## Введение.

Лабораторный практикум по математическому анализу составлен в соответствии с действующей программой по данной дисциплине для математических специальностей университетов. Настоящее пособие разбито на 4 части по семестрам. Первая часть «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» содержит 17 лабораторных работ по следующим разделам : теория пределов, дифференциальное исчисление, приложения дифференциального исчисления, которые излагаются в 1 семестре обучения. Каждая лабораторная работа содержит наборы заданий с примерами решения типовых задач. Нумерация таблиц и рисунков сквозная, нумерация заданий своя в каждой лабораторной работе. При составлении лабораторного практикума авторы использовали литературу, список которой приводится в конце пособия. Материал пособия подготовили:

1 – 3 лабораторные работы составил Казимиров Г.Н.;

4 – 6, 16, 17 лабораторные работы составили Парукевич И.В., Лабыч Ю.А.;

7 – 9 лабораторные работы составил Старовойтов А.П.;

10 – 12 лабораторные работы составил Гаврилюк А.В.;

13 – 15 лабораторные работы составила Кульбакова Ж.Н.

Лабораторный практикум по математическому анализу предназначен, с одной стороны, для организации учебного процесса дневного отделения математического факультета по специальностям 1-31 03 01 02 «Математика», 1-31 03 03-01 «Прикладная математика (научно-производственная деятельность)», 1-31 03 03-02 «Прикладная математика (научно-педагогическая деятельность)», 1-31 03 06 01 «Экономическая кибернетика (математические методы в экономике)». С другой стороны, лабораторный практикум может быть использован при проведении практических занятий и формирования индивидуальных заданий студентам разных форм обучения.

## Лабораторная работа №1
# Элементы теории множеств и математической логики

*Необходимые понятия и теоремы:* операции над множествами, равенство множеств, декартово произведение множеств, высказывания и формулы алгебры высказываний, таблица истинности, кванторы, важнейшие тавтологии.
*Литература:* [1] с. 5 – 16, [2] с. 13- 23, [3] с. 9 – 24.

**1** Составьте подмножества множества *A* элементами которых являются натуральные, целые, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа и числа кратные 2

| № | *A* | № | *A* |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $\left\{-20;-1;\frac{3}{4};2;0\right\}$ | 1.11 | $-12;0;21;23;27$ |
| 1.2 | $\left\{-10;-\frac{3}{5};0;2;13;7\right\}$ | 1.12 | $2,5;2,6;2,7;2,8;2,9;3$ |
| 1.3 | $\left\{1;2;3;17;\frac{2003}{10}\right\}$ | 1.13 | $2;4;6;8;10;12;14;16;18$ |
| 1.4 | $\left\{0;1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$ | 1.14 | $;3;7;9;11,13;15;17$ |
| 1.5 | $2,5;3,5;6,7;12$ | 1.15 | $-3;3;-4;4;-5;5;-6;6$ |
| 1.6 | $-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2$ | 1.16 | $\left\{;\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$ |
| 1.7 | $\left\{-7;-5;-3;-1;0;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7}\right\}$ | 1.17 | $\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$ |
| 1.8 | $\left\{-\frac{9}{10};-\frac{8}{10};-\frac{7}{10};-\frac{6}{10}\right\}$ | 1.18 | $\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$ |
| 1.9 | $24;25;26;27;28$ | 1.19 | $\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$ |
| 1.10 | $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{1}{8}\right\}$ | 1.20 | $\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$ |

**2** Найти пересечение, объединение, разность множеств *A* и *B*

| № | *A* | *B* | № | *A* | *B* |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.1 | $2;4;6;8;10;\ldots$ | $4;8;12;16;20;\ldots$ | 2.11 | $-10;-100;-1000;\ldots$ | $-10;-20;-30;\ldots$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.2 | $3;6;9;12;15;\ldots$ | $9;18;27;36;\ldots$ | 2.12 | $-4;-8;-12;-16;-20;\ldots$ | $-8;-16;-24;\ldots$ |
| 2.3 | $4;8;12;16;20;\ldots$ | $8;16;24;\ldots$ | 2.13 | $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$ | $\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16}\ldots\right\}$ |
| 2.4 | $5;10;15;20;\ldots$ | $10;20;30;\ldots$ | 2.14 | $\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27}\ldots\right\}$ | $\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$ |
| 2.5 | $6;12;18;24;\ldots$ | $3;6;9;12;15;\ldots$ | 2.15 | $0,1;0,01;0,001;\ldots$ | $0,1;0,2;0,3;\ldots$ |
| 2.6 | $8;16;24;\ldots$ | $2;4;6;8;10;\ldots$ | 2.16 | $-1;-2;-3;-4;\ldots$ | $-1;-3;-5;-7;\ldots$ |
| 2.7 | $9;18;27;\ldots$ | $3;6;9;12;15;\ldots$ | 2.17 | $-5;-10;-15;-20;\ldots$ | $-10;-100;-1000;\ldots$ |
| 2.8 | $10;100;1000;\ldots$ | $10;20;30;\ldots$ | 2.18 | $-5;-10;-15;-20;\ldots$ | $-10;-20;-30;\ldots$ |
| 2.9 | $2;4;6;8;10;\ldots$ | $2;4;8;16;\ldots$ | 2.19 | $\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$ | $\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$ |
| 2.10 | $3;6;9;12;15;\ldots$ | $1;3;5;7;9;\ldots$ | 2.20 | $0,1;0,2;0,3;\ldots$ | $\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$ |

**3** Выяснить, в каком из соотношений $\subset, \supset, =$ находятся множества A и B?

| № | A | B | № | A | B |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.1 | $\mathbf{Z} \setminus \{-1;\ 0\}$ | $\mathbf{N} \cup \{0\}$ | 3.11 | $[0;1] \cap \mathbf{Q}$ | $[0;2] \setminus \mathbf{Z}$ |
| 3.2 | $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}$ | $\mathbf{Q} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$ | 3.12 | $[0;1] \cap (\{1\} \cup \{0\})$ | $([0;1] \setminus \{1\}) \cup \{0\}$ |
| 3.3 | $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ | $\mathbf{Q} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$ | 3.13 | $([0;2] \setminus [0;1]) \cap [1,3]$ | $([0;2] \cap [1;3]) \setminus [0;1]$ |
| 3.4 | $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N}$ | $\mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$ | 3.14 | $\mathbf{R} \cap \mathbf{Z}$ | $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ |
| 3.5 | $\mathbf{Z} \cap \mathbf{Q}$ | $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N}$ | 3.15 | $(-\infty;0] \cap \mathbf{Z}$ | $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ |
| 3.6 | $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ | $\mathbf{Q}$ | 3.16 | $(A \cap B) \cup C$ | $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ |
| 3.7 | $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ | $\mathbf{Z}$ | 3.17 | $(A \setminus B) \cap C$ | $(A \cap C) \setminus B$ |
| 3.8 | $\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}$ | $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ | 3.18 | $A \setminus B$ | $A \setminus (A \cap B)$ |
| 3.9 | $(-\infty;0)$ | $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ | 3.19 | $A$ | $(A \cap C) \cup (A \setminus B)$ |
| 3.10 | $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ | $(-\infty;0] \cap \mathbf{Z}$ | 3.20 | $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ | $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ |

**4** Найти декартово произведение множеств $A$ и $B$. Изобразить на плоскости $A \times B$.

| № | A | B | № | A | B |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.1 | [0;1] | [0;1] | 4.11 | $(-\infty;+\infty)$ | $[0;+\infty)$ |
| 4.2 | [0;2] | [-1;1] | 4.12 | $(-\infty;+\infty)$ | $(-\infty;0)$ |
| 4.3 | (0;3) | [1;2) | 4.13 | $(0;+\infty)$ | $(-\infty;+\infty)$ |
| 4.4 | (1;2] | (3;4] | 4.14 | $(-\infty;0]$ | $(-\infty;+\infty)$ |
| 4.5 | {1,2,3} | {3,4,5} | 4.15 | $(-\infty;+\infty)$ | [0;1] |
| 4.6 | {1,2,5} | {3,6,7} | 4.16 | [0;2] | $(-\infty;+\infty)$ |
| 4.7 | $[0;+\infty)$ | $(-\infty;0]$ | 4.17 | $[0;1]\cup[3;4]$ | [2;5] |
| 4.8 | $(-\infty;0)$ | $(-\infty;0)$ | 4.18 | $[-1;0]\cup[1;2]$ | $[0;+\infty)$ |
| 4.9 | $(-\infty;0]$ | $[0;+\infty)$ | 4.19 | $\mathbf{N}$ | $(-\infty;+\infty)$ |
| 4.10 | $[0;+\infty)$ | $(0;+\infty)$ | 4.20 | $\mathbf{N}$ | $\mathbf{Z}$ |

**5** Каким из знаков $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ связаны высказывания $A$ и $B$. Докажите это. Является ли $A$ необходимым, достаточным, необходимым и достаточным для $B$? Здесь $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac$.

| № | $A$ | $B$ | № | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | $f$ принимает только положительные значения | $a>0$ | 5.11 | множеством значений $f$ является $[-\frac{D}{4a};+\infty)$ | $a>0$ |
| 5.2 | $f$ принимает только отрицательные значения | $a<0$ | 5.12 | множеством значений $f$ является $(-\infty;-\frac{D}{4a}]$ | $a<0$ |
| 5.3 | $f$ принимает только неотрицательные значения | $D\le 0$ | 5.13 | уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня | $-\frac{b}{a}>0$ |
| 5.4 | $f$ принимает только положительные значения | $a>0$ и $D<0$ | 5.14 | уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня | $-\frac{b}{a}<0$ |
| 5.5 | $f$ принимает только отрицательные значения | $a<0$ и $D<0$ | 5.15 | уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня | $-\frac{b}{a}>0$ и $\frac{c}{a}>0$ |
| 5.6 | $f$ принимает только неотрицательные значения | $a>0$ и $D\le 0$ | 5.16 | уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня | $-\frac{b}{a}<0$ и |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\frac{c}{a}>0$ |
| 5.7 | $f$ принимает только неположительные значения | $a<0$ и $D\le 0$ | 5.17 | уравнение $f(x)=0$ имеет 1 положительный и 1 отрицательный корень | $\frac{c}{a}<0$ |
| 5.8 | $f$ принимает положительные и отрицательные значения | $D>0$ | 5.18 | уравнение $f(x)=0$ имеет 2 положительных корня | $-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$ |
| 5.9 | множеством значений $f$ является $[-2;+\infty)$ | $a>0$ | 5.19 | уравнение $f(x)=0$ имеет 2 отрицательных корня | $-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{a}>0$ и $D>0$ |
| 5.10 | множеством значений $f$ является $(-\infty;4]$ | $a<0$ | 5.20 | уравнение $f(x)=0$ имеет неотрицательные корни | $-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$ |

**6** Записать с помощью кванторов высказывание *A* и его отрицание

| № | *A* | № | *A* |
|---|---|---|---|
| 6.1 | все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x\ge m$ | 6.11 | в числовом множестве $X$ существует элемент $x_0$ такой, что все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x\ge x_0$ |
| 6.2 | все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x\le M$ | 6.12 | в числовом множестве $X$ существует элемент $x_0$ такой, что все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x\le x_0$ |
| 6.3 | существует число $M$ такое, что все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x\le M$ | 6.13 | во всяком подмножестве $B$ числового множества $X$ существует элемент $x_0$ такой, что все элементы $x$ множества $B$ удовлетворяют условию $x\le x_0$ |
| 6.4 | существует число $m$ такое, что все элементы $x$ число- | 6.14 | во всяком подмножестве $B$ числового множества $X$ существует эле- |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | вого множества $X$ удовлетворяют условию $x \geq m$ | | мент $x_0$ такой, что все элементы $x$ множества $B$ удовлетворяют условию $x \geq x_0$ |
| 6.5 | существуют числа $m$ и $M$ такие, что все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $m \leq x \leq M$ | 6.15 | все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент $x'$ из множества $X$ такой, что $x' > M'$ |
| 6.6 | существуют элементы $x$ числового множества $X$, удовлетворяющие условию $x \geq m$ | 6.16 | все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент $x'$ из множества $X$ такой, что $x' < m'$ |
| 6.7 | существуют элементы $x$ числового множества $X$, удовлетворяющие условию $x \leq M$ | 6.17 | существует число $M$ такое, что все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x \leq M$ и для любого числа $M' < M$ существует элемент $x'$ из множества $X$ такой, что $x' > M'$ |
| 6.8 | для любого числа $M$ существует элемент $x$ числового множества $X$ такой, что $x > M$ | 6.18 | существует число $m$ такое, что все элементы $x$ числового множества $X$ удовлетворяют условию $x \geq m$ и для любого числа $m' > m$ существует элемент $x'$ из множества $X$ такой, что $x' < m'$ |
| 6.9 | для любого числа $m$ существует элемент $x$ числового множества $X$ такой, что $x < m$ | 6.19 | Существует число $c$ такое, что любой элемент $x$ числового множества $X$ удовлетворяет условию $x \leq c$ и любой элемент $y$ числового множества $Y$ удовлетворяет условию $y \geq c$ |
| 6.10 | для любых чисел $m$ и $M$ существуют элементы $x$ и $y$ числового множества $X$ такие, что $x < m$ и $y > M$ | 6.20 | Для любых непустых числовых множеств $X$ и $Y$ таких, что любой элемент $x$ из множества $X$ меньше либо равен любого элемента $y$ из множества $Y$, существует число $M$ такое, что $x \leq M \leq y$ для любых элементов $x$ из $X$ и $y$ из $Y$ |

**Решение типовых примеров**

**1.20** $A=\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$. Множество *B* называется подмножеством множества *A*, если любой элемент множества *B* является элементом множества *A*. Так как множество натуральных чисел ***N***$=\ 1;2;3;4;\ldots\ $, то подмножеством натуральных чисел для *A* будет $\ 22;23\ $. Множество целых чисел ***Z***$=\ \ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\ $. Поэтому подмножеством целых чисел для *A* будет $\ 22;23\ $. Нечётными называются числа вида $2n+1$, где $n\in$ ***Z***. Поэтому подмножеством нечётных чисел для *A* будет $\ 23\ $, поскольку $23=2\cdot 11+1$. Чётными называются числа вида $2n$, где $n\in$ ***Z***. Поэтому подмножеством чётных чисел для $A$ будет $\ 22\ $, поскольку $22=2\cdot 11$. Отрицательными называются числа, расположенные слева от нуля на числовой прямой. Таких во множестве *A* нет. Поэтому и подмножеств, состоящих из этих чисел для *A* нет. Положительными называются числа, расположенные справа на числовой прямой. Все элементы множества *A* являются положительными числами. Поэтому в качестве подмножества положительных чисел для *A* можно взять само множество *A*. Натуральное число называется кратным 2, если оно делится на 2 нацело. Поэтому подмножеством чисел, кратных 2 для *A* будет $\ 22\ $.

