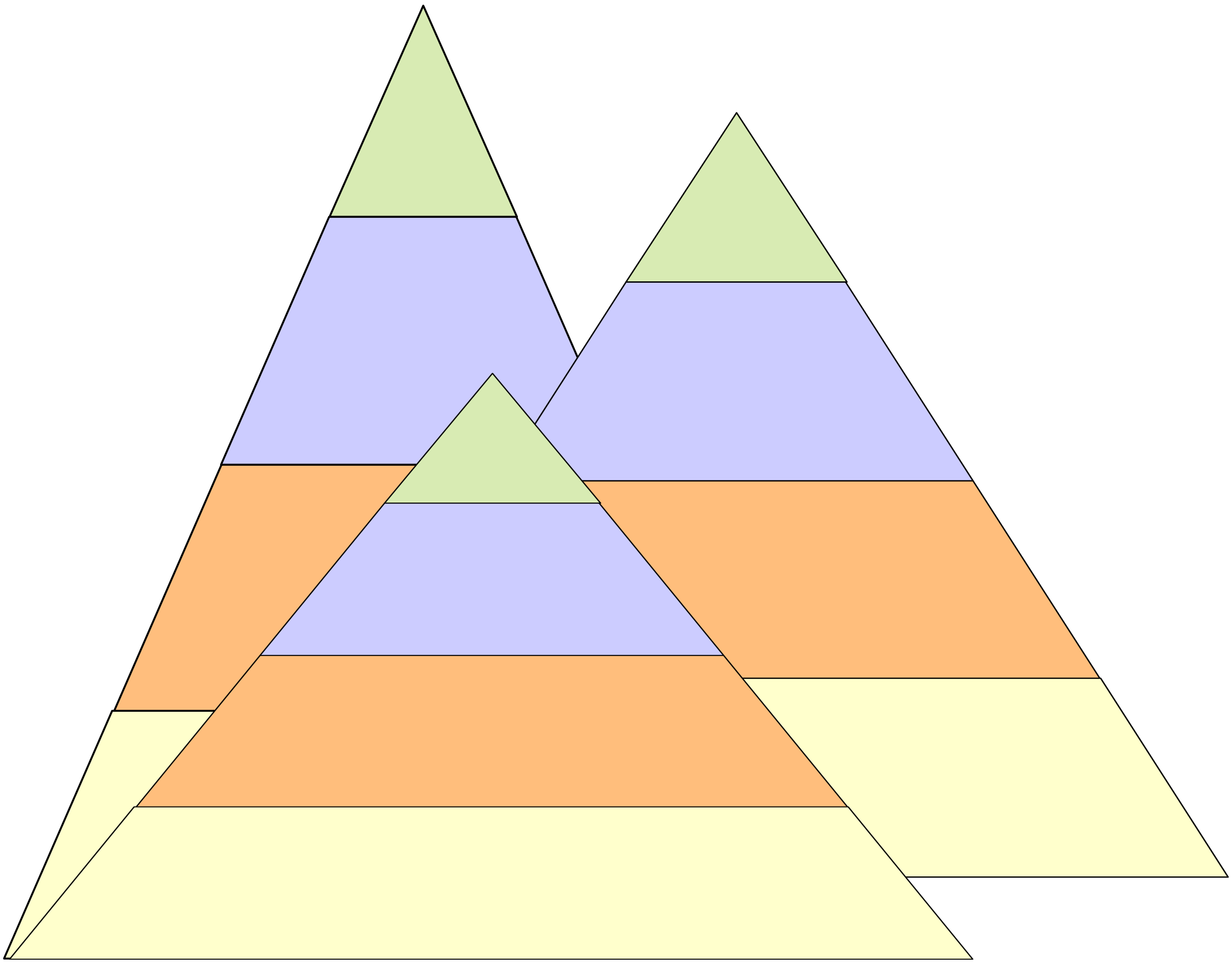
Е.В. Хорошилова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для слушателей подготовительных курсов
и абитуриентов МГУ им. М.В. Ломоносова

ЧАСТЬ 2
В 2-х частях



Москва –2008

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Е.В. Хорошилова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для слушателей подготовительных курсов
и абитуриентов МГУ им. М.В. Ломоносова

ЧАСТЬ 2

В 2-х частях

- *Функции, их свойства и графики*
- *Тригонометрия*
- *Планиметрия*
- *Стереометрия*

Изд-во ЗАО «ПСТМ»

МОСКВА – 2008

УДК 373:512
ББК 22.1я729
Х82

Рецензенты:
А.Б. Будак, к.ф.-м.н, доцент факультета ВМиК,
Л.В. Натяганов, к.ф.-м.н, доцент механико-математического факультета,
П.И. Пасиченко, к.ф.-м.н, доцент механико-математического факультета

Хорошилова Е.В.

Х82 **Математика:** Учебное пособие для слушателей подготовительных курсов и абитуриентов МГУ им. М.В. Ломоносова: В 2-х частях. Часть 2. – М.: Изд-во ЗАО «ПСТМ», 2008. – 492с.
ISBN 978-5-91380-008-4

Настоящая книга является продолжением *Части 1* учебного пособия того же автора. В представленной здесь *Части 2* рассмотрены теоретические основы базового курса элементарной математики по разделам «Функции, их свойства и графики», «Тригонометрия», «Планиметрия», «Стереометрия».

Пособие предназначено для подготовки к вступительным экзаменам по математике как в *устной*, так и в *письменной* формах. Книга включает также дополнительный материал по многим разделам, расширяющий математический кругозор учащегося и позволяющий использовать её как справочное пособие. Уделяется внимание в книге и разбору разнообразных приёмов и методов решения задач (особенно в части тригонометрии), их систематизации, в том числе задачам с оригинальными и нестандартными подходами к решению. Изложение теоретического материала для улучшения его понимания и усвоения подкрепляется большим числом иллюстрирующих задач, подобранных по темам.

В разделе «Функции, их свойства и графики» формулируются все необходимые определения и понятия из курса математического анализа, касающиеся функций одного вещественного переменного, подробно разбираются свойства элементарных функций.

В разделе «Тригонометрия» выводятся все известные и ряд вспомогательных формул для преобразований тригонометрических выражений, делается обзор существующих типов тригонометрических задач и методов их решения.

В разделах «Планиметрия» и «Стереометрия» формулируются и доказываются все необходимые теоремы курса элементарной геометрии. Автор также приводит примеры разных подходов к аксиоматике в построении современной геометрии; на основе анализа известных школьных учебников и пособий предлагает читателю возможность сравнить между собой различные способы определения геометрических понятий.

Рекомендовано для подготовительных отделений и курсов, старшеклассников и абитуриентов, проходящих подготовку к поступлению в высшие учебные заведения такие, как МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ, МГТУ им. Баумана, МИФИ, МТУСИ, ВШЭ, РЭА им. Плеханова, Финансовая академия, МГИМО и др., где требуется углублённое знание математики и умение решать задачи повышенной сложности. Пособие может быть использовано школьниками при подготовке к сдаче ЕГЭ (наиболее сложной его части), а также школьными учителями.

УДК 373:512
ББК 22.1я729

ISBN 978-5-91380-008-4

СОДЕРЖАНИЕ

---

[1] Символ $\vee$ заменяет один из знаков $<, >, \le, \ge, \ne$.

Раздел 4. СТЕРЕОМЕТРИЯ – ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой продолжение Части 1 учебного пособия с тем же названием. Как и первая часть книги, Часть 2 призвана помочь абитуриенту успешно подготовиться к сдаче двух вступительных экзаменов по математике - письменному и устному. Даже в том случае, если будущему абитуриенту не предстоит сдавать вступительный экзамен по устной математике, для уверенного решения математических задач необходимо повторить теоретический курс.

Книга написана по материалам лекций, читаемых автором, кандидатом физико-математических наук, доцентом факультета ВМиК, начиная с 2001 года и по сегодняшнее время на подготовительном отделении МГУ, а также с учётом опыта работы в экзаменационных комиссиях по математике на различных факультетах МГУ и на подготовительных курсах. Особое внимание в книге уделено математическим *формулировкам определений и утверждений*. В разделах, посвящённых геометрии, на основе анализа известных учебников и пособий проведён сравнительный анализ различий в существующих подходах к определениям важнейших геометрических понятий.

Излагаемый теоретический материал иллюстрируется разнообразными, специально подобранными по темам примерами задач. В данной книге, которая послужит и кратким учебником, и справочным пособием, можно найти ответы на большинство теоретических вопросов, сформулированных в программах по математике для поступающих в вузы, а также полезные дополнительные сведения. Работу с книгой надо обязательно сочетать с большим количеством решаемых по каждой теме задач. Только тогда теоретический материал будет в необходимой мере понят и усвоен.

Часть 2 учебного пособия включает в себя такие разделы, как «Функции, их свойства и графики», «Тригонометрия», «Планиметрия», «Стереометрия».

Несколько слов об используемых обозначениях. В тех случаях, когда ответ к тригонометрической задаче содержит запись вида «$x = \pi n$, $n \in Z$», под этим следует понимать, что решения задачи представляют собой серию, состоящую из бесконечного количества *всех* действительных чисел x указанного вида, соответствующих произвольным целым значениям числового параметра n. Иначе говоря, эта запись эквивалентна следующей: «$x = \pi n$, $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$» Аналогично запись вида «$x \in (a, b)$» означает, что x принимает *любое* значение из интервала (a, b). Во многих изданиях, посвящённых геометрии, в формулировках задач и теорем для краткости используются выражения вида «найти сторону a» или «найти угол $\angle ABC$». Подчеркнём, что, строго говоря, под этим следует понимать следующее: «найти *длину* стороны a и *величину* угла $\angle ABC$». Обозначение $\Delta\, ABC$ заменяет словосочетание «треугольник ABC», а обозначение $\measuredangle ABC$ – словосочетание «прямоугольный треугольник ABC». Далее, запись вида «*Пример 2* [Психолог.-1996]» означает, что рассматривается второй из примеров текущего пункта, а в квадратных скобках находится указание на вуз или факультет (когда речь идёт об МГУ; в данном случае психологический факультет) и год, когда задача предлагалась на вступительном экзамене.

Поскольку данное пособие могут использовать при подготовке к экзамену абитуриенты *нематематических факультетов*, требования к глубине знания предмета для которых, как правило, ниже, чем на факультетах, осуществляющих подготовку математиков, то для облегчения отбора необходимого материала те разделы и пункты, которые выходят за рамки программы для поступающих в Московский университет или за пределы стандартной школьной программы, помечены в книге знаком $^{(*)}$ или выделены более мелким шрифтом. Увидев такой знак, можно пропустить данный пункт или ознакомиться с ним «по диагонали». Ответы к примерам, разобранным в тексте пособия, опускаются в тех случаях, когда они непосредственно и с очевидностью следуют из решения.

Автор выражает искреннюю признательность доценту факультета ВМиК МГУ А.Б. Будаку за выполненную подробную рецензию книги, доцентам механико-математического факультета МГУ Л.В. Натяганову и П.И. Пасиченко за высказанные полезные замечания и советы, а также всем авторам используемых и цитируемых пособий и задач.

Раздел 1.

ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

> *«**Математический анализ** – часть математики, в которой функции и их обобщения в виде функционалов и операторов изучаются методом пределов».*
>
> *Большой энциклопедический словарь* [4]

1.1. Основные определения. Способы задания функций

Понятие функции. Область определения и множество значений функции

Считается, что впервые термин «функция» (от латинского ‘functio’ – совершение, исполнение) ввёл Лейбниц.

Лейбниц *Готфрид Вильгельм* (1646–1716) – немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед, член Лондонского королевского общества, член Парижской АН. В 1711, 1712 и 1716 годах встречался с Петром I, разработал по его просьбе ряд проектов по развитию образования и государственного управления в России. В математике важнейшей заслугой Лейбница является разработка (наряду с И.Ньютоном) дифференциального и интегрального исчислений. Последняя работа Лейбница и изобретение им счётной машины дают право считать его одним из первых разработчиков современной «машинной (компьютерной) математики».

Лейбниц ввёл также термины «переменная» и «константа». Только во второй половине XIX века благодаря развитию идей, заложенных в трудах Эйлера, Даламбера, Д.Бернулли, Фурье, Лобачевского, Дирихле, и созданию теории множеств сложилось современное понятие функции.

Введём определение однозначной функции одной действительной переменной (только такие – однозначные – функции рассматриваются в курсе элементарной математики). Пусть X и Y - непустые числовые множества, а

x и y - соответственно их элементы, действительные числа. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по некоторому закону единственное значение $y \in Y$:

$$x \xrightarrow{f} y,$$

то говорят, что на множестве X определена *функция* $y = f(x)$, причём x называют *аргументом* функции (или *независимой переменной*), а y - *значением функции*, отвечающим аргументу x (или *зависимой переменной*). В данном определении существенна *единственность* значения функции для каждого из значений аргумента. Множество X при этом называют *областью определения функции* и обозначают $D(f)$, а множество всех значений y, отвечающих каждому $x \in D(f)$, - *областью значений, или областью изменения,* функции и обозначают $E(f)$. Символ f называется *характеристикой* функции. Примеры *функций*:

1. y=sin$x$: $D(f)=R$, $E(f)=[-1,1]$;
2. $y=[x]$ (целая часть действительного числа x): $D(f)=R$, $E(f)=Z$;
3. $y=\sqrt{1-x^2}$: $D(f)=[-1,1]$, $E(f)=[0,1]$;
4. $y=tgx$: $D(f)=\left\{x \middle| x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z\right\}$, $E(f)=R$.

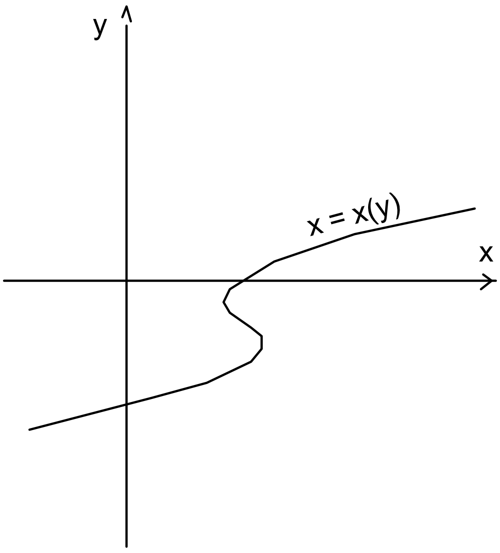
Рассмотрим несколько различных задач на эту тему.

Пример 1 [МАИ]. *Множество точек на координатной плоскости Oxy задано уравнением $2y^3 - 3ay^2 + 12ay = 6x + 18y$. При каких значениях параметра a это множество является графиком некоторой функции $y = f(x)$?*

Решение. Выражая явно x через y, приведём уравнение к виду

$$x = \frac{1}{3}y^3 - \frac{a}{2}y^2 + 2ay - 3y. \qquad (1)$$

Для того чтобы данное уравнение задавало однозначную(!) функцию $y = f(x)$, необходимо, чтобы каждому значению x отвечало единственное значение y. То есть, если зафиксировать произвольное значение $x = x_0$, то прямая, определяемая этим уравнением, должна пересекать график кривой в единственной точке. Иными словами, необходимо (и достаточно), чтобы график функции $x = x(y)$ вида (1) не имел «изгибов» (см. рис.). А это означает, что функция (1) не должна иметь локальных экстремумов. Следовательно, функция $x = x(y)$ должна иметь не более одной критической точки, т.е. уравнение $x'_y = y^2 - ay + 2a - 3 = 0$ должно иметь не более одного решения.



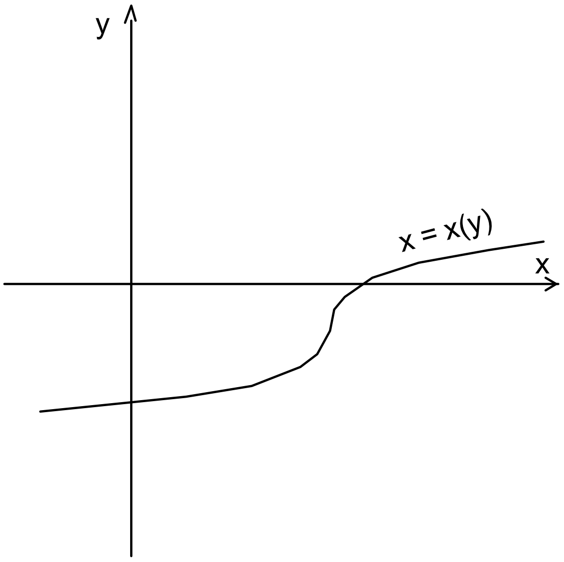


Рис.1. Невозможный случай *Рис.2.* Подходящий случай

Для этого необходимо и достаточно выполнения условия неположительности дискриминанта: $D = a^2 - 8a + 12 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le a \le 6$. *Ответ:* $a \in [2,6]$.

<u>Пример 2</u> [Психолог.-1996]. *Найти область определения функции*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{-6\sin^2 2x - 2\sin 2x \cdot \cos 2x + 8 - \sqrt{3}}}.$$

Решение. Область определения данной функции задаётся условием $-6\sin^2 2x - 2\sin 2x \cdot \cos 2x + 8 - \sqrt{3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 \cdot \frac{1-\cos 4x}{2} - \sin 4x + 8 - \sqrt{3} > 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cos 4x - \sin 4x > \sqrt{3} - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \cos 4x - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \sin 4x > \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(4x + \varphi) > \frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}$, где $\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$. Сравним числа $\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}}$ и (-1):

$\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}} \vee -1 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 5 \vee -\sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{10} \vee 5 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 10 \vee 25 - 10\sqrt{3} + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\sqrt{3} \vee 18 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} \vee 9 \Leftrightarrow 75 < 81$. Следовательно, $\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{10}} < -1$. Поэтому неравенство выполняется сразу при всех действительных x. Значит, функция определена всюду на множестве действительных чисел.

Ответ: $D(y) = R$.

<u>Пример 3</u> [ВМиК-2004,устн.] *Найти множество значений функции*

$$y = x/(1 + x^2).$$

Решение. Рассмотрим равенство, которое задаёт функцию, как алгебраическое уравнение, и преобразуем его к виду:

$$yx^2 - x + y = 0. \qquad (2)$$

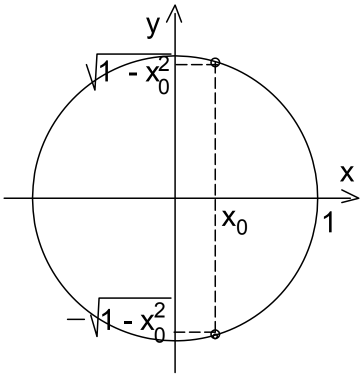
Переформулируем задачу: «При каких значениях y уравнение (2) имеет решения?»

1) Если y=0, то, подставляя в уравнение (2), находим $x = 0$.

2) Если $y \neq 0$ (тогда и $x \neq 0$), то уравнение является квадратным относительно x, и оно будет иметь решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен: $D = 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1/2 \leq y < 0 \\ 0 < y \leq 1/2. \end{array}\right.$

Объединяя все найденные значения y, получаем: $-1/2 \leq y \leq 1/2$. Следовательно, множество значений функции $E(y)$ представляет собой отрезок $[-1/2, 1/2]$.

В общем случае уравнение с двумя неизвестными $F(x, y) = 0$ задаёт на плоскости Oxy не функцию, а некоторую *линию*, или *кривую.* В качестве такого примера можно рассмотреть уравнение $x^2 + y^2 = 1$. Оно определяет на координатной плоскости Oxy окружность единичного радиуса с центром в точке начала координат.



Переменная x здесь принимает все значения из отрезка $[-1,1]$, но каждому такому x_0, за исключением $x_0 = \pm 1$, согласно уравнению, ставится в соответствие не одно, а сразу два различных значения y_0, а именно $\pm\sqrt{1 - x_0^2}$. Требование единственности y для каждого x из $[-1,1]$ нарушается, и поэтому данное уравнение не задает функцию.

Арифметические операции над функциями. Сложная функция. Способы задания функции (*)

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве X. Тогда для этой пары функций можно ввести понятие их тождественного равенства (на данном множестве), а также четыре основные арифметические операции такие, как сумма, разность, произведение и частное двух функций. Так, функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *тождественно равными на множестве* X, если обе функции определены на этом множестве и для каждого $x \in X$ справедливо числовое равенство $f(x) = g(x)$. В этом случае пишут

$$f(x) \equiv g(x).$$

Примером функций, тождественно равных на множестве всех действительных чисел, могут служить функции $f(x)=\sqrt{x^2}$ и $g(x)=|x|$. В качестве другого примера приведём функции $f(x)=2x$ и $g(x)=|x-1|+|x+1|$, которые тождественно равны на множестве $[1,+\infty)$.

Суммой, разностью, п*роизведением и частным функций* $f(x)$ и $g(x)$ называется функция, ставящая в соответствие каждому $x \in X$ соответственно число $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, причём частное определено только при тех x, при которых $g(x)\neq 0$.

Если на множестве X определена функция $u=f(x)$, а на её области изменения определена другая функция $y=F(u)$, то говорят, что на множестве X задана *сложная функция* $y=F(f(x))$, или *суперпозиция функций* F и f.

Например, функция $y=\sqrt{\sin x}$ является сложной функцией, поскольку можно положить $u=\sin x$, $y=\sqrt{u}$. Аналогично, сложной будет и функция $y=\ln(3x^2-6x+1)$, так как можно принять $u=3x^2-6x+1$, $y=\ln u$.

Существуют различные *способы задания функции*: табличный, аналитический, описательный, графический.

При *табличном способе* задания функция задаётся в виде таблицы, в которой для каждого значения аргумента указывается соответствующее ему значение функции. Такой способ задания функции часто применяется в тех случаях, когда область определения функции состоит из конечного числа значений (таблицы цен на товары, таблицы розыгрыша лотерей и проч.), при этом функция не поддаётся аналитическому описанию с помощью формул. В виде таблиц обычно записываются результаты экспериментального исследования каких-либо процессов и явлений, например, зависимость атмосферного давления или температуры воздуха от времени суток. По этому принципу построены таблицы Брадиса и многие другие таблицы. Пример табличного способа задания функции:

x	-1	0	2	5	11	20	40
y	0,1	1	$\sqrt{3}$	π	13	2	1.1

При наиболее распространённом *аналитическом* способе функция задаётся математической формулой, с помощью которой значение y вычисляется по заданному значению x. Например, $y=2x+1$, $y=\frac{x}{x+1}$, $y=\arcsin x$ и так далее. При этом функция может быть задана разными формулами на разных частях области определения, например: $y = \begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad -\pi \le x \le 0; \\ 1, & \text{если} \quad 0 < x < 1; \\ 1/x, & \text{если} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$

Если не даны какие-либо дополнительные ограничения, то областью определения функции, заданной аналитически, считают множество всех тех значений аргумента, для которого все указанные в формуле операции имеют смысл. Например, для функции $y = \ln(x+1)$ естественной областью определения служит бесконечный интервал $(-1,+\infty)$. Иногда естественную область определения функции называют *областью её существования*.

При *описательно-словесном* способе зависимость y от x выражается словесным описанием. Например, функция целой части $y = [x]$ может быть задана как функция, ставящая в соответствие произвольному действительному числу x наибольшее целое число y, не превосходящее x.

Все перечисленные выше способы обладают одним и тем же недостатком – плохой наглядностью. Наилучшим с этой точки зрения является графический способ. Рассмотрим подробнее *графический способ* задания функции. Введём прямоугольную систему координат Oxy, на оси Ox отметим отрезок $[a,b]$ и изобразим любую кривую L, обладающую следующим свойством: какова бы ни была точка $x \in [a,b]$, прямая, проходящая через неё параллельно оси Oy, пересекает кривую L в одной точке. Такая заданная в декартовой прямоугольной системе координат кривая L будет являться *графиком* некоторой функции, определённой на отрезке $[a,b]$. График определяет функцию $y = f(x)$ на $[a,b]$ следующим образом: если x - произвольная точка этого отрезка, то соответствующее значение $y = f(x)$ находится как ордината точки $M(x; f(x))$. Следовательно, с помощью графика задаётся определённый закон соответствия между x и y. Вместо отрезка $[a,b]$ можно рассмотреть интервал (a,b), полуинтервал $[a,b)$ (или $(a,b]$), луч $[a,+\infty)$ (или $(-\infty,b]$), действительную ось $(-\infty,+\infty)$ и т.д.. Можно сказать, что в прямоугольной системе координат *график функции* $y = f(x)$ – это геометрическое место точек с координатами $(x; f(x))$, где x принимает всевозможные значения из области определения функции. Хотя график функции и не даёт возможности точного определения численных значений x и y, он наглядно отражает качественное поведение функции (непрерывность, монотонность, максимумы и минимумы, точки перегиба и т.д.) и является поэтому важным средством исследования функции.

Прямоугольная и полярная системы координат. Явный, неявный и параметрический способы задания кривых на плоскости (*)

Создателем метода координат на плоскости считается Р.Декарт.

Декарт *Рене* (1596-1650) – французский философ и математик.

Декарт заложил основы аналитической геометрии, создав метод координат, ввёл многие современные алгебраические обозначения.

Термин «координата» произошёл из латыни. Латинская приставка ‘co-’ обозначает *объединение*, *общность*; ‘ordinatus’ означает *упорядоченный*. Термин «абсцисса» восходит к латинскому ‘abscissa’ – *отрезанная*.

Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек на плоскости заданием пар чисел, то говорят, что *на плоскости задана система координат*. Плоскость в этом случае называют *координатной плоскостью*. Рассмотрим простейшую и чаще всего употребляемую в курсе средней школы систему координат, которая называется *прямоугольной*.

Пусть дан отрезок, длина которого принята за единицу измерения длины на плоскости, т.е. введён *масштаб*. Пусть даны две взаимно перпендикулярные прямые. Точку пересечения прямых будем считать началом отсчёта, или *началом координат*. На каждой прямой зададим положительное направление и отложим от начала координат заданный единичный отрезок. Таким образом, на каждой прямой введена своя система координат. Эти прямые называют координатными прямыми, или *координатными осями*, причём одну из них принято называть *осью абсцисс*, а другую – *осью ординат*.

Обычно начало координат обозначают буквой O, ось абсцисс – буквами Ox, а ось ординат – буквами Oy. На рисунках координатные оси обычно располагаются так, чтобы ось абсцисс была горизонтальной и её положительная полуось направлена вправо, а положительная полуось ординат – вверх. Вообще, положительные направления на осях координат обычно выбирают так, чтобы положительный луч Oy оси ординат получался из положительного луча Ox оси абсцисс поворотом на 90^0 против часовой стрелки.

Пусть M – произвольная точка координатной плоскости. Проведём из точки M перпендикуляры на координатные оси. Величины расстояний от оснований этих перпендикуляров до точки начала координат с учётом знаков однозначно задают две координаты точки M - её абсциссу (откладывается на оси Ox) и ординату (откладывается на оси Oy). Таким образом, положение любой точки на координатной плоскости однозначно определяется упорядоченной парой действительных чисел x и y – её *прямоугольными координатами*. Обе координаты точки $(x;y)$ могут принимать произвольные действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Конечно, координаты одной и той же точки в различных прямоугольных системах координат будут различными. Заметим также, что координатные оси разбивают всю плоскость на четыре *координатные четверти*, или квадранты, а каждая из осей делит плоскость на две полуплоскости.

