}{\ln(2-x)}$ | $\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\ln x}$ |
| 4.7 | 0 | $\dfrac{\ln(1+4x)}{\sqrt{1+2x}-1}$ | $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\ln(1+4x)}$ |
| 4.8 | 0 | $\dfrac{arctg 5x}{\ln(1+x)}$ | $\dfrac{2^x-1}{\sin 4x-\sin 6x}$ |
| 4.9 | 0 | $\dfrac{tg\dfrac{x}{1+x^2}}{\arcsin^2\sqrt{x}}$ | $\dfrac{3^x-1}{\ln(1-x)}$ |
| 4.10 | 0 | $\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$ | $\dfrac{(\arcsin\sqrt{x})^4}{tg^2 2x}$ |
| 4.11 | 0 | $\dfrac{\sin x}{\ln(1+2x)}$ | $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^6}}{\ln(1+5x)}$ |
| 4.12 | 0 | $\dfrac{e^{3x}-1}{arctg 2x}$ | $\dfrac{2^{2x}-1}{\sin\dfrac{x}{2}}$ |
| 4.13 | 0 | $\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x+\sin x}$ | $\dfrac{(\arcsin x)^2}{tg^2 4x}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.14 | 2 | $\dfrac{2^x-4}{\ln(3-x)}$ | $\dfrac{\sqrt[3]{5-2x}-1}{\sin(x-2)}$ |
| 4.15 | 0 | $\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{(1+3x^4)^5-1}$ | $\dfrac{\ln(1+5x)}{\arcsin 3x}$ |
| 4.16 | 0 | $\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 5x-x}$ | $\dfrac{tg 2x-\sin 4x}{\ln(1+8x)}$ |
| 4.17 | 0 | $\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$ | $\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$ |
| 4.18 | 1 | $\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x}-1}$ | $\dfrac{\arcsin x}{arctgx}$ |
| 4.19 | 0 | $\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{\ln(1+4x)}$ | $\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{tg\dfrac{x}{1+x}}$ |
| 4.20 | 1 | $\dfrac{\ln(2-x)}{2^x-2}$ | $\dfrac{\arcsin(1-x)}{\ln x}$ |

**Решение типичных задач**

**1.20** Определить порядок относительно $x$ бесконечно при $x\to 0+$ функции:

**A.** $g(x)=\ln(1+\sqrt{x})$

***Решение.*** Возьмем функцию $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$. Поскольку

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\left[\sqrt{x}=t\right]=\lim_{t\to 0+0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

по порядок бесконечно малой функции $g(x)$ равен $\frac{1}{2}$.

**B.** $g(x)=\arcsin(1-\cos x)$

***Решение***. Полагаем $f(x)=x^2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2\sin^2\frac{x}{2})}{x^2}=\left[\begin{array}{l}2\sin^2\dfrac{x}{2}=t\\ x=2\arcsin^2\dfrac{t}{\sqrt{2}}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{4\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}.$$

Вычислили отдельно каждый из полученных пределов.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t^2}{t^2}=\left[u=t^2\right]=\lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u}=\quad u=\sin x\quad=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\arcsin^2\frac{t}{\sqrt{2}}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}}\,\frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}}\sqrt{2}=\sqrt{2}\,.$$

Последнее равенство получено с учетом предыдущих рассуждений. Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, т.е. порядок $g(x)$ равен 2.

**2.20** Для бесконечно малых при x→0 функций

$$f(x)=\arccos\frac{1-x}{1+x},\ \ g(x)=\sqrt{1+\cos x}$$

Выяснить какие из соотношений 1)-6) верны.

***Решение.*** Покажем, что:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=0\,.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=2\sqrt{2}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arccos\frac{1-x}{1+x}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-x}{1+x}=\cos t\\ x=\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\frac{t}{4}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0=0$$

Из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ согласно определению следует, что $g(x)=o(f(x))$, т.е. верно 4) и не выполняются соотношения 1), 3), 5), 6). Из 4) следует справедливость 2), так как из $g(x)=o(f(x))\Rightarrow g(x)=O(f(x))$. Итак верно только соотношение 2) и 4).

**3.20** Для бесконечно малой при $x\to 0$ функции $f(x)$ найти такую $g(x)=cx^{\alpha}$, что: 1) $f(x)\asymp g(x)$, 2) $f(x)\sim g(x)$ при $x\to 0$:

**А.** $f(x)=1-chx$

***Решение.*** По определению $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Возьмем $g(x)=x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-chx}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x+1-e^{-x}}{x}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=-\frac{1}{2}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Исходя следует, что $f(x)\asymp x$ при $x\to 0$. Учитывая равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-chx}{-\frac{1}{2}x}=1$,

Получим, что $f(x)\sim -\frac{1}{2}x$, при $x\to 0$.

**4.20** Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

**А.** $f(x)=\frac{\ln(2-x)}{2^x-2}$

***Решение.*** Применяя преобразование функции, получим

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{2^x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-(x-1))}{x-1}\frac{x-1}{2(2^{x-1}-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-(x-1))}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2^{x-1}-1}$$

так как $\ln(1+t)\asymp t$, $2t-1\asymp t\cdot\ln 2$ при $t\to 0$, то

$$I=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2^{x-1}-1}=-\frac{1}{2\ln 2}$$

**В.** $f(x)=\dfrac{\arcsin(x-1)}{\ln x}$

***Решение.*** Преобразовывая функцию, получим

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\arcsin(x-1)}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(1+(x-1))}$$

так как $\arcsin t\asymp t$, $\ln(1+t)\asymp t$ при $t\to 0$, то

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)}=1.$$