**2.20** $A=\ 0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\ $, $B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$. Пересечением множеств *A* и *B* называется множество $A\cap B=\ x\,|\,x\in A$ и $x\in B\ $. Поскольку $0{,}1=\frac{1}{10}$, а все остальные элементы множества *B* меньше любого элемента множества *A*, то других общих элементов для *A* и *B* нет и следовательно в данном случае $A\cap B=\left\{\frac{1}{10}\right\}$. Объединением множеств *A* и *B* называется множество $A\cup B=\ x\,|\,x\in A$ или $x\in B\ $. Таким образом в объединение множеств *A* и *B* входят все элементы как множества *A*, так и множества *B*. В нашем случае $A\cup B=\left\{0;\frac{1}{10};0{,}2;\frac{1}{20};0{,}3;\frac{1}{30};0{,}4;\frac{1}{40};\ldots\right\}$. Разностью множеств *A* и *B* называется множество $A\setminus B=\ x\,|\,x\in A$ и $x\notin B\ $. В нашем случае только элемент 0,1 из множества *A* принадлежит *B*. Поэтому $A\setminus B=\ 0;0{,}2;0{,}3;0{,}4;\ldots$

**3.20** Докажем, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Два множества равны, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Покажем, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Пусть $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Тогда $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$. Если $x \in A \setminus B$, то $x \in A$ и $x \notin B$. Из того, что $x \in A$ следует, что $x \in A \cup B$, а из того, что $x \notin B$ следует, что $x \notin A \cap B$. Значит $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Аналогично получаем, что $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, если $x \in B \setminus A$.

Докажем теперь, что $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Пусть $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \notin A \cap B$. Из того, что $x \in A \cup B$ следует, что $x \in A$ или $x \in B$, а из того, что $x \notin A \cap B$ следует, что $x \notin A$ или $x \notin B$. Тогда, если $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$, а, если $x \in B$ и $x \notin A$, то $x \in B \setminus A$. Других ситуаций быть не может. Итак, $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$. Значит $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Равенство $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ доказано.

**4.20** $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}$. Декартовым произведением множеств $A$ и $B$ называется множество $A \times B = (x, y) | x \in A, y \in B$. В нашем случае $A \times B = (x, y) | x \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{Z}$. Изобразим множество $A \times B$ на плоскости

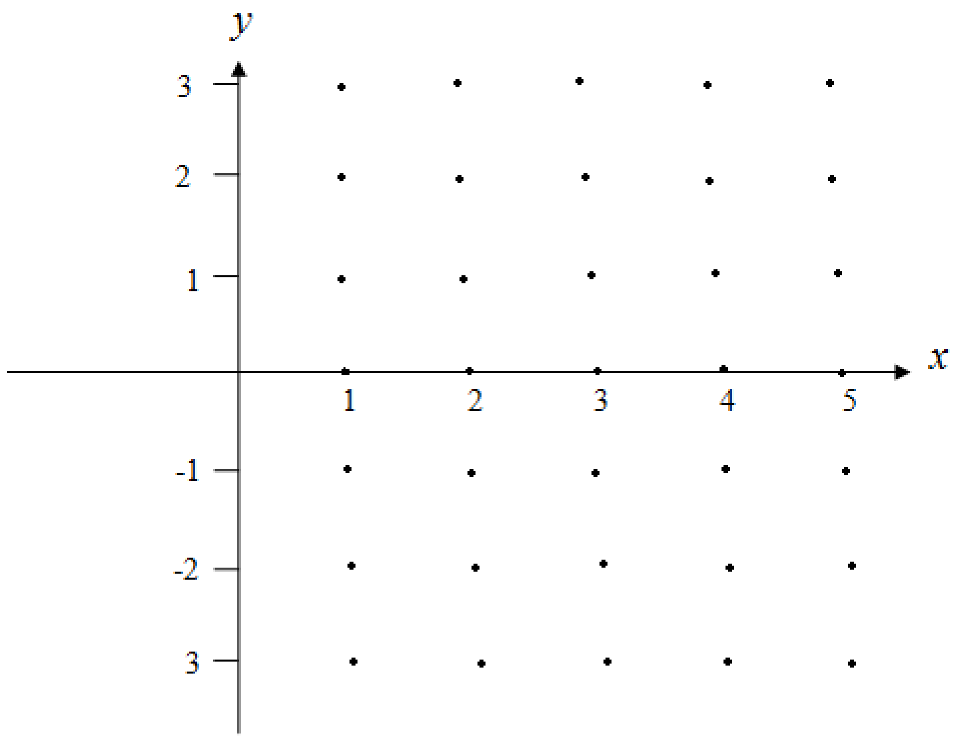


Рисунок 1 – Множество $A \times B = (x, y) | x \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{Z}$

**5.20** $A$={ уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет неотрицательные корни }, $B$={ $-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$ }.

Докажем, что из $A$ не следует $B$. Рассмотрим уравнение $x^2+3x-4=0$. Оно имеет неотрицательный корень $x=1$. Однако $-\frac{b}{a}=\frac{-3}{1}=-3<0$.

Докажем, что $B\Rightarrow A$. Пусть $-\frac{b}{a}\ge 0$, $\frac{c}{a}\ge 0$ и $D\ge 0$. Из условия $D\ge 0$ следует, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни. Из теоремы Виета следует, что их произведение равно $\frac{c}{a}$ и поскольку $\frac{c}{a}\ge 0$, то либо оба корня имеют одинаковый знак либо один из них равен нулю. Если один из корней равен нулю, то он и является неотрицательным корнем, т.е. $A$ выполнено. Если же оба корня имеют одинаковый знак, то из теоремы Виета и условия $-\frac{b}{a}\ge 0$ следует, что их сумма $x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ge 0$. Поэтому они оба положительные. Значит и в этом случае уравнение имеет неотрицательный корень. Итак импликация $B\Rightarrow A$ доказана.

**6.20** $A$={Для любых непустых числовых множеств $X$ и $Y$ таких, что любой элемент $x$ из множества $X$ меньше либо равен любого элемента $y$ из множества $Y$, существует число $M$ такое, что $x\le M\le y$ для любых элементов $x$ из $X$ и $y$ из $Y$}. Запишем с помощью кванторов высказывание $A$ и его отрицание $\neg A$:

$$A=\ \forall X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\to x\le y\exists M:x\le M\le y\forall x\in X,\forall y\in Y$$

$$\neg A=\ \exists X,Y:\forall x\in X,\forall y\in Y\to x\le y\wedge\forall M\exists x\in X,\exists y\in Y:x>M\vee y<M$$

Заметим, что высказывание $A$ представляет собой теорему об отделимости числовых множеств и выполняется всегда. Поэтому высказывание $\neg A$ ложно.

## Лабораторная работа №2
# Отображения и числовые функции

*Необходимые понятия и теоремы:* отображения, числовые функции, образ, прообраз, график, обратное отображение, композиция отображений
*Литература:* [1] с. 16 – 28, [2] с. 23- 36, [3] с. 71 – 84.

**1** Для отображения $y = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты $a,b,c$ так, чтобы оно отображало $X$ на $Y$ ( сюрьекция) и его график проходил через точку $(x_0, y_0)$ или доказать, что таких $a,b,c$ не существует

| № | $X$ | $Y$ | $(x_0;y_0)$ | № | $X$ | $Y$ | $(x_0;y_0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | $\boldsymbol{R}$ | $[0;+\infty)$ | $(0;1)$ | 1.11 | $(-4;5)$ | $(0;8]$ | $(0;3)$ |
| 1.2 | $\boldsymbol{R}$ | $[2;+\infty)$ | $(0;4)$ | 1.12 | $(-3;1]$ | $[1;5]$ | $(0;4)$ |
| 1.3 | $[2;+\infty)$ | $[1;+\infty)$ | $(3;4)$ | 1.13 | $(-\infty;+\infty)$ | $[0;4]$ | $(1;3)$ |
| 1.4 | $[1;+\infty)$ | $(-\infty;0]$ | $(1;0)$ | 1.14 | $(-\infty;0]$ | $(0;8]$ | $(-1;4)$ |
| 1.5 | $\boldsymbol{R}$ | $(-\infty;1]$ | $(0;1)$ | 1.15 | $(0;8)$ | $[1;3]$ | $(1;2)$ |
| 1.6 | $(-\infty;0]$ | $(-\infty;0]$ | $(-3;0)$ | 1.16 | $[4;10]$ | $(1;5)$ | $(5;4)$ |
| 1.7 | $[0;+\infty)$ | $(-\infty;-1]$ | $(2;-1)$ | 1.17 | $(-1;3)$ | $[1;9)$ | $(2;4)$ |
| 1.8 | $[1;6]$ | $[2;8]$ | $(2;4)$ | 1.18 | $(1;5)$ | $(3;8]$ | $(2;4)$ |
| 1.9 | $[2;8]$ | $[-3;9]$ | $(3;5)$ | 1.19 | $(-\infty;1]$ | $(1;5)$ | $(0;3)$ |
| 1.10 | $(-3;8)$ | $(-4;3)$ | $(0;1)$ | 1.20 | $[-2;4)$ | $(-1;3)$ | $(0;0)$ |

**2** Для функции $y = f(x)$ найти образ множества $A$ и прообраз множества $B$

| № | $y = f(x)$ | $A$ | $B$ | № | $y = f(x)$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.1 | $y = 3x^2 + 6x - 1$ | $(-3;5)$ | $(-3;8)$ | 2.11 | $y = e^{x-1}$ | $(-\infty;1)$ | $(0;1)$ |
| 2.2 | $y = -x^2 + 2x + 1$ | $(-4;0)$ | $(-\infty;0]$ | 2.12 | $y = \dfrac{1}{2^{x+1}}$ | $(-\infty;-1)$ | $(0;2]$ |
| 2.3 | $y = \sin x$ | $\left\{\dfrac{\pi}{2}k, k \in Z\right\}$ | $\left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ | 2.13 | $y = \ln(x+2)$ | $(-2;3]$ | $(-\infty;3]$ |
| 2.4 | $y = \cos 2x$ | $\left\{\dfrac{\pi}{2}k, k \in Z\right\}$ | $\left\{\dfrac{1}{2};1\right\}$ | 2.14 | $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}$ | $(-1;4]$ | $[2;5]$ |
| 2.5 | $y = tgx$ | $\left\{\dfrac{\pi}{4}k, k \in Z\right\}$ | $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt{3}\right\}$ | 2.15 | $y = \cos 2x - 1$ | $(-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4})$ | $[-1;0]$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.6 | $y = \cos x$ | $[\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3}]$ | $(-1;-\frac{1}{2}]$ | 2.16 | $y = \sin(x-1)$ | $(1;\frac{3}{2})$ | $(0;\frac{1}{3})$ |
| 2.7 | $y = \cos(-x)$ | $(\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{2})$ | $(0;\frac{\sqrt{2}}{2})$ | 2.17 | $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ | $(0;3)$ | $(-\infty;\log_2 3)$ |
| 2.8 | $y = \lvert x\rvert - 1$ | $[-4;1)$ | $[5;+\infty)$ | 2.18 | $y = \lvert x^2 - 5x + 6\rvert$ | $(0;2,8]$ | $(\frac{1}{8};+\infty)$ |
| 2.9 | $y = \lvert x\rvert + \lvert x-1\rvert$ | $[-3;8]$ | $(1;+\infty)$ | 2.19 | $y = ctg(x+2)$ | $(-1;1)$ | $(\frac{\pi}{4};2\pi)$ |
| 2.10 | $y = \lvert x-1\rvert - 1$ | $[0;1]$ | $(2;4]$ | 2.20 | $y = \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ | $(3;5]$ | $(0;\frac{1}{13})$ |

**3** Найти инъективное, биективное отображение множества *X* в *Y* (доказать инъективность, биективность) или доказать, что такого отображения нет

| № | *X* | *Y* | № | *X* | *Y* |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.1 | **R** | **R** | 3.11 | **R** | $-\pi;\pi)$ |
| 3.2 | $[-1;2]$ | $[-4;8]$ | 3.12 | $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ | **R** |
| 3.3 | $[0;+\infty)$ | $[2;+\infty)$ | 3.13 | (-1;1) | **R** |
| 3.4 | $[3;+\infty)$ | $[0;+\infty)$ | 3.14 | **R** | (-2;2) |
| 3.5 | $[1;+\infty)$ | $(-\infty;2]$ | 3.15 | $(0;\pi)$ | **R** |
| 3.6 | **R** | $(0;+\infty)$ | 3.16 | множество нечётных чисел | **N** |
| 3.7 | **R** | $(-\infty;0)$ | 3.17 | множество чётных чисел | **N** |
| 3.8 | $(-\infty;0)$ | **R** | 3.18 | **N** | **Z** |
| 3.9 | $(-\infty;0)$ | $(0;+\infty)$ | 3.19 | **N** | **Q** |
| 3.10 | **R** | $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ | 3.20 | **N** | (0;1) |

**4** Построить график отображения $y = f(x), x \in X$, $f : X \to Y$. Найти *Y* и обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$, если это возможно или доказать, что его нет

| № | $y=f(x)$ | $X$ | № | $y=f(x)$ | $X$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.1 | $y=2x^2+x-1$ | $[-\frac{1}{4};5]$ | 4.11 | $y=\sin 2x$ | $[0;\pi]$ |
| 4.2 | $y=\sin x$ | $[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$ | 4.12 | $y=\cos 2x$ | $[-\frac{\pi}{4};0]$ |
| 4.3 | $y=\cos x$ | $[\pi;2\pi]$ | 4.13 | $y=ctgx$ | $(\pi;2\pi)$ |
| 4.4 | $y=x^2-4x+3$ | $[3;8]$ | 4.14 | $y=\sin\frac{x}{2}$ | $[-\pi;\pi]$ |
| 4.5 | $y=tgx$ | $[0;\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi]$ | 4.15 | $y=\cos\frac{x}{2}$ | $[0;2\pi]$ |
| 4.6 | $y=\|x-1\|$ | $[1;5]$ | 4.16 | $y=\sin(x-1)$ | $[0;1]$ |
| 4.7 | $y=\|x+1\|$ | $[-2;3]$ | 4.17 | $y=\cos(x+1)$ | $[0;1]$ |
| 4.8 | $y=\|\ln x\|$ | $(0;1]$ | 4.18 | $y=\sin(x+2)$ | $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ |
| 4.9 | $y=e^{\|x\|}$ | $[-1;2]$ | 4.19 | $y=\cos(x-2)$ | $[0;\pi]$ |
| 4.10 | $y=e^{\|x-1\|}$ | $[-1;1]$ | 4.20 | $y=tg(x+1)$ | $[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$ |