В общем случае, если отступить от требования перпендикулярности осей координат, то получим систему координат, называемую *декартовой*. Прямоугольная система координат есть частный случай декартовой (угол $\angle XOY = 90^0$). Когда угол $\angle XOY$ острый или тупой, декартова система координат называется *косоугольной, или аффинной*. Всюду в этом пособии система координат предполагается прямоугольной, если не оговорено противное.

Наряду с декартовыми, существуют другие виды систем координат на плоскости, и наиболее известная из них – *полярная система координат*. Рассмотрим на плоскости луч OP с началом в некоторой точке O. Назовём его *полярной осью*, а точку O - *полюсом*. Слово «полюс» происходит от греческого «ось». Примем некоторый отрезок за единичный и введём масштаб на полярной оси. Обычно полярная ось направлена от точки O вправо.

Введём полярные координаты на плоскости: полярный радиус и полярный угол. Для этого рассмотрим произвольную точку M координатной плоскости, отличную от полюса. Соединим точки M и O. Отрезок OM назовём *полярным радиусом* точки M, а его длину, измеренную с помощью единичного отрезка, назовём длиной полярного радиуса и обозначим через r. Ниже в тексте пособия будем использовать для краткости одно и то же наименование «полярный радиус» как для собственно отрезка OM, так и для его длины r. Полярным радиусом точки O будем считать число 0. Число r может принимать произвольные неотрицательные значения. При этом r=0 тогда и только тогда, когда взятая точка совпадает с полюсом.

Полярным углом точки M назовём угол величины φ между лучами OP и OM, который отсчитывается от полярной оси в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки. Полярный угол может принимать произвольные действительные значения от -∞ до +∞. При этом отрицательный угол отсчитывается от полярной оси в отрицательном направлении, т.е. по часовой стрелке. Таким образом, положение точки M на плоскости задаётся парой чисел r и φ: $M(r;\varphi)$. Эти числа называются *полярными координатами* точки M. Полюс O – единственная точка плоскости, для которой величина полярного угла не определена.

В отличие от декартовых координат, полярные координаты не задают взаимно-однозначного соответствия между точками плоскости и множеством всех таких пар чисел $(r;\varphi)$, для которых $r \geq 0$. Например, точки $M_n(\varphi_0 + 2\pi n; r_0)$ при всевозможных целых n отображаются в полярной системе координат одной точкой (полярный угол задается с точностью до числа, кратного 2π). Однако если наложить ограничения на область изменения полярного угла и считать $0 \le \varphi < 2\pi$, то указанная выше неоднозначность остаётся только в точке полюса.

Рассмотрим *связь полярных координат с декартовыми координатами*. Пусть задана прямоугольная система координат Oxy. Примем точку O за полюс, а луч Ox – за полярную ось OP. Тогда в данной плоскости имеем одновременно две координатные системы: прямоугольную декартову и полярную. Установим связь между ними. Пусть M – произвольная точка плоскости, не совпадающая с точкой O. Очевидно, что в данной ситуации выполняются равенства $\begin{cases}\cos\varphi = x/r\\ \sin\varphi = y/r\end{cases}$, определяющие связь между прямоугольными $(x;y)$ и полярными $(r;\varphi)$ координатами. Отсюда получаем формулы

$$\begin{cases}x = r\cdot\cos\varphi\\ y = r\cdot\sin\varphi\end{cases}, \tag{1}$$

с помощью которых по известным полярным координатам $(r;\varphi)$ любой точки можно определить отвечающие им прямоугольные координаты $(x;y)$ этой точки.

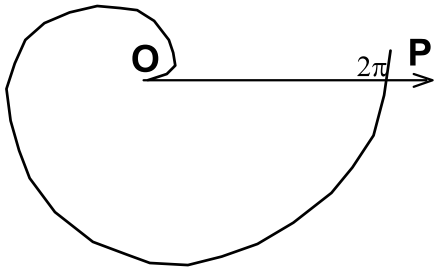
Обратно, пусть заданы прямоугольные координаты $(x;y)$ точки M. Если точка M совпадает с точкой O, то r=0, а φ может быть произвольным числом. Если же точка M не совпадает с точкой O, то возведём равенства (1) в квадрат и сложим: $x^2 + y^2 = r^2$, откуда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда величина угла φ находится из соотношений

$$\begin{cases}\cos\varphi = x\big/\sqrt{x^2 + y^2}\\ \sin\varphi = y\big/\sqrt{x^2 + y^2}.\end{cases}$$

Рассмотрим примеры кривых, задаваемых уравнениями в полярной системе координат.

1. Окружность с центром в полюсе и радиусом r_0 в полярной системе координат задаётся простым уравнением $r = r_0$.

2. Простейшая *спираль Архимеда* задаётся уравнением $r = \varphi$. При этом спираль раскручивается в направлении против хода часовой стрелки (см. рис. ниже). Спираль Архимеда может быть определена как траектория точки, участвующей одновременно в двух равномерных движениях, одно из которых совершается вдоль луча, выходящего из полюса, а другое – по окружности. Кривая допускает параметризацию уравнениями $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ $(0 \le t < +\infty))$ (см. о параметрическом способе задания кривых ниже).



Свойства этой плоской кривой впервые были изучены Архимедом. Кривая имеет бесконечное число витков. Расстояние между двумя последовательными витками (считая по произвольному лучу) равно 2π и является, как видно, постоянной величиной. Уравнение $r=-\varphi$ будет задавать уже другую спираль, витки которой будут раскручиваться по ходу часовой стрелки (изобразите эту кривую самостоятельно).

Существуют следующие способы аналитического задания линий (или кривых) на плоскости: *явный, неявный и параметрический*. Если обратиться к прямоугольной системе координат, то при *явном способе* задания кривой переменная y явно выражается через переменную x формулой

$$y=f(x). \qquad (2)$$

При этом значения x берутся из некоторого непустого числового множества X. В этом случае принято говорить, что уравнение (2), задающее кривую, *разрешено* относительно переменной y. Это, пожалуй, самый распространённый и удобный для исследования свойств кривых способ их задания на плоскости.

В других случаях кривая может быть задана уравнением с двумя переменными x и y вида

$$F(x,y)=0, \qquad (3)$$

не разрешённым относительно переменной y. Тогда говорят о *неявном способе* задания кривой. Например, уравнение $xy=1$ задаёт неявным образом на плоскости гиперболу. Иногда такое уравнение (3) удаётся разрешить относительно y, приведя его к явному виду (2), как, например, в случае с гиперболой $y=1/x$. Иногда сделать это оказывается принципиально невозможно, и тогда кривую исследуют, прибегая к существующим методам математического анализа, ориентированным на этот класс кривых.

Наконец, плоские кривые могут задаваться *параметрически*, т.е. посредством вспомогательного параметра t, при этом параметр принимает значения из некоторого непустого множества T, и каждому значению параметра t ставиться в соответствие точка $(x;y)$ с координатами, задаваемыми системой равенств

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \text{ где } t\in T.$$

Заметим, что явный способ задания кривой в действительности является частным случаем параметрического способа. В самом деле, параметризуя кривую $y = y(x)$, $x \in X$, получим $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$, где t берётся из множества допустимых значений X.

В качестве примера плоской кривой, задаваемой параметрически, можно привести спираль Архимеда. Другой пример – окружность радиуса R с центром в начале координат. Её параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases},$$

где $t \in [0,2\pi)$. При изменении значений параметра t от 0 до 2π точка с координатами $(x(t);y(t))$, начиная от точки $(R;0)$, непрерывно описывает один раз против часовой стрелки указанную выше окружность, возвращаясь при $t=2\pi$ в исходную точку. Та же самая окружность может быть задана неявно уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. В то же время, если разбить эту замкнутую кривую на две полуокружности – верхнюю и нижнюю, то каждая из них по отдельности задаётся явно одним из уравнений: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (верхняя полуокружность) или $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ (нижняя полуокружность).

Основные кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола$^{(*)}$

Алгебраические линии (кривые) 2-го порядка определяются на плоскости в системе прямоугольных координат Oxy алгебраическими уравнениями 2-й степени с двумя неизвестными x, y. Общее уравнение кривой 2-го порядка имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (т.е. по крайней мере один из коэффициентов A, B, C не обращается в нуль).

Для каждой кривой 2-го порядка, имеющей хотя бы одну действительную точку, существует прямоугольная система координат, в которой данная кривая описывается своим *каноническим* (простейшим) уравнением:

а) невырожденные кривые:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс;
2. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ – гипербола;
3. $y^2 = 2px$ или $x^2 = 2py$ – парабола;

б) вырожденные кривые:

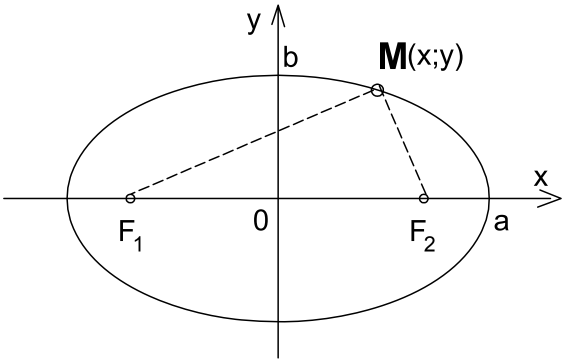
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – точка;

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – две пересекающиеся прямые;

6. $\frac{x^2}{a^2}=1$ или $\frac{y^2}{b^2}=1$ – две параллельные прямые;

7. $x^2=0$ или $y^2=0$ – прямая.

Рассмотрим невырожденные кривые на плоскости. Начнём с *эллипса*. В природе по эллиптическим орбитам движутся планеты и некоторые из комет. Простейший эллипс с центром в точке начала координат и осями симметрии, совпадающими с координатными осями, задаётся неявным образом с помощью *канонического уравнения*



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (1)$$

где параметры $a, b>0$ называются *полуосями* эллипса, или же двумя параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi).$$

При $a=b$ эллипс превращается, в частности, в окружность радиуса a с центром в $(0;0)$. Если $a>b$, то a и b называются соответственно *большой и малой полуосями* эллипса; если $a<b$, то наоборот. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси симметрии, называются его *вершинами*.

У каждого эллипса имеются две характерные точки F_1 и F_2, расположенные на большей полуоси и называемые *фокусами* эллипса. В случае $a>b$, изображённом на рисунке, фокусы имеют координаты $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. В случае $a<b$ фокусы расположены на оси Oy и имеют координаты $F_1(0;-c), F_2(0;c)$, где c вычисляется по формуле $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Длина отрезка F_1F_2 при этом называется *фокусным расстоянием* (и равна $2c$), а середина этого отрезка – точка O - *центром* эллипса.

Обозначим через r_1 и r_2 для любой точки M, принадлежащей эллипсу, длины отрезков F_1M и F_2M (расстояния от M до фокусов). Числа r_1 и r_2 имеют название *фокальных радиусов* точки M.

Число ε, равное отношению c к большей полуоси, называется *эксцентриситетом* эллипса и служит мерой «вытянутости» эллипса. Таким образом, $\varepsilon = \frac{c}{a}$, если $a \geq b$, и $\varepsilon = \frac{c}{b}$, если $a < b$. Эксцентриситет любого эллипса может принимать значения $0 \leq \varepsilon < 1$, причём у окружности $\varepsilon = 0$.

Пусть эллипс отличен от окружности $(\varepsilon \neq 0)$. Тогда на расстоянии $d = \frac{a}{\varepsilon}$ $(a > b)$ или $d = \frac{b}{\varepsilon}$ $(a < b)$ от центра эллипса по обе стороны от него перпендикулярно большей оси эллипса расположены две прямые, называемые *директрисами* эллипса. Если обозначить через d_1 и d_2 – расстояния от точки $M(x;y)$ до директрис, то $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Эллипс можно определить как геометрическое место точек плоскости $M(x;y)$, для которых сумма расстояний до двух данных фиксированных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами. Уточним, что эта сумма расстояний численно равна большей оси эллипса (т.е. $r_1 + r_2 = 2a$, если $a \geq b$).

Эллипс (1) можно получить из окружности радиуса a при равномерном её сжатии в $\frac{a}{b}$ раз вдоль оси Oy: $(x;y) \to \left(x;\frac{b}{a}y\right)$. Отметим также, что при проектировании окружности на какую-либо плоскость, расположенную под углом α к плоскости окружности, имеем проекцию в виде эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = \cos\alpha$.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами (и равная $2a$, см. обозначение ниже). Гипербола состоит из двух ветвей, причём фокальные радиусы r_1 и r_2 точки $M(x;y)$ удовлетворяют одному из условий $r_1 - r_2 = 2a$ или $r_2 - r_1 = 2a$ (в зависимости от того, какой из двух ветвей гиперболы принадлежит эта точка). Любая гипербола имеет две асимптоты и центрально симметрична относительно точки пересечения асимптот.

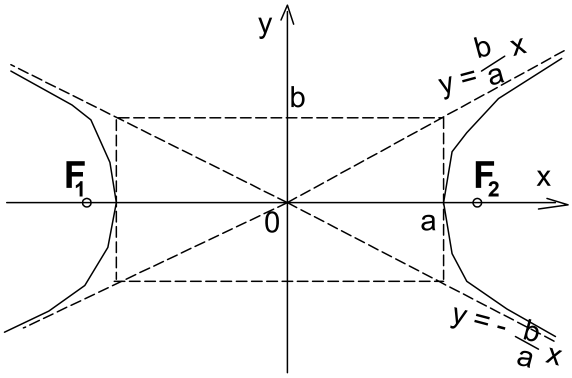
Рассмотрим гиперболу, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где параметры $a,b > 0$ называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Гипербола имеет две оси симметрии (в данном случае совпадающие с осями координат), называемые *осями* гиперболы.

Точка пересечения осей является центром симметрии гиперболы и носит название *центра* гиперболы. В точках пересечения гиперболы с одной из осей образуются две *вершины* гиперболы. Эта ось называется *действи-*

тельной осью гиперболы, другая ось – *мнимой осью*. Расстояние между вершинами равно $2a$, а расстояние между мнимыми вершинами равно $2b$.



На расстоянии $c=\sqrt{a^2+b^2}$ от центра на действительной оси гиперболы располагаются два *фокуса* (на рисунке имеющие координаты $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$). Уравнения *асимптот* в данном случае имеют вид $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$. Положительные числа a и b носят названия *действительной и мнимой полуосей* гиперболы. Гипербола с равными полуосями $(a=b)$ называется равнобочной, у таких гипербол асимптоты перпендикулярны друг другу. Обычно в курсе средней школы изучаются только равнобочные гиперболы, асимптоты которых параллельны координатным осям, являющиеся графиками дробно-линейных функций $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0;a^2+b^2\neq 0\right)$.

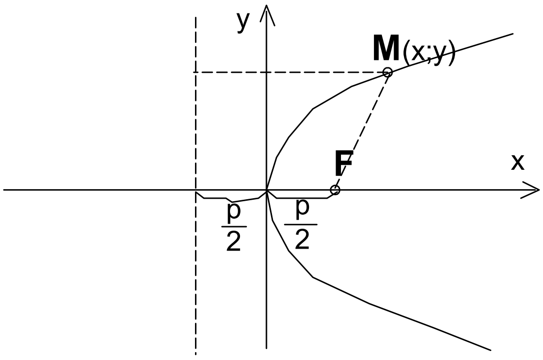
Число ε, равное отношению c к действительной полуоси, называется *эксцентриситетом* гиперболы. Таким образом, $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$.

На расстоянии $d=\frac{a}{\varepsilon}<a$ от центра гиперболы по обе стороны от него перпендикулярно действительной оси расположены две прямые, называемые *директрисами* гиперболы. Если обозначить через d_1 и d_2 – расстояния от точки $M(x;y)$ до директрис, то $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$.

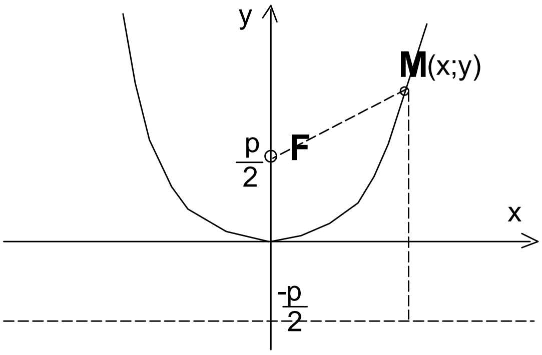
Гипербола (2) может быть также задана параметрически при помощи гиперболических функций: $\begin{cases}x=acht\\y=bsht\end{cases}$, $t\in(-\infty,+\infty)$.

Гиперболой, *сопряжённой* к гиперболе (2), называется гипербола, задаваемая уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. Её ветви расположены в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$ симметрично друг другу относительно оси Ox. Вершины сопряжённой гиперболы лежат на оси Oy. Обе гиперболы (исходная и сопряжённая к ней) имеют одни и те же асимптоты.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии как от данной точки (фокус), так и от данной прямой (директриса), не проходящей через фокус. Каноническое уравнение параболы имеет один из двух видов: $y^2 = 2px$ или $x^2 = 2py$. Число p называется *фокальным параметром* параболы.



В первом случае парабола имеет вид, изображённый на рисунке (при $p > 0$). Вершина парабола находится в начале координат, фокус имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ и расположен на оси параболы, совпадающей с осью абсцисс; директриса перпендикулярна оси параболы и имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$. Число $|p|$ имеет смысл расстояния от фокуса до директрисы. Пусть $r = FM$ (фокальное расстояние точки M, лежащей на параболе), d – расстояние от M до директрисы. Тогда для любой точки M имеем $\frac{r}{d} = \varepsilon = 1$.



Во втором случае ось параболы совпадает с осью ординат и при $p > 0$ получаем кривую (см. рис.).

Вообще, если ось параболы параллельна оси ординат, её уравнение в общем виде будет $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Именно такие кривые изучаются в школьном курсе элементарной математики.

Итак, кривые 2-го порядка могут быть определены при помощи фокального свойства: это геометрические места точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до заданной прямой (директриса) есть величина постоянная, равная ε (эксцентриситету). При $0 \le \varepsilon < 1$ получается эллипс, при $\varepsilon = 1$ – парабола, при $\varepsilon > 1$ – гипербола.

Следует отметить, что любая кривая 2-го порядка, заданная в системе прямоугольных координат Oxy общим уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

может быть записана уравнением в каноническом (простейшем) виде. Переход к новой системе координат, в которой уравнение имеет простейший вид, осуществляется при помощи двух преобразований координат: параллельного переноса центра координат на вектор $\{\alpha;\beta\}$

$$(x;y)\to(x';y'),\text{ где }\begin{cases}x=x'+\alpha\\ y=y'+\beta\end{cases},$$

и поворота осей координат против часовой стрелки вокруг центра координат на угол величины φ

$$(x';y')\to(x'';y''),\text{ где }\begin{cases}x'=x''\cos\varphi-y''\sin\varphi\\ y'=x''\sin\varphi+y''\cos\varphi\end{cases}.$$

В результате в системе координат $Ox''y''$ данная кривая будет записана уравнением в каноническом виде.

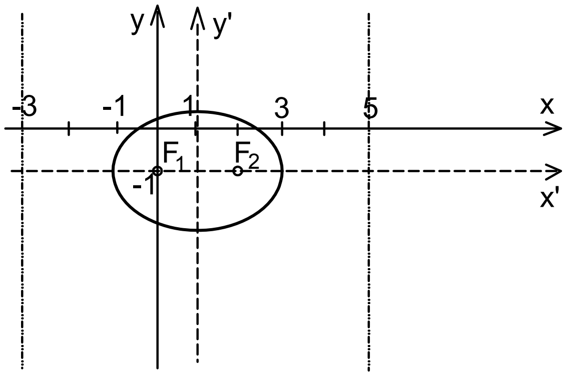
Пример. Приведя уравнение кривой $3x^2+4y^2-6x+8y-5=0$ к каноническому виду, определить тип кривой, её основные параметры и изобразить кривую.

Решение. Выделяя полные квадраты по x и y, преобразуем уравнение

$$3\left(x^2-2x+1\right)+4\left(y^2+2y+1\right)-12=0\Leftrightarrow 3(x-1)^2+4(y+1)^2=12,$$

или
$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{3}=1.$$

Обозначим $\begin{cases}x'=x-1\\ y'=y+1\end{cases}$, тогда в системе координат $Ox'y'$ уравнение примет вид $\frac{x'^2}{2^2}+\frac{y'^2}{\sqrt{3}^2}=1$. Это уравнение эллипса. Определим его основные характеристики:



большая полуось $a=2$, меньшая полуось $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$ и в системе $Ox'y'$ фокусы имеют координаты $F_1(-1;0)$, $F_{21}(1;0)$. Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, директрисы имеют уравнения $x'=\pm d$, где $d=\frac{a}{\varepsilon}=4$. Кривая имеет вид, изображённый на рисунке.

В полярной системе координат кривые также могут задаваться:

1) явным образом при помощи уравнения, разрешённого относительно одной из переменных: $r=r(\varphi)$, $\varphi\in\Phi$, или $\varphi=\varphi(r)$, $r\in\Psi$;

2) неявно уравнением $F(r;\varphi)=0$;

3) параметрически с помощью системы уравнений $\begin{cases}\varphi=\varphi(t)\\ r=r(t)\end{cases}$, где $t\in T$.

1.2. Общие свойства функций

Рассмотрим подробнее *свойства* функций, заданных в прямоугольной системе координат.

Ограниченные и неограниченные функции. Точные верхняя и нижняя грани функции$^{(*)}$. Наибольшее и наименьшее значения функции

Функция $y = f(x)$, определённая на непустом множестве X $\left(X \subseteq D(f)\right)$, называется *ограниченной снизу* на этом множестве, если существует такое действительное число m, что неравенство

$$f(x) \geq m$$

выполняется при всех $x \in X$. Число m называется при этом *нижней гранью* функции $f(x)$. У любой функции, ограниченной снизу, существует бесконечно много нижних граней.

Наибольшая из всех нижних граней функции (она всегда существует и единственна) называется *точной нижней гранью*, или *инфинумом,* и обозначается

$$\inf_{x \in X} f(x).$$

Если функция $f(x)$ не ограничена снизу, то её точная нижняя грань считается равной $-\infty$.

Например, так как при всех $x \in R$ верно неравенство $\sin x \geq -100$, то, согласно определению, функция $y = \sin x$ ограничена снизу на всей своей области определения, причём число $m = -100$ является одной из нижних граней этой функции. При этом $\inf\limits_{x \in R} \sin x = -1$. Показательная функция $y = 2^x$ ограничена снизу на всей области определения, так как, например, $2^x > -1$ при любом действительном x, и в качестве числа m можно взять (-1) или любое другое неположительное число, при этом $\inf\limits_{x \in R}\left(2^x\right) = 0$. Для неограниченной снизу функции $y = -x^2$ имеем: $\inf\limits_{x \in R}\left(-x^2\right) = -\infty$.

Аналогично, функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует такое действительное число M, что при всех $x \in X$ справедливо неравенство

$$f(x) \leq M .$$

Число M называется при этом *верхней гранью* функции. Если функция ограничена сверху, то у неё существует бесконечно много верхних граней. Наименьшая из всех верхних граней функции (она, как и инфинум, всегда существует и единственна) называется *точной верхней гранью*, или *супре-*

мумом, и обозначается

$$\sup_{x\in X} f(x).$$

Если функция $f(x)$ не ограничена сверху, то её точная верхняя грань считается равной $+\infty$.

Например, $\sup\limits_{x\in R}\sin x = 1$. Для функции $y = 1/x^2$, имеющей область изменения $E(y) = (0,+\infty)$, находим: $\inf\limits_{x\in R\setminus\{0\}}\left(1/x^2\right) = 0$, $\sup\limits_{x\in R\setminus\{0\}}\left(1/x^2\right) = +\infty$. Функция $y = -x^2$ ограничена сверху, так как при всех $x \in R$ верно $-x^2 \le 0$ и $\sup\limits_{x\in R}\left(-x^2\right) = 0$.

Наконец, функция $y = f(x)$ называется *ограниченной с обеих сторон*, или просто *ограниченной*, если существует такое положительное число M, что сразу при всех $x \in X$ выполняется неравенство:

$$-M \le f(x) \le M \ \ (|f(x)| \le M).$$

Например, функция $y = 3\sin^2 5x + 1$ является ограниченной, так как при всех $x \in R$ справедливо неравенство $\left|3\sin^2 5x + 1\right| \le 4$. Выполнив более точную оценку значений функции $1 \le 3\sin^2 x + 1 \le 4$, устанавливаем, что

$$\inf_{x\in R}\left(3\sin^2 5x + 1\right) = 1 \text{ и } \sup_{x\in R}\left(3\sin^2 5x + 1\right) = 4.$$

Геометрически понятие ограниченности функции $y = f(x)$ на множестве X означает, что график данной функции на этом множестве находится внутри некоторой горизонтальной полосы. Можно доказать, что функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, ограничена на этом множестве тогда и только тогда, когда она одновременно ограничена на нём и снизу, и сверху.

Сформулируем теперь определение того, что данная функция *не является ограниченной сверху* на заданном множестве. Для этого составим отрицание соответствующего определения ограниченности функции. Получим, что функция $y = f(x)$ называется *неограниченной сверху на множестве* X, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдётся такое, вообще говоря, зависящее от M, число $x_0 \in X$, что $f(x_0) > M$.

Покажем, пользуясь этим определением, что функция $y = x\sin x$ не ограничена сверху на R. Выберем произвольное (сколь угодно большое) положительное число M и найдём такое значение аргумента x_0, что $x_0 \sin x_0 > M$. Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in N$. Тогда $f(x_n) = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n > M$, начиная с номера $n_0 = \left[\left(M - \dfrac{\pi}{2}\right)/(2\pi)\right] + 1$. Таким образом, в качестве x_0 выбираем x_{n_0}, и тогда по определению получаем, что функция не ограничена сверху на R.

Аналогично формулируются определения функции, которая является неограниченной снизу, а также неограниченной одновременно и снизу, и сверху на заданном множестве.

Рассмотрим без доказательства некоторые *свойства ограниченных функций* [8]. Они доказываются, исходя из определения ограниченной функции.

Свойства ограниченных функций

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и ограничены на одном и том же множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $|f(x)|$ также ограничены на множестве X. В частности, функции $cf(x)$ (c – константа) и $f^2(x)$ ограничены на множестве X.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, и функция $f(x)$ ограничена на этом множестве, а функция $g(x)$ такова, что $|g(x)| > M > 0$ (M – некоторое число), то функция $f(x)/g(x)$ ограничена на множестве X.

3. Если функция $f(x)$ ограничена, то сложные функции $\sqrt[n]{f(x)}$, $a^{f(x)}$, $\sin f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\cos f(x)$, $\arccos f(x)$, $arctgf(x)$, $arcctgf(x)$ ограничены на том множестве, на котором они определены.

Рассмотрим теперь понятия наименьшего и наибольшего значений функции. Число M называется *наибольшим значением* функции $y = f(x)$ на множестве X $(X \subseteq D(f))$, если:

1) для всех значений $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$;

2) существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = M$.

Аналогично, число m называется *наименьшим значением* функции $y = f(x)$ на множестве X, если:

1) для всех значений $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \ge m$;

2) существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = m$.

Наибольшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ принято обозначать через $\max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, а наименьшее – через $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. При этом точек x_0, в которых функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, может не быть вовсе (например, у функции $y = x$ на множестве $X = (-\infty, +\infty)$), может быть конечное число (например, у функции $y = ||x| - 1|$ наименьшее значение, равное нулю, достигается в двух точках $x = \pm 1$) или бесконечно много ($y = \sin x$). Если функция $y = f(x)$, $x \in X$, не является ограниченной сверху (снизу) на множестве X, то она не имеет наибольшего (наименьшего) значения на этом множестве. Заметим, что и ограниченная функция может не достигать наибольшего и наименьшего значений (например, функция $y = arctgx$).

Итак, в отличие от точных верхней и нижней граней, наибольшее и наименьшее значения у функции существуют не всегда. Кроме того, они не могут, как это следует из определения, принимать бесконечные значения. Точная верхняя грань совпадает с наибольшим значением функции только в том случае, когда она достигается при каком-нибудь значении $x_0 \in X$. Аналогичное замечание можно сделать и относительно случаев совпадения точной нижней грани функции с её наименьшим значением. Существует теорема (*2-я теорема Вейерштрасса*), которая утверждает, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$ всегда достигает своих точных нижней и верхней граней, которые будут в этом случае являться соответственно наименьшим и наибольшим значениями этой функции.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $y = f(x)$, имеющей на этом отрезке конечное число локальных экстремумов, нужно вычислить значения функции в каждой экстремальной точке, а также на концах отрезка, и из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее).

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X и в точке x_0, $x_0 \in X$, принимает своё наибольшее значение, тогда имеют место следующие *свойства* (случай наименьшего значения рассматривается аналогично).

Свойства наибольшего значения функции

1. Пусть C – некоторая действительная константа, тогда:

а) если $C > 0$, то в точке x_0 функция $C \cdot f(x)$ принимает наибольшее значение на множестве X;

б) если $C < 0$, то в точке x_0 функция $C \cdot f(x)$ принимает наименьшее значение на множестве X. В частности, в точке x_0 функция $(-f(x))$ принимает наименьшее значение на множестве X.

2. Функция $f(x) + C$, где C – константа, в точке x_0 принимает наибольшее значение на множестве X.

3. Если всюду на множестве X функция $f(x)$ принимает положительные (отрицательные) значения (т.е. функция сохраняет знак на этом множестве), то в точке x_0 функция $1/f(x)$ принимает наименьшее значение на множестве X.

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на X, и в точке x_0 одновре-

менно принимают наибольшее на X значение. Тогда в точке x_0 их сумма $f(x)+g(x)$ также принимает наибольшее значение на множестве X.

5. Если всюду на множестве X функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, то своё наибольшее на данном множестве значение эта функция принимает при тех же значениях x, что и функция $f^2(x)$.

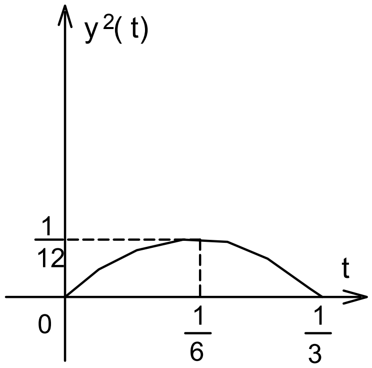
Аналогичные свойства справедливы для локальных экстремумов функции $f(x)$ на множестве X.

6. Если функция g определена и возрастает на области изменения функции $f(x)$, то сложная функция $g(f(x))$, определённая на X, принимает в точке x_0 своё наибольшее значение.

Пример 1 [ВМиК-2004]. *Найти наибольшее значение функции*

$$y = x\cdot\sqrt{1-3x^2}\ .$$

Решение. Найдём область определения функции: $D(y)=\left[-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\right]$. Заметим, что при неотрицательных значениях переменной x функция принимает неотрицательные значения, а при отрицательных – отрицательные. Поэтому своё наибольшее значение данная функция принимает на отрезке $\left[0,1/\sqrt{3}\right]$. Тогда внесём x под знак радикала: $y=\sqrt{x^2-3x^4}$. Так как на отрезке $\left[0,1/\sqrt{3}\right]$ функция $y(x)$ принимает неотрицательные значения, то наибольшее значение функции достигается при тех же x, что и наибольшее значение функции $y^2(x)$.



Найдём наибольшее значение функции $y^2(x)=x^2-3x^4$ на отрезке $\left[0,1/\sqrt{3}\right]$. Обозначив $t=x^2$, сведём к задаче нахождения наибольшего значения функции $y^2(t)=t-3t^2=t(1-3t)$ на отрезке $[0,1/3]$. Построим график этой функции. Очевидно, что наибольшее значение $y^2(t)$ достигается при $t=1/6$ и равно $y^2(1/6)=1/12$. Так как наибольшее значение функции $y^2(x)$ равно $1/12$, то, следовательно, наибольшее значение исходной функции $y(x)$ равно $1/\sqrt{12}$.

Замечание. Можно было решить задачу другим способом, сделав тригонометрическую подстановку $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t$, где $t\in[-\pi/2,\pi/2]$.

Пример 2 [Психолог.-1978] *Найти наибольшее значение функции*

$$f(x)=\frac{10}{x^2+4\pi x+41}+\cos x\,.$$

Решение. Выделим полный квадрат по переменной x в знаменателе дроби и найдём его наименьшее значение:

$$x^2+4\pi x+41=(x+2\pi)^2-4\pi^2+41\geq -4\pi^2+41>0\,,$$

так как $(2\pi)^2<(2\cdot 3{,}2)^2=40{,}96<41$. Итак, наименьшее значение знаменателя равно $-4\pi^2+41$, положительно и достигается при $x=-2\pi$. Дробь принимает при этом значении своё наибольшее значение, равное $\dfrac{10}{41-4\pi^2}$. Заметим, что второе слагаемое $\cos x$ при этом же значении x достигает своего наибольшего значения, равного 1. Поэтому при $x=-2\pi$ сумма обоих слагаемых, т.е. исходная функция $f(x)$, также достигает своего наибольшего значения, которое равно $\dfrac{10}{41-4\pi^2}$+1.

<u>Пример 3</u> [ВМК-2004,устн.] *Найти наименьшее значение функции*

$$y=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+x+1}.$$

При каких x *оно достигается?*

Решение.

$$\begin{array}{l|l}
\_\;x^4+2x^3+3x^2+2x+2 & x^2+x+1\\ \cline{2-2}
\underline{x^4+x^3+x^2} & x^2+x+1\\
\quad\_\;x^3+2x^2+2x & \\
\quad\underline{x^3+x^2+x\quad} & \\
\qquad\_\;x^2+x+2 & \\
\qquad\underline{x^2+x+1\quad} & \\
\qquad\qquad 1 &
\end{array}$$

Таким образом, $y=x^2+x+1+\dfrac{1}{x^2+x+1}\geq 2$ (в силу неравенства о сумме двух взаимно обратных положительных чисел), причём наименьшее значение, равное 2, достигается тогда и только тогда, когда $x^2+x+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1.\end{array}\right.$

<u>Пример 4</u> [ВМК-2004,устн.] *Найти наибольшее значение функции* $y=(1-x)^5\cdot(1+2x)^2\cdot(1+x)$ *на отрезке* $[-1/2{,}1]$.

Решение. На указанном отрезке числа $1-x\,,1+2x\,,1+x$ неотрицательны. Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для восьми чисел:

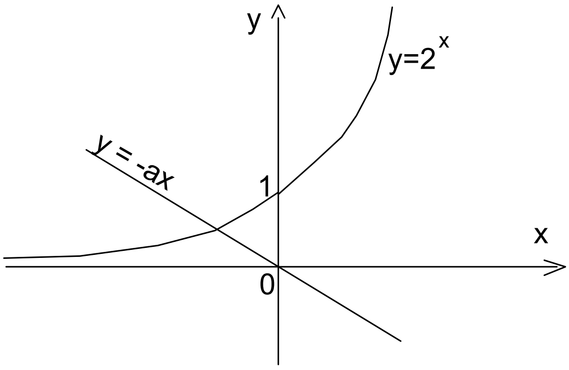
$$(1-x)^5\cdot(1+2x)^2\cdot(1+x)\leq\left(\frac{5(1-x)+2(1+2x)+(1+x)}{8}\right)^8=1\,,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все восемь чисел равны между собой, т.е. $1-x=1+2x=1+x \Leftrightarrow x=0$. Итак, $\max\limits_{x\in[-0,5;1]} y(x)=1$.

<u>Пример 5</u> [ВМК-2005,устн.] *Для каждого* $a>0$ *найти наименьшее значение функции* $f(x)=4^x+2^{x+1}ax+a^2x^2$.

Решение. Преобразуем функцию, выделив полный квадрат:

$$f(x)=\left(2^x+ax\right)^2\ge 0$$

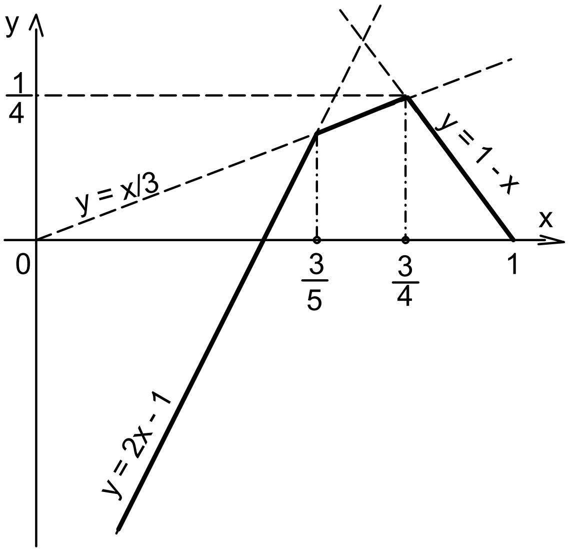


при всех $x\in R$. Покажем, что наименьшее значение функции, равное 0, достигается. Воспользуемся для этих целей графическим подходом.

Достаточно показать, что уравнение $2^x=-ax$ имеет решение. Действительно, построив графики функций $y=2^x$ и $y=-ax$, убеждаемся, что они имеют общую точку $(x<0)$.

<u>Пример 6</u> [ВМК-2004,устн.] *Найти наибольшее значение функции* $y=\min\left(1-x;2x-1;\dfrac{x}{3}\right)$ *на отрезке* $[0,1]$.

Решение. Решим задачу при помощи графического подхода. Для этого построим в одной системе координат графики всех трёх функций: $y=1-x$, $y=2x-1$, $y=x/3$. Найдём точки их попарного пересечения, попадающие в отрезок $[0,1]$, это $x=3/5$ и $x=3/4$. Эти точки разбивают сегмент $[0,1]$ на три части. На каждой из них выбираем график, лежащий ниже (не выше) других. Таким образом, аналитическое представление функции можно записать следующим образом:



$$y=\min(1-x;2x-1;x/3)=$$

$$=\begin{cases}2x-1, & если \quad 0\le x\le 3/5,\\ \dfrac{x}{3}, & если \quad 3/5\le x\le 3/4,\\ 1-x, & если \quad 3/4\le x\le 1.\end{cases}$$

График функции имеет вид, изображённый на рисунке. Из графика видно, что

$$\max_{x\in[0;1]} y(x)=y(3/4)=1/4.$$

Заметим, что данная задача имеет и чисто аналитическое решение.

Пример 7 [ВМК-2003,устн.] *Найти наименьшее значение функции*

$$y=\sqrt{x^2-3x+2}-x\,.$$

Решение. Найдём вначале область $E(y)$ всех возможных значений данной функции. Сформулируем задачу в виде: «При каких y уравнение $y=\sqrt{x^2-3x+2}-x$ имеет решения?» Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y+x\ge 0\\ (y+x)^2=x^2-3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x\ge 0\\ (2y+3)x=2-y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y+x\ge 0\\ x=\dfrac{2-y^2}{2y+3} \end{cases} \left(т.к.\quad y\ne -\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y+\dfrac{2-y^2}{2y+3}\ge 0\\ x=\dfrac{2-y^2}{2y+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y+1)(y+2)}{2y+3}\ge 0\\ x=\dfrac{2-y^2}{2y+3}. \end{cases}$$

Решения первого из неравенств образуют собой объединение промежутков $\left[\begin{array}{l} -2\le y<-3/2\\ y\ge -1. \end{array}\right.$ Таким образом, $E(y)=[-2,-3/2)\cup[-1,+\infty)$. Следовательно, наименьшее значение функции равно –2.

Иногда встречаются задачи, в которых требуется найти наименьшее и (или) наибольшее значения выражения, зависящего от двух или нескольких переменных. Сформулируем определение наибольшего значения выражения от двух переменных $f(x;y)$ на заданном множестве.

Пусть выражение $f(x;y)$ определено на некотором непустом множестве Ω координатной плоскости Oxy. Число M называется *наибольшим значением* выражения $f(x;y)$ на множестве Ω, если выполняются два следующих условия:

1) для любой пары $(x;y)\in\Omega$ выполняется неравенство $f(x;y)\le M$;

2) существует пара чисел $(x_0;y_0)\in\Omega$ такая, что $f(x_0;y_0)=M$.

Определение наименьшего значения выражения $f(x;y)$ формулируется аналогично.

Пример 8. *Найти наименьшее значение выражения*

$$f(x;y)=x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}\,.$$

Решение. Преобразуем выражение $f(x;y)$ и после этого оценим его значения (при $xy\ne 0$):

$$f(x;y)=\left(x^2-y^2\right)^2+2\left(\frac{1}{x^2y^2}+x^2y^2\right)\ge 4\,,$$

так как $\left(x^2-y^2\right)^2 \geq 0$ и сумма двух взаимно обратных положительных чисел $\frac{1}{x^2y^2}+x^2y^2 \geq 2$. Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда оба слагаемых одновременно достигают своих наименьших значений, т.е. $\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^2=0\\ 1/\left(x^2y^2\right)+x^2y^2=2\end{cases}$. Заметим, что пара чисел $x=y=1$ является решением этой системы, т.е. $f(1;1)=4$. Итак, наименьшее значение выражения равно 4.

Чётные и нечётные функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X таком, что для любого значения аргумента $x\in X$ значение $(-x)$ также принадлежит множеству X. Тогда функция $y=f(x)$ называется *чётной* (на этом множестве), если для любого $x\in X$ выполняется равенство

$$f(-x)=f(x).$$

(это равенство называют *условием чётности*).

Согласно определению, чётная функция определена на множестве X, симметричном относительно точки начала координат. Примерами таких множеств могут служить множества: всё множество действительных чисел $(-\infty,+\infty)$; объединение промежутков $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$; отрезок $[-a,a]$; интервал $(-a,a)$; множество $\{-2;-1;1;2\}$. Если же функция $y=f(x)$ определена на множестве X, не обладающем свойством симметричности относительно $x=0$, например, на полуинтервале $[-a,a)$, то такая функция не может быть чётной.

Как следует из определения, график любой чётной функции симметричен относительно оси ординат. Примеры чётных функций: $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x^4}$, $y=\cos x$, $y=\ln|x|$, $y=8^{x^2}$. Не всегда по внешнему виду уравнения, задающего функцию, можно легко распознать её чётность. Рассмотрим пример.

Пример 1. Определить, является ли функция чётной:

$$f(x)=\left(\log_2\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(x-\log_3\frac{2+x}{2-x}\right)?$$

Решение. Найдём вначале область определения данной функции: $\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>0\\ \frac{2+x}{2-x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\ 1<x<2.\end{array}\right.$ Это множество симметрично относительно начала координат, следовательно, функция может быть чётной. Далее, проверим, выполняется ли для любого x из области определения функции условие чётности $f(-x)=f(x)$:

$$f(-x)=\left(\log_2\frac{(-x)+1}{(-x)-1}\right)\cdot\left((-x)-\log_3\frac{2+(-x)}{2-(-x)}\right)=\left(-\log_2\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(x+\log_3\frac{2-x}{2+x}\right)=$$

$$=\left(\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}\right)\left(x-\log_3\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}\right)=\left(\log_2\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(x-\log_3\frac{2+x}{2-x}\right)=f(x).$$

Поскольку указанное условие выполняется, то, значит, функция является чётной.

Функция $y=f(x)$, определённая на множестве X, симметричном относительно $x=0$, называется *нечётной*, если для любого значения $x\in X$ выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x)$$

(*условие нечётности*). График любой нечётной функции центрально симметричен относительно точки начала координат. Последнее означает, что для любого $x\in X$ точки плоскости $(x;f(x))$ и $(-x;f(-x))$ симметричны относительно точки $(0;0)$, которая является центром симметрии. Примеры нечётных функций: $y=x$, $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=tgx$, $y=1/x$, $y=arctgx$. Из определения нечётной функции, в частности, следует, что если точка $x=0$ принадлежит множеству X, то $f(0)=0$.

<u>Пример 2</u>. Определить, является ли функция нечётной:

$$f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)?$$

Решение. Проверим симметричность области определения, которая задаётся неравенством $x+\sqrt{1+x^2}>0$. Этому неравенству удовлетворяет любое действительное x. В самом деле, если x=0, то $x+\sqrt{1+x^2}=1>0$. Для любого $x\neq 0$ из оценок

$$x+\sqrt{1+x^2}=x+|x|\cdot\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\geq x+|x|\geq 0,$$

следует, что неравенство также выполняется. Таким образом, область определения данной функции симметрична относительно точки начала координат. Далее, для любого действительного x справедлива следующая цепочка равенств:

$$f(-x)=\log_2\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)=\log_2\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\log_2\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\log_2\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\log_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x).$$

Отсюда по определению нечётной функции следует, что данная функция является нечётной.

При построении графиков чётных и нечётных функций достаточно, например, построить только правую ветвь графика – для неотрицательных значений аргумента. Левая ветвь достраивается симметрично относительно оси Oy для чётной функции и кососимметрично (т.е. симметрично относительно точки начала координат) для нечётной. Единственной функцией, заданной на симметричном относительно начала координат множестве X и являющейся одновременно чётной и нечётной на этом множестве, есть функция $f(x) \equiv 0$ при любом $x \in X \subseteq R$.

Рассмотрим некоторые из *свойств* чётных и нечётных функций, доказываемые исходя из определений этих функций [8].

Свойства чётных и нечётных функций

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ есть чётные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$) тоже чётны на множестве X.

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ есть нечётные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$ – нечётны на X, а функции $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ ($g(x) \neq 0$) чётны на множестве X.

3. Если $f(x)$ – чётна, а $g(x)$ – нечётна ($f(x)$ и $g(x)$ не равны тождественно нулю), и обе функции заданы на одном множестве X, то $f(x) \pm g(x)$ не является ни чётной, ни нечётной, а $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ – нечётны на X.

4. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ – чётны, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ – чётна. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ – нечётны, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ – нечётна. Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ – разной чётности, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ – чётна.

Докажем, например, что сумма двух нечётных функций есть нечётная функция, а произведение двух нечётных функций есть чётная функция. Пусть при всех $x \in X$ $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$. Обозначим $P(x) = f(x) + g(x)$ и $Q(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Тогда $P(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -P(x)$

и $Q(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = Q(x)$,

что, в силу определения, означает, что $P(x)$ – нечётная функция, а $Q(x)$ – чётная функция.

Наряду с чётными и нечётными функциями есть функции (их большинство), не являющиеся ни теми, ни другими, например, такими являются функции $y = 2^x$, $y = \lg x$, $y = \arccos x$, $y = \sqrt{x}$. Эти функции называют *функциями общего вида*. Рассмотрим ещё несколько примеров.

Пример 3. Определить, является ли функция чётной, нечётной или общего вида: а) $y=|x-2|-3|x|+|x+2|$*; б)* $y=\ln\frac{1-x}{2+x}$*; в)* $y=\arccos(\cos x)$*;*

$$\text{г) } y=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x - \text{рационально};\\ -1, & \text{если} \quad x - \text{иррационально}.\end{cases}$$

Решение. а) Поскольку при всех действительных значениях x справедливо $y(-x)=|-x-2|-3|-x|+|-x+2|=|x+2|-3|x|+|x-2|=y(x)$, то функция, по определению, является чётной.

б) Найдём область определения функции, она задаётся неравенством $\frac{1-x}{2+x}>0$. Так как множество решений этого неравенства – интервал $(-2,1)$ – не симметрично относительно точки $x=0$, то данная функция не может быть ни чётной, ни нечётной. Следовательно, это функция общего вида.

в) Поскольку $\forall x\in R$ имеем $y(-x)=\arccos(\cos(-x))=\arccos(\cos x)=y(x)$, то, в силу определения чётной функции, данная функция является чётной.

г) Воспользуемся тем фактом, что число, противоположное рациональному числу, является рациональным. Аналогично, число, противоположное иррациональному числу, является иррациональным. Поэтому имеем

$$y(-x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad (-x)\in Q,\\ -1, & \text{если} \quad (-x)\in R\setminus Q,\end{cases}=y(x),$$

т.е. функция чётная. Докажем следующую теорему.

Теорема. Всякую функцию, определённую на множестве X*, симметричном относительно начала координат, можно представить в виде суммы функций, каждая из которых определена на том же множестве* X *и одна из которых чётная, а другая – нечётная.*

Доказательство. Пусть функция $y=f(x)$ имеет область определения X, симметричную относительно начала координат. Покажем, что существуют функции $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, каждая из которых определена на том же множестве X, и они такие, что $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, где $\varphi(x)$ – чётная, а $\psi(x)$ – нечётная функция. Положим $\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Ясно, что каждая из этих функций определена на множестве X и что при всех $x\in X$ $\varphi(-x)=\varphi(x)$, $\psi(-x)=-\psi(x)$, причём $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Такое представление единственно. Действительно, предположим, что существует ещё одно представление

$$f(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ – чётная функция, $\psi_1(x)$ – нечётная функция. Тогда при всех $x\in X$

верно тождество

$$\varphi(x)+\psi(x)\equiv\varphi_1(x)+\psi_1(x),$$

т.е.

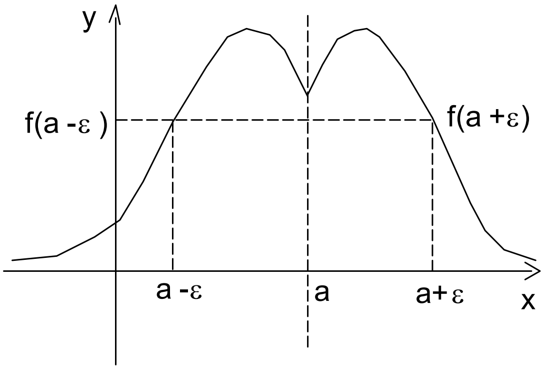
$$\varphi(x)-\varphi_1(x)\equiv\psi_1(x)-\psi(x).$$

При этом в левой части тождества находится чётная функция, а в правой – нечётная функция, и они тождественно равны. Единственная функция, которая одновременно является чётной и нечётной на X – это тождественный нуль. Следовательно, $\varphi_1(x)\equiv\varphi(x)$ и $\psi_1(x)\equiv\psi(x)$. Таким образом, данное представление единственно.

<u>Пример 4</u> [ВМиК-2001]. *Если можно, то представить функцию* $f(x)=\dfrac{3^x+x^2}{\sin x}$ *в виде суммы чётной и нечётной функций в области, где она определена.*

Решение. Заметим, что, во-первых, область определения данной функции ($x\neq\pi n, n\in Z$) симметрична относительно $x=0$. Поэтому функцию можно представить в виде соответствующей суммы. Во-вторых, выпишем $f(-x)=\dfrac{3^{-x}+(-x)^2}{\sin(-x)}=-\dfrac{3^{-x}+x^2}{\sin x}$.Тогда, в силу доказанной выше теоремы, получаем искомое представление $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, где $\varphi(x)=\dfrac{\dfrac{3^x+x^2}{\sin x}-\dfrac{3^{-x}+x^2}{\sin x}}{2}=$ $=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2\cdot\sin x}$ – чётная функция, $\psi(x)=\dfrac{\dfrac{3^x+x^2}{\sin x}+\dfrac{3^{-x}+x^2}{\sin x}}{2}=\dfrac{3^x+3^{-x}+2x^2}{2\cdot\sin x}$ – нечётная функция.

Функции, имеющие оси и центры симметрии



Обобщая понятия чётной и нечётной функций, можно ввести понятие функции, симметричной относительно некоторой вертикальной прямой, заданной на плоскости уравнением $x=a$, а также функции, имеющей центр симметрии в произвольной точке $(a;b)$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X, симметричном относительно точки $x=a$. Прямая $x=a$ называется *осью симметрии* для графика функции $y=f(x)$ на множестве X, если для любого (положительного) числа ε такого, что точки $a-\varepsilon$ и

$a+\varepsilon$ принадлежат множеству X, выполняется равенство (см. рис. выше)

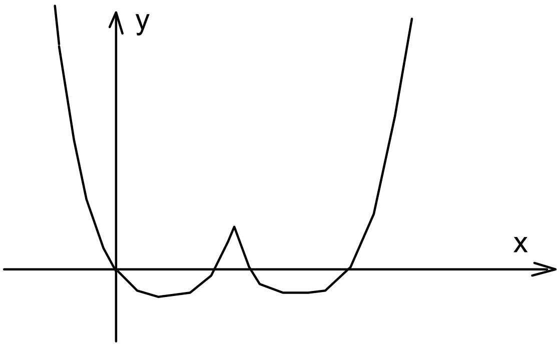
$$f(a-\varepsilon)=f(a+\varepsilon).$$

Так, график функции вида $y=f(|x-a|)$ имеет ось симметрии $x=a$.

<u>Пример 1</u> [МГИМО-2001]. *На рисунке представлен график функции*

$$y=a(x+d)^2+b|x+d|+c.$$

Определить знаки коэффициентов a,b,c,d.



Решение. 1) Поскольку уравнение, определяющее данную функцию, можно переписать в виде

$$y=a|x+d|^2+b|x+d|+c=f(|x+d|),$$

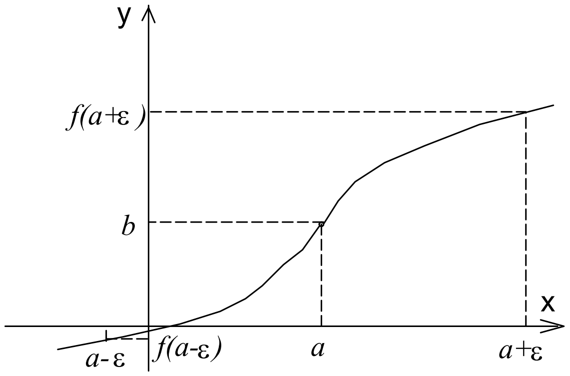
где $f(x)=ax^2+bx+c$, то заключаем, что уравнение оси симметрии графика функции есть $x=-d$. По рисунку видно, что ось симметрии расположена в правой полуплоскости, т.е. $-d>0 \Leftrightarrow d<0$.

2) По рисунку замечаем, что $y(-d)>0 \Leftrightarrow c>0$.

3) Рассмотрим промежуток $x<-d$. Раскрыв на этом промежутке модуль, получим, что $y=a(x+d)^2-b(x+d)+c$. Поскольку соответствующая парабола имеет ветви, направленные вверх, то отсюда делаем вывод, что $a>0$.

4) Наконец, учтём, что график функции проходит через точку начала координат, т.е. $y(0)=0 \Leftrightarrow ad^2+b|d|+c=0 \Leftrightarrow ad^2-bd+c=0 \Leftrightarrow b=\dfrac{ad^2+c}{d}<0$.

Ответ: $a>0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$.



Сформулируем теперь определение центра симметрии графика функции.