**5** Найти следующие композиции: $f(g), g(f), f(f), g(g), f\left(\frac{1}{f^2}\right), \sqrt{f}$ или доказать, что такая композиция невозможна на естественных областях определения функций $f$ и $g$

| № | $f(x)$ | $g(x)$ | № | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | $2^x$ | $x^3$ | 5.11 | $3^{x+1}$ | $\log_3 x-1$ |
| 5.2 | $x^2$ | $\sqrt{x^3}$ | 5.12 | $\arcsin x$ | $\sin x$ |
| 5.3 | $3^x$ | $x^2$ | 5.13 | $\arccos x$ | $\cos x$ |
| 5.4 | $x^2$ | $\sqrt{x}$ | 5.14 | $\cos x$ | $\arccos x$ |
| 5.5 | $10^x$ | $\lg x$ | 5.15 | $\arcsin x$ | $\cos x$ |
| 5.6 | $x^5$ | $x+5$ | 5.16 | $\arccos x$ | $\sin x$ |
| 5.7 | $\sin x$ | $x-1$ | 5.17 | $\arcsin x$ | $e^x$ |
| 5.8 | $\cos x$ | $\ln x$ | 5.18 | $\arccos x$ | $\ln x$ |
| 5.9 | $x+2$ | $\ln(x-2)$ | 5.19 | $\arccos x$ | $\arcsin x$ |
| 5.10 | $e^x$ | $\ln(x-1)$ | 5.20 | $arctgx$ | $\ln x$ |

**Решение типовых примеров**

**1.20** $X=[-2;4)$, $Y=(-1;3)$, $(x_0;y_0)=(0;0)$. Очевидно, что при отображении $y=ax^2+bx+c$ образом промежутка (интервала, полуинтервала, отрезка) будет промежуток (убедиться в этом, нарисовав все возможные случаи) или одна точка. Образом включённого левого конца промежутка будет включённый конец промежутка (убедиться геометрически). Поэтому полуинтервал $[-2;4)$ не может перейти в интервал $(-1;3)$. Значит указанного отображения, а следовательно и чисел $a,b,c$ не существует.

**2.20** $y=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$, $A=(3;5]$, $B=(0;\dfrac{1}{13})$.

Образом множества $A$ при отображении $f$ называется множество $f(A)=\ f(x)|x\in A$ . Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастает на $[0;+\infty)$, то $\forall x_1,x_2\in[0;+\infty): x_1<x_2\to\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$, а функция $y=\dfrac{1}{2^x}$ или $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ убывает на $(-\infty;+\infty)$, то $\dfrac{1}{2^{\sqrt{x_1}}}>\dfrac{1}{2^{\sqrt{x_2}}}$. Поэтому функция $y=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ убывает на $[0;+\infty)$. Отсюда заключаем, что для $f(x)=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ образ $f((3;5])=\left\{\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}|x\in(3;5]\right\}=[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}};\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}})$, поскольку $f(x)=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ не может принять любое значение вне $[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}};\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}})$ при $x\in(3;5]$ ( в силу убывания) и принимает любое значение $a\in[\dfrac{1}{2^{\sqrt{5}}};\dfrac{1}{2^{\sqrt{3}}})$ в точке $x_0=\log_2^2 a\in(3;5]$ (доказать).

Прообразом множества $B$ при отображении $f$ называется множество $f^{-1}(B)=\ x|\,f(x)\in B$ . В нашем случае $f^{-1}((0;\dfrac{1}{13}))=\left\{x\left|\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}\in(0;\dfrac{1}{13})\right.\right\}=$ $=\left\{x\left|0<\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\dfrac{1}{13}\right.\right\}$. Решим неравенство $0<\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}<\dfrac{1}{13}$. Левое неравенство выполняется при всех $x\in[0;+\infty)$ (области определения $f$ ). Правое перепишем в виде $\frac{1}{2^{\sqrt{x}}} < \frac{1}{2^{\log_2 13}}$ или $\sqrt{x} > \log_2 13$ или $x > \log_2^2 13$. Итак $f^{-1}((0;\frac{1}{13})) = (\log_2^2 13; +\infty)$.

**3.20** $X$=**N**, $Y$=(0;1). Рассмотрим отображение $f: X \to Y$, действующее по формуле: $f(x) = \frac{1}{2x}$. Отображение называется инъективным, если оно различные элементы переводит в различные, т.е., если $x_1 \neq x_2$, то и $f(x_1) \neq f(x_2)$. Очевидно, $f$ - инъективно. Отображение $f: X \to Y$ называется биективным или взаимно-однозначным, если оно сюрьективно, т.е. $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$ и инъективно. Докажем, что нет биективного отображения $f$ :**N**→(0;1). Предположим, что такое отображение существует. Тогда оно является сюрьективным и каждому действительному числу из (0;1) соответствует вполне определённый номер $n \in$**N**. Значит, все действительные числа из (0;1) можно записать в порядке возрастания соответствующих им номеров:

$$\alpha_1 = 0,\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)}...$$
$$\alpha_2 = 0,\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\alpha_3^{(2)}...$$
$$\alpha_3 = 0,\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(3)}...$$

Рассмотрим число $\beta = 0,\beta_1\beta_2\beta_3...$ такое, что $\beta_1 \neq \alpha_1^{(1)}, \beta_1 \neq 9, \beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq \alpha_2^{(2)}, \beta_2 \neq 9, \beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq \alpha_3^{(3)}, \beta_3 \neq 9, \beta_3 \neq 0, \ldots$ . Очевидно, число $\beta \in (0;1)$ и не совпадает ни с одним из чисел $\alpha_n, n \in$**N**. Противоречие. И следовательно наше предположение неверно.

На самом деле нами доказано, что (0;1) не является счётным множеством.

**4.20** $y = tg(x+1)$, $X$=$[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$. Если $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\pi}{8}]$, то $x+1 \in [1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\pi}{8}] \subset [0;\frac{\pi}{2})$. Поэтому графиком функции $y = tg(x+1), x \in X$ будет часть графика функции $y = tgx, x \in [1-\frac{\sqrt{2}}{2};1+\frac{\pi}{8}]$, сдвинутая на 1 влево. Нарисуем эти графики (рис.2).

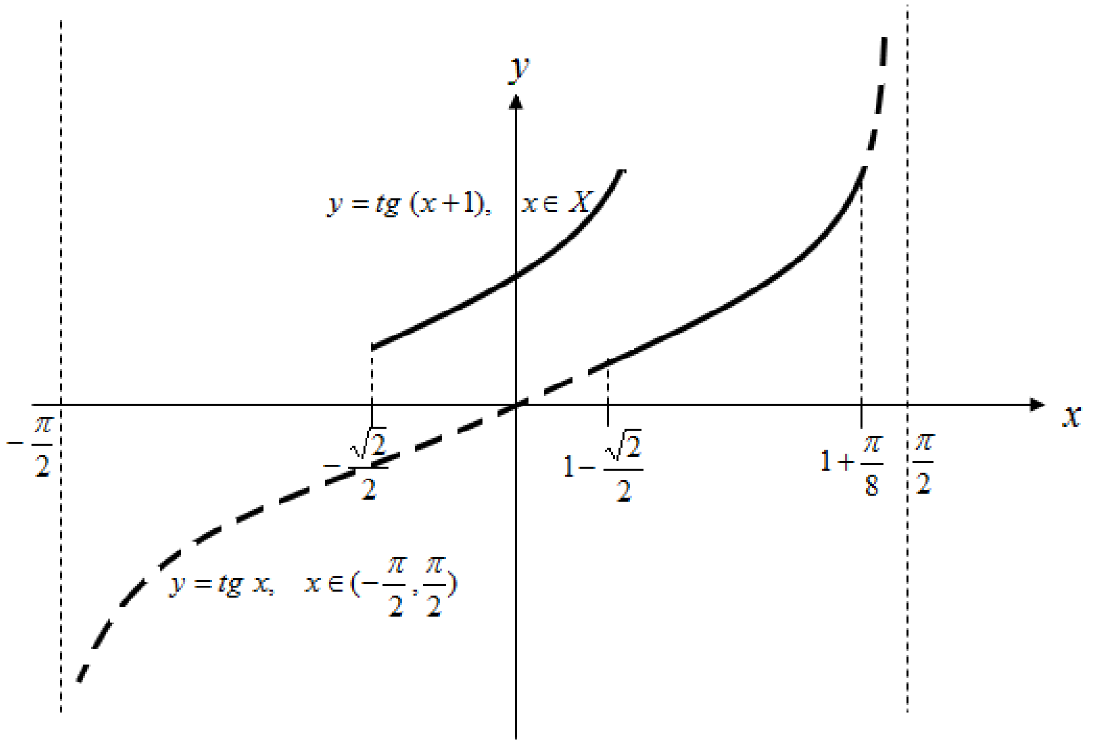


Рисунок 2 – Рисунок к задаче 4.20

Поскольку при $\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$ и $y = tgx, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ возрастает, то и функция $y = tg(x+1), x \in X$ возрастает. Поэтому множеством значений этой функции будет множество $Y = [tg(1-\frac{\sqrt{2}}{2}); tg(1+\frac{\pi}{8})]$ и в силу возрастания отображение $f : X \rightarrow Y$ будет взаимно-однозначным (биективным), а следовательно будет существовать обратное отображение $f^{-1} : Y \rightarrow X$ . Найдём его, выразив переменную $x$ через $y$ из уравнения $y = tg(x+1)$ и учтя, что $x + 1 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$:

$$x + 1 = arctgy \quad \text{или} \quad x = arctgy - 1.$$

Итак, $f^{-1}(x) = arctgx - 1, x \in Y$ – отображение, обратное к $f(x) = tg(x+1), x \in X$ .

**5.20** $f(x) = arctgx$, $g(x) = \ln x$. Сложная функция $f(g)$ (или композиция функций $f$ и $g$ будет определена тогда, когда множество значений *E(g)* функции $g$ содержится в области определения *D(f)* функции *f*. В нашем случае $E(g)=(-\infty;+\infty)$, $D(f)=(-\infty;+\infty)$, $D(g)=(0;+\infty)$, $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Так как $E(g)\subset D(f)$, то определена функция $f(g(x))=arctg(\ln x)$.

Поскольку *E(f)* не содержится в *D(g)*, то композиция *g(f)* на естественных областях не возможна.

$E(f)\subset D(f)$ и значит определена сложная функция $f(f(x))=arctg(arctgx)$.

*E(g)* не содержится в *D(g)*. Поэтому композиция *g(g)* на естественных областях не возможна.

На естественной области определения $f$ не определена функция $\frac{1}{f^2}$ (в точке $x=0$) и поэтому не определена функция $f\left(\frac{1}{f^2}\right)$.

Областью определения функции $y=\sqrt{x}$ является множество $[0;+\infty)$. Так как множество значений функции $f$ не содержится в нём, то композиция $\sqrt{f}$ не возможна на естественной области определения $f$.

## Лабораторная работа №3
# Числовые функции

*Необходимые понятия и теоремы:* область определения, область значений, графики элементарных функций, сдвиги
*Литература:* [1] с. 16 – 28, [2] с. 23- 36, [3] с. 71 – 84.

**1** Найти область определения функции $y = f(x)$

| № | $y = f(x)$ | № | $y = f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $y=\sqrt{5x-3x^3}$ | 1.11 | $y=\arccos\frac{3x}{1-x}$ |
| 1.2 | $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x}}$ | 1.12 | $y=\arcsin(2\cos 2x)$ |
| 1.3 | $y=\log_x \sin x$ | 1.13 | $y=\sqrt[4]{(x-1)\cos^2 \pi x}$ |
| 1.4 | $y=\log_{-x} \cos x$ | 1.14 | $y=\sqrt[5]{\ln(x^2+x-1)}$ |
| 1.5 | $y=\frac{1}{x-2}\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$ | 1.15 | $\arccos(\|1-x\|+\|1+x\|)$ |
| 1.6 | $y=\sqrt{\cos 2x}$ | 1.16 | $y=\left(\sqrt[6]{\sin x-\frac{1}{2}}\right)^6$ |
| 1.7 | $y=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin 3x-1}}$ | 1.17 | $y=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}+\log_x(x^2-1)$ |
| 1.8 | $y=\log_3 \log_2 x$ | 1.18 | $y=ctg\frac{\pi}{\sqrt{x}}$ |
| 1.9 | $y=\frac{1}{\sqrt{(\sin x)^2}}$ | 1.19 | $arctg\left(\ln\|\cos x\|-\frac{1}{2}\right)$ |
| 1.10 | $y=\frac{1}{\sqrt{\|x\|-\|x+1\|}}$ | 1.20 | $\arccos(\lg(10x))$ |

**2** Найти множество значений функции $y = f(x)$

| № | $y = f(x)$ | № | $y = f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 2.1 | $y=\sqrt{x^2-x-2}$ | 2.11 | $y=\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}$ |
| 2.2 | $y=\sqrt[3]{x^2-4x-5}$ | 2.12 | $y=\sqrt{\cos(2x+1)}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.3 | $y=3x-4, x\in[-2;2]$ | 2.13 | $y=\cos\sqrt{x^2-6x+5}$ |
| 2.4 | $y=3^{\sin x}$ | 2.14 | $\sin\sqrt[4]{3-x^2}$ |
| 2.5 | $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$ | 2.15 | $\arccos(x^2-10x+6)$ |
| 2.6 | $e^{\log_2 x}$ | 2.16 | $arctg\sqrt[6]{x^2+5x+6}$ |
| 2.7 | $y=\sin\ -\sqrt{x-2}$ | 2.17 | $\arccos(\log_{\frac{1}{2}}x)$ |
| 2.8 | $y=\ln(\cos x)$ | 2.18 | $y=\log_{\frac{1}{2}}(arcsix)$ |
| 2.9 | $y=\ln(tgx)$ | 2.19 | $y=\log_2(\log_{\frac{1}{2}}(\cos x))$ |
| 2.10 | $y=\arcsin 2^x$ | 2.20 | $y=\arccos(\arcsin x)$ |