Точка O с координатами $(a;b)$ называется *центром симметрии* графика функции $y=f(x)$ на множестве X, если это множество симметрично относительно точки $x=a$ и для любого (положительного) числа ε такого, что точки $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$ принадлежат множеству X, выполняется равенство:

$$f(a-\varepsilon)-b=b-f(a+\varepsilon).$$

Например, функция $y=(x-2)^3-1$ имеет центр симметрии в точке $(2;-1)$, т.к. $f(2-\varepsilon)+1=-1-f(2+\varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon)^3=-\varepsilon^3$ - верно при всех $\varepsilon \in R$.

График функции может иметь несколько или даже бесконечно много осей или центров симметрии. Так, например, тангенсоида $y=tg(x)$ имеет бесконечно много центров симметрии. Любая из точек с координатами $(\pi n;0)$, где $n\in Z$, служит центром симметрии для соответствующей ветви графика, расположенной на интервале $(-\pi/2+\pi n;\pi/2+\pi n)$, и одновременно для всего графика в целом.

Пример 2 [ВШЭ-1996]. *При* $x>2$ *задана функция* $f(x)=\sqrt[3]{x+6}-2x$. *Какой формулой можно доопределить функцию* $f(x)$ *при* $x<2$, *если известно, что график* $f(x)$ *симметричен относительно точки* $M(2;-1)$*?*

Решение. Так как $M(2;-1)$ является центром симметрии, то при произвольном $\varepsilon>0$ справедливо равенство

$$f(2+\varepsilon)-(-1)=(-1)-f(2-\varepsilon).$$

Перепишем данное равенство в виде

$$f(2-\varepsilon)=-2-f(2+\varepsilon). \qquad (1)$$

Обозначим $t=2-\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$, то $t<2$ и $2+\varepsilon=4-t>2$. Тогда, используя условие задачи, из равенства (1) получаем:

$$f(t)=-2-f(4-t)=-2-\left(\sqrt[3]{(4-t)+6}-2\cdot(4-t)\right)=\sqrt[3]{t-10}+6-2t.$$

Таким образом, при $x<2$ функцию можно доопределить по формуле

$$f(x)=\sqrt[3]{x-10}+6-2x.$$

Замечание. У этой задачи имеется другой способ решения, основанный на переходе от системы координат $(x;y)$ к новой системе координат $(u;v)$ такой, что $\begin{cases}u=x-2\\ v=y+1.\end{cases}$ В этой системе координат функция $v=v(u)$ будет нечётной.

Найдем $v(u)$ при $u<0$. Поскольку $\begin{cases}x=u+2\\ y=v-1,\end{cases}$ то уравнение $y=\sqrt[3]{x+6}-2x$ при условии $x>2$ ($u>0$) преобразуется в результате замены переменных к виду

$$v-1=\sqrt[3]{u+8}-2(u+2), \text{ или } v=\sqrt[3]{u+8}-2u-3.$$

Итак, при $u>0$ $v(u)=\sqrt[3]{u+8}-2u-3$. Осталось записать условие нечётности функции $v=v(u)$:

$$\forall u\in R\quad v(-u)=-v(u)=-\left(\sqrt[3]{u+8}-2u-3\right)=\sqrt[3]{(-u)-8}-2(-u)+3, \text{ где } u>0.$$

Отсюда находим, что при $u<0$ функция $v=v(u)$ определяется так: $v(u)=\sqrt[3]{u-8}-2u+3$. Переходя обратно к переменным $(x;y)$, получаем при $x<2$: $y+1=\sqrt[3]{(x-2)-8}-2(x-2)+3$, откуда, выражая y, окончательно находим $y=\sqrt[3]{x-10}-2x+6$.

Пример 3 [Почвовед.-2004]. *Доказать, что график функции*

$$y = 4x + \log_2\left(\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4}\right)$$

имеет центр симметрии, и найти координаты $(x; y)$ *этого центра симметрии.*

Решение. Так как область определения функции задаётся неравенством

$$\frac{x^2+5x}{x^2+3x-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5 \\ -4 < x < 0 \\ x > 1, \end{array}\right.$$

а это множество симметрично относительно точки $x = -2$, то график функции может быть симметричен только относительно точки $(-2; y(-2)) = (-2; -8)$. Докажем, что эта точка является центром симметрии. Сделав подстановку $\begin{cases} t = x+2 \\ s = y+8, \end{cases}$ получим в новой системе координат функцию $s(t) = 4t + \log_2\frac{t^2+t-6}{t^2-t-6}$, для которой достаточно проверить условие нечётности $s(-t) = -s(t)$: $s(-t) = -4t + \log_2\frac{t^2-t-6}{t^2+t-6} = -s(t)$, что верно при всех t из области определения этой функции.

Периодические функции

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *периодической*, если существует действительное число $T \neq 0$, называемое *периодом функции*, такое, что при любом $x \in X$:

1) числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат множеству X;

2) выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

Заметим, что если для данной функции $f(x)$ существует хотя бы одно число $T \neq 0$, удовлетворяющее определению периодической функции, то существуют сразу бесконечно много периодов, поскольку, например, любое число nT, кратное периоду T $(n \in Z)$, также будет периодом функции. Из определения периодической функции следует, что если T_1 и T_2 – её периоды, причём $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ также является периодом этой функции.

Наименьший из положительных периодов данной функции, если он существует, называется её *главным (основным) периодом*. Не всякая периодическая функция имеет главный период. Ниже будет рассмотрен пример одной из таких функций. Однако, если функция $f(x)$ непрерывная, периодическая и отличная от постоянной, то она имеет главный период.

Перечислим (без доказательства, в силу ограниченности объёма книги) важнейшие *свойства периодических функций*, вытекающие из определения периодичности. Ниже в тексте пособия буквой T, если не оговорено отдельно, будем обозначать именно главный период функции.

Свойства периодических функций

1. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то для любого x из области определения функции число $x + nT$, $n \in Z$, также принадлежит области определения функции, и при этом выполняется равенство

$$f(x + nT) = f(x).$$

Следовательно, периодическая функция любое свое значение принимает бесконечное число раз. При этом если периодическая функция не определена в некоторой точке x_0, то она не определена сразу во всех точках вида $x_0 + nT$, $n \in Z$.

2. График периодической функции представляет собой последовательность одинаковых повторяющихся участков длиной $|T|$.

3. Если функция $y = g(x)$ периодична с периодом T, то *сложная функция* $y = f(g(x))$, если она определена хотя бы в одной точке, также периодична с периодом T. Заметим, что главный период сложной функции $y = f(g(x))$ может уменьшиться по сравнению с главным периодом функции $g(x)$. Например, главный период функции $y = \sin x$ равен 2π, а главный период сложной функции $y = |\sin x|$ равен π.

4. Если функция $f(x)$ периодична с периодом T, A – любое действительное число, не равное нулю, то функции $f(x) \pm A$, $A \cdot f(x)$, $f(x \pm A)$ также периодичны с периодом T. То есть такие преобразования графиков функций, как параллельный перенос вдоль координатных осей и растяжение (сжатие) графика вдоль оси ординат не влияют на периодичность функции и не меняют её периода. Например, функции $y = \sin x + 1$, $y = 5\sin x$, $y = \sin(x - 1)$ будут периодическими с тем же периодом 2π, как и у обычного синуса.

5. Если функция $f(x)$ периодична с периодом T, A – любое действительное число, не равное нулю, то функция $f(Ax)$ также периодична, причём с периодом, равным $T/|A|$. То есть преобразования графиков функций, связанные с растяжением (сжатием) вдоль оси абсцисс, изменяют в соответствующее число раз период этих функций. Таким образом, если функция $f(x)$ периодична с периодом T, то функция $y = A \cdot f(Bx + C) + D$, где $B \neq 0$, будет периодической с периодом, равным $T/|B|$.

6. Если функция $f(x)$ периодична с периодом T_1, а функция $g(x)$ периодична с периодом T_2, причём отношение T_1/T_2 является рациональным числом (периоды T_1 и T_2 в этом случае называются *соизмеримыми*), то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ будут периодическими, и их период равен наименьшему числу T, при делении которого на T_1 и T_2 в результате получаются целые числа.

Не всегда сумма периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ является периодической функцией. Это имеет место в том случае, когда периоды функций T_1 и T_2 несоизмеримы.

7. Никакая строго монотонная на всей области определения функция не может быть периодической, так как любая периодическая функция каждое своё значение принимает бесконечное число раз, а монотонная функция любое своё значение принимает только один раз.

Пример 1. Установить, является ли функция периодической, и если да, то найти её период:

а) $y = (a-1) \cdot x + 2 - a$; *б)* $y = \sqrt{\{x\}+1}$; *в)* $y = \sin x + \cos \pi x$; *г)* $y = \sin \sqrt{x}$.

Решение. а) Данная функция является линейной. Выясним, при каких значениях параметра a она может быть периодической. Предположим, что функция периодична с периодом T. Тогда, согласно определению периодической функции, при всех действительных значениях x должно выполняться условие периодичности

$$f(x+T) \equiv f(x) \Leftrightarrow (a-1) \cdot (x+T) + 2 - a \equiv (a-1) \cdot x + 2 - a \Leftrightarrow (a-1) \cdot T \equiv 0 .$$

Так как $T \neq 0$, то получаем, что данное условие выполняется только при $a = 1$. При этом функция тождественно равна единице, любое отличное от нуля число T является её периодом. Однако главного периода у этой функции не существует, так как не существует наименьшего положительного числа.

б) Данная функция $y = \sqrt{\{x\}+1}$ будет периодической с периодом, равным 1, так как её можно представить как сложную функцию вида $y = f(g(x))$, где $g(x) = \{x\}$, и $f(g) = \sqrt{g+1}$, а дробная часть числа x является периодической функцией с периодом, равным 1.

в) функция $f(x) = \sin x + \cos \pi x$ непериодическая, несмотря на то, что каждая из функций $y = \sin x$ и $y = \cos \pi x$ является периодической. Докажем это методом «от противного». Предположим, что данная функция периодична с некоторым периодом $T \neq 0$. Тогда при всех $x \in R$ выполняется условие периодичности

$$f(x+T) \equiv f(x) \Leftrightarrow \sin(x+T) + \cos \pi(x+T) \equiv \sin x + \cos \pi x .$$

Положим в этом равенстве $x = 0$, а затем $x = -T$.

Имеем систему $\begin{cases} \sin T + \cos \pi T = 1 \\ 1 = -\sin T + \cos \pi T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin T = 0 \\ \cos \pi T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = \pi n, n \in Z \setminus \{0\} \\ \pi T = 2\pi k, k \in Z \setminus \{0\}. \end{cases}$

Отсюда получаем, что $\pi n = 2k$, т.е. $\pi = 2k/n$, что невозможно, так как слева в равенстве стоит иррациональное, а справа – рациональное число. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение о периодичности функции было неверным.

г) Непериодичность функции $y = \sin\sqrt{x}$ следует, например, из того, что её область определения $D(y) = [0, +\infty)$, в то время как для периодической функции должно выполняться свойство: если T – период, то $\forall x \in R$ и $\forall n \in Z$ числа $x + nT$ одновременно или входят, или не входят в область определения функции. Данная же функция определена при $x = 0$, но, скажем, отрицательное число $x = -|T|$ заведомо не принадлежит её области определения.

<u>Пример 2</u>. Доказать, что главным периодом функции $y = \sin x$ является $T = 2\pi$.

Доказательство. Существует наглядное обоснование этого факта, основанное на определении синуса на тригонометрической окружности $[1]$. Приведём другое, аналитическое, доказательство – методом «от противного». Предположим, что у функции $y = \sin x$ существует положительный период T, меньший 2π. Тогда $\forall x \in R$ выполняется условие периодичности

$$\sin(x + T) \equiv \sin x \Leftrightarrow \sin(x + T) - \sin x \equiv 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin(T/2) \cdot \cos(x + (T/2)) \equiv 0. \qquad (1)$$

Так как сомножитель $\cos(x + (T/2))$ обращается в нуль не при всех действительных x, то тождество (1) выполняется $\forall x \in R$ тогда и только тогда, когда $\sin(T/2) = 0 \Leftrightarrow T = 2\pi n$, $n \in Z$. Однако, ни при каком целом n число T вида $2\pi n$ не удовлетворяет ограничению $0 < T < 2\pi$. Полученное противоречие доказывает, что главным периодом функции является 2π.

<u>*Пример 3*</u> [ВМиК-2000,устн.] *Найти основной период функции*

$$y = \cos^2(3x - (\pi/4)).$$

Решение. Прежде чем находить основной период данной функции, упростим её: $y = \cos^2(3x - (\pi/4)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(6x - (\pi/2))) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin 6x$. Функция $y = \sin 6x$ имеет основной период $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Умножение функции на коэффициент $1/2$ и добавление к ней константы $1/2$ не влияют на величину основного периода, который остаётся равным $\pi/3$.

Пример 4 [Геолог.-2000,устн.] *Найти период* T *функции*

$$y = 2 \cdot \sin\frac{2x}{15} - 3 \cdot \cos\frac{8x}{35},$$

удовлетворяющий условию $0 < T < 500$.

Решение. Данная функция является разностью двух периодических функций с периодами $T_1 = \frac{2\pi}{2/15} = 15\pi$ и $T_2 = \frac{2\pi}{8/35} = \frac{35\pi}{4}$. Найдём наименьшее положительное T, делящееся нацело и на T_1, и на T_2. Для этого вычислим $НОК(15;35) = 5 \cdot НОК(3;7) = 5 \cdot 21 = 105$. Среди чисел вида $105\pi n$, $n \in Z \setminus \{0\}$, являющихся периодами данной функции, только $T = 105\pi$ удовлетворяет ограничению $0 < T < 500$.

Пример 5 [Почвовед.-2000,май]. *Пусть* $f(x)$ *– периодическая функция с периодом 8 такая, что* $f(x) = 8x - x^2$ *при* $x \in [0,8]$. *Решить уравнение*

$$f(2x+16) + 23 = 5f(x).$$

Решение. Если уменьшить аргумент у функции в первом слагаемом на 16, то, в силу периодичности функции с периодом 8, её значение не изменится, а уравнение примет вид

$$f(2x) + 23 = 5f(x).$$

Разобьём промежуток $[0,8]$ на две равные части.

1) Пусть $x \in [0,4]$, тогда $0 \le 2x \le 8$ и, следовательно, $f(2x) = 8 \cdot 2x - (2x)^2$. Подставляя в уравнение, получим: $8 \cdot 2x - (2x)^2 + 23 = 5(8x - x^2)$, или, упрощая, $x^2 - 24x + 23 = 0$. Решая это уравнение и учитывая, что $0 \le x \le 4$, находим одно из решений $x = 1$.

2) Пусть теперь $x \in (4,8]$, тогда $0 < 2x - 8 \le 8$. Перепишем уравнение в виде $f(2x-8) + 23 = 5f(x)$. Поскольку $f(2x-8) = 8 \cdot (2x-8) - (2x-8)^2$, то, подставляя последнее выражение в уравнение, получим: $8(2x-8) - (2x-8)^2 + 23 =$ $= 5(8x - x^2)$ или $x^2 + 8x - 105 = 0$. Решая полученное уравнение и отбирая корни, попадающие в промежуток $(4,8]$, находим ещё один корень $x = 7$.

Так как функция $f(x)$ имеет период 8, то для получения всех корней исходного уравнения достаточно прибавить к найденным значениям x произвольное целое число периодов. *Ответ:* $x = 1 + 8n$, $x = 7 + 8k$, где $n, k \in Z$.

Монотонные функции

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X ($X \subseteq D(f)$), называется *возрастающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Иными словами, большему значению аргумента x у возрастающей функции соответствует большее значение y.

Например, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой $(-\infty,+\infty)$; функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0,+\infty)$; функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из сегментов $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$, где $n \in Z$.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *убывающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует справедливость неравенства

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Например, функция $y = |x-1|$ убывает на промежутке $(-\infty,1]$; функция $y = x^2$ убывает на множестве $(-\infty,0]$; функция $y = \sin x$ убывает на сегментах вида $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, где $n \in Z$.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *невозрастающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что

$$f(x_1) \ge f(x_2).$$

Например, функция $y = \begin{cases} x^2, & если \quad x < 0 \\ 0, & если \quad x \ge 0 \end{cases}$ является невозрастающей на промежутке $(-\infty,+\infty)$.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *неубывающей* на этом множестве, если для любой пары чисел x_1 и x_2 этого множества из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что

$$f(x_1) \le f(x_2).$$

Например, функция $y = \sqrt{x + |x|} = y = \begin{cases} \sqrt{2x}, & если \quad x \ge 0 \\ 0, & если \quad x < 0 \end{cases}$ является неубывающей на $(-\infty,+\infty)$; функция целой части действительного числа x ($y = [x]$) также не убывает на множестве $(-\infty,+\infty)$.

Функции возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие называются *монотонными функциями.* При этом возрастающие и убывающие функции принято называть *строго монотонными* функциями, а невозрастающие и неубывающие – монотонными в *нестрогом смысле слова.*

Рассмотрим некоторые свойства монотонных функций [8].

Свойства монотонных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве X.

1. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X и C – произвольное действительное число, то:

а) функция $f(x)+C$ возрастает (убывает) на X;

б) функция $C \cdot f(x)$, $C>0$, возрастает (убывает) на X;

в) функция $C \cdot f(x)$, $C<0$, убывает (возрастает) на X. В частности, если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то функция $(-f(x))$ – убывает (возрастает) на X.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают (убывают) на X, то функция $f(x)+g(x)$ также возрастает (убывает) на X.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны и обе возрастают (убывают) на X, то их произведение $f(x)\cdot g(x)$ также возрастает (убывает) на X. Если же функции $f(x)$ и $g(x)$ отрицательны и обе возрастают (убывают) на X, то их произведение $f(x)\cdot g(x)$ убывает (возрастает) на X.

В частности, если $f(x)>0$ и функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то $f^2(x)$ также возрастает (убывает) на X; если же $f(x)<0$ и функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X, то $f^2(x)$ убывает (возрастает) на X.

4. Пусть функция $f(x)$ возрастающая, а $g(x)$ – убывающая. Тогда:

1) если $f(x)>0, g(x)<0$, то произведение $f(x)\cdot g(x)$ – убывающая функция;

2) если $f(x)<0, g(x)>0$, то произведение $f(x)\cdot g(x)$ – возрастающая функция.

5. Суперпозиция $f(g(x))$ двух возрастающих функций $f(x)$ и $g(x)$ – возрастающая функция. Суперпозиция двух убывающих функций – возрастающая функция. Суперпозиция возрастающей и убывающей функций или убывающей и возрастающей функций – убывающая функция.

В частности, если $f(x)$ - возрастающая (убывающая) функция, то $f(-x)$ – убывающая (возрастающая) функция. А также если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X и сохраняет на X постоянный знак (не обращается в нуль), то функция $1/f(x)$ убывает (возрастает) на X.

6. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на каждом из двух *смежных* промежутков $(a,b]$ и $[b,c)$, то она возрастает (убывает) на их объединении (a,c).

Замечание. В общем случае, если функция $y=f(x)$ является возрастающей (убывающей) отдельно на каждом из множеств X_1 и X_2 (не обязательно смежных!), то на объединении этих множеств $X_1 \cup X_2$ она может и не быть монотонной. Например, дробно-линейная функция $y = 1/x$ убывает на каждом из множеств $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, но эта функция не является убывающей на множестве $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. В самом деле, если, например, $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, то $x_1 < x_2$, но $f(x_1) = -1 < 1 = f(x_2)$, что противоречит определению убывающей функции.

Рассмотрим задачу, при решении которой существенно используется свойство монотонности функции.

Пример 1 [Мехмат-2001]. *Решить уравнение*

$$3x - 2|x-2| = 3\sqrt{3x+18} - 2\left|\sqrt{3x+18} - 2\right|.$$

Решение. Учитывая специфический вид левой и правой частей данного уравнения, введём в рассмотрение функцию

$$f(t) = 3t - 2|t-2|,\ \text{где}\ t \in R.$$

Раскрывая модуль и упрощая, получим

$$f(t) = \begin{cases} 5t-4, & \textit{если}\quad t \le 2; \\ t+4, & \textit{если}\quad t \ge 2. \end{cases}$$

Докажем, что данная функция $f(t)$ возрастает на всей числовой прямой. Покажем вначале, используя определение возрастающей функции, что $f(t) = 5t-4$ возрастает на промежутке $(-\infty,2]$. Возьмём любые два значения t_1 и t_2 из этого промежутка такие, что $t_1 < t_2$, и сравним между собой значения $f(t_1)$ и $f(t_2)$:

$$5t_1 - 4 \vee 5t_2 - 4$$

$$5t_1 \vee 5t_2$$

$$t_1 < t_2.$$

Следовательно, $f(t_1) < f(t_2)$, что означает, что данная функция возрастает на указанном промежутке. Аналогично, по определению, доказывается возрастание функции на промежутке $[2,+\infty)$. Поскольку функция возрастает на двух смежных промежутках $(-\infty,2]$ и $[2,+\infty)$, то отсюда следует, что она возрастает на всем множестве действительных чисел.

Перепишем исходное уравнение, используя введённую функцию:

$$f(x) = f\left(\sqrt{3x+18}\right). \qquad (1)$$

В силу строгой монотонности функции $f(t)$, равенство значений функции равносильно равенству соответствующих значений её аргумента, т.е. уравнение (1) равносильно более простому уравнению $x = \sqrt{3x+18}$.

Осталось решить это уравнение. Оно равносильно системе $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 3x+18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x-6)(x+3) = 0. \end{cases}$ *Ответ:* $x \in \{6\}$.

Пример 2 [ВМиК-2006,устн.]. *Решить уравнение* $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$.

Решение. Заметим, что в левой части уравнения стоит возрастающая на ОДЗ (при $x \ge 0$) функция $f(x)=x+\sqrt{3+\sqrt{x}}$.

Для доказательства этого факта достаточно, например, показать положительность производной при $x>0$: $f'(x)=1+\dfrac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}>0$. Иначе, можно было воспользоваться определением возрастающей функции. Возьмём для этого два произвольных значения x_1 и x_2 такие, что $0 \le x_1 < x_2$ и покажем, что для них выполняется неравенство $x_1+\sqrt{3+\sqrt{x_1}}<x_2+\sqrt{3+\sqrt{x_2}}$. Действительно, складывая два очевидных неравенства $x_1<x_2$ и $\sqrt{3+\sqrt{x_1}}<\sqrt{3+\sqrt{x_2}}$, получим справедливость доказываемого неравенства.

Далее, в правой части уравнения расположена постоянная функция $y \equiv 3$. Графики возрастающей и постоянной функций могут пересекаться не более чем в одной точке. Следовательно, уравнение имеет не более одного решения. Корень $x=1$ находим подбором. *Ответ*: $x \in \{1\}$.

Локальные экстремумы функции (*)

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, и x_0 принадлежит этому множеству вместе с некоторой своей окрестностью.

Точка $x_0 \in X$ называется *точкой локального максимума (локального минимума)* функции $f(x)$, если существует интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, содержащийся в X и такой, что для каждого x из этого интервала имеет место неравенство

$$f(x) \le f(x_0) \text{ (соответственно } f(x) \ge f(x_0)\text{)}.$$

Заметим, что интервал вида $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ обычно называют δ-окрестностью точки x_0, а такой же интервал, из которого удалена (выколота) середина (точка x_0), – проколотой δ-окрестностью точки x_0.

Точки локального максимума и локального минимума называются *точками локального экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках называются *экстремальными значениями* функции, или *локальными экстремумами*.

Если вместо последних нестрогих неравенств в приведённых определениях взять строгие, то получим соответственно определения строгих локального максимума и минимума. Так, точка $x_0 \in X$ называется *точкой строгого локального максимума* функции $f(x)$, если существует δ-окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, целиком содержащаяся в X и такая, что для каждого

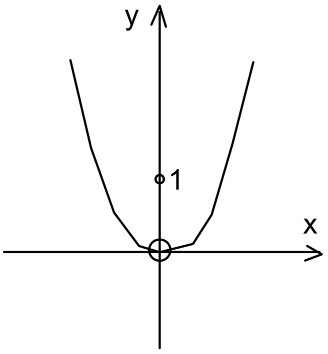
x из этой окрестности, отличного от x_0, имеет место неравенство

$$f(x) < f(x_0).$$

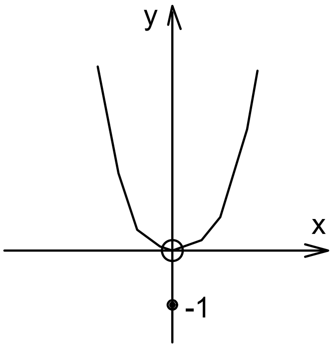
В частности, справедлива следующая теорема.

<u>*Теорема*</u> *(достаточное условие локального экстремума). Если функция* $y = f(x), x \in X$*, возрастает (убывает) на некотором промежутке* $(x_0 - \delta, x_0] \subset X$ *и убывает (возрастает) на некотором промежутке* $[x_0, x_0 + \delta) \subset X$*, то точка* x_0 *является точкой строгого локального максимума (минимума) функции* $f(x)$.

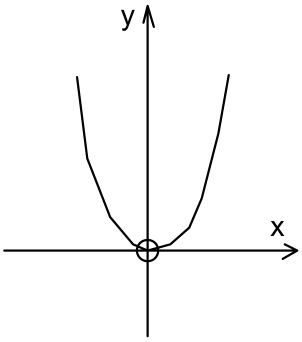
<u>*Пример*</u>. *Имеют ли функции, графики которых приведены в пунктах а)-в), в точке* $x = 0$ *локальный экстремум? Если да, то какой именно.*



а)



б)



в)

Решение. а) Функция имеет локальный максимум, равный 1. Этот пример показывает, что для того чтобы функция имела в некоторой точке локальный максимум, совсем не обязательно, чтобы она возрастала слева и убывала справа от этой точки.

б) Функция имеет локальный минимум, равный (-1);

в) функция не имеет локального экстремума (т.к. не определена в точке $x = 0$).

Способы нахождения локальных экстремумов при помощи производной рассмотрены ниже в пункте «Использование производной при исследовании функций на монотонность и экстремумы».

Предел функции. Непрерывность функции (*)

Понятие *предела функции* лежит в основе таких важных понятий, связанных со свойствами функций, как непрерывность функции, её дифференцируемость, существование асимптот и др. Можно сказать, что это базовое понятие в курсе математического анализа. Несмотря на то, что эта тема не входит в программу по математике для поступающих в МГУ, приведём, в силу её важности, в данном пункте основные определения. Начнём с нестрогого описания понятия конечного предела функции.

Пусть A – действительное число, функция $y = f\,(x)$ определена в проколотой двусторонней окрестности точки $x = a$. Говорят, что функция $y = f\,(x)$ имеет *предел* A при $x \to a$, если с приближением значения аргумента x к числу a (вдоль оси абсцисс произвольным образом) значение $f(x)$ приближается к числу A (вдоль оси ординат). Предел функции при $x \to a$ обозначают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. В самой точке $x = a$ функция может быть и не определена. Сформулируем теперь строгое определение предела функции (на языке «$\varepsilon - \delta$»).

Число A называется *пределом функции* $y = f\,(x)$ в точке $x = a$, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Подчеркнём, что в определении предела функции не указывается, каким образом аргумент x стремится к числу a. Если предел функции в точке a существует (а это бывает не всегда), то он не зависит от способа приближения аргумента x к точке a.

Приведём примеры функций, имеющих конечные пределы в заданных точках: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 1) = 2$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (*первый замечательный предел*), $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (*второй замечательный предел*).

Наряду с общим понятием предела существуют понятия *односторонних пределов*, когда x стремится к точке a с какой-то одной стороны (со стороны значений больших a, или, наоборот, со стороны значений меньших a). В первом случае речь идёт о так называемом *правом пределе* функции в точке a (или пределе справа), а во втором случае – о *левом пределе* функции (пределе слева). Приведём соответствующие определения.

Число A называется *правым пределом функции* $y = f\,(x)$ в точке $x = a$, если для любого положительного числа ε найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Правый предел символически обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$ или $f(a + 0) = A$.

Аналогично, число A называется *левым пределом функции* $y = f\,(x)$ в точке $x = a$, если для любого положительного числа ε найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - a < 0$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Левый предел принято обозначать $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)=A$. Например, $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x=-1$.

В курсе математического анализа доказывается теорема, утверждающая, что для того чтобы функция $y=f\ (x)$ имела конечный предел A при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы в точке a существовали оба односторонних предела, причём $f(a-0)=f(a+0)=A$.

Сформулируем определение предела функции на бесконечности. Число A называется *пределом функции* $y=f\ (x)$ при $x\to\infty$, если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε найдётся такое число $E(\varepsilon)>0$, что как только $|x|>E$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В частности, число A называется *пределом функции* $y=f\ (x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $E>0$, что как только $x>E$ ($x<-E$), то $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Например, $\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\pi/2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\pi/2$.

Весьма важными в теории пределов являются понятия бесконечно большой и бесконечно малой функций. Приведём вначале определение бесконечного предела.

Говорят, что функция $y=f\ (x)$ в точке $x=a$ имеет *предел*, *равный* ∞, если для любого (сколь угодно большого) числа $E>0$ найдётся такое число $\delta(E)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>E$. Бесконечный предел обозначается следующим образом: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

В частности, функция $y=f\ (x)$ в точке $x=a$ имеет *предел*, равный $+\infty$ ($-\infty$), если для любого, сколь угодно большого числа $E>0$ найдётся такое число $\delta(E)>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $f(x)>E$ ($f(x)<-E$). Это обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$ $=+\infty$ (соответственно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$).

Если предел функции $f(x)$ при $x\to a$ равен ∞ (в том числе $+\infty$ или $-\infty$), то такую функцию называют *бесконечно большой* в окрестности данной точки. К таким, например, относятся функция $1/x$ при $x\to 0$, функция tgx при $x\to\pi/2$. Односторонние пределы также могут быть бесконечными, например, $\lim\limits_{x\to 0+0}(1/x)=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0-0}(1/x)=-\infty$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Бесконечно малыми являются, в частности, функции $\sin x$, $\ln(1+x), x^2, tgx, \arcsin x$ при $x\to 0$; функция $\ln x$ при $x\to 1$, функция $\cos x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$. Отдельно определим понятие функции, бесконечно малой на бесконечности. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой на бесконечности* (или при $x\to\infty$), если $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

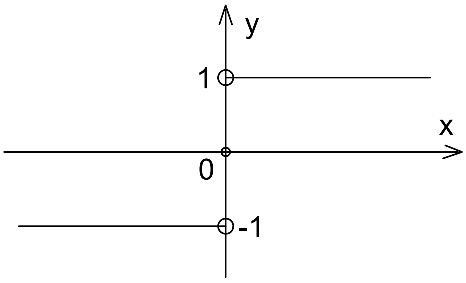
Обратимся к определениям непрерывности функции в точке и на промежутке.

Функция $y=f(x)$, определённая на интервале (a,b), называется *непрерывной в точке* $x_0\in(a,b)$, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

Функция $y=f(x)$, определённая на полуинтервале $(a,x_0]$ $([x_0,b))$, называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)\right)$. Функция $y=f(x)$, определённая на интервале (a,b), называется *непрерывной на этом интервале*, если она непрерывна в каждой точке x из интервала (a,b). Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a,b), а в точках a и b непрерывна соответственно справа и слева, то она называется *непрерывной на сегменте* $[a,b]$.

Точки, в которых нарушается условие непрерывности (1), называют *точками разрыва* функции, а саму функцию в этих точках называют *разрывной*. Графики непрерывных функций визуально не имеют разрывов. Например, функция $y=x^3$ непрерывна в точке $x=x_0$, где x_0 – любое действительное число, так как $\lim\limits_{x\to x_0}x^3$ существует и равен x_0^3, так же как и значение функции в этой точке.



Функция $y=\operatorname{sgn}x$ в точке $x=0$ не является непрерывной по той причине, что в условии непрерывности (1) не существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0-0}\operatorname{sgn}x=-1$, а $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{sgn}x=+1$. Таким образом, точка $x=0$ является для функции сигнум точкой разрыва. В остальных точках из множества действительных чисел функция $y=\operatorname{sgn}x$ является непрерывной.

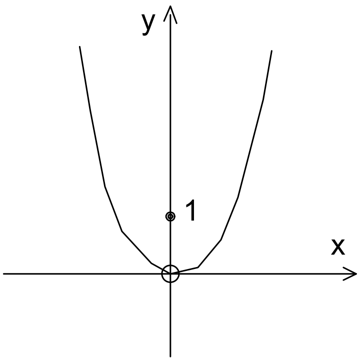


График функции $y=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x\neq 0 \\ 1, & \text{если} \quad x=0 \end{cases}$ терпит разрыв в точке $x=0$, так как, несмотря на то, что предел функции в этой точке существует, его значение, равное нулю, не совпадает со значением функции в этой точке.

Любая из элементарных функций непрерывна в любой точке своей области определения.

Приведём некоторые из известных теорем из курса математического анализа, отражающих свойства непрерывных функций (без доказательства).

Теорема 1 *(1-я теорема Вейерштрасса). Если функция* $y=f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, то она ограничена на этом отрезке, т.е. существуют такие постоянные и конечные действительные числа* m *и* M*, что* $m\leq f(x)\leq M \quad \forall x\in[a,b]$.

Теорема 2 *(2-я теорема Вейерштрасса). Если функция* $y=f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a,b]$*, то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений.*

Теорема 3 *(арифметические операции над непрерывными функциями). Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на интервале* (a,b)*, то их сумма и разность* $f(x)\pm g(x)$*, произведение* $f(x)\cdot g(x)$ *и частное* $f(x)/g(x)$ *(частное при условии, что* $g(x)\neq 0$*,* $x\in(a,b)$*) являются непрерывными функциями на этом интервале.*

Теорема 4 *(непрерывность суперпозиции непрерывных функций). Если функция* $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 5 *(о промежуточных значениях непрерывной функции). Если функция* $f(x)$ непрерывна *на отрезке* $[a,b]$*, то она принимает на каждом интервале* $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$ *все промежуточные значения между* $f(\alpha)$ *и* $f(\beta)$*. В частности, если на концах отрезка* $[a,b]$ *функция принимает значения разных знаков, т.е.* $f(a)\cdot f(b)<0$*, то между точками* a *и* b *найдётся хотя бы одна точка* x_0 *такая, что* $f(x_0)=0$.

Производная функции $^{(*)}$

Понятие производной возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, в первую очередь следующих двух: определение скорости прямолинейного неравномерного (ускоренного) движения и построение касательных к произвольным плоским кривым.

Дифференциальным исчислением называется раздел математического анализа, занимающийся изучением свойств и способов вычисления производных и их применением к исследованию функций. Существенный вклад в развитие дифференциального исчисления внесли немецкий математик Лейбниц (1646–1716), который, в частности, ввёл для производной обозначение $\frac{dy}{dx}$ (т.е. через дифференциалы dy и dx соответственно функции и аргумента), учёные Эйлер (1707-1783), который ввёл обозначения Δy, Δx для приращений функции и аргумента, и Лагранж (1736–1813), предложивший в числе прочего обозначения y' и $f'(x)$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале (a,b), и $x_0 \in (a,b)$. Дадим в точке x_0 *приращение* Δx *аргументу* x, т.е. рассмотрим новую точку на оси абсцисс: $x_0+\Delta x$. Будем считать, что величина Δx произвольна, но при этом такова, что новое значение аргумента $x_0+\Delta x$ принадлежит (a,b). Если $\Delta x>0$, то точка $x_0+\Delta x$ будет лежать на числовой прямой справа от точки x_0, а если $\Delta x<0$, то слева. Разность $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называется *приращением функции* $y=f(x)$ в точке x_0, отвечающим приращению аргумента Δx, и обозначается $\Delta f(x_0)$.

Производной функции $y=f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует) и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Подчеркнём, что значение производной в точке x_0 не зависит от способа стремления приращения Δx к нулю, а функция $f(x)$ должна быть обязательно определена в двусторонней окрестности точки x_0 (т.е. как слева, так и справа от точки x_0). Если обозначить $x=x_0+\Delta x$, то предел в определении производной функции $f(x)$ можно переписать в эквивалентном виде

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Операция нахождения производной данной функции называется в математике *дифференцированием*. *Продифференцировать функцию* (в заданной точке или на заданном множестве) означает найти её производную, соответственно, в точке или на множестве.

Функция $f(x)$, определённая в некоторой двусторонней окрестности точки x_0, называется *дифференцируемой в данной точке*, если её приращение $\Delta f(x_0)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x,$$

где $A=A(x_0)$, $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$. При этом главная (линейная относительно Δx) часть приращения функции, т.е. выражение $A\cdot\Delta x$, называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в данной точке и обозначается dy или $df(x_0)$. Дифференциал независимой переменной совпадает с её приращением, поэтому обычно пишут $dy=A\cdot dx$. Имеется тесная связь между дифференциалом функции и её производной: для того чтобы функция одной переменной $y=f(x)$ имела в точке x_0 дифференциал (была дифференцируемой), необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'(x_0)$, при этом справедливо равенство: $dy=f'(x_0)dx$.

Пример 1. Найти, пользуясь определением, производную функции $y=x^2$ *в точке* $x_0=2$.

Решение. Придадим аргументу функции в точке $x_0=2$ приращение Δx и найдём соответствующее ему приращение функции в этой точке:

$$\Delta f(2)=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Имеем: $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$. Таким образом, производная функции $y=x^2$ в точке $x_0=2$ равна 4, т.е. $f'(2)=4$.

Пример 2. Найти, пользуясь определением, производную функции $y=\frac{1}{x^2}$ *в произвольной точке* x $(x\neq 0)$.

Решение. Так как при $x\neq 0$ и достаточно малых значениях приращения аргумента Δx имеем $x+\Delta x\neq 0$, то отвечающее ему приращение функции равно

$$\Delta f(x)=\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}.$$

Тогда $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}=-\frac{2}{x^3}$. Таким образом, $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{2}{x^3}$.

Основные правила нахождения производных

1. *Производная постоянной* величины равна нулю: $(c)' = 0$ $(c = const)$.

2. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x и c – постоянная величина, то функция $c \cdot f(x)$ также имеет производную в точке x, и

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

3. *Производная суммы (разности)*. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную в точке x, то их сумма и разность $f(x) \pm g(x)$ также имеет производную в точке x, и при этом

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

4. *Производная произведения*. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную в точке x, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ также имеет производную в точке x, и при этом

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

5. *Производная частного*. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную в точке x и $g(x) \neq 0$, то их частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ также имеет производную в точке x, причём $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.

6. *Производная обратной функции*. Если функция $x = g(y)$ строго монотонна в окрестности точки y, а в самой точке y имеет отличную от нуля производную, то в окрестности соответствующей точки x у этой функции существует обратная функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке x, связанную с производной $g'(y)$ следующим образом:

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

7. *Производная сложной функции*. Если функция $g(y)$ имеет производную в точке y, где $y = f(x)$, причём функция $f(x)$ имеет производную в соответствующей точке x, то сложная функция $h = g(f(x))$ также имеет производную в точке x, причём

$$h'_x = g'_y \cdot f'_x.$$

Таблица производных элементарных функций

Каждая из элементарных функций дифференцируема во всех точках x из своей области определения, принадлежащих ей вместе с достаточно малой двусторонней окрестностью.

1. *Степенные функции*: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in R$. В частности, $(1/x)' = -1/x^2$ $(x \neq 0)$; $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ $(x > 0)$.

2. *Показательные функции*: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a > 0, a \neq 1; x \in R)$. В частности, $(e^x)' = e^x$. При $a = 1$ это свойство также выполняется.

3. *Логарифмические функции*: $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$ $(a > 0, a \neq 1; x > 0)$. В частности, $(\ln x)' = 1/x$.

4. *Тригонометрические функции*: $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$ $(x \in R)$; $(tgx)' = 1/\cos^2 x$ $(x \neq \pi/2 + \pi n, n \in Z)$; $(ctgx)' = -1/\sin^2 x$ $(x \neq \pi n, n \in Z)$.

5. *Обратные тригонометрические функции*:
$(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$; $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$;
$(arctgx)' = 1/(1+x^2)$ $(x \in R)$; $(arcctgx)' = -1/(1+x^2)$ $(x \in R)$.

6. *Гиперболические функции*: $(shx)' = chx$; $(chx)' = shx$; $(thx)' = 1/ch^2 x$ $(x \in R)$; $(cthx)' = -1/sh^2 x$ $(x \neq 0)$.

<u>Пример</u>. Найти производную функции: а) $y = x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^5} + 5x + 2$ $(x > 0)$;

б) $y = \frac{\ln x}{\cos x}$ $\left(x > 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$; *в)* $y = \sqrt[3]{x} \cdot 2^x \cdot \sin x$;

г) $y = \arcsin(x^2) - \log_7(1-x)$ $(-1 < x < 1)$; *д)* $y = \sin\left(\sqrt{arctg(3x)}\right)$ $(x > 0)$.

Решение. а) $y' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^6} + 5$;

б) $$y' = \frac{(\ln x)' \cdot \cos x - \ln x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{x} - (\ln x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \ln x \cdot \sin x}{x \cdot \cos^2 x};$$

в) воспользуемся формулой для вычисления производной произведения трёх функций: $(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$. Тогда имеем

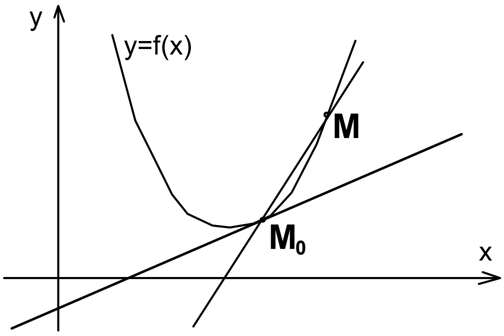
$$y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' \cdot 2^x \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot (2^x)' \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot 2^x \cdot (\sin x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot 2^x \cdot \sin x +$$
$$+ \sqrt[3]{x} \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot 2^x \cdot \cos x;$$

г) $$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot (x^2)' - \frac{1}{(1-x)\ln 7} \cdot (1-x)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{(1-x)\ln 7};$$

д) $$y' = \cos\left(\sqrt{arctg(3x)}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{arctg(3x)}} \cdot \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3.$$

Касательная к графику функции. Геометрический и физический смысл производной$^{(*)}$

Пусть точка $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит графику функции $y=f(x)$, определённой на интервале (a,b). Рассмотрим точку $M(x;y)$, также принадлежащую графику функции $y=f(x)$, и проведём прямую M_0M, называемую *секущей*. При перемещении точки $M(x;y)$ по графику функции секущая будет менять своё положение. Если точка M приближается к точке M_0, то может случиться так, что секущая будет стремиться занять некоторое предельное положение, не зависящее от того, как точка M приближается к точке M_0.

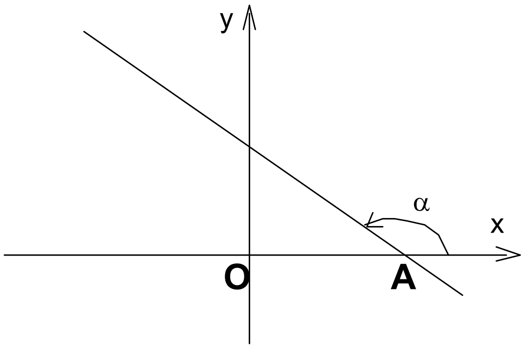


Касательной прямой, или просто *касательной*, к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;f(x_0))$ называется предельное положение секущей M_0M (если оно существует), когда точка $M(x;f(x))$ стремится к точке $M_0(x_0;f(x_0))$. Отметим, что не обязательно, чтобы касательная к графику функции имела с ним только одну общую точку.

Выведем уравнение касательной. Рассмотрим уравнение секущей к графику, т.е. прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0;f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x;f(x_0+\Delta x))$: $y-f(x_0)=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}(x-x_0)$.

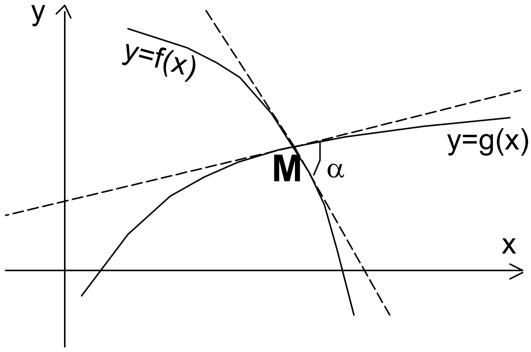
Если функция $y=f(x)$ имеет конечную производную в точке $x=x_0$, то предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0 (при $\Delta x\to 0$) существует, и её уравнение (уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;f(x_0))$ имеет вид: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Пусть некоторая прямая пересекает ось Ox в точке A. Назовём углом между данной прямой и положительным направлением оси Ox наименьший угол величины α, на который надо повернуть против часовой стрелки относительно точки A ось Ox, чтобы она совпала с данной прямой. Если прямая параллельна оси Ox, то величина этого угла считается равной нулю.



Из уравнения касательной получаем следующую *геометрическую интерпретацию производной* функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$: значение $f'(x_0)$ есть тангенс величины угла между положительным направлением оси абсцисс и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Коротко обычно говорят, что производная $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

Пусть в некоторой точке $M(x; y)$ пересекаются графики двух функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, каждая из которых имеет производную в точке x (а значит, их графики имеют в точке $M(x; y)$ касательные), и требуется определить, под каким углом пересекаются эти графики. По определению, под углом пересечения графиков функций понимается наименьший из двух углов, образованных пересечением касательных в точке $M(x; y)$ к графикам обеих функций. В случае, когда величина этого угла равна нулю, графики касаются друг друга (имеют общую касательную). На рисунке внизу графики функций пересекаются в точке M под углом величины α.



Известно, что если заданы две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ $(k_1 \neq 0, k_2 \neq 0)$, то величина α угла, под которым они пересекаются $\left(0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, находится из соотношений:

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|, \text{ если } k_1k_2 \neq -1,$$

$$\alpha = \pi/2, \qquad \text{если } k_1k_2 = -1.$$

Пример 1. Определить, под каким углом пересекаются кривые $y = \sqrt{2x}$ *и* $y = \dfrac{x^2}{2}$ *(рассмотреть точку с положительной абсциссой)?*

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения данных графиков. Для этого решим уравнение $\sqrt{2x} = \dfrac{x^2}{2}$. Это уравнение имеет единственное положительное решение $x = 2$. Найдём тангенсы углов наклона касательных к обоим графикам функций в точке с абсциссой $x = 2$. Имеем $\left(\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, $\left(x^2/2\right)' = x$. Отсюда $k_1 = \left.\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right|_{x=2} = \dfrac{1}{2}$ и $k_2 = x|_{x=2} = 2$, и тогда для нахождения искомой величины угла α имеем соотношение $tg\alpha = \left| \frac{1/2-2}{1+(1/2)\cdot 2} \right| = \frac{3}{4}$, откуда $\alpha = arctg(3/4)$. *Ответ:* под углом $arctg(3/4)$.

<u>Пример 2</u>. Найти на графике функции $f(x) = x^2 - 7x + 3$ такую точку, касательная в которой параллельна прямой $y = 5x + 2$.

Решение. Известно, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны (в том числе совпадают) тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$. Поскольку угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 7x + 3$ в точке с абсциссой x_0 равен $f'(x_0) = \left(x^2 - 7x + 3\right)'\Big|_{x=x_0} = (2x-7)\big|_{x=x_0} = 2x_0 - 7$, то касательная будет параллельна прямой $y = 5x + 2$, только если угловые коэффициенты касательной и прямой совпадут, т.е. при условии $2x_0 - 7 = 5$, откуда находим $x_0 = 6$. Соответствующее значение ординаты $y_0 = f(x_0)$=-3. Таким образом, касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 5x + 2$ только в точке $(6;-3)$.

Физический смысл производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x состоит в том, что производная отвечает за скорость изменения функции в данной точке. Чем больше производная по абсолютной величине, тем быстрее изменяет свои значения – растёт или убывает – функция $y = f(x)$.

Пусть некоторое материальное тело движется прямолинейно и неравномерно, причём зависимость пройденного пути S от времени t есть известная функция $S(t)$ (отсчёт времени ведётся, начиная с некоторого начального момента времени $t = 0$). Тогда физический смысл производной $S'(t)$ пройденного расстояния по времени есть скорость тела $v(t)$ в момент времени t, а смысл производной $v'(t)$ скорости по времени есть ускорение тела $a(t)$. Таким образом, $v(t) = S'(t)$ и $a(t) = v'(t)$.

<u>Пример 3</u>. Тело движется неравномерно вдоль прямой Ox по закону $x = t - \sin t$. Определить скорость и ускорение движения при $t = \pi/2$ (x измеряется в метрах, t – в секундах).

Решение. В силу механического значения первой и второй производных как величин скорости и ускорения в момент времени t имеем

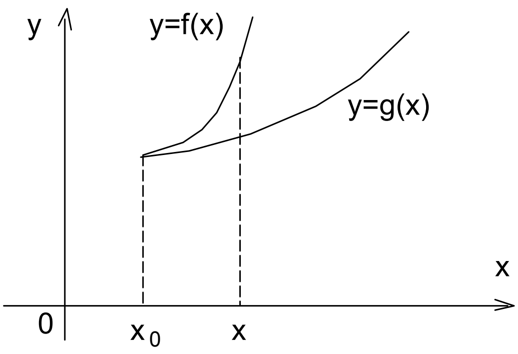
$$V(t) = x'(t) = (t - \sin t)' = 1 - \cos t, \quad a(t) = V'(t) = \sin t.$$

Следовательно, $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\left(\frac{м}{сек}\right)$, $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\left(\frac{м}{сек^2}\right)$.

<u>Пример 4</u>. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью $V_0\ (м/сек)$. *Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки, если высота его полета в момент времени* $t\ (сек)$ *описывается формулой* $h(t)=V_0t-\frac{gt^2}{2}$ *(*$g=const$ *– ускорение свободного падения)?*

Решение. В момент, когда высота снаряда достигнет наивысшего значения, скорость снаряда станет равной нулю, поэтому составляем уравнение $h'(t)=V_0-gt=0$, откуда находим искомое время $t=V_0/g\ (сек)$.

Рассмотрим без доказательства теорему, с помощью которой доказываются многие полезные неравенства, связывающие между собой дифференцируемые функции.



<u>Теорема</u>. Пусть $f(x)$ *и* $g(x)$ *– две непрерывные на* $[x_0,+\infty)$ *и имеющие конечные производные на* $(x_0,+\infty)$ *функции, причём* $f(x_0)=g(x_0)$ *и* $f'(x)>g'(x)$ *при* $x>x_0$.

Тогда $f(x)>g(x)$ *при* $x>x_0$.

<u>Пример 5</u>. Доказать, что $e^x>1+x$ *при* $x>0$.

Доказательство. Поскольку функции $f(x)=e^x$ и $g(x)=1+x$ непрерывны на промежутке $[0,+\infty)$, причём $f(0)=1=g(0)$ и $f'(x)=e^x>1=g'(x)$ при $x>0$, то, применяя указанную выше теорему, получим, что при $x>0$ выполняется неравенство $e^x>1+x$, что и требовалось доказать.

Использование производной при исследовании функций на монотонность и экстремумы$^{(*)}$

Если исследуемая функция имеет производную во внутренних точках своей области определения, то можно использовать следующие теоремы, приведённые здесь без доказательства.

<u>Теорема 1</u> (необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале). Для того чтобы имеющая конечную или бесконечную производную на интервале (a,b) *функция* $y=f(x)$ *возрастала (убывала) на нём, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ *при всех* $x\in(a,b)$;

2) $f'(x)$ *не обращалась в нуль ни на каком отрезке* $[\alpha,\beta]$, *целиком принадлежащем интервалу* (a,b).

Иными словами, если функция $y = f(x)$ строго монотонна и имеет производную на (a,b), то производная этой функции может обращаться в нуль, но только в отдельных точках, не образующих сплошное множество в виде некоторого промежутка, иначе всюду на этом промежутке функция будет принимать постоянное значение (см. следующую теорему), и уже не будет строго монотонной. Так, функция $y = x^3$ является возрастающей на всей числовой прямой; при этом, например, в точке $x = 0$ её производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль.

<u>Теорема 2</u> (необходимое и достаточное условие постоянства функции на интервале). Для того чтобы имеющая конечную производную на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ принимала на нём постоянное значение, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \equiv 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

<u>Пример 1</u> [ВГПИ]. *При каких значениях параметра m функция $f(x) = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 48mx + 6x - 3$ возрастает на всей числовой прямой?*

Решение. Для того чтобы определённая и имеющая конечную производную на всём множестве действительных чисел функция $y = f(x)$ монотонно возрастала на нём, необходимо и достаточно, чтобы её производная $f'(x)$ была всюду неотрицательна, причём обращалась в нуль только в отдельных точках (а не на целом отрезке!). Таким образом, условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда

$$f'(x) = 6x^2 - 6(m+2)x + 48m + 6 \geq 0 \;\; \forall x \in R.$$

Это, в свою очередь, выполняется, только если дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - (m+2)x + (8m+1)$ неположителен $D = (m+2)^2 - 4(8m+1) \leq 0$. Решая последнее неравенство, находим все искомые значения параметра $0 \leq m \leq 28$.

<u>Пример 2</u> [МАИ-1996]. *При каких значениях параметра a функция $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{a - 2 - 3x - x^2}$ не является убывающей ни на каком отрезке, принадлежащем её области определения?*

Решение. Во-первых, данная дробно-рациональная функция имеет производную на всей своей области определения, задаваемой условием $x^2 + 3x + 2 - a \neq 0$, т.е. при $x \neq \dfrac{-3 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$ $(4a + 1 \geq 0)$. Во-вторых, в этой области $f(x)$ является неубывающей тогда и только тогда, когда её производная $f'(x) \geq 0$ при всех допустимых значениях x. Найдём производную функции

$$f'(x)=\frac{\left(3-x^2\right)'\left(a-2-3x-x^2\right)-\left(3-x^2\right)\left(a-2-3x-x^2\right)'}{\left(a-2-3x-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(-2x)\left(a-2-3x-x^2\right)-\left(3-x^2\right)(-3-2x)}{\left(a-2-3x-x^2\right)^2}=\frac{3x^2-2(a-5)x+9}{\left(a-2-3x-x^2\right)^2}\geq 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3x^2-2(a-5)x+9\geq 0 \text{ при всех } x\neq\frac{-3\pm\sqrt{4a+1}}{2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ D=4\left((a-5)^2-27\right)\leq 0\ \Leftrightarrow\ |a-5|\leq 3\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ 5-3\sqrt{3}\leq a\leq 5+3\sqrt{3}\,.$$

<u>Теорема 3</u> (необходимое условие локального экстремума функции). Пусть функция $y=f(x)$ *определена на интервале* (a,b)*, и точка* x_0 *этого интервала является точкой локального максимума или минимума. Тогда, если функция* $f(x)$ *имеет производную в точке* x_0*, то* $f'(x_0)=0$.