**3** Построить график функции $y=f(x)$

| № | $y=f(x)$ | № | $y=f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 3.1 | $y=\left\|x^2-4\right\|$ | 3.11 | $y=4\cos 2x$ |
| 3.2 | $y=\left\|\sin 2x\right\|$ | 3.12 | $y=5\sin(x-2)$ |
| 3.3 | $y=\left\|\cos\frac{x}{2}\right\|$ | 3.13 | $y=2\cos\frac{x}{2}$ |
| 3.4 | $y=\log_{\frac{1}{2}}\left\|x-1\right\|$ | 3.14 | $y=\sqrt[3]{x+3}$ |
| 3.5 | $y=\left\|3-x^2\right\|$ | 3.15 | $y=\sqrt[4]{\left\|x\right\|}$ |
| 3.6 | $y=2^{\left\|x+1\right\|}$ | 3.16 | $y=\sqrt[5]{x-\frac{1}{2}}$ |
| 3.7 | $y=2^{-x-1}$ | 3.17 | $y=\sqrt[3]{\left\|x+1\right\|}$ |
| 3.8 | $y=-\cos 2x$ | 3.18 | $y=\left\|\sqrt{x+1}-1\right\|$ |
| 3.9 | $y=ctg(-x)$ | 3.19 | $y=\sqrt{\left\|x-1\right\|}-3$ |
| 3.10 | $y=tg(1-x)$ | 3.20 | $y=\log_2(x-2)^2$ |

**4** Исходя из графика функции $y=f(x)$ построить графики функций $y=f(x-1)$, $y=f(x+2)$, $y=f(x)+3$, $y=f(x)-4$, $y=f(2x)$, $y=f(\frac{x}{3})$,

$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=2f(x)$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$ и объяснить такое построение

| № | $y=f(x)$ | № | $y=f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 4.1 | $y=\ln x$ | 4.11 | $y=arctgx$ |
| 4.2 | $y=e^x$ | 4.12 | $y=\log_\pi x$ |
| 4.3 | $y=\frac{1}{x}$ | 4.13 | $y=\log_{1/2} x$ |
| 4.4 | $y=\sqrt[3]{x}$ | 4.14 | $y=\sqrt{x+2}$ |
| 4.5 | $y=(x-1)^2$ | 4.15 | $y=\|3x+1\|$ |
| 4.6 | $y=\cos x$ | 4.16 | $y=-\frac{2}{x}$ |
| 4.7 | $y=\sin x$ | 4.17 | $y=\frac{3}{x+2}$ |
| 4.8 | $y=\arccos x$ | 4.18 | $y=\log_2(x+2)^2$ |
| 4.9 | $y=\arcsin x$ | 4.19 | $y=\sin\frac{x}{2}$ |
| 4.10 | $y=tgx$ | 4.20 | $y=\arcsin(x-1)$ |

**5** Найдите функцию $y=f(x)$, если известно, что

| № | | № | |
|---|---|---|---|
| 5.1 | $f(x+1)=x^2+2x+2$ | 5.11 | $f(x^3)=\sqrt[3]{x}$ |
| 5.2 | $f(x-1)=x^2-2x+5$ | 5.12 | $f(\sqrt{x})=x^3+1$ |
| 5.3 | $f(x-\frac{1}{x})=\frac{x^4+1}{x^2}$ | 5.13 | $f(\sqrt[3]{x})=x^9$ |
| 5.4 | $f(\frac{1}{x})=x^3+1$ | 5.14 | $f(x^3)=1-x^2$ |
| 5.5 | $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$ | 5.15 | $f(e^x)=e^{2x}+e^x-1$ |
| 5.6 | $f(\frac{x}{x+1})=x^2$ | 5.16 | $f(\ln x)=2\ln x^2-3\ln x+1$ |
| 5.7 | $f(x^2)=1-x^3$ | 5.17 | $f(\cos x)=1+2\cos 2x$ |
| 5.8 | $f(x+2)=e^{4-2x-x^2}$ | 5.18 | $f(\sin x)=\cos^4 x-\cos 4x$ |
| 5.9 | $f(3x)=\ln x^2$ | 5.19 | $f(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x+1}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5.10 | $f(\frac{x}{4})=\log_3 x^3$ | 5.20 | $f(\lvert x\rvert)=\ln x^6-\lvert x\rvert$ |

**Решение типовых примеров**

**1.20** $y=\arccos(\lg(10x))$. Функция $y=\lg(10x)$ определена, если $10x>0$, а функция $y=\arccos x$ определена при $x\in[-1;1]$. Поэтому сложная функция $y=\arccos(\lg(10x))$ будет определена при выполнении двух условий:

$\begin{cases}10x>0\\ -1\le\lg(10x)\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -1\le 1+\lg x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ -2\le\lg x\le 0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 10^{-2}\le x\le 10^0\end{cases}$ или $\begin{cases}x>0\\ 0{,}01\le x\le 1\end{cases}$, что равносильно условию $x\in[0{,}01;1]$. Итак, областью определения функции $y=\arccos(\lg(10x))$ является множество $[0{,}01;1]$.

**2.20** $y=\arccos(\arcsin x)$. Найдём сначала область определения этой функции. Она будет определена для *x*, удовлетворяющих системе

$\begin{cases}x\in[-1;1]\\ -1\le\arcsin x\le 1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ \sin(-1)\le\sin(\arcsin x)\le\sin 1\end{cases}$ или $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ -\sin 1\le x\le\sin 1\end{cases}$,

что равносильно условию $x\in[-\sin 1;\sin 1]$. Поскольку функция $y=\arcsin x$ возрастает, то для $x\in[-\sin 1;\sin 1]$ она примет все значения из [-1;1] и только их. Поэтому функция $y=\arccos(\arcsin x)$ примет все значения из $[0;\pi]$ и только их. Итак, множесвом значений функции $y=\arccos(\arcsin x)$ является $[0;\pi]$.

**3.20** $y=\log_2(x-2)^2$. Так как $a^2=\lvert a\rvert^2$, то функция может быть переписана в виде $y=2\log_2\lvert x-2\rvert$. Построим сначала график функции $y=\log_2\lvert x\rvert$. Он состоит из графика функции $y=\log_2 x$ и линии, симметричной этому графику относительно оси *Oy*, так как в точках *x* и *–x* функция $y=\log_2\lvert x\rvert$ принимает одно и тоже значение (чётная).

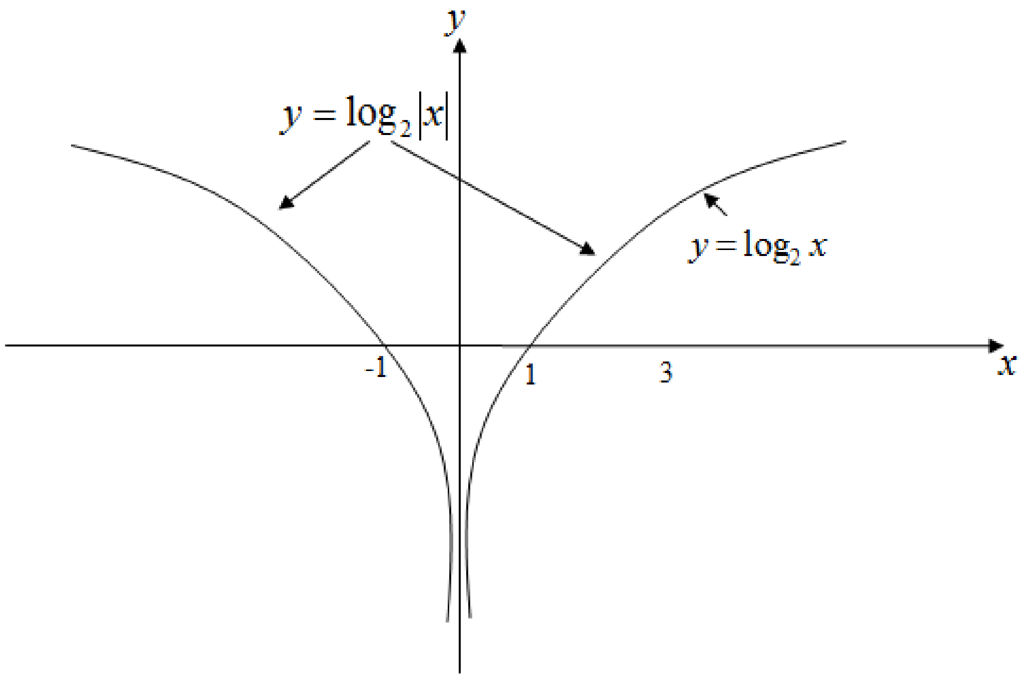


Рисунок 3 – График функции $y = \log_2|x|$

Далее построим график функции $y = \log_2|x-2|$, который получается из графика функции $y = \log_2|x|$ сдвигом вправо на 2 единицы, так как значение функции $y = \log_2|x-2|$ в точке $x+2$ совпадает со значением функции $y = \log_2|x|$ в точке $x$.

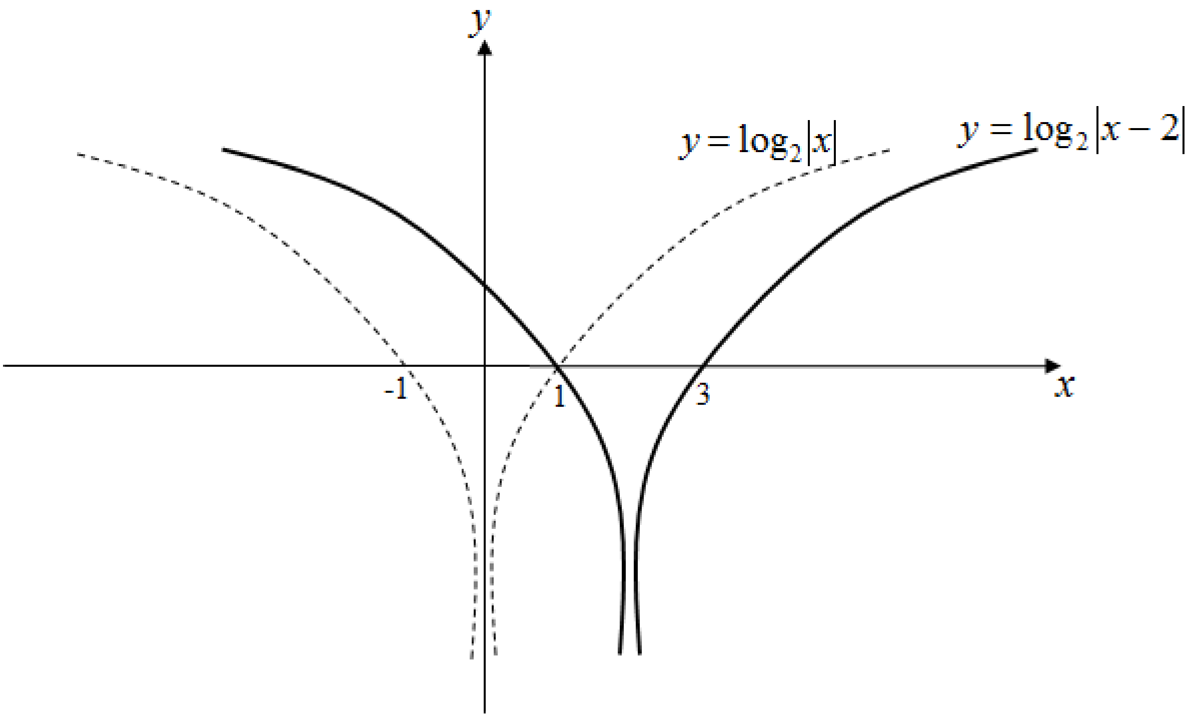


Рисунок 4 – График функции $y = \log_2|x-2|$

И наконец, строим график функции $y = 2\log_2|x-2|$, который получается из рафика функции $y = \log_2|x-2|$ растяжением в 2 раза вдоль оси *Oy* относительно точки *O*.

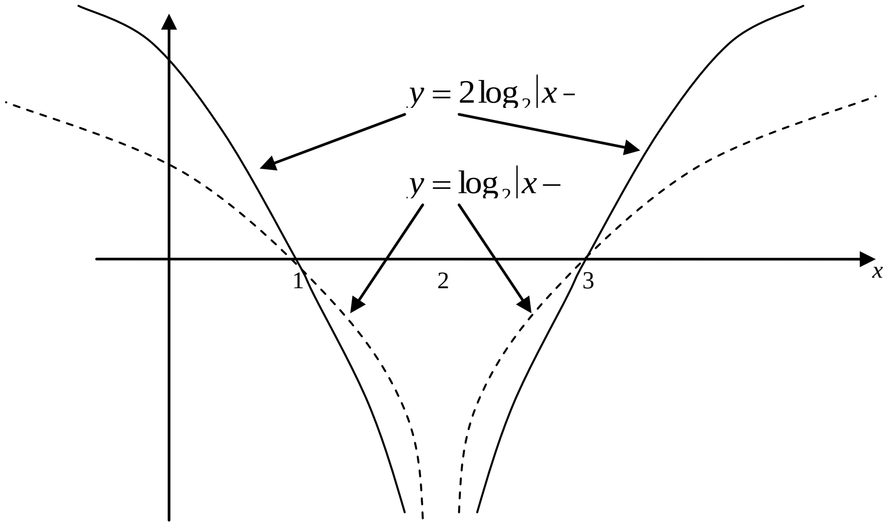


Рисунок 5 – График функции $y = 2\log_2|x-2|$

**4.20** $y = \arcsin(x-1)$. В нашем случае $f(x) = \arcsin(x-1)$. Построим сначала график функции $y = \arcsin(x-1)$, исходя из графика функции $y = \arcsin x$ в одной системе координат

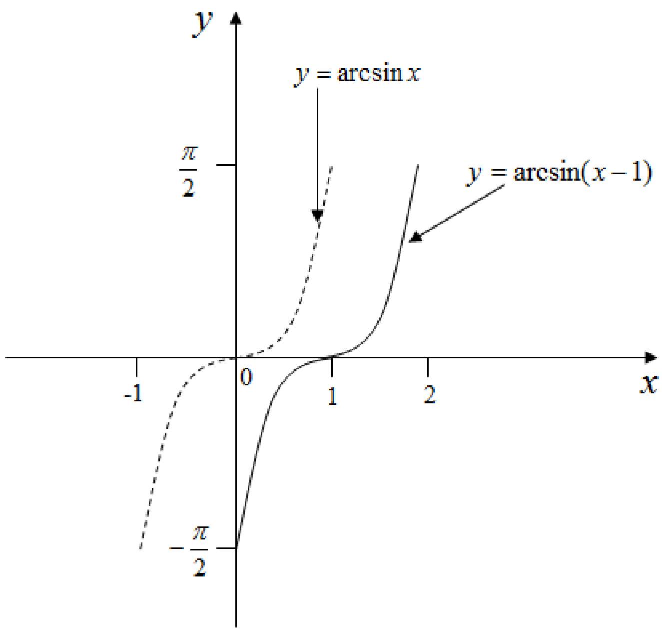


Рисунок 6 – График функции $y = \arcsin(x-1)$

Графиком функции $y = f(x)$ является множество $A = \{x, f(x) \,|\, x \in [0;2]\}$. Функция $y = f(x-1)$ определена при всех $x : x-1 \in [0;2]$ или $x \in [1;3]$. Графиком функции $y=f(x-1)$ является множество $B=\{(x, f(x-1))\,|\,x\in[1;3]\}$. Сделаем замену $x-1=z$. Тогда $B=\{(x-1+1; f(x-1))\,|\,x\in[1;3]\}=\{(z+1; f(z))\,|\,z\in[0;2]\}$. Поэтому каждая точка множества $B$ получается из соответствующей точки множества $A$ сдвигом на 1 вправо, т.е. график функции $y=f(x-1)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом на 1 вправо.

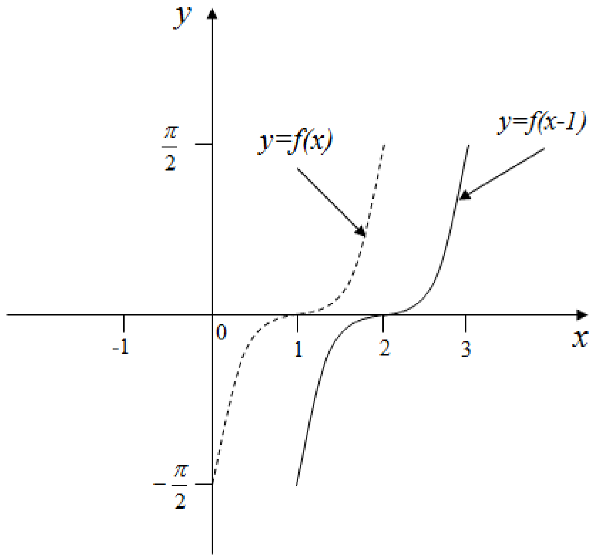


Рисунок 7 – График функции $y=f(x-1)$

График функции $y=f(x+2)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом влево на 2 единицы (объяснить)

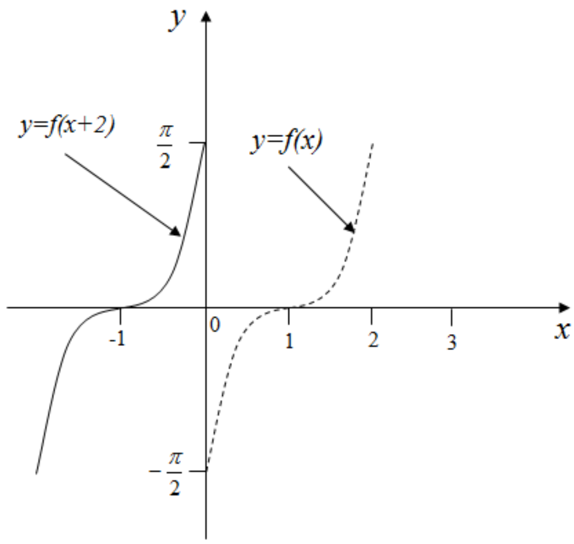


Рисунок 8 – График функции $y=f(x+2)$

График функции $y = f(x) + 3$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом на 3 единицы вверх –

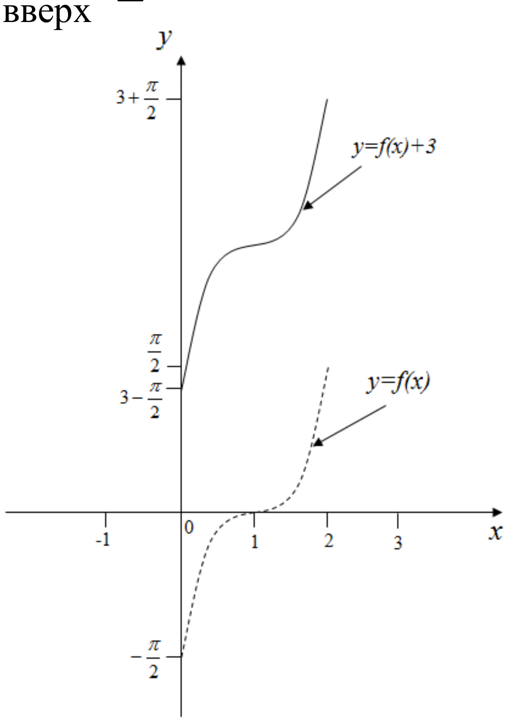


Рисунок 9 – График функции $y = f(x) + 3$

График функции $y = f(x) - 4$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вниз на 4 единицы (объяснить)

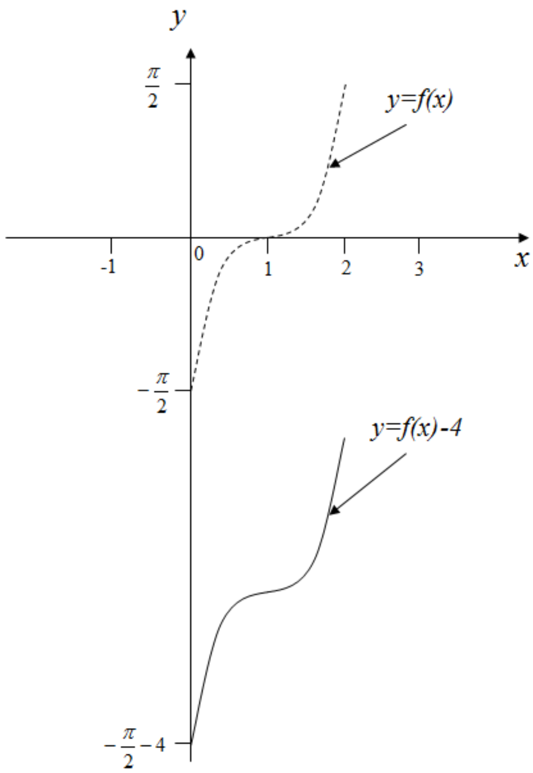


Рисунок 10 – График функции $y = f(x) - 4$

График функции $y = f(2x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием вдоль оси $Ox$ в 2 раза (объяснить)

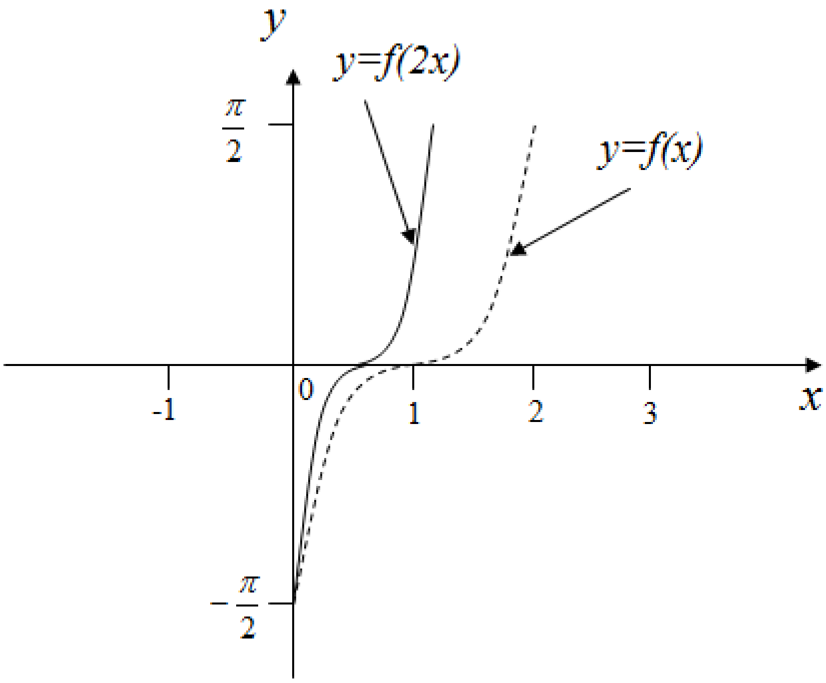


Рисунок 11 – График функции $y = f(2x)$

График функции $y = f(\frac{x}{3})$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси $Ox$ в 3 раза (объяснить)

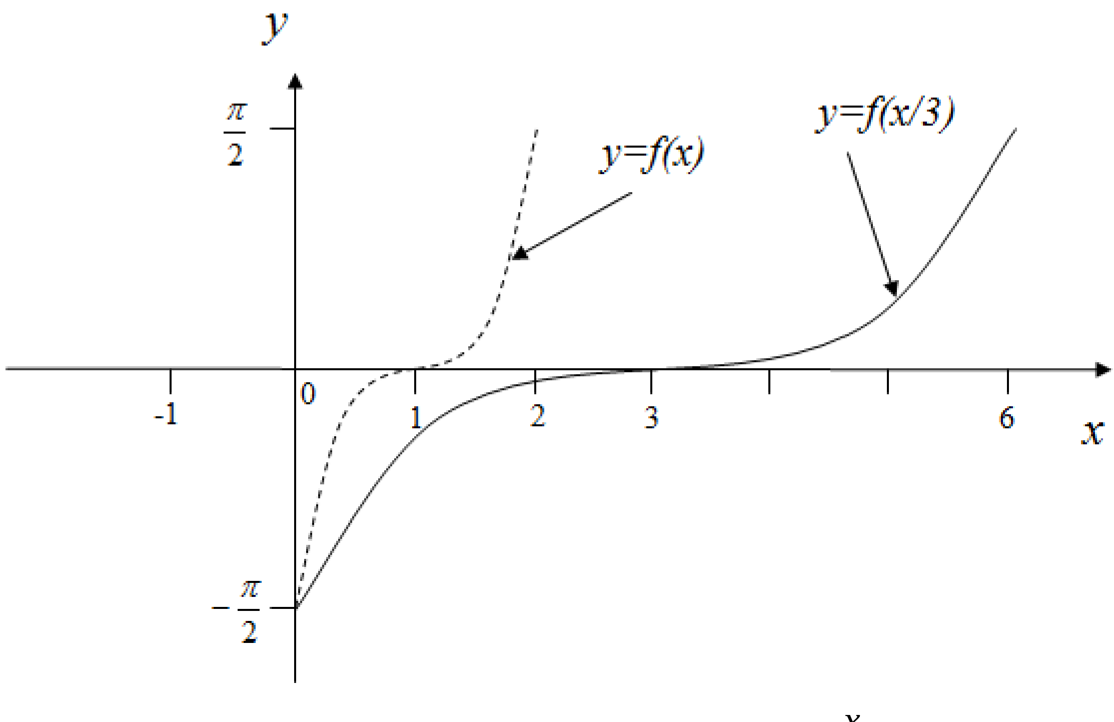


Рисунок 12 – График функции $y = f(\frac{x}{3})$

График функции $y = |f(x)|$ состоит из части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси $Ox$ и линии, симметричной относительно оси $Ox$ части графика $y = f(x)$, расположенной ниже оси $Ox$ (объяснить).

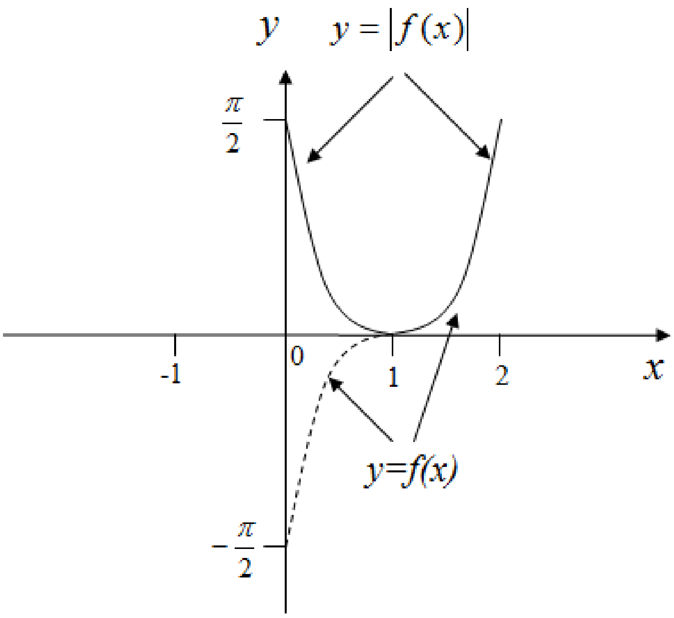


Рисунок 13 – График функции $y = |f(x)|$

График функции $y = f(|x|)$ состоит из графика функции $y = f(x)$ и линии, симметричной графику функции $y = f(x)$ относительно оси $Oy$ (объяснить)

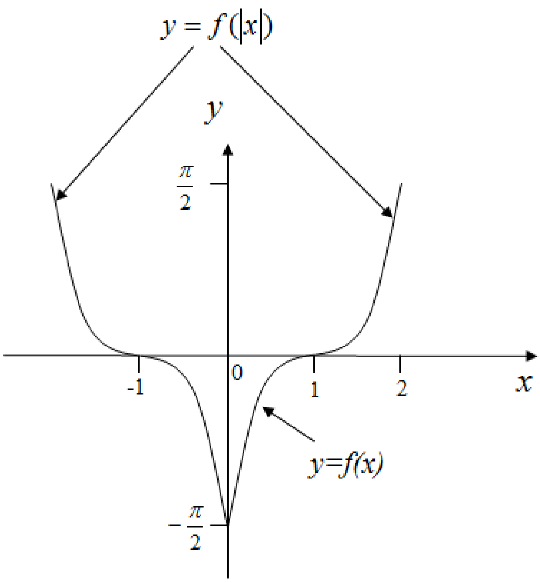


Рисунок 14 – График функции $y = f(|x|)$

График функции $y = 2f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси $Oy$ в 2 раза (объяснить)

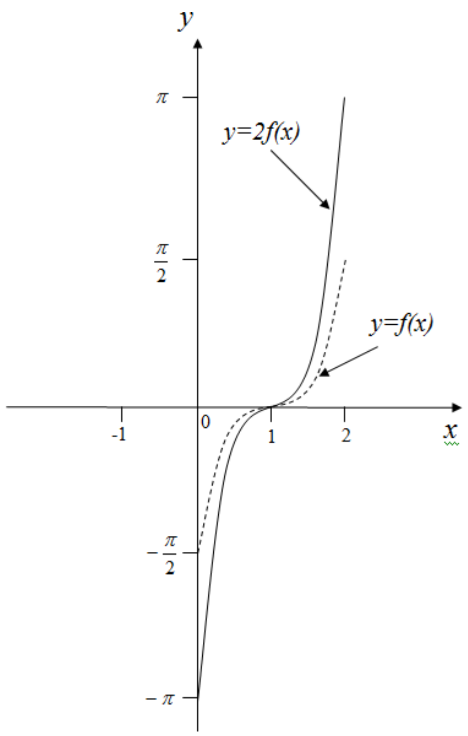


Рисунок 15 – График функции $y = 2f(x)$

График функции $y = -f(x)$ состоит из линии, симметричной относительно оси $Ox$ части графика функции $y = f(x)$, расположенной выше оси $Ox$ и линии, симметричной относительно оси $Ox$ части графика функции $y = f(x)$, расположенной ниже оси $Ox$ (объяснить)