Таким образом, касательная, проведённая к графику дифференцируемой функции в точке $M_0(x_0;f(x_0))$, где x_0 – точка экстремума функции, параллельна оси абсцисс. Подчеркнём, что условие $f'(x_0)=0$ не является достаточным для того, чтобы некоторая точка области определения дифференцируемой функции являлась точкой локального экстремума. Рассмотренная выше функция $y=x^3$, у которой производная существует и равна нулю при $x=0$, не имеет экстремума в этой точке.

Отметим, что функция $f(x)$, $x\in(a,b)$, у которой x_0 есть точка локального экстремума, может оказаться не имеющей производной в этой точке. Например, точка $x=0$ является точкой локального минимума функции $y=|x|$, $x\in(-1,1)$, однако эта функция не является дифференцируемой в этой точке.

Из теоремы 3 (она носит название *теоремы Ферма*) следует, что точки экстремума функции $f(x)$ находятся среди её *критических точек*, т.е. тех точек области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует.

<u>Пример 3</u> [ГАНГ]. *При каком значении параметра* a *функция* $y=x^3-2{,}4x^2+ax-8{,}4$ *не имеет экстремума в критической точке?*

Решение. Найдём производную этой функции $y'=3x^2-4{,}8x+a$ и, приравняв её к нулю, получим квадратное уравнение для определения критических точек. Если данное уравнение $3x^2-4{,}8x+a=0$ имеет два корня, то это означает наличие двух критических точек, причём производная меняет знак в каждой из них, следовательно, имеем две точки экстремума, что не удовлетворяет условию задачи. Если это уравнение не имеет корней, то не будет и критических точек, а значит, и экстремумов. Наконец, если уравнение $y'=0$

имеет ровно одно решение, т.е. $D = 4{,}8^2 - 12a = 0 \Leftrightarrow a = 1{,}92$, то имеем единственную критическую точку, причём слева и справа от неё производная сохраняет один и тот же знак, что означает отсутствие экстремума.

Ответ: при $a = 1{,}92$.

Теорема 4 (достаточные условия локального экстремума функции).

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда, если найдётся окрестность точки x_0, целиком лежащая в интервале (a,b) и такая, что при всех x из этой окрестности:

а) $f'(x) < 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) > 0$ справа от точки x_0, то точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$;

б) $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.

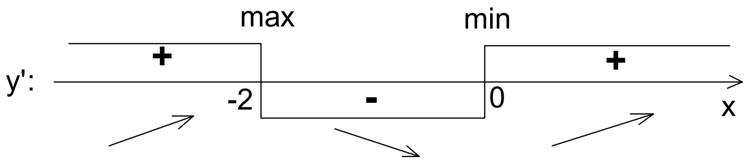
в) Если производная $f'(x)$ сохраняет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, то в этой точке экстремума нет.

В случаях, когда функция задана на отрезке $[a,b]$, имеет производную во всех внутренних точках этого промежутка, и требуется найти наибольшее и(или) наименьшее значения функции на этом отрезке, поступают следующим образом. Находят все точки локального экстремума на интервале (a,b) и вычисляют значения функции в этих точках. Затем вычисляют значения функции в граничных точках области определения, т.е. при $x = a$ и при $x = b$. Тогда наибольшее значение функции находят как наибольшее из значений функции в точках локального экстремума и на концах отрезка $[a,b]$. Аналогично определяют наименьшее значение функции на отрезке. Заметим, что при этом можно не исследовать в каждой точке локального экстремума, какой именно экстремум – максимум или минимум – имеется в этой точке.

Пример 4 [РЭА им. Плеханова] *Исследовать функцию на экстремумы:*

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{2}{3}.$$

Решение. Найдём критические точки: $y' = x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2. \end{array}\right.$



Так как в точке $x = -2$ функция непрерывна, её производная в этой точке обращается в нуль, слева от неё производная положительна, а справа - отрицательна, то, по теореме 4, в точке $x=-2$ функция имеет локальный максимум, равный $f(-2)=2$. Аналогично при помощи теоремы 4 доказывается, что в точке $x=0$ функция имеет локальный минимум, равный $f(0)=\frac{2}{3}$. Заметим, что данная функция не ограничена ни сверху, ни снизу, следовательно, у неё не существует ни наибольшего, ни наименьшего значений.

Пример 5 [РЭА им. Плеханова]. *Найти наименьшее значение функции* $y=\frac{x^2}{x-2}$ *на отрезке* $[-1,3/2]$.

Решение. Найдём вначале все локальные экстремумы функции на заданном промежутке. Для этого определим критические точки: $y'=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4. \end{array}\right.$ Чтобы найти наименьшее значение функции на отрезке $[-1,3/2]$, достаточно вычислить значения функции в точках локальных экстремумов внутри отрезка, а также на границах отрезка, и затем выбрать из них наименьшее. Таким образом,

$$\min_{x\in[-1,3/2]} y(x)=\min\{y(-1);y(3/2);y(0)\}=\min\{-1/3;-9/2;0\}=-9/2.$$

Пример 6 [МГТУ им. Баумана]. *Сумма квадратов двух положительных чисел равна 300. Подобрать эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было наибольшим.*

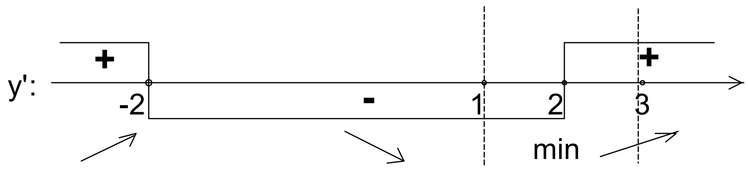
Решение. Обозначим искомые числа через x и y, и запишем условия задачи в виде системы:

$$\begin{cases} x>0, y>0 \\ x^2+y^2=300 \\ \max\left(xy^2\right)=? \end{cases}$$

Выразим из уравнения системы $y^2=300-x^2$ и подставим в выражение xy^2. Обозначим $f(x)=x\left(300-x^2\right)$. Исследуем эту функцию на локальные экстремумы в области $x>0$. Найдём критические точки (точки возможного экстремума): $f'(x)=3\left(100-x^2\right)$=0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-10<0 \\ x=10 \end{array}\right.$. Так как $f'(x)>0$ слева от $x=10$, и $f'(x)<0$ справа от $x=10$, то в этой точке функция имеет единственный локальный максимум, совпадающий с наибольшим значением функции при $x>0$. Таким образом, $x=10$, тогда $y^2=300-x^2=200$, откуда, с учётом положительности, находим $y=10\sqrt{2}$.

Пример 7. *При каких значениях параметра* b *наименьшее значение функции* $y=x^3-12x+b$ *на отрезке* $[1,3]$ *равно 0?*

Решение. Данная функция в виде кубического многочлена определена и дифференцируема на всём множестве действительных чисел. Найдём производную $y' = 3(x-2)(x+2)$ и изобразим кривую её знакопостоянства:



Из рисунка видно, что производная функции отрицательна на промежутке $[1,2)$ и положительна на промежутке $(2,3]$, при этом в самой точке $x=2$ производная обращается в нуль, а функция непрерывна. В силу теоремы 4 это означает, что функция имеет в точке $x=2$ локальный минимум, совпадающий с наименьшим значением функции на всём отрезке. По условию, $y(2)=0 \iff b=16$.

Асимптоты $^{(*)}$

Дадим строгое определение *асимптоты* (ударение на букву «и»), опирающееся на понятие предела функции. Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ бесконечен.

Например, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой гиперболы $y=1/x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)=\infty$. График функции $y=\ln(x-1)$ имеет вертикальную асимптоту $x=1$, так как $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln(x-1)=-\infty$.

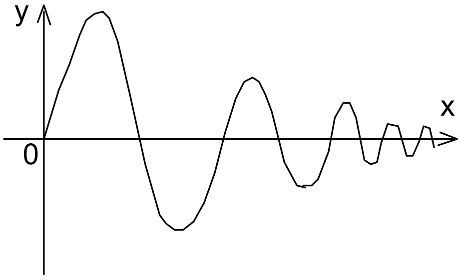
Таким образом, если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 вертикальную асимптоту, то при приближении аргумента x вдоль оси Ox к значению x_0 хотя бы с одной стороны функция неограниченно возрастает, увеличивая свои значения к $+\infty$ (или, наоборот, неограниченно убывает, уменьшаясь к $-\infty$). Поэтому обычно вертикальные асимптоты ищут в точках бесконечного разрыва функции.

Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$), если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x\to+\infty$ (соответственно при $x\to-\infty$) функция. Принято считать, в частности, что график линейной функции $y=ax+b$ имеет асимптоту, совпадающую с самим графиком функции.

Заметим, что определение наклонной асимптоты допускает случай, когда график функции, приближаясь к асимптоте, может её пересекать. Например, на рисунке прямая $y=0$ служит горизонтальной асимптотой для графика функции, и при этом график функции в бесконечном числе точек пересекает асимптоту при $x \to +\infty$.



Таким образом, если некоторая прямая является асимптотой графика функции $y=f(x)$, то расстояние от точки $M(x;f(x))$, лежащей на графике, до данной прямой стремится к нулю при $x \to x_0$ (в случае с вертикальной асимптотой) или при $x \to \pm\infty$ (в случае с наклонными асимптотами).

При нахождении уравнений наклонных асимптот у графика заданной функции $y=f(x)$ на практике используется следующий *приём*, обоснование которого вытекает непосредственно из определения наклонной асимптоты. Будем искать уравнение асимптоты при $x \to +\infty$ в виде уравнения некоторой прямой $y=kx+b$ с неизвестными угловым коэффициентом k и свободным членом b. Вначале находится угловой коэффициент k как предел

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Если этот предел существует и конечен, то затем вычисляется второй из коэффициентов в уравнении асимптоты по формуле

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx).$$

Если и этот предел существует и принимает конечное значение, то это означает, что график рассматриваемой функции имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту. В частности, если оказалось, что k=0, то это означает наличие *горизонтальной асимптоты* с уравнением $y=b$. Если же хотя бы один из указанных выше пределов не существует или принимает бесконечное значение, то это означает, что график функции не имеет асимптоты при $x \to +\infty$. Аналогично ищется асимптота при $x \to -\infty$.

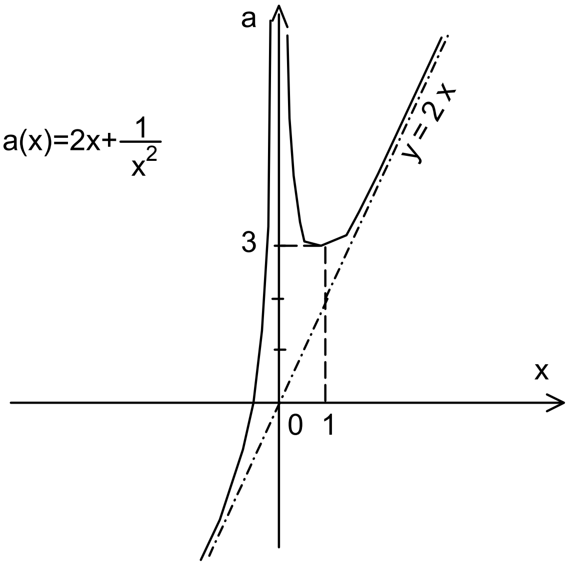
Например, график функции $y = x + (1/x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to \pm\infty$ с уравнением $y=x$; гипербола $y=1/x$ имеет горизонтальную асимптоту $y=0$; график функции $y = arctgx$ имеет две горизонтальные асимптоты: $y=\pi/2$ при $x \to +\infty$ и $y=-\pi/2$ при $x \to -\infty$.

<u>*Пример*</u> [ВШЭ-1996] *Сколько различных корней имеет уравнение* $2x^3 - ax^2 + 1 = 0$ *при различных значениях параметра* a*?*

Решение. Так как $x=0$, очевидно, не является корнем данного уравнения ни при каких a, то, поделив обе части уравнения на x^2 и выражая параметр, придем к равносильному уравнению $a = 2x + \frac{1}{x^2}$. Далее будем решать задачу с использованием графического подхода. Введём прямоугольную декартову систему координат, где на оси абсцисс будем откладывать значения переменной x, а на оси ординат – значения параметра a, и построим в этой системе координат график функции $a(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$. Для этого найдём производную $a'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$. Производная обращается в нуль в единственной точке $x = 1$ (при этом $a(1) = 3$) и не существует при $x = 0$. Других критических точек данная функция не имеет. Поскольку $a'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $a'(x) < 0$ при $x \in (0,1)$, то функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$, и убывает на интервале $(0,1)$. Следовательно, в точке $x = 1$ функция имеет локальный минимум, равный 3.

Выясним, сколько и каких асимптот имеет данная функция. Так как $\lim\limits_{x \to 0}\left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, то прямая $x = 0$ служит вертикальной асимптотой для графика функции. Предположим теперь, что график имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде прямой $y = kx + b$. Найдём коэффициенты k и b:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(2 + \frac{1}{x^3}\right) = 2, \quad b = \lim_{x \to +\infty}(a(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$



Так как оба коэффициента существуют и конечны, то график функции имеет наклонную асимптоту, уравнение которой $y = 2x$. Заметим, что значения k, b не изменятся, если устремить $x \to -\infty$, т.е. других асимптот нет. График функции построен. Анализируя его, приходим к ответу.

Ответ: при $a \in (-\infty, 3)$ уравнение имеет 1 корень; при $a = 3$ - 2 корня; при $a \in (3, +\infty)$ - 3 корня.

Выпуклые функции. Точки перегиба (*)

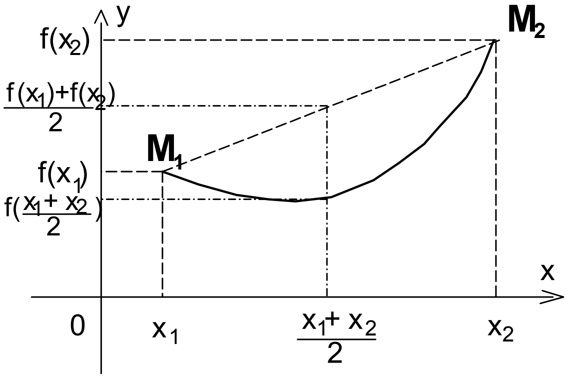
Приведём три эквивалентных между собой определения функции, выпуклой вниз либо вверх (в строгом смысле слова) на заданном промежутке. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на множестве X.

<u>Опр. 1</u>. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на множестве X, если для любых не равных между собой значений x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, её график лежит ниже (выше) хорды, соединяющей точку M_1 с координатами $(x_1; f(x_1))$ с точкой M_2 с координатами $(x_2; f(x_2))$.

<u>Опр. 2</u>. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на множестве X, если для любых значений x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$), принадлежащих этому промежутку, выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$$\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$



Геометрический смысл неравенства в определении 2 состоит в том, что точка графика

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}; f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right),$$

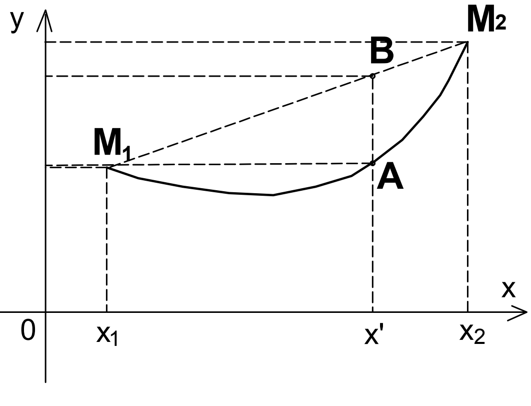
соответствующая середине $(x_1+x_2)/2$ промежутка (x_1, x_2), в случае выпуклости вниз лежит ниже, а в случае выпуклости вверх - выше точки $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$ середины отрезка M_1M_2, соединяющего концы хорды. Это неравенство носит название *неравенства Йенсена*.

Йенсен *Иоганн Людвиг* (1859–1925) – датский математик. Занимался теорией функций.

<u>Опр. 3</u>. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на множестве X, если для любых неравных значений x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, и любых положительных чисел λ_1 и λ_2 таких, что $\lambda_1+\lambda_2=1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Это неравенство также носит название *неравенства Йенсена*. Геометрический смысл последнего неравенства состоит в том, что точка $A(x'; f(x'))$ с абсциссой $x' = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, принадлежащая дуге графика функции, в случае выпуклости вниз имеет ординату, меньшую (а в случае выпуклости вверх, соответственно, большую) ординаты точки B с той же абсциссой, принадлежащей хорде M_1M_2.



При указанных выше ограничениях на λ_1 и λ_2 точка $x' = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ лежит между точками x_1 и x_2. В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ из последнего неравенства получается приведённое в определении 2 неравенство Йенсена.

В качестве примера функции, график которой имеет направление выпуклости вниз на всей области определения, можно привести функцию $y = x^2$, $x \in R$.

Сформулируем теперь определение выпуклости непрерывной функции в нестрогом смысле слова. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* (*вниз*) на промежутке X, если каждая дуга графика функции лежит не ниже (не выше) стягивающей её хорды.

Или: функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на заданном промежутке X, если для любых значений x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, выполняется неравенство

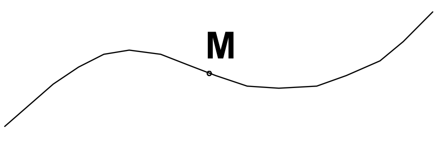
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right).$$

Или: функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на промежутке X, если для любых значений x_1 и x_2 из этого промежутка и любых положительных чисел λ_1 и λ_2 таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

В частности, прямая $y = kx + b$ имеет на всей числовой прямой направление выпуклости вверх (и, одновременно, вниз) в нестрогом смысле слова.

Возможна ситуация, когда функция не сохраняет одно и то же направление выпуклости на всей области определения. В связи с этим приведём ещё одно определение.



Точка $M(x_0; f(x_0))$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$, называется *точкой перегиба*, если график функции имеет в этой точке касательную, причём слева и справа от данной точки график функции $f(x)$ имеет разные направления выпуклости. Иными словами, точка перегиба отделяет участок графика функции, где функция выпукла вниз, от участка графика, где она выпукла вверх. В точке перегиба M график функции меняет направление выпуклости.

Существуют и другие определения выпуклости функций. Например, если функция имеет производную всюду на множестве X, то можно привести следующее определение.

Опр. 4. Функция $f(x)$, имеющая производную на множестве X, называется *выпуклой вниз (вверх)* в строгом смысле на этом промежутке, если для любых $x \in X$, за исключением точки касания, касательная к графику функции в точке $M(x; f(x))$ лежит ниже (соответственно, выше) графика. Аналогично формулируется определение выпуклости в нестрогом смысле слова.

Свойства выпуклых функций

1. Если функция $f(x)$ выпукла вверх (вниз), то функция $-f(x)$ является выпуклой вниз (вверх).

2. Произведение выпуклой вверх (вниз) функции на положительную постоянную является выпуклой вверх (вниз) функцией.

3. Сумма двух выпуклых вверх (вниз) на одном и том же промежутке функций также является выпуклой вверх (вниз) функцией.

4. Если функция $f(x)$ выпукла вверх и принимает только положительные значения, то функция $1/f(x)$ является выпуклой вниз.

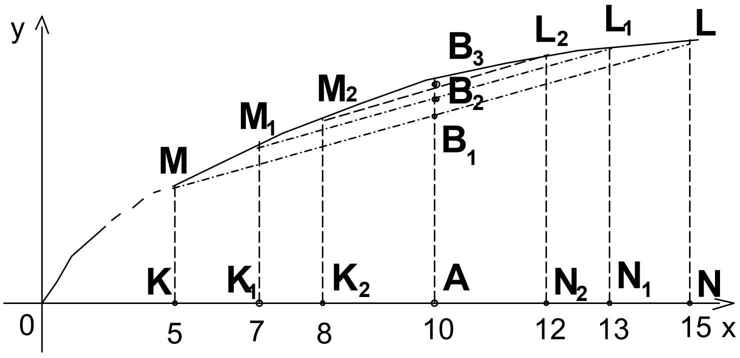
5. Пусть функция $y=\varphi(u)$ выпукла вниз и возрастает и функция $u=f(x)$ также выпукла вниз. Тогда сложная функция $y=\varphi(f(x))$ будет выпуклой вниз.

Для функций $f(x)$, имеющих вторую производную $f''(x)$ (производную от производной), существует правило определения направления выпуклости исследуемой функции на заданном промежутке по знаку второй производной, однако его изучение не входит в школьную программу по математике.

<u>Пример</u> [ВМК-2005,устн.] *Расположить в порядке возрастания числа*

$$\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13},\ \sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}\ \text{и}\ \sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[11]{x}$ при $x \geq 0$. Введём вспомогательную функцию $\varphi(t)=\dfrac{f(10-t)+f(10+t)}{2}$, значения которой при $t=2{,}3{,}5$ равны соответственно ординатам точек B_3, B_2, B_1 (поскольку отрезки AB_3, AB_2, AB_1 являются соответственно средними линиями трапеций $K_2M_2L_2N_2$, $K_1M_1L_1N_1$, $KMLN$).



Покажем, что эта функция убывает при $t>0$. Действительно, её производная

$$\varphi'(t)=\frac{f'(10+t)-f'(10-t)}{2}<0,$$

т.к. $10+t>10-t$,

а $f'(x)=\dfrac{1}{11\sqrt[11]{x^{10}}}$ - убывающая функция. Тогда имеем цепочку неравенств

$$\varphi(5)<\varphi(3)<\varphi(2)\ \ (AB_1<AB_2<AB_3),$$

или $$\frac{f(10-5)+f(10+5)}{2}<\frac{f(10-3)+f(10+3)}{2}<\frac{f(10-2)+f(10+2)}{2},$$

$$\frac{\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}}{2}<\frac{\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}}{2}<\frac{\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}}{2},$$

откуда приходим к ответу.

Замечание. Полученный результат в действительности является прямым следствием того, что график функции $f(x)=\sqrt[11]{x}$ при $x \geq 0$ имеет выпуклость, направленную вверх (в строгом смысле).

Ответ: $\sqrt[11]{5}+\sqrt[11]{15}<\sqrt[11]{7}+\sqrt[11]{13}<\sqrt[11]{8}+\sqrt[11]{12}$.

Обратные функции (*)

Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения X и областью значений Y, которая разным значениям аргумента x ставит в соответствие разные числа y.

Обратной по отношению к $y=f(x)$ называется такая функция $x=f^{-1}(y)$, которая определена на множестве Y, и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие такое $x \in X$, что $f(x)=y$. Заметим, что символ f^{-1} в данном случае всего лишь обозначает обратную функцию, и его не следует путать с операцией возведения в степень: $(f(x))^{-1}=1/f(x)$.

Таким образом, для нахождения функции $x=f^{-1}(y)$, обратной к функции $y=f(x)$, надо решить уравнение $f(x)=y$ относительно x.

Например, обратной функцией к линейной функции $y=3x-1$ является также линейная функция $x=(y+1)/3$, обратной функцией к дробно-линейной функции $y=(x+1)/x$ является также дробно-линейная функция $x=1/(y-1)$, а обратной функцией к показательной функции $y=10^x$ является логарифмическая функция $x=\lg y$.

Из определения обратной функции следует, что при любом x из множества X имеет место тождество

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x.$$

Заметим, что если функция $x=f^{-1}(y)$, $y \in Y$, является обратной к функции $y=f(x)$, $x \in X$, то функция $y=f(x)$, $x \in X$, является, в свою очередь, обратной к функции $x=f^{-1}(y)$, $y \in Y$, и поэтому при любом y из множества Y имеет место тождество

$$f(f^{-1}(y)) \equiv y.$$

То есть речь всегда идет о паре *взаимно обратных функций* f и f^{-1}. Функция, имеющая на множестве X обратную функцию, называется *обратимой*.

При изучении свойств взаимно обратных функций f и f^{-1} в курсе элементарной математики независимые переменные принято обозначать одной и той же буквой (обычно x), а значения этих функций – также одной буквой (обычно y). Другими словами, для функции $y = f(x), x \in X$, обратная функция часто записывается в виде $y = f^{-1}(x), x \in Y$. Например, именно функции $y = x + 1, x \in R$, и $y = x - 1, x \in R$, а также функции $y = 2^x, x \in R$, и $y = \log_2 x, x \in (0,+\infty)$, считаются в пособиях для школьников взаимно обратными.

Поэтому при решении задач на отыскание обратной функции для функции $y = f(x)$, заданной на множестве X, надо, решив уравнение $f(x) = y$ относительно переменной x ($x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$), затем поменять местами символы x и y: $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$. Последняя операция приводит к тому, что графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ оказываются симметричными друг другу относительно прямой $y = x$. Это свойство позволяет, зная график одной из функций, быстро построить график обратной к ней, не проводя предварительных исследований её свойств.

Отметим, что в этих новых обозначениях имеют место следующие тождества:

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x, \ x \in X, \qquad f(f^{-1}(x)) \equiv x, \ x \in Y.$$

Например, справедливы тождества

$$\arcsin(\sin x) \equiv x, \ x \in [-\pi/2, \pi/2]; \ \sin(\arcsin x) \equiv x, \ x \in [-1,1].$$

<u>Теорема</u> (достаточное условие существования обратной функции).

Если функция $y = f(x)$ определена и строго возрастает (убывает) на множестве X, то у неё существует обратная функция $y = f^{-1}(x)$ и она также строго возрастает (убывает) на множестве значений Y данной функции $f(x)$.

Условие строгой монотонности является и необходимым для существования обратной функции, если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на числовом множестве X. При этом если функция $y = f(x)$ имеет производную и $f'(x) \neq 0$, то $x = f^{-1}(y)$ также имеет производную и $\left(f^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{f'(x)}$.

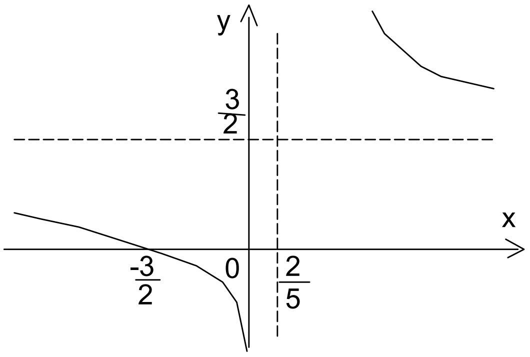
Вообще, для того чтобы функция имела обратную (являлась обратимой), необходимо и достаточно, чтобы каждое своё значение она принимала ровно один раз, т.е. чтобы между областью определения функции и множеством её значений можно было установить взаимно однозначное соответствие.