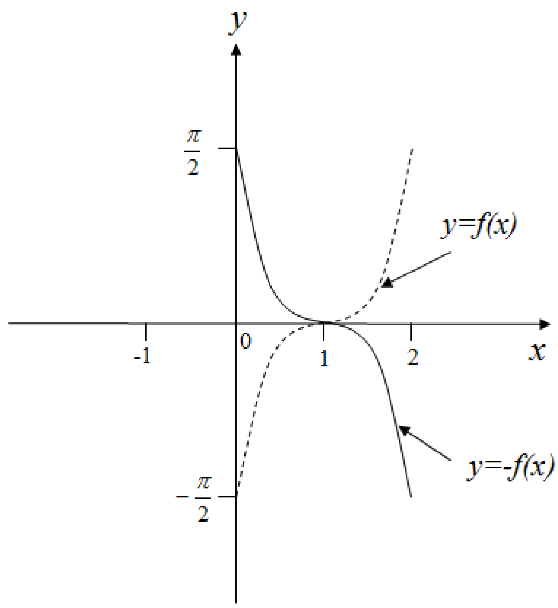


Рисунок 16 – График функции $y = -f(x)$

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметрией относительно оси $Oy$ (объяснить)

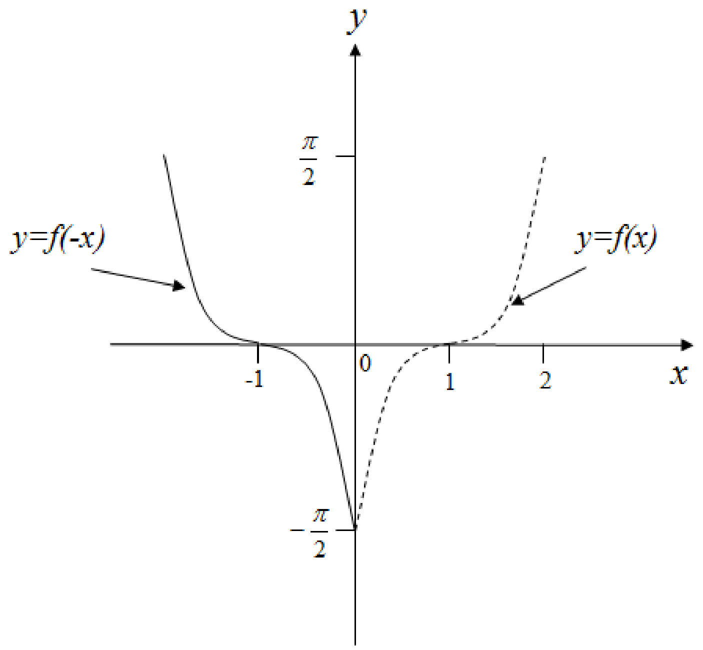


Рисунок 17 – График функции $y = f(-x)$

**5.20** $f(|x|) = \ln x^6 - |x|$. Поскольку $x^6 = |x|^6$, то $f(|x|) = \ln|x|^6 - |x|$. Отсюда заключаем, что $f(x) = \ln x^6 - x, x \in (-\infty;+\infty) \setminus \{0\}$.

## Лабораторная работа № 4
## Вещественные числа

*Необходимые понятия и теоремы:* рациональные и иррациональные числа, действительные числа, аксиомы действительных чисел, принцип математической индукции, верхняя и нижняя грани множеств, ограниченные множества.

*Литература:* [1] с. 29 – 61, [2] с. 37 – 80.

**1** Исходя из аксиом действительных чисел, доказать утверждения:

**1.1** Если $a+b=c$, то $a=c-b$.
**1.2** Число, обладающее свойством единицы, единственно.
**1.3** Если $a>b$, то для любого числа $c$ справедливо $a+c>b+c$.
**1.4** Для любого числа $a$ справедливо $a\cdot 0=0$.
**1.5** Число, обладающее свойством нуля, единственно.
**1.6** Число, обратное к данному отличному от нуля числу, единственно.
**1.7** Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.
**1.8** Если $a\cdot b=0$, то хотя бы один из сомножителей $a$ и $b$ равен нулю.
**1.9** Число, противоположное данному, единственно.
**1.10** Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $a:a=1$.
**1.11** Если $a<b$, то $-a>-b$.
**1.12** Для любых чисел $a$ и $b$ справедливо $(-a)\cdot b=-a\cdot b$.
**1.13** Для любых чисел $a$ и $b$ справедливо $-a-b=-(a+b)$.
**1.14** Для любого числа $a\neq 0$ справедливо $1:(1:a)=a$.
**1.15** Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a+c<b+d$.
**1.16** Уравнение $a\cdot x=b,\ a\neq 0$, имеет единственное решение.
**1.17** Для любой дроби $\frac{a}{b},\ b\neq 0$, и $\forall c\neq 0$ справедливо $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.
**1.18** Если $a<b$ и $c\leq d$, то $a-c<b-d$.
**1.19** Если $a<b$ и $c<0$, то $ac>bc$.
**1.20** Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

**2** Доказать иррациональность числа $a$:

| № | $a$ | № | $a$ | № | $a$ | № | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.1 | $\sqrt{3}$ | 2.6 | $\sqrt{13}$ | 2.11 | $\sqrt{21}$ | 2.16 | $\sqrt{43}$ |
| 2.2 | $\sqrt{5}$ | 2.7 | $\sqrt{17}$ | 2.12 | $\sqrt{22}$ | 2.17 | $\sqrt{51}$ |
| 2.3 | $\sqrt{7}$ | 2.8 | $\sqrt{15}$ | 2.13 | $\sqrt{33}$ | 2.18 | $\sqrt{57}$ |
| 2.4 | $\sqrt{11}$ | 2.9 | $\sqrt{19}$ | 2.14 | $\sqrt{37}$ | 2.19 | $\sqrt{50}$ |
| 2.5 | $\sqrt{10}$ | 2.10 | $\sqrt{20}$ | 2.15 | $\sqrt{41}$ | 2.20 | $\sqrt{2}$ |

**3** Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

| № | $X$ | № | $X$ |
|---|---|---|---|
| 3.1 | $\{x\in\mathbb{Q}:\lvert x\rvert<1\}$ | 3.11 | $\{x\in\mathbb{Q}:\lvert x\rvert>1\}$ |
| 3.2 | $[0;\,2)$ | 3.12 | $[1;\,2]$ |
| 3.3 | $\{\,(-1)^n(1-1/n),\,n\in\mathbb{N}\,\}$ | 3.13 | $\{\,1+(-1)^n/n,\,n\in\mathbb{N}\,\}$ |
| 3.4 | $\{\,\cos n,\,n\in\mathbb{Z}\,\}$ | 3.14 | $\{\,-1/3;\,-1/9;\,...,\,-1/3^n,\,...\,\}$ |
| 3.5 | $\{\,1/3;1/9;\,...,1/3^n,\,...\,\}$ | 3.15 | $\{\,-1/2;\,-3/4;\,...,\,-(2^n-1)/2^n,\,...\,\}$ |
| 3.6 | $\{x\in\mathbb{Q}:\lvert x\rvert\ge 1\}$ | 3.16 | $\{x\in\mathbb{Q}:\lvert x\rvert<3\}$ |
| 3.7 | $(0;\,5]$ | 3.17 | $\{\,\sin n,\,n\in\mathbb{Z}\,\}$ |
| 3.8 | $\{\,n^2e^{-n},\,n\in\mathbb{N}\,\}$ | 3.18 | $\{\,1/10;1/100;\,...,1/10^n,\,...\,\}$ |
| 3.9 | $\{\,1/10;1/100;\,...,1/10^n,\,...\,\}$ | 3.19 | $\{\,2;1+1/2;\,...,1+1/n,\,...\,\}$ |
| 3.10 | $\{\,1/2;\,3/4;\,...,\,(2^n-1)/2^n,\,...\,\}$ | 3.20 | $\{m/n\mid\ m,n\in\mathbb{N},\,m<n\}$ |

**4** Пусть $n, m\in\mathbb{N}$. Найти:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.1 | $\sup\limits_m\inf\limits_n\dfrac{m-n}{m+n}$ | 4.8 | $\inf\limits_n\sup\limits_m\dfrac{m-n}{m+3n}$ | 4.15 | $\sup\limits_n\inf\limits_m\dfrac{m-n}{2m+n}$ |
| 4.2 | $\inf\limits_n\sup\limits_m\dfrac{m-n}{m+n}$ | 4.9 | $\sup\limits_m\inf\limits_n\dfrac{m}{7m+n}$ | 4.16 | $\inf\limits_m\sup\limits_n\dfrac{m-n}{2m+n}$ |
| 4.3 | $\sup\limits_m\inf\limits_n\dfrac{m}{m+n}$ | 4.10 | $\inf\limits_n\sup\limits_m\dfrac{m}{7m+n}$ | 4.17 | $\sup\limits_n\inf\limits_m\dfrac{m-n}{m+3n}$ |
| 4.4 | $\inf\limits_n\sup\limits_m\dfrac{m}{m+n}$ | 4.11 | $\sup\limits_n\inf\limits_m\dfrac{m-n}{m+n}$ | 4.18 | $\inf\limits_m\sup\limits_n\dfrac{m-n}{m+3n}$ |
| 4.5 | $\sup\limits_m\inf\limits_n\dfrac{m-n}{2m+n}$ | 4.12 | $\inf\limits_m\sup\limits_n\dfrac{m-n}{m+n}$ | 4.19 | $\sup\limits_n\inf\limits_m\dfrac{m}{7m+n}$ |
| 4.6 | $\inf\limits_n\sup\limits_m\dfrac{m-n}{2m+n}$ | 4.13 | $\sup\limits_n\inf\limits_m\dfrac{m}{m+n}$ | 4.20 | $\inf\limits_m\sup\limits_n\dfrac{m}{m+n}$ |
| 4.7 | $\sup\limits_m\inf\limits_n\dfrac{m-n}{m+3n}$ | 4.14 | $\inf\limits_m\sup\limits_n\dfrac{m}{m+n}$ | 4.21 | $\sup\limits_m\inf\limits_n\dfrac{m-n}{m+2n}$ |

**5** С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений при $n\in\mathbb{N}$:

**5.1** $n^3+5n$ кратно 6.

**5.2** $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

**5.3** $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6.

**5.4** $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

**5.5** $7^{2n}-1$ кратно 24.

**5.6** $2\cdot 2+3\cdot 5+\cdots(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

**5.7** $13^n+5$ кратно 6.

**5.8** $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\cdots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

**5.9** $15^n+6$ кратно 7.

**5.10** $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$.

**5.11** $9^n+3$ кратно 4.

**5.12** $1+6+20+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$.

**5.13** $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n+1\ ^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

**5.14** $(1-\dfrac{1}{4})\cdot(1-\dfrac{1}{9})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{n+1}{2n}$.

**5.15** $7^n+3n-1$ кратно 9.

**5.16** $(1-\dfrac{4}{1})(1-\dfrac{4}{9})(1-\dfrac{4}{25})\cdots(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2})=\dfrac{1+2n}{1-2n}$.

**5.17** $7^n+12n+17$ кратно 18.

**5.18** $\dfrac{1}{5\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 19}+\cdots+\dfrac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\dfrac{n}{5(7n+5)}$.

**5.19** $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$.

**5.20** $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\ \ n+1}{2}$.

**6** С помощью метода математической индукции доказать неравенство при $n\in\mathbb{N}$:

**6.1** $4^n>7n-5$.

**6.2** $3^n-2^n\geq n$.

**6.3** $4^n>n^2+3^n$.

**6.4** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1.$

**6.5** $y_1+y_2+\ldots+y_n\geq n,\ \ \forall y_1,y_2,\ldots,y_n>0\colon y_1y_2\ldots y_n=1.$

**6.6** $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2},\ \ \forall n\geq 2.$

**6.7** $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},\ \forall n\geq 2.$

**6.8** $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n\geq 2.$

**6.9** $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},\ \ x_k\geq 0, \forall k=\overline{1,n}.$

**6.10** $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$

**6.11** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}},\ \forall n\geq 2.$

**6.12** $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{14},\ \forall n\geq 2.$

**6.13** $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ \forall n\geq 2.$

**6.14** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n,\ \forall n\geq 2.$

**6.15** $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2},\ \forall n\geq 2.$

**6.16** $(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\geq\frac{1}{2},\ x_k\geq 0, \forall k=\overline{1,n},$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n\leq\frac{1}{2}.$

**6.17** $(2n)!>\frac{4n}{n+1}(n!)^2,\ \forall n\geq 2.$

**6.18** $2^n n!<n^n,\ \forall n>2.$

**6.19** $3^n>2^n+7n,\ \forall n\geq 4.$

**6.20** $n\leq 2^{n-1}.$

**7** Построив соответствующее сечение, доказать равенство:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7.1 | $\sqrt{2}+\sqrt{32}=\sqrt{50}$ | 7.7 | $\sqrt{3}+\sqrt{75}=\sqrt{108}$ | 7.13 | $\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{30}$ |
| 7.2 | $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{10}$ | 7.8 | $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ | 7.14 | $\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{77}$ |
| 7.3 | $\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$ | 7.9 | $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{27}$ | 7.15 | $\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$ |
| 7.4 | $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}$ | 7.10 | $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}$ | 7.16 | $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{21}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7.5 | $\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$ | 7.11 | $\sqrt{7}+\sqrt{28}=\sqrt{63}$ | 7.17 | $\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}$ |
| 7.6 | $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{35}$ | 7.12 | $\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{14}$ | 7.18 | $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$ |

## Решение типовых примеров

**1.20** Уравнение $a+x=b$ имеет единственное решение.

*Решение***.** Число $-a+b$ удовлетворяет уравнению $a+x=b$. В самом деле: $a+(-a+b)=(a+(-a)+b)=0+b=b$. Других решений нет. Действительно, если $x\in\mathbb{R}$ и является решением уравнения $a+x=b$, то

$$\begin{aligned}
-a+b&=-a+b,\\
-a+(a+x)&=-a+b,\\
(-a+a)+x&=-a+b,\\
0+x&=-a+b,\\
x&=-a+b.
\end{aligned}$$

**2.20** Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

*Решение***.** Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число $m^2$ есть четное число. Отсюда $m$ есть четное число, и, следовательно, представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Следовательно, $n^2$ есть четное число, тогда и $n$ – четное. Таким образом, числа $m$ и $n$ являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$.

**3.20** Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества

$$X=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\ m,n\in\mathbb{N}, m<n\right\}$$

*Решение*.

*Шаг 1*. Покажем, что $\inf X = 0$, то есть, 1) $\forall x = \frac{m}{n} \in X$, $\frac{m}{n} > 0$ (0 – нижняя граница $X$); 2) $\forall x^* > 0 \ \exists \bar{x} \in X$ такой, что $\bar{x} < x^*$ (0 – наибольшая из нижних границ). Утверждение 1) очевидно.

Докажем утверждение 2). Представим $x^*$ в виде десятичной дроби $x^* = a, x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} ...$. Если $a > 0$, то неравенство $\bar{x} < x^*$ очевидно, так как множество $X$ состоит из правильных дробей. Если $a = 0$, то $\exists n$ такой, что $x_n \neq 0$, и поэтому $\bar{x} = 0, x_1 x_2 ... x_{n-1}(x_n - 1)...$ – искомое, то есть, $\bar{x} < x^*$.

*Шаг 2*. Покажем, что $\min X$ не существует. По определению, наименьшим элементом множества $X$ называется такое число $c \in X$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \geq c$. Заметим, что $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n} \notin X$, 0– не натуральное число, и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

*Шаг 3*. Покажем, что $\sup X = 1$, то есть 1) $\forall x = \frac{m}{n} \in X$, $\frac{m}{n} < 1$ (1 – верхняя граница $X$); 2) $\forall x^* < 1 \ \exists \bar{x} \in X$ такой, что $\bar{x} > x^*$ (1 – наименьшая из верхних границ). Утверждение 1) очевидно, так как $X$ содержит только правильные дроби.

Докажем утверждение 2). Представим $x^*$ в виде десятичной дроби $x^* = 0, x_1 x_2 ... x_n x_{n+1} ...$. Тогда $\exists n$ такой, что $x_n \neq 0$, и поэтому $\bar{x} = 0, x_1 x_2 ... x_{n-1}(x_n + 1)...$ – искомое, то есть, $\bar{x} > x^*$.

*Шаг 4*. . Покажем, что $\max X$ не существует. По определению, наибольшим элементом множества $X$ называется такое число $c \in X$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq c$. Заметим, что $\sup X \notin X$, так как $\frac{m}{n} = 1$ при $m = n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество $X$ не имеет наибольшего элемента.

**4.20** Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Найти $\inf\limits_m \sup\limits_n \frac{m}{m+n}$.

*Решение*. Заметим, что если $\exists \max X$ и $\min X$, то $\sup X = \max X$, $\inf X = \min X$.

Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $0 \leq \frac{m}{m+n} \leq \frac{m}{m+1}$. Следовательно, $\max\limits_n \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1}$, а значит, $\sup\limits_n \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m+1}$

Для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется $\frac{1}{2} \le \frac{m}{m+1} < 1$. Следовательно, $\min\limits_{m} \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$, а значит, $\inf\limits_{m} \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2}$.

**5.20** Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Решение.*

*Шаг 1.* При $n=1$ равенство очевидно.

*Шаг 2.* Предположим, что равенство верно для натурального числа $n=k$:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

*Шаг 3.* Проверим верность утверждения для натурального числа $n=k+1$:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \left[\!\left[ \begin{matrix} \textit{учитывая} \\ \textit{шаг } 2 \end{matrix} \right]\!\right] = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$
$$= (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

**6.20** С помощью метода математической индукции доказать неравенство $n \le 2^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$.

*Решение.*

*Шаг 1* При $n=1$ неравенство верно, т.к. $1 \le 1$.

*Шаг 2*. Предположим, что неравенство верно для $n=k$, то есть $k \le 2^{k-1}$.

*Шаг 3*. Докажем, что неравенство верно для $n=k+1$:

$$2^k = 2 \cdot 2^{k-1} \ge \left[\!\left[ \begin{matrix} \textit{учитывая} \\ \textit{шаг } 2 \end{matrix} \right]\!\right] \ge 2 \cdot k \ge k+k \ge k+1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n = k$ вытекает его истинность при $n = k+1$. Согласно методу математической индукции, утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

**7.20** Построив соответствующее сечение, доказать равенство
$$\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}.$$

*Решение*. Для удобства обозначим $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \alpha$. Необходимо доказать, что $\alpha = \sqrt{18}$. Покажем, что совпадают верхние классы сечений, определяющие числа $\alpha$ и $\sqrt{18}$. Сначала построим сечения, определяющие действительные числа $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}$. Рассмотрим верхние классы этих сечений:

$$\sqrt{2} = A \mid A'; \quad A' = \{a' \mid a'^2 > 2, a' > 0\};$$
$$\sqrt{8} = B \mid B'; \quad B' = \{b' \mid b'^2 > 8, b' > 0\};$$
$$\sqrt{18} = C \mid C'; \quad C' = \{c' \mid c'^2 > 18, c' > 0\}.$$

Теперь определим, какой верхний класс определяет число $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{8}$. Пусть $\alpha$ производит сечение $D \mid D'$. Рассмотрим рациональные числа $a', a, b', b,$ удовлетворяющие неравенствам $a < \sqrt{2} < a'$ и $b < \sqrt{8} < b'$, где $a \in A,$ $a' \in A'$, $b \in B$, $b' \in B'$.

По определению, суммой $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ называется число, которое содержится в следующих рациональных границах:

$$a + b < \sqrt{2} + \sqrt{8} < a' + b'.$$

Из определения суммы двух вещественных чисел следует, что в верхний класс $D'$ сечения, определяющего число $\sqrt{2} + \sqrt{8}$, входят всевозможные суммы вида $a' + b'$:

$$D' = \{d' \mid d' = a' + b', a' \in A', b' \in B'\}.$$

Докажем совпадения классов $D'$ и $C'$. Для этого вначале покажем, что $D' \subset C'$. Пусть $d' \in D'$, тогда $\alpha' = a' + b'$, $a' \in A'$, $b' \in B'$ и $a'^2 > 2$, $a' > 0$, $b'^2 > b$, $b' > 0$.

Ясно, что $d' > 0$. Докажем, что $d'^2 > 18$. Так как $a'^2 b'^2 > 16$, то $a'b' > 4$ и $2a'b' > 8$. Следовательно,

$$d'^2 = (a' + b')^2 = a'^2 + 2a'b' + b'^2 > 2 + 8 + 8,$$
т. е. $d'^2 > 18$, $d' \in C \Rightarrow D' \subset C'$.

Покажем, что $C' \subset D'$. Пусть $c' > 0$, $c' \in C'$, т. е. $c'^2 > 18$. Положим $c'^2 - 18 = h$ ($h$ –рациональное число) и выберем $a' > 0$ так, чтобы

$$2 < a'^2 < 2 + \frac{1}{6}h,\ a'^2 < 3 \text{ и } b' = c' - a'.$$

Тогда $b' > 0$ и $b'^2 = c'^2 + a'^2 - 2c'a'$. Так как $c'^2 = 18 + h$, а $4a'^2 < 4(2 + h/6) = 8 + 2h/3$, то

$$4c'^2a'^2 < (8 + 2h/3)(18 + h) = 144 + 20h + 2h^2/3 <$$
$$< 144 + 20h + 25h^2/36 = (12 + 5h/6)^2,$$

т.е. $2c'a' < 12 + 5h/6$, а $a'^2 + c'^2 > 20 + h$, следовательно, $b'^2 > 8 + h/6$, т.е. $b'^2 > 8$ или $c' = a' + b'$, где $a' \in A'$, $b' \in B'$ и верхний класс $C'$ содержится в классе $D'$. Так как $C' \subset D'$ и $D' \subset C'$, то классы $C'$ и $D'$ совпадают. Верхние классы $D'$ и $C'$ сечений совпадают, значит, совпадают и нижние классы $D$ и $C$ и, следовательно, $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.

**Лабораторная работа № 5**
**Предел последовательности: определение, свойства**

*Необходимые понятия и теоремы:* определение числовой последовательности, ограниченные и неограниченные последовательности, монотонные последовательности, определение предела последовательности, сходящиеся и расходящиеся последовательности, свойства сходящихся последовательностей.

*Литература:* [1] с. 81 – 87, [4] с. 87 – 111.

**1** Напишите пять первых членов последовательности $x_n$:

| № | $x_n$ | № | $x_n$ | № | $x_n$ | № | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1 | $\frac{1}{2n+1}$ | 1.6 | $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n$ | 1.11 | $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$ | 1.16 | $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ |
| 1.2 | $\frac{n+2}{n^3+1}$ | 1.7 | $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | 1.12 | $\frac{5^n+(-3)^n}{n^2}$ | 1.17 | $\frac{\cos n}{n+1}$ |
| 1.3 | $\frac{n}{2^{n+1}}$ | 1.8 | $(-1)^n \frac{1}{n}$ | 1.13 | $\frac{5^{n+1}+(-3)^n}{2^n}$ | 1.18 | $((-1)^n - 1)n$ |
| 1.4 | $(-1)^n n$ | 1.9 | $\cos n$ | 1.14 | $\sin n$ | 1.19 | $(-1)^n + 6n$ |
| 1.5 | $\frac{n+2}{n+3}$ | 1.10 | $\frac{\ln n}{2^n}$ | 1.15 | $\frac{\sin n}{n^2}$ | 1.20 | $(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$ |

**2** Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.1 | числа $\{8; 14; 20; 26; 32; \ldots\}$ | 2.11 | числа $\{1/2; 1/2; 3/8; 1/4; 5/32; \ldots\}$ |
| 2.2 | корни уравнения $\cos \pi x = 0$ | 2.12 | корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 1$ |
| 2.3 | числа $\{1; 3; 1; 3; 1; \ldots\}$ | 2.13 | числа $\{2; 3/2; 4/3; 5/4; 6/5; \ldots\}$ |
| 2.4 | корни уравнения $\sin \pi x = 0$ | 2.14 | корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 0$ |
| 2.5 | числа $\{5; 7; 11; 19; 35; \ldots\}$ | 2.15 | числа $\{-0,5; 1,5; -4,5; 13,5; \ldots\}$ |
| 2.6 | корни уравнения $\cos \pi x = 1$ | 2.16 | корни уравнения $\cos(\pi x/2) = 0$ |
| 2.7 | числа $\{0,3; 0,33; 0,333; \ldots\}$ | 2.17 | числа $\{-2; -1/2; -4/3; -3/4; \ldots\}$ |
| 2.8 | корни уравнения $\sin \pi x = 1$ | 2.18 | корни уравнения $\sin(\pi x/2) = 1$ |
| 2.9 | числа $\{1; 2; 6; 24; 120; \ldots\}$ | 2.19 | числа $\{-1/10; 1/100; -1/1000; \ldots\}$ |
| 2.10 | корни уравнения $\cos \pi x = -1$ | 2.20 | корни уравнения $\sin \pi x = -1$ |

**3** Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

| № | $x_1$ | $x_{n+1}$ | № | $x_1$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.1 | 1 | $x_n + 2^n$ | 3.11 | 1/3 | $1/(1+x_n)$ |
| 3.2 | 0 | $(x_n+1)/(n+1)$ | 3.12 | 1 | $3\cdot x_n + 5\cdot 2^n$ |
| 3.3 | 2 | $x_n + 3\cdot 2^n$ | 3.13 | 2 | $x_n/(4+x_n)$ |
| 3.4 | 1 | $(n+1)(x_n+1)$ | 3.14 | 1 | $x_n/(1+x_n)$ |
| 3.5 | 1/2 | $1/(2-x_n)$ | 3.15 | 3 | $(n+1)(x_n+1)$ |
| 3.6 | 1 | $3x_n + 2^n$ | 3.16 | 0 | $x_n + 7\cdot 2^n$ |
| 3.7 | 3 | $x_n/(1+x_n)$ | 3.17 | 1 | $x_n/(5+x_n)$ |
| 3.8 | 1/2 | $2/(3-x_n)$ | 3.18 | 2 | $4x_n + 2^n$ |
| 3.9 | 1 | $2\cdot x_n + 3\cdot 2^n$ | 3.19 | 3 | $x_n/(6+x_n)$ |
| 3.10 | 5 | $x_n/(5+x_n)$ | 3.20 | 1 | $x_n + 5\cdot 2^n$ |

**4** Выяснить, является ли последовательность $a_n$ ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

| № | $a_n$ | № | $a_n$ | № | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4.1 | $\frac{1}{n+1}$ | 4.8 | $\frac{\arcsin n}{n}$ | 4.15 | $\frac{\cos n}{n^2}$ |
| 4.2 | $\frac{(-1)^n}{n^2}$ | 4.9 | $\sin\frac{1}{n^2}$ | 4.16 | $\frac{2^n+(-1)^n}{n}$ |
| 4.3 | $2^n$ | 4.10 | $3^{-n}$ | 4.17 | $\sqrt{n+2}$ |
| 4.4 | $\frac{2^n}{n!}$ | 4.11 | $\frac{n+(-1)^n}{3n-1}$ | 4.18 | $\frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ |
| 4.5 | $\lg(1+n)$ | 4.12 | $n^2-2n+4$ | 4.19 | $n^2-(-1)^n$ |
| 4.6 | $\frac{n+(-1)^n}{n}$ | 4.13 | $\frac{(-1)^n}{n!}$ | 4.20 | $(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2}$ |
| 4.7 | $(-1)^n n$ | 4.14 | $(-1)^n n+n$ | 4.21 | $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ |

**5** Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Указать для $\varepsilon = 2; 0{,}01$ числа $N_\varepsilon$.

| № | $a_n$ | $a$ | № | $a_n$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | $\frac{n+1}{n+4}$ | 1 | 5.11 | $\frac{3n+1}{n+6}$ | 3 |
| 5.2 | $\frac{2n-2}{n+4}$ | 2 | 5.12 | $\frac{3n\sin 3n}{n-6}$ | 3 |
| 5.3 | $\frac{n\cos n}{n+3}$ | 1 | 5.13 | $\frac{n-1}{n+5}$ | 1 |
| 5.4 | $\frac{2n+1}{n-4}$ | 2 | 5.14 | $\frac{4n+1}{2n+1}$ | 2 |
| 5.5 | $\frac{n-3}{2n+1}$ | $\frac{1}{2}$ | 5.15 | $\frac{n\sin n}{2n+4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 5.6 | $\frac{\cos n}{n-3}$ | 0 | 5.16 | $\frac{2n-3}{2n+5}$ | 1 |
| 5.7 | $\frac{2n+6}{2n+7}$ | 1 | 5.17 | $\frac{2n-3}{n+4}$ | 2 |
| 5.8 | $\frac{2n-1}{n+4}$ | 2 | 5.18 | $\frac{2n+1}{n-6}$ | 2 |
| 5.9 | $\frac{n-1}{2n+4}$ | $\frac{1}{2}$ | 5.19 | $\frac{3n\cos n!}{3n+5}$ | 1 |
| 5.10 | $\frac{n+1}{n+4}$ | 1 | 5.20 | $\frac{n}{n+1}$ | 1 |