Пример 1 [Академия гражданской защиты МЧС России]. *Найти функцию, обратную к функции* $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Решение. Обозначим $e^x=t>0$. Тогда $y=\dfrac{t-1/t}{2}$ $\Leftrightarrow$ $t^2-2yt-1=0$. Дискриминант этого квадратного уравнения равен $D=4\left(y^2+1\right)>0$, а корни $\left[\begin{array}{l} t_1=y-\sqrt{y^2+1}<0 \\ t_2=y+\sqrt{y^2+1} \end{array}\right.$. Итак, единственный положительный корень $t=y+\sqrt{y^2+1}$ (так как $\sqrt{y^2+1}>\sqrt{y^2}=|y|\geq y$). Выполняя обратную подстановку, получаем $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$. Логарифмируя, находим: $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$. Итак, обратной функцией к функции $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in R$, является функция $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in R$.

Пример 2 [ВМиК-2001,устн.] *Найти функцию, обратную к функции* $f(x)=\dfrac{2x+3}{5x-2}$. *Построить её график.*

Решение. Выразим из равенства $y=\dfrac{2x+3}{5x-2}$ переменную x через переменную y (при $x\neq\dfrac{2}{5}$): $x=\dfrac{2y+3}{5y-2}$. Меняя местами обозначения x и y, получаем, что уравнение обратной функции имеет вид: $y=\dfrac{2x+3}{5x-2}$. В данном случае исходная функция полностью совпала со своей обратной. Поэтому и графики этой пары взаимно обратных функций в данной задаче также совпадают (гипербола $y=\dfrac{2x+3}{5x-2}$ оказалась симметрична сама себе относительно прямой $y=x$).



Ответ: обратная функция имеет вид $y=\dfrac{2x+3}{5x-2}, x\in R\setminus\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$.

Схема исследования свойств функции

Исследование свойств функции одной действительной переменной $y=f(x)$, заданной явно в прямоугольной системе координат, проводится по следующей *схеме* (порядок пунктов может быть изменён; некоторые из пунктов выходят за рамки школьной программы):

1) находится область определения функции $D(f)$;
2) находятся нули функции и промежутки, на которых функция принимает положительные и отрицательные значения; изучается характер поведения функции в граничных точках области определения, в частности при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (если область определения не ограничена);
3) выясняется, имеются ли у функции оси и центры симметрии, в частности, является ли функция чётной или нечётной;
4) выясняется, является ли функция периодической, если да, то находится её главный период (если он существует);
5) выясняется, является ли функция непрерывной, если нет, то находятся все точки разрыва и указывается их характер (существует классификация точек разрыва, с неё обычно знакомятся в высшей школе);
6) выясняется, имеет ли функция производную, если да, то вычисляется значение производной в каждой точке её существования;
7) находятся промежутки возрастания и убывания функции (в большинстве случаев с помощью найденной производной, если она существует), а также точки локальных экстремумов и сами экстремальные значения;
8) находятся промежутки выпуклости функции вверх (вниз) и точки перегиба её графика (для функций, имеющих вторую производную, для этого предварительно её вычисляют);
9) находятся асимптоты;
10) находится область изменения функции $E(f)$, для ограниченных функций определяются её наибольшее и наименьшее значения (если они существуют).

На основе проведённого исследования строится график функции.

<u>Пример 1</u> [ВМиК-2000,устн.] *Построить график функции* $y = \log_{|tgx|} 2$.

Решение. Область определения функции задаётся системой неравенств:
$\begin{cases} |tgx| \neq 0 \\ |tgx| \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, & n \in Z \\ x \neq \pi/4 + \pi k/2, & k \in Z \\ x \neq \pi/2 + \pi m, & m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi n}{4}, n \in Z$. Преобразуем уравнение функции к виду $y = \dfrac{1}{\log_2 |tgx|}$. Так как функция периодична с периодом $T = \pi$, то достаточно построить график функции на любом участке длиной π. Пусть это будет интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. В силу чётности функции, график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно построить его на промежутке $(0, \pi/2)$. Функция не определена на концах этого интервала и в его середине.

При $x \to +0$ (т.е. при x, стремящемся к нулю справа - со стороны положительных чисел) имеем $|tgx| \to +0$ (т.е. $|tgx|$ стремится к нулю справа), следовательно, $\log_2|tgx| \to -\infty$, и тогда $y = \dfrac{1}{\log_2|tgx|} \to -0$. При $x \to \pi/4 - 0$ (т.е. слева - со стороны чисел, меньших $\pi/4$) имеем $|tgx| \to 1-0$, следовательно, $\log_2|tgx| \to -0$, и тогда $y = \dfrac{1}{\log_2|tgx|} \to -\infty$. При $x \to \pi/4 + 0$ имеем $|tgx| \to 1+0$, значит, $\log_2|tgx| \to +0$, тогда $y = \dfrac{1}{\log_2|tgx|} \to +\infty$. При $x \to \pi/2 - 0$ имеем $|tgx| \to +\infty$, значит, $\log_2|tgx| \to +\infty$ и, следовательно,

$$y = \frac{1}{\log_2|tgx|} \to +0.$$

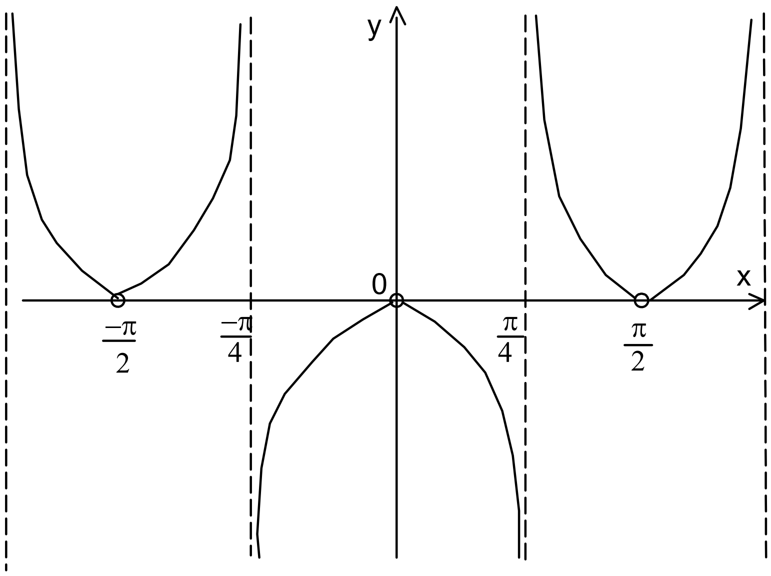


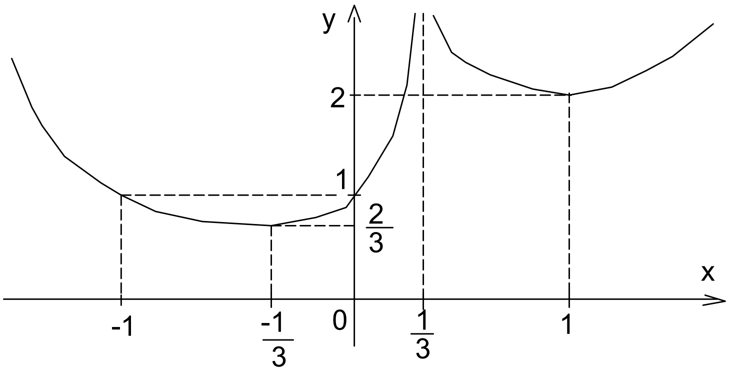
График функции имеет вертикальные асимптоты, уравнения которых $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Итак, график функции построен (заметим, что при этом даже не была использована производная).

<u>Пример 2</u> [Химфак-2005] *При каких значениях a уравнение* $|x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right| = a$ *имеет ровно 3 решения?*

Решение. Построим график функции $y = |x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right|$. Построив графики функций $y = |x|$ и $y = \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right|$, убеждаемся, что при $x \le -1$ обе функции убывают и, следовательно, их сумма также убывает от $+\infty$ до 1. Далее, при $x \in [0, 1/3)$ обе функции и, значит, их сумма возрастают от 1 до $+\infty$.

Исследуем теперь поведение функции $y = |x| + \left|\dfrac{x+1}{3x-1}\right|$ на промежутках $(-1,0)$ и $[1/3, +\infty)$. При $x \in (-1,0)$ раскроем модули и упростим функцию:

$y=\frac{3x^2+1}{1-3x}$. Её производная $\left(\frac{3x^2+1}{1-3x}\right)'=-\frac{9x^2-6x-3}{(1-3x)^2}$ обращается в нуль на данном интервале при $x=-1/3$, причём в левой окрестности этой точки производная отрицательна (функция убывает), а в правой – положительна (функция возрастает), поэтому непрерывная в этой точке функция имеет в ней локальный минимум, равный $y(-1/3)=2/3$. При $x\in[1/3,+\infty)$ раскрыв модули, получим функцию $y=\frac{3x^2+1}{3x-1}$. Её производная $\left(\frac{3x^2+1}{3x-1}\right)'=\frac{9x^2-6x-3}{(3x-1)^2}$ обращается в нуль на данном промежутке при $x=1$, причём слева от этой точки функция убывает, а справа – возрастает и, следовательно, имеет при $x=1$ локальный минимум $y(1)=2$.



Таким образом, получили эскиз графика функции. По графику видно, что уравнение $|x|+\left|\frac{x+1}{3x-1}\right|=a$ имеет ровно три решения только при $a=2$.

Замечание. Можно было решать задачу иначе. Заметим, что если некоторое число x является решением уравнения, то и число $\frac{x+1}{3x-1}$ также будет решением. Следовательно, чтобы уравнение имело нечётное число решений, необходимо, чтобы одно из них было корнем уравнения $x=\frac{x+1}{3x-1}$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1/3\\x=1\end{array}\right.$. Подставляя эти значения в уравнение, находим возможные значения параметра $\left[\begin{array}{l}a=2/3\\a=2\end{array}\right.$. Однако далее необходимо сделать проверку найденных значений a. Только $a=2$ удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: $a=2$.

1.3. Элементарные функции

Определение и классификация элементарных функций

Элементарные функции – это класс функций одной вещественной переменной, состоящий из степенных функций, многочленов, рациональных функций, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций, гиперболических функций, обратных гиперболических функций, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырёх арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций, применяемых конечное число раз.

Приведём классификацию простейших элементарных функций одной действительной переменной. Элементарные функции подразделяют, по аналогии с действительными числами, на алгебраические и трансцендентные (см. схему ниже).

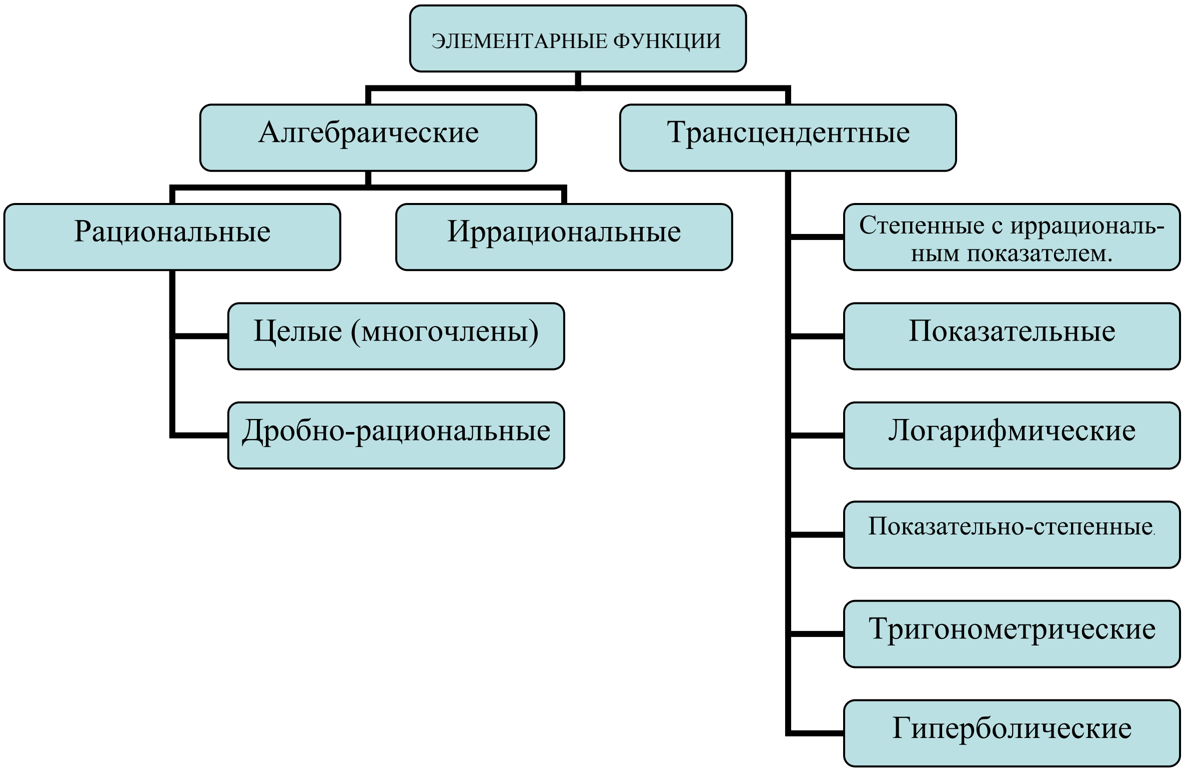


Рис.1. Классификация элементарных функций

К *алгебраическим* элементарным функциям относят:

1) целые рациональные функции (многочлены, или полиномы) $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$; в частности, степенные функции с натуральным показателем $y = x^n$ $(n \in N)$, линейные функции $y = ax + b$, квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$); все эти функции определены при любом действительном значении аргумента;

2) *дробно-рациональные* функции $y = \dfrac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_o}$ $(n, m \in N; a_n \neq 0; b_m \neq 0)$; в частности, $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$) – дробно-линейные функции (при $n = m = 1$), степенные функции с целым отрицательным показателем $y = x^{-n}$ ($n \in N$); эти функции определены всюду, за исключением тех значений аргумента x, при которых многочлены в знаменателе обращаются в нуль;

3) *иррациональные* функции, в которых переменная x находится под знаком радикала, например, $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$; в частности, к иррациональным относятся степенные функции с нецелым рациональным показателем $y = x^q$, где $q \in Q$.

К *трансцендентным* функциям относятся:

4) *степенная* функция с действительным (иррациональным) показателем $y = x^p, p \in R$ (при $p > 0$ определена при всех $x \in [0; +\infty)$, при $p < 0$ - при $x \in (0, +\infty)$);

5) *показательная* функция $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$, в частности, $y = e^x$ - экспоненциальная функция ($x \in R$); если $a = 1$, то $y \equiv 1$ - совпадает с линейной функцией $y = ax + b$, где $a = 0, b = 1$;

6) *логарифмическая* функция $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, определённая при $x > 0$;

7) *показательно-степенная* функция $y = f(x)^{g(x)}$ (определена при $f(x) > 0$);

8) *тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \sec x$, $y = \cos ecx$;

9) *обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$;

10) *гиперболические функции* (см. определение ниже): $y = shx$, $y = chx$, $y = thx$, $y = cthx$, $y = \sec hx$, $y = \cos echx$;

11) *обратные гиперболические* функции: $y = Arsh(x)$, $y = Arch(x)$, $y = Arth(x)$, $y = Arcth(x)$.

Отметим, что производная элементарной функции есть также элементарная функция. Но обратная функция к элементарной функции и первообразная элементарной функции могут не являться элементарными функциями.

Линейная функция

Функция вида $y = ax + b$, где a, b - некоторые действительные числа, называется *линейной функцией*. При этом число a называют *угловым коэффициентом*, а число b - *свободным членом* ([1,2]).

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$, так как выражение $ax + b$ однозначно определено для любого действительного x.

2) *Область значений*. При $a \neq 0$ областью значений функции является $(-\infty, +\infty)$, так как для любого действительного y существует число $x = (y - b)/a$ такое, что $y = ax + b$. Если же a=0, то область значений состоит из единственного числа b, так как значение $ax + b$ в этом случае тождественно равно b. В первом случае функция не ограничена как сверху, так и снизу, а во втором – является ограниченной.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции всегда пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; b)$. Если $a \neq 0$, то график функции пересекает ось абсцисс в точке с координатами $(-b/a; 0)$. Если же a=0, то график либо совпадёт с осью Ox (при b=0), либо будет ей параллелен и, следовательно, не будет иметь с нею точек пересечения (при $b \neq 0$).

4) *Промежутки знакопостоянства функции*.

Если $a > 0$, то функция принимает отрицательные значения при $x < -b/a$ и положительные при $x > -b/a$. Действительно, при $a > 0$ по одному из свойств числовых неравенств получаем, что неравенство $ax + b > 0$ равносильно (после деления обеих его частей на число a) неравенству $x > -b/a$.

Если $a < 0$, то, аналогично, опираясь на соответствующее свойство числовых неравенств, доказывается, что функция принимает отрицательные значения при $x > -b/a$ и положительные при $x < -b/a$.

Наконец, если a=0, то функция принимает постоянное значение, равное b, и, следовательно, не меняет своего знака на всей области определения.

5) *Асимптоты*. Можно считать, что график линейной функции имеет асимптоту $y = ax + b$, совпадающую, в частности, с графиком самой функции.

6) *Периодичность*. При $a \neq 0$ функция строго монотонна и поэтому не может являться периодической. При $a = 0$ функцию относят к периодическим, однако главного периода у неё не существует; при этом в качестве периода может выступать произвольное, не равное нулю, действительное число.

Докажем это, используя определение периодической функции. Предположим, линейная функция периодична с периодом $T \neq 0$. Тогда для всех действительных x должно выполняться условие $f(x + T) = f(x)$:

$$a(x+T)+b=ax+b \Leftrightarrow aT=0.$$

Последнее равенство при $T \neq 0$ выполняется сразу для всех x тогда и только тогда, когда $a=0$. При этом любое отличное от нуля число T может выступать в роли периода.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция является чётной тогда и только тогда, когда $a=0$. Функция нечётна только при $b=0$. (Таким образом, если выполняются сразу оба условия $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$, то линейная функция будет одновременно и чётной, и нечётной.)

Действительно, выясним, когда линейная функция является чётной. В этом случае при всех действительных x должно выполняться условие $f(-x)=f(x)$, т.е., в данном случае, $a(-x)+b \equiv ax+b$, или $ax \equiv 0$, что возможно $\forall x \in R$ только если $a=0$. Аналогично, функция является нечётной тогда и только тогда, когда для любого действительного x выполнено $f(-x)=-f(x)$, т.е. $a(-x)+b \equiv -(ax+b)$, что верно $\forall x \in R$ только при $b=0$.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Для исследования данной функции на монотонность воспользуемся определением монотонной функции (на практике чаще для этих целей используют производную, но в МГУ им. М.В. Ломоносова тема производной в настоящее время не включена в программу по математике для поступающих). Зафиксируем произвольные действительные значения x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$, и рассмотрим разность $f(x_2)-f(x_1)=(ax_2+b)-(ax_1+b)=a(x_2-x_1)$. Отсюда видно, что поскольку $x_2-x_1>0$, то

$$f(x_2)>f(x_1), \text{ если } a>0,$$
$$f(x_2)<f(x_1), \text{ если } a<0,$$
$$f(x_2)=f(x_1), \text{ если } a=0.$$

Таким образом, в силу определения, получаем: при $a>0$ линейная функция строго возрастает, при $a<0$ функция строго убывает, при $a=0$ - является постоянной (не возрастает и не убывает одновременно).

Далее, при $a \neq 0$ линейная функция строго монотонна и поэтому не имеет локальных экстремумов. В силу неограниченности сверху и снизу её области изменения, не имеет она в этом случае и наименьшего (наибольшего) значений. При $a=0$ можно считать, что при любом действительном x функция имеет локальный максимум (а также, одновременно, минимум) в нестрогом смысле слова. Наибольшее и наименьшее значения в этом случае совпадают и равны b.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Линейная функция непрерывна и имеет производную при любом действительном x, причём $(ax+b)'=a$.

10) *Выпуклость*. Функция является выпуклой вверх (и, одновременно, вниз) на всей области определения в нестрогом смысле.

График линейной функции представляет собой *прямую линию* (обоснование этого факта приводится в книгах [2,22]). На практике график прямой удобно строить по двум точкам, в качестве которых часто выбирают точки пересечения прямой с координатными осями. При $a = 0$ прямая параллельна оси абсцисс. При b =0 прямая проходит через точку начала координат.

Коэффициенты a и b в уравнении прямой имеют наглядное геометрическое толкование. Так, значение коэффициента b определяет величину отрезка, отсекаемого графиком линейной функции на оси ординат, а угловой коэффициент a равен тангенсу угла α, образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс. Постройте график линейной функции самостоятельно в случаях $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$.

Пример [ВМиК-2005,устн.] *Существует ли линейная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x соотношению*

$$f(x+3) - f(2-x) = 3x+1\,?$$

Решение. Предположим, что такая функция существует, и запишем её в общем виде $f(x) = ax + b$. Тогда равенство из условия задачи примет вид

$$(a(x+3)+b) - (a(2-x)+b) = 3x+1 \Leftrightarrow 2ax + a = 3x+1 .$$

Последнее равенство верно при всех $x \in R$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} 2a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ таких a не существует.

Квадратичная функция

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a,b,c – действительные числа, $a \neq 0$, называется *квадратичной функцией*.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$, так как выражение $ax^2 + bx + c$ однозначно определено для любого действительного x.

2) *Область значений*. Чтобы найти область значений функции, преобразуем её, выделяя полный квадрат по x, к виду:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a(x - x_в)^2 + y_в ,$$

где $x_в = -\dfrac{b}{2a}$, $y_в = y(x_в) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Выражение $(x - x_в)^2$ как полный квадрат может принимать лишь неотрицательные значения, причём обращается в нуль только при $x = x_в$. Поэтому областью значений выражения $a(x - x_в)^2 + y_в$ при всевозможных x является

промежуток $[y_в, +\infty)$, если $a > 0$,

промежуток $(-\infty, y_в]$, если $a < 0$.

В первом случае функция не ограничена сверху и ограничена снизу (любым действительным числом, меньшим либо равным $y_в$), а во втором – не ограничена снизу и ограничена сверху.

Можно было исследовать область значений данной функции, сформулировав задачу в следующем виде: при каких значениях y уравнение $ax^2+bx+c=y$ имеет решения? Рассматривая это уравнение как квадратное относительно x и находя его дискриминант $D_1=b^2-4a(c-y)$, получим, что необходимым и достаточным условием существования решений является выполнение неравенства $D_1=b^2-4a(c-y)\geq 0$, откуда, в зависимости от a, и приходим к тому же результату.

3) *Пересечение графика с осями координат*. Найдём точку пересечения графика функции с осью ординат. Для этого положим $x=0$, и получим, что график пересекает указанную ось в точке с ординатой $y=c$, т.е. в точке $(0;c)$.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox являются корнями уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если $D=b^2-4ac<0$, то точек пересечения с осью абсцисс нет. Если $D=0$, то имеется единственная точка пересечения $(x_в;0)$ (точнее, точка касания графика с осью Ox). Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, и поэтому график функции будет пересекать ось абсцисс в двух точках $(x_1;0)$ и $(x_2;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции.*

а) *Случай* $a>0$. Если $D<0$, то квадратичная функция при всех x принимает положительные значения. Если $D\geq 0$, то функция принимает положительные значения при $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$, и отрицательные значения, соответственно, при $x\in(x_1,x_2)$.

б) *Случай* $a<0$. Если $D<0$, то квадратичная функция при всех x принимает только отрицательные значения. Если $D\geq 0$, то функция принимает положительные значения при $x\in(x_1,x_2)$, и отрицательные значения при $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$.

Докажем это для случая $a>0$ (в случае $a<0$ докажите самостоятельно). Действительно, если $D<0$, то первое слагаемое в выражении $a(x-x_в)^2+y_в$ неотрицательно, а второе ($y_в=-D/4a$) - положительно, поэтому функция принимает только положительные значения. Если $D\geq 0$, то, раскладывая квадратичное выражение на линейные множители, получим $y=ax^2+bx+c==a(x-x_1)(x-x_2)$. При $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ значения выражений, стоящих в скобках, будут иметь одинаковые знаки, поэтому произведение

$a(x-x_1)(x-x_2)$ будет положительно. Наоборот, если $x \in (x_1, x_2)$, то знаки выражений в скобках будут разными, и, следовательно, функция будет принимать отрицательные значения.

5) *Асимптоты*. График функции асимптот не имеет.

6) *Периодичность*. Квадратичная функция непериодическая, поскольку, например, значение $y = y_в$ она принимает при единственном значении $x = x_в$, в то время как периодическая функция любое своё значение принимает бесконечное число раз.

7) *Чётность (нечётность). Оси симметрии*. Квадратичная Функция является чётной тогда и только тогда, когда $b = 0$. Действительно, запишем условие чётности: при любом действительном x должно выполняться условие $f(-x) = f(x)$, то есть $a(-x)^2 + b(-x) + c \equiv ax^2 + bx + c \;\Leftrightarrow\; bx \equiv 0$. Но последнее равенство выполняется сразу при всех x тогда и только тогда, когда $b = 0$. Квадратичная функция не может быть нечётной, например, по той причине, что её область значений несимметрична относительно нуля. С другой стороны, не выполняется условие нечётности: $\forall x \in R \;\; f(-x) = -f(x)$, так как это равносильно $a(-x)^2 + b(-x) + c \equiv -(ax^2 + bx + c) \;\Leftrightarrow\; ax^2 + c \equiv 0$. Но последнее равенство не может выполняться сразу при всех x.

График квадратичной функции имеет ось симметрии, параллельную оси ординат. Уравнение этой прямой $x = x_в$.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*.

Если $a > 0$, то функция является возрастающей на промежутке $[x_в, +\infty)$ и убывающей на промежутке $(-\infty, x_в]$; если $a < 0$, то, наоборот, функция является возрастающей на $(-\infty, x_в]$ и убывающей на $[x_в, +\infty)$.

Доказательство проведём для случая $a > 0$ (случай $a < 0$ рассмотрите самостоятельно). Для исследования функции на монотонность воспользуемся определением монотонной функции. Рассмотрим разность

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(a(x_2 - x_в)^2 + y_в\right) - \left(a(x_1 - x_в)^2 + y_в\right) = a\left((x_2 - x_в)^2 - (x_1 - x_в)^2\right) =$$
$$= a(x_2 - x_1)\left((x_2 - x_в) + (x_1 - x_в)\right).$$

Если рассмотреть произвольные действительные значения x_1 и x_2 такие, что $x_в \le x_1 < x_2$, то все три сомножителя в полученном выражении положительны. Это означает, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е. квадратичная функция возрастает на промежутке $[x_в, +\infty)$. Если же взять $x_1 < x_2 \le x_в$, то последний сомножитель будет отрицателен, а первые два положительны. Поэтому $f(x_2) - f(x_1) < 0$, что означает, по определению, убывание функции на промежутке $(-\infty, x_в]$.

По определению локального экстремума получаем, что при $a > 0$ функция имеет при $x = x_в$ единственный локальный минимум, равный $y_в$. При

$a<0$ функция имеет в той же точке $x=x_{в}$ единственный локальный максимум, равный $y_{в}$. В первом случае наименьшее значение функции равно $y_{в}$ и достигается при $x=x_{в}$, а наибольшее не существует (в силу неограниченности функции сверху). Во втором случае в точке $x=x_{в}$ будет достигаться наибольшее значение квадратичной функции, равное $y_{в}$, а наименьшего значения не существует.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Квадратичная функция непрерывна и имеет производную при любом действительном x, причём $\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b$.