**6** Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$.

| № | $a_n$ | $a$ | № | $a_n$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.1 | $\frac{3n+1}{n^2+6}$ | 1 | 6.11 | $\frac{n+1}{n+4}$ | 3 |
| 6.2 | $\frac{3n^2}{n-6}$ | 2 | 6.12 | $\frac{2n-2}{n+4}$ | 3 |
| 6.3 | $\frac{n-1}{n^2+5}$ | 1 | 6.13 | $\frac{n^2}{n^3+3}$ | 1 |
| 6.4 | $\frac{n+1}{2n+1}$ | 2 | 6.14 | $\frac{2n+1}{6n-4}$ | 2 |
| 6.5 | $\frac{n^2}{2n+4}$ | $\frac{1}{2}$ | 6.15 | $\frac{n-3}{2n^2+1}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 6.6 | $\frac{2n-3}{2n+5}$ | 0 | 6.16 | $\frac{n^2}{n-3}$ | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6.7 | $\dfrac{2n-3}{n+4}$ | 1 | 6.17 | $\dfrac{2n+6}{2n+7}$ | 2 |
| 6.8 | $\dfrac{n+1}{n-6}$ | 2 | 6.18 | $\dfrac{n-1}{n+4}$ | 2 |
| 6.9 | $\dfrac{3n}{3n+5}$ | $\dfrac{1}{2}$ | 6.19 | $\dfrac{n-1}{2n+4}$ | 1 |
| 6.10 | $\dfrac{n+3}{2n+4}$ | 1 | 6.20 | $\dfrac{2n+1}{3n-1}$ | $\dfrac{1}{2}$ |

**7** Вычислить пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

| № | $a_n$ | | |
|---|---|---|---|
| | А | Б | В |
| 7.1 | $\dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$ | $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ | $\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$ |
| 7.2 | $\dfrac{3n^2-5}{6n^2+n-2}$ | $\dfrac{3+0,5^{n+1}}{0,3^n+5}$ | $\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$ |
| 7.3 | $\dfrac{n^3+n+2}{n^3+n\ \ -1}$ | $\dfrac{(-1)^n\cdot 6^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 6^{n+1}}$ | $\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+3)!}$ |
| 7.4 | $\dfrac{n^3-4n^2+n-1}{2n^3+n^2-3}$ | $\dfrac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^n+3^n}$ | $\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!-(3n+1)!}$ |
| 7.5 | $\dfrac{n^2-2n+4}{n^2-n^2+3}$ | $\dfrac{2+0,7^{n+1}}{0,5^n+1}$ | $\dfrac{(2n+2)!-(2n+1)!}{(2n+3)!}$ |
| 7.6 | $\dfrac{4n^2-3n+1}{n^2+n-4}$ | $\dfrac{(-1)^n\cdot 3^n-5^{n+1}}{5^n-(-1)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}$ | $\dfrac{(5n-1)!+(5n)!}{(5n+2)!}$ |
| 7.7 | $\dfrac{n^3+1}{n^3+n-4}$ | $\dfrac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n-7^n}$ | $\dfrac{n!+(n+2)!}{n!(3n^2+5)}$ |
| 7.8 | $\dfrac{2n^3-n+3}{n^3+n^2-1}$ | $\dfrac{4+0,7^{n+1}}{0,5^n+5}$ | $\dfrac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(6n^2+5n)(2n-1)!}$ |
| 7.9 | $\dfrac{2n^2+n+4}{n^2+n\ \ +1}$ | $\dfrac{(-1)^n\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 5^{n+1}}$ | $\dfrac{(4n+3)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+3)!}$ |
| 7.10 | $\dfrac{4n^3-2n+3}{2n^3+n^2+5n+1}$ | $\dfrac{2\cdot 4^{n+1}+3^{n+1}}{2\cdot 4^n-3^n}$ | $\dfrac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7.11 | $\dfrac{4n^3-2n+7}{2n^3+n^2-3}$ | $\dfrac{4\cdot 0{,}6^{n+1}}{0{,}5^n+1}$ | $\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+1)!(3n+5)}$ |
| 7.12 | $\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+n\ \ -3}$ | $\dfrac{(-1)^n\cdot 5^{n+1}-3^{n+2}}{3^n-(-1)^n\cdot 5^n}$ | $\dfrac{(7n+1)!+(7n+2)!}{(7n+3)!}$ |
| 7.13 | $\dfrac{5n^2-2n+1}{n^2+4n-8}$ | $\dfrac{4^{n+1}+3\cdot 7^{n+1}}{2\cdot 4^n-7^n}$ | $\dfrac{(4n-1)!-(4n+1)!}{(4n)!+(4n+1)!}$ |
| 7.14 | $\dfrac{3n^2+7n+3}{n^3+5}$ | $\dfrac{3+5\cdot 0{,}7^{n+1}}{0{,}5^n-7}$ | $\dfrac{(3n-1)!-(3n+1)!}{(3n)!(n+2)}$ |
| 7.15 | $\dfrac{5n^2+n+7}{n^2+2n^2-3}$ | $\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot 9^n-3^{n+1}}{3^n-(-1)^{n+1}\cdot 9^{n+1}}$ | $\dfrac{(5n-1)!+(5n+1)!}{(6n^2+n-7)(5n-1)!}$ |
| 7.16 | $\dfrac{n^3+5n-1}{2n^3+n^2-5}$ | $\dfrac{11^{n+1}+9^n}{11^n-9^n}$ | $\dfrac{2\cdot(4n)!+(4n+1)!}{(4n)!+2\cdot(4n+1)!}$ |
| 7.17 | $\dfrac{n^2-3}{n^2+4n-2}$ | $\dfrac{0{,}3^n+0{,}7^{n+2}}{0{,}5^n+5}$ | $\dfrac{(8n+1)!-(8n+3)!}{(8n+5)!}$ |
| 7.18 | $\dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$ | $\dfrac{100\cdot 5^n-3^{n+1}}{3^n-25\cdot 5^{n+1}}$ | $\dfrac{3n!+(n+1)!}{n!(n^2+5)}$ |
| 7.19 | $\dfrac{4n^2+3n-9}{2n^2+n-4}$ | $\dfrac{3\cdot 5^{n+1}+8^{n+1}}{5^n-8^n}$ | $\dfrac{9n!+(n+1)!}{n!(3n-1)}$ |
| 7.20 | $\dfrac{8n-5}{2n+3}$ | $\dfrac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}$ | $\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}$ |

**8** Формулируя определение предела последовательности, студент вместо

**8.1** «Выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n-a\le\varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 5 является пределом последовательности 1, 1, …, 1… .

**8.2** «Найдется такое $N_\varepsilon$, что при $n\ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$» сказал: «Найдется такое $N_\varepsilon$ , что выполняется неравенство $|x_n-a|\le\varepsilon$». Приведите пример не сходящейся последовательности, которая имеет предел при таком определении?

**8.3** «Найдется такое $N_\varepsilon$» сказал: «При всех $N_\varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

**8.4** «Для любого $\varepsilon>0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon>0$». Доказать, что при таком определении последовательность 2, 2, 2, … имеет предел 7.

**8.5** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого $\varepsilon$». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении?

**8.6** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 6 является пределом последовательности 3, 3, …, 3… .

**8.7** «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого $n$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

**8.8** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| > \varepsilon$». Существуют ли последовательности, обладающие пределом при таком определении? Если возможно, привести пример.

**8.9** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n$ имеет предел 0.

**8.10** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

**8.11** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности 4, 4, …, 4… .

**8.12** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность 4, 4, 4, … имеет предел 10.

**8.13** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 7 является пределом последовательности $\frac{1}{n}$.

**8.14** «Для любого $n \ge N_\varepsilon$» сказал: «Для любого $n > N_\varepsilon$». Какие последовательности будут иметь предел при таком определении?

**8.15** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-2)^n$ имеет предел 0.

**8.16** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Для любого $\varepsilon \ge 0$». Какие последовательности не будут иметь предел при таком определении? Привести пример.

**8.17** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 8 является пределом последовательности 5, 5, …, 5….

**8.18** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n + 1$ имеет предел 0.

**8.19** «Выполняется неравенство $|x_n - a| \le \varepsilon$» сказал: «Выполняется неравенство $x_n - a \le \varepsilon$». Доказать, что при таком определении число 10 является пределом последовательности 7, 7, …, 7….

**8.20** «Для любого $\varepsilon > 0$» сказал: «Хотя бы для одного $\varepsilon > 0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n - 1$ имеет предел 0.

**Решение типовых примеров**

**1.20** Напишите пять первых членов последовательности

$$x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2},$$

*Решение.* Для последовательности $x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{4}{9}$, $x_4 = -\frac{5}{16}$, $x_5 = \frac{6}{25}$.

**2.20** Найти формулу для общего члена последовательности, элементами которой являются корни уравнения $\sin \pi x = -1$.

*Решение.* Решая уравнение $\sin \pi x = -1$, получаем

$$\pi x = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $x_n = 1/2 + 2n, n \in \mathbb{N}$.

**3.20** Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 5 \cdot 2^n$.

*Решение.* Подставляя в рекуррентную формулу вместо $x_n$ его выражение через $x_{n-1}$, затем вместо $x_{n-1}$ его выражение через $x_{n-2}$ и так далее, получим

$$x_{n+1} = x_n + 5 \cdot 2^n = (x_{n-1} + 5 \cdot 2^{n-1}) + 5 \cdot 2^n = x_{n-1} + 5 \cdot (2^{n-1} + 2^n) =$$
$$= (x_{n-2} + 5 \cdot 2^{n-2}) + 5 \cdot (2^{n-1} + 2^n) = x_{n-2} + 5 \cdot (2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^n) = \ldots$$
$$= 1 + 5 \cdot (2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n) = 1 + 5 \cdot \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 1 + 10 \cdot (2^n - 1).$$

Таким образом, формула общего члена последовательности имеет вид:

$$x_n = 1 + 10 \cdot (2^{n-1} - 1).$$

**4.20** Выяснить, является ли последовательность $a_n$ ограниченной снизу, ограниченной сверху, ограниченной, монотонной.

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2}$$

*Решение.* Поскольку $|a_n| = \left| (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2} \right| = \frac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то последовательность является ограниченной, а, значит, ограниченной сверху и снизу.

Так как $a_3 > a_4$ и $a_4 < a_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $a_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

**5.20** Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$. Указать для $\varepsilon = 2; 0{,}01$ числа $N_\varepsilon$.

*Решение*. Приведем определение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geq N_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon .$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Найдем номер $N_\varepsilon$.

Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right| \leq \varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1} \leq \varepsilon$. Отсюда $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$.

Если взять $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ (так как при $\varepsilon \geq 1$ получим $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right] = 0 \notin \mathbb{N}$), то для всех номеров $n \geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right| \leq \varepsilon$.

Например, при $\varepsilon = 0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 99, 100, …, а при $\varepsilon = 2$ неравенство верно $\forall n \in \mathbb{N}$.

**6.20** Пользуясь отрицанием определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-1} \neq \dfrac{1}{2}$.

*Решение*. Построим отрицание определения предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \iff \exists\varepsilon > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \geq N : |a_n - a| > \varepsilon$$

Оценим $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1}-\dfrac{1}{2}\right|$. Будем иметь:

$$\left|\frac{2n+1}{3n-1}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+3}{2\cdot(3n-1)}\right| = \frac{n+3}{2\cdot(3n-1)} > \frac{n+3}{6n} = \frac{1}{6}+\frac{1}{2n} > \frac{1}{6}, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, при $\varepsilon = \dfrac{1}{6}$ имеем $\left|\dfrac{2n+1}{3n-1}-\dfrac{1}{2}\right| > \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Это означает, что число $1/2$ не является пределом данной последовательности.

**7.20** Вычислить пределы:

**А)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-5}{2n+3}$;

**Б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}$;

**В)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}$.

*Решение.*

А) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}=\left[\!\left[\begin{array}{l}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на n}\end{array}\right]\!\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{8-0}{2+0}=\frac{8}{2}=4;$$

Б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{11+0{,}9^{n+1}}{0{,}5^n+5}=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(11+0{,}9^{n+1})}{\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}5^n+5)}=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}11+\lim\limits_{n\to\infty}0{,}9^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}0{,}5^n+\lim\limits_{n\to\infty}5}=\frac{11+0}{0+5}=\frac{11}{5};$$

В) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+(n+2)!}{3\cdot(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{(n+1)!}{(n+3)!}+\frac{(n+2)!}{(n+3)!}\right)=$$

$$=\text{ по свойствам пределов }=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}+\frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+3)}\right)=\text{ по свойствам пределов }=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+3)}=0\,.$$

**8.20** «Для любого $\varepsilon>0$» – «хотя бы для одного $\varepsilon>0$». Доказать, что при таком определении последовательность $(-1)^n-1$ имеет предел 0.

*Решение*. Приведем определение предела последовательности.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \iff \forall\varepsilon>0\,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_\varepsilon: \left|x_n-a\right|\leq\varepsilon\,.$$

Заметим, что последовательность $(-1)^n-1$ не сходится, так как при $n=2k,\, k\in\mathbb{N},$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, а при $n=2k+1,\, k\in\mathbb{N},$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-2$.

С другой стороны, согласно определению предела последовательности, данному студентом, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \iff \exists\varepsilon>0\,\exists\, N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ \forall n\geq N_\varepsilon: \left|x_n-a\right|\leq\varepsilon\,.$$

Возьмем, например, $\varepsilon=5$. При $n=2k,\, k\in\mathbb{N},$ имеем $\left|(-1)^n-1-0\right|=0<5$. При $n=2k+1,\, k\in\mathbb{N},$ получим $\left|(-1)^n-1-0\right|=2<5$. Тогда для $\varepsilon=5$ и $N_\varepsilon=1$ при $\forall n\geq N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|x_n-0\right|\leq\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(-1)^n-1$ имеет предел, равный нулю, при таком определении.