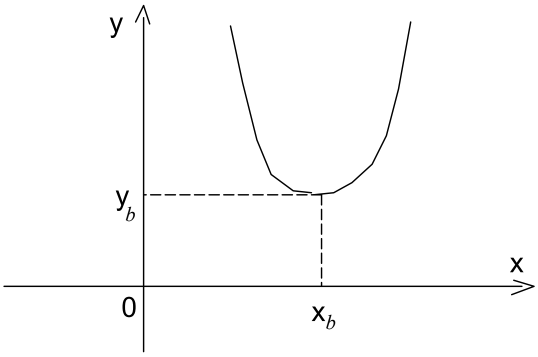
10) *Выпуклость. Точки перегиба*. На всей области определения квадратичная функция строго выпукла вниз при $a>0$ и строго выпукла вверх при $a<0$. Из-за того, что функция на всей области определения сохраняет одно направление выпуклости, её график не имеет точек перегиба.

Графиком квадратичной функции является кривая, называемая *параболой*. Точка с координатами $(x_{в};y_{в})$ называется *вершиной параболы*. При $a>0$ говорят, что ветви параболы направлены вверх, а при $a<0$ - вниз.

Парабола $y=a(x-x_{в})^2+y_{в}$ может быть получена из графика функции $y=x^2$ в результате следующих преобразований.

1) Параллельный перенос графика $y=x^2$ вдоль оси абсцисс на расстояние $|x_{в}|$ вправо, если $x_{в}>0$, и влево, если $x_{в}<0$. В результате получается график функции $y=(x-x_{в})^2$.

2) Растяжение графика $y=(x-x_{в})^2$ вдоль оси ординат в $|a|$ раз (с последующим его симметричным отражением относительно оси абсцисс, если $a<0$). В результате получается график функции $y=a(x-x_{в})^2$.



3) Параллельный перенос графика $y=a(x-x_{в})^2$ вдоль оси ординат на $|y_{в}|$ вверх, если $y_{в}>0$, и на такую же величину вниз, если $y_{в}<0$.

На основании проведённых исследований, строится график квадратичной функции. Например, для случая $a>0$, $D<0$ он может иметь вид, изображённый на рисунке.

Пример 1 [ВМиК-2005,устн.]. *Существует ли квадратичная функция* $y=f(x)$, *удовлетворяющая при всех действительных* x *соотношению*

$$f(1-x)-f(2-x)=-2x+7\ ?$$

Решение. Запишем квадратичную функцию в общем виде $f(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, и найдём неизвестные коэффициенты a,b,c, используя данное в условии задачи соотношение. Так как $f(1-x)=a(1-x)^2+b(1-x)+c$ и $f(2-x)=a(2-x)^2+b(2-x)+c$, то, подставляя в соотношение, получим равенство, которое должно выполняться при всех действительных значениях переменной x:

$$a(1-x)^2+b(1-x)+c-\left(a(2-x)^2+b(2-x)+c\right)\equiv -2x+7 .$$

Раскрывая скобки в левой части и приводя подобные члены, приходим к более простому тождеству $2ax-3a-b\equiv -2x+7$. Так как два линейных многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их старшие коэффициенты и свободные члены, то выписываем систему равенств $\begin{cases}2a=-2\\-3a-b=7\end{cases}$, из которой находим $\begin{cases}a=-1\\b=-4\end{cases}$. Во время приведения подобных членов коэффициент c сократился, что означает, что он может принимать произвольные действительные значения.

Ответ: существует бесконечно много квадратичных функций, удовлетворяющих исходному соотношению; их общий вид $f(x)=-x^2-4x+c$, где $c\in R$.

Пример 2 [РЭА им. Плеханова-1997]. *При каком значении параметра a максимум функции $f(x)=3ax^2-12ax+a^2-11$ равен 2?*

Решение. Так как в условии задачи не говорится о том, что функция является квадратичной, то необходимо рассмотреть возможных два случая: $a=0$ и $a\neq 0$. При $a=0$ функция является линейной и постоянной $f(x)\equiv -11$ и имеет в каждой точке x нестрогий локальный максимум (и минимум одновременно), однако его значение, равное (-11), не совпадает со значением 2. То есть этот случай не удовлетворяет условиям задачи.

При $a\neq 0$ функция является квадратичной; она имеет максимум только в случае $a<0$. При этом максимум достигается в вершине параболы $x_B=\frac{12\cancel{a}}{6\cancel{a}}=2$. По условию, $f(2)=2 \Leftrightarrow 12a-24a+a^2-11=2 \Leftrightarrow$

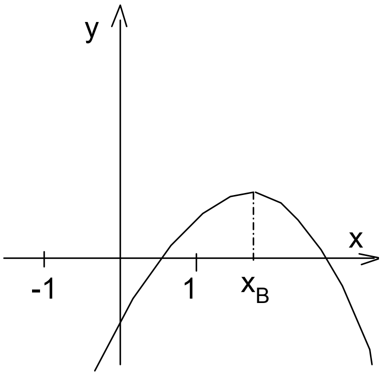
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=13>0 \quad \textit{не} \quad \textit{подходит}\\ a=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: при $a=-1$.

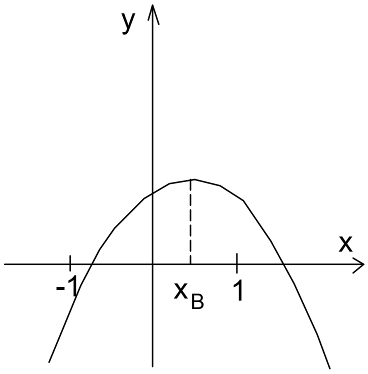
Пример 3. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2-ax-3x^2$ на отрезке $[-1,1]$.*

Решение. Графиком данной функции является парабола с ветвями, направленными вниз, и вершиной при $x_B=-a/6$. В рассматриваемой задаче результат зависит непосредственно от того, как расположена вершина параболы относительно отрезка $[-1,1]$ (а не от знака дискриминанта). Возможны следующие случаи.

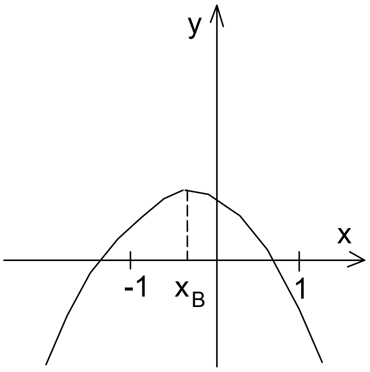
1)



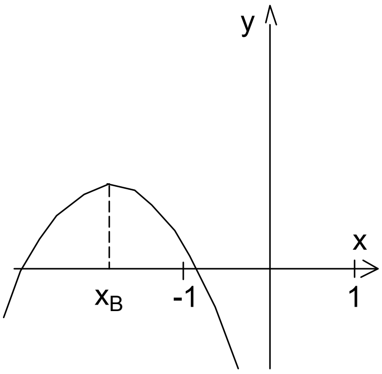
2)



3)



4)



1) Вершина параболы лежит правее отрезка: $x_B > 1 \Leftrightarrow a < -6$. Тогда, в силу возрастания функции на отрезке $[-1,1]$, свои наименьшее и наибольшее значения она принимает соответственно на левом и правом концах этого отрезка, т.е.

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = a-1, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) = -a-1;$$

2) если $0 < x_B \le 1 \Leftrightarrow -6 \le a < 0$, то наибольшее значение функции достигается в вершине параболы, а наименьшее – на левом конце отрезка, т.е.

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = a-1, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x) = f(x_B) = 2 + \frac{a^2}{12};$$

3) если $-1 < x_B \le 0 \Leftrightarrow 0 \le a < 6$, то наибольшее значение функции попрежнему достигается в вершине параболы, а наименьшее – на правом конце отрезка, т.е.

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) = -a-1, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x) = f(x_B) = 2 + \frac{a^2}{12};$$

4) если $x_B \le -1 \Leftrightarrow a \ge 6$, то, в силу убывания функции на отрезке $[-1,1]$, свои наименьшее и наибольшее значения она принимает соответственно на правом и левом концах этого отрезка, т.е.

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) = -a-1, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = a-1.$$

Ответ: при $a \in (-\infty,-6)$ $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = a-1$, $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) = -a-1$;

при $a \in [-6,0)$ $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = a-1$, $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(x_B) = 2+\dfrac{a^2}{12}$;

при $a \in [0,6)$ $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) = -a-1$, $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(x_B) = 2+\dfrac{a^2}{12}$;

при $a \in [6,+\infty)$ $\min\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(1) = -a-1$, $\max\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(-1) = a-1$.

Пример 4 [ВШЭ]. *При каких значениях параметра* a *вершины парабол* $y = x^2 + 2ax - 2a$ *и* $y = x^2 - 2a^2x + a^4 - 3a^2 + 4a$ *лежат по разные стороны прямой* $y = a - 2x$*?*

Решение. Найдём координаты вершин обеих парабол: у первой параболы это будет точка $(-a;-a^2-2a)$, у второй – $(a^2;-3a^2+4a)$. Для того чтобы вершины лежали по разные стороны от прямой $y = a - 2x$, необходимо и достаточно, чтобы выражения $y_{B_1} - a + 2x_{B_1}$ и $y_{B_2} - a + 2x_{B_2}$ имели разные знаки, т.е.

$$(y_{B_1} - a + 2x_{B_1})(y_{B_2} - a + 2x_{B_2}) < 0,$$

$$(-a^2 - 2a - a - 2(-a))(-3a^2 + 4a - a + 2a^2) < 0,$$

$$(-a^2 - 5a)(-a^2 + 3a) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 < a < 0 \\ 0 < a < 3 \end{array}\right.$$

Ответ: при $a \in (-5,0) \cup (0,3)$.

Пример 5 [Моск. гос. лингв. ун-т, до 1998]. *На плоскости* Oxy *указать все точки, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношениями* $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$*, при всевозможных действительных* p.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно p и переформулируем задачу: при каких значениях x и y уравнение

$$2p^2 - 4xp + x^2 - y - 3 = 0$$

не имеет решений? Необходимым и достаточным условием этого является условие отрицательности дискриминанта: $D = 16x^2 - 8(x^2 - y - 3) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y < -x^2 - 3$. Итак, это точки плоскости, лежащие ниже параболы $y = -x^2 - 3$.

Степенная функция с целым показателем

Функция вида $y = x^n$, где $n \in Z$, называется *степенной функцией* с целым показателем. Частными случаями степенной функции являются линейная функция $y = x$ (при $n = 1$), квадратичная функция $y = x^2$ (при $n = 2$). При $n = 0$ функция совпадает с тождественной единицей $y \equiv 1$, кроме точки $x = 0$, в которой она не определена. Степенная функция обладает свойствами, которые зависят от значения показателя степени n. Рассмотрим следующие четыре случая:

1. число n положительное и чётное;
2. число n положительное и нечётное;
3. число n отрицательное и нечётное;
4. число n отрицательное и чётное.

1. *Показатель степени* n *положительный и чётный*

Степенная функция в этом случае задаётся формулой $y = x^{2k}$, где $k \in N$. В частности, квадратичная функция $y = x^2$, соответствующая значению k=1, относится к этому случаю, её основные свойства сохраняются у функций вида $y = x^{2k}$ при $k > 1$.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$, так как выражение x^{2k} однозначно определено для любого действительного x.

2) *Область значений:* $E(y) = [0, +\infty)$, так как выражение x^{2k}, являясь полным квадратом, может принимать любые действительные значения, кроме отрицательных. Можно объяснить тот же факт иначе. Действительно, рассмотрим равенство $y = x^{2k}$ как уравнение относительно переменной x. При положительных значениях y данное уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt[2k]{y}$. Если y=0, то корень один x=0. При отрицательных значениях y уравнение корней не имеет. Из вида области изменения функции, в частности, вытекает, что она ограничена снизу (любым неположительным числом) и не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. Так как уравнение $x^{2k} = 0$ при любом натуральном k имеет единственный корень, равный нулю, то график функции $y = x^{2k}$ имеет только одну точку пересечения с осями координат – точку $(0;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция $y = x^{2k}$ принимает положительные значения при $x \neq 0$. В точке $x = 0$ функция имеет значение, равное нулю.

5) *Асимптоты*. График функции асимптот не имеет.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической, поскольку, например, значение нуль она принимает один раз при $x = 0$.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция $y = x^{2k}$ является чётной, поскольку $f(-x) = (-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k} = f(x)$ при всех $x \in R$. Следовательно, график функции имеет ось симметрии, совпадающую с осью ординат.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*.

Функция $y = x^{2k}$ убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на $[0, +\infty)$.

Для доказательства рассмотрим разность $f(x_2)-f(x_1)=x_2^{2k}-x_1^{2k}=$ $=x_1^{2k}\left((x_2/x_1)^{2k}-1\right)$. Если x_1 и x_2 - произвольные числа такие, что $0<x_1<x_2$, то тогда $\frac{x_2}{x_1}>1$, и оба сомножителя в правой части последнего равенства положительны. Поэтому $f(x_2)-f(x_1)>0$, что, по определению, означает возрастание функции на интервале $(0,+\infty)$. Аналогично доказывается убывание функции на промежутке $(-\infty,0)$.

С другой стороны, убывание чётной функции на $(-\infty,0)$ следует из её возрастания на $(0,+\infty)$. Действительно, поскольку функция возрастает на $(0,+\infty)$, то для любых x_1 и x_2 таких, что $0<x_1<x_2$, выполняется $f(x_1)<f(x_2)$. Умножив двойное неравенство на минус единицу и учитывая чётность функции, получаем, что $\forall\ (-x_2)$ и $(-x_1)$ таких, что $-x_2<-x_1<0$ выполняется $f(-x_1)<f(-x_2)$, что, по определению, означает убывание функции.

Так как $0=0^{2k}<x^{2k}$ для любого $x\neq 0$, то точку $x=0$ можно включить в обоих случаях в промежутки монотонности.

Функция имеет при $x=0$ единственный локальный минимум, равный нулю. В точке локального минимума достигается наименьшее значение функции, равное нулю, а наибольшее значение не существует (в силу неограниченности функции сверху).

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения, причём $y'=2k\cdot x^{2k-1}$.

10) *Выпуклость*. Функция сохраняет выпуклость вниз на всей области определения.

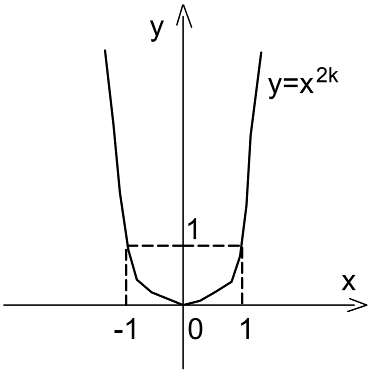


График функции $y=x^{2k}$ напоминает параболу, при этом ветви графика при $|x|<1$ тем сильнее «прижимаются» к оси абсцисс, чем больше показатель степени n. При $|x|>1$ ветви тем круче идут вверх, чем больше n. Эскиз графика функции представлен на рисунке.

Ниже в краткой форме сформулированы основные свойства степенных функций в оставшихся случаях (в более развёрнутом виде доказательство можно попробовать провести самостоятельно; более подробно обоснование некоторых из свойств можно найти в [2]).

2. *Показатель степени n положительный и нечётный*

Степенная функция в этом случае задаётся формулой $y=x^{2k+1}$, где $k\in N$. Типичным представителем этой группы функций является функция

$y = x^3$, соответствующая значению k=1. Её основные свойства сохраняются у функций указанного вида и при значениях $k > 1$. Сформулируем их кратко (в более развёрнутом виде доказательство некоторых из них можно найти в [2]).

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=(-\infty,+\infty)$. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции пересекает обе оси координат в единственной точке – $(0;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция $y = x^{2k+1}$ принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные значения при $x < 0$.

5) *Асимптоты*. График функции асимптот не имеет.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность(нечётность)*. Функция является нечётной. График функции имеет центр симметрии, расположенный в начале координат.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция возрастает на всей числовой оси. Функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения, причём $y' = (2k+1)x^{2k}$.

10) *Выпуклость.* Функция выпукла вверх на промежутке $(-\infty,0]$ и выпукла вниз на промежутке $[0,+\infty)$. Точка $(0;0)$ является точкой перегиба графика функции.

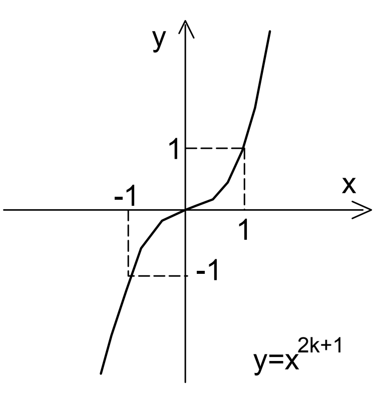


График функции $y = x^{2k+1}$ напоминает кубическую параболу $y = x^3$, проходит через точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$. Эскиз графика функции представлен на рисунке.

Ветви графика при $|x| < 1$ тем сильнее «прижимаются» к оси абсцисс, чем больше показатель степени n. При $|x| > 1$ ветви тем круче идут вверх, чем больше n.

3. *Показатель степени n отрицательный и нечётный*

Степенная функция в этом случае задаётся формулой $y = 1/x^{2k-1}$, где $k \in N$. Важным представителем этой группы функций является функция $y = 1/x$, соответствующая значению k=1. Её основные свойства сохраняются у функций указанного вида и при значениях $k > 1$.

1) *Область определения*: $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции не пересекает осей координат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция $y=1/x^{2k-1}$ принимает положительные значения при $x>0$ и отрицательные значения при $x<0$.

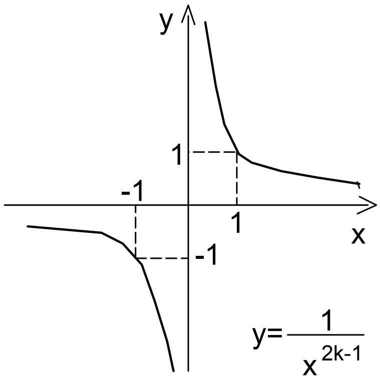
5) *Асимптоты*. График функции имеет вертикальную асимптоту $x=0$ и горизонтальную асимптоту $y=0$.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция является нечётной. График функции имеет центр симметрии, расположенный в начале координат.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция является убывающей на каждом из бесконечных интервалов $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$ в отдельности. Однако она не является убывающей на их объединении (т.е. на своей области определения). Функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема в любой точке своей области определения, причём $y'=\dfrac{1-2k}{x^{2k}}$.



10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутке $(-\infty,0)$ и выпукла вниз на промежутке $(0,+\infty)$. Точек перегиба нет.

График функции $y=1/x^{2k-1}$ напоминает гиперболу $y=1/x$, проходит через точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$. Эскиз графика функции представлен на рисунке.

Зависимость от n состоит в том, что ветви графика тем сильнее «прижимаются» к осям координат, чем больше показатель степени n.

4. *Показатель степени n отрицательный и чётный*

Степенная функция в этом случае задаётся формулой $y=1/x^{2k}$, где $k\in N$. Отметим важнейшие свойства функций из этой группы.

1) *Область определения*: $D(y)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=(0,+\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции не пересекает осей координат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция $y = 1/x^{2k}$ принимает положительные значения на всей области определения.

5) *Асимптоты*. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция является чётной. График функции имеет ось симметрии, совпадающую осью ординат.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция строго возрастает на интервале $(-\infty,0)$ и строго убывает на интервале $(0,+\infty)$. Функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема в любой точке области определения, причём $y' = -\dfrac{2k}{x^{2k+1}}$.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вниз на каждом из промежутков $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$.

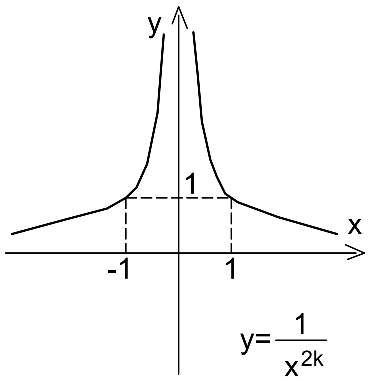


График функции $y = 1/x^{2k}$ проходит через точки $(1;1)$ и $(-1;1)$ и немного напоминает гиперболу, у которой обе ветви лежат выше оси абсцисс. Эскиз графика функции представлен на рисунке.

Зависимость от n состоит в том, что ветви графика тем сильнее прижимаются к осям координат, чем больше показатель степени n.

Степенная функция с рациональным показателем

Степенные функции данной группы задаются уравнением $y = x^{\frac{p}{q}}$, где p/q - несократимая дробь ($p \in Z, q \in N$, $q \neq 1$). Рассмотрим возможные случаи.

1. *Показатель степени p/q положительный (p-чётно, q-нечётно)*

Имеем $p = 2k$, $q = 2l + 1$ $(k, l \in N)$. Примерами таких функций могут служить степенные функции $y = x^{2/3}$ и $y = x^{4/3}$.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=[0,+\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции пересекает оси координат в точке $(0;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает поло-

жительные значения на всей области определения, кроме $x = 0$.

5) *Асимптоты*. График функции не имеет асимптот.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

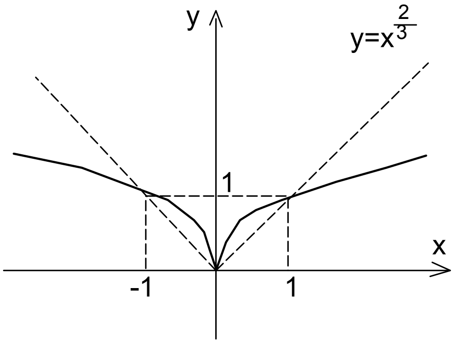
7) *Чётность (нечётность)*. Функция является чётной. График функции имеет ось симметрии, совпадающую с осью ординат.

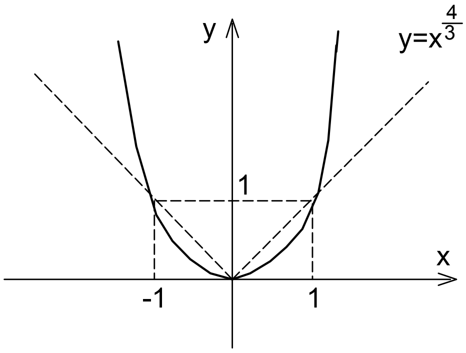
8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция убывает на промежутке $(-\infty,0]$ и возрастает на $[0,+\infty)$. Функция имеет локальный минимум при $x = 0$, равный нулю, совпадающий с наименьшим значением функции. Наибольшего значения функции не существует.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. При $p/q > 1$ функция непрерывна и дифференцируема при всех $x \in R$; при $p/q < 1$ функция всюду непрерывна, а дифференцируема при всех $x \in R \setminus \{0\}$.

10) *Выпуклость*. При $p/q > 1$ функция выпукла вниз на $(-\infty,+\infty)$, а при $p/q < 1$ выпукла вверх на каждом из промежутков $(-\infty,0]$ и $[0,+\infty)$. Точек перегиба нет.

График функции проходит через точки $(1;1)$ и $(-1;1)$. Если $p/q > 1$, то при $|x| > 1$ ветви графика функции растут круче, чем у графика $y = |x|$, а при $|x| < 1$ - сильнее прижимаются к оси абсцисс.





Если же $p/q < 1$, то, наоборот, при $|x| > 1$ функция растёт медленнее, чем $y = |x|$, а при $|x| < 1$ график лежит выше графика функции $y = |x|$. Эскизы графиков функций $y = x^{2/3}$ и $y = x^{4/3}$ представлены на рисунке выше.

2. *Показатель степени p/q положительный (p-нечётно, q-чётно)*

Имеем $p = 2k+1, q = 2l$ $(k, l \in N)$. Примерами таких функций могут служить степенные функции $y = x^{3/2}$ и $y = x^{3/4}$.

1) *Область определения*: $D(y)=[0,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=[0,+\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) График функции пересекает оси координат в точке $(0;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на всей области определения, кроме $x=0$.

5) *Асимптоты*. График функции не имеет асимптот.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

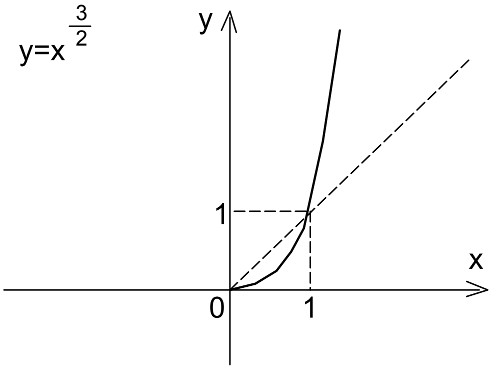
7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

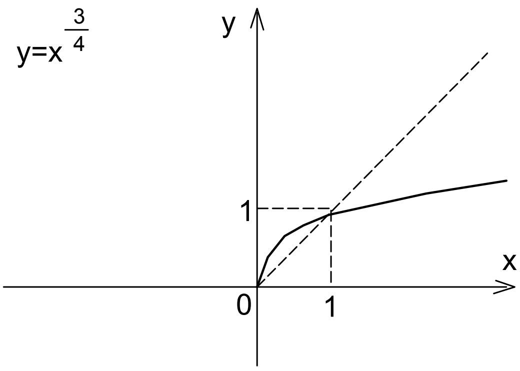
8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция монотонно возрастает на $[0,+\infty)$. Функция имеет минимум, равный нулю, на границе области определения в точке $x=0$. Наименьшее значение функции также равно нулю, наибольшего значения функции не существует.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. При $p/q>1$ функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения, причём в граничной точке $x=0$ функция непрерывна и дифференцируема справа. При $p/q<1$ функция всюду непрерывна, а дифференцируема только во внутренних точках области определения.

10) *Выпуклость*. Если $p/q>1$, то функция имеет выпуклость, направленную вниз. Если же $p/q<1$, то функция выпукла вверх.

График функции проходит через точку $(1;1)$. Если $p/q>1$, то при $x>1$ ветвь графика функции растёт круче, чем график $y=x$, а при $0<x<1$ - график сильнее, по сравнению с прямой $y=x$, прижимается к оси абсцисс. Если же $p/q<1$, то, наоборот, при $x>1$ функция растёт медленнее, чем $y=x$, а при $0<x<1$ график лежит выше графика функции $y=x$. Эскизы графиков функций $y=x^{3/2}$ и $y=x^{3/4}$ представлены ниже на рисунке.





3*. Показатель степени p/q положительный (p -нечётно, q -нечётно)*

Имеем $p=2k-1$, $q=2l+1$ $(k,l\in N)$. Примерами таких функций могут служить степенные функции $y=x^{3/5}$ и $y=x^{5/3}$.

1) *Область определения*: $D(y)=(-\infty,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=(-\infty,+\infty)$. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции пересекает

оси координат в точке $(0;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные значения при $x < 0$.

5) *Асимптоты*. График функции не имеет асимптот.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

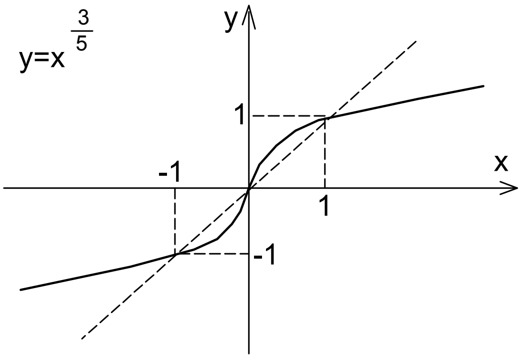
7) *Чётность (нечётность)*. Функция является нечётной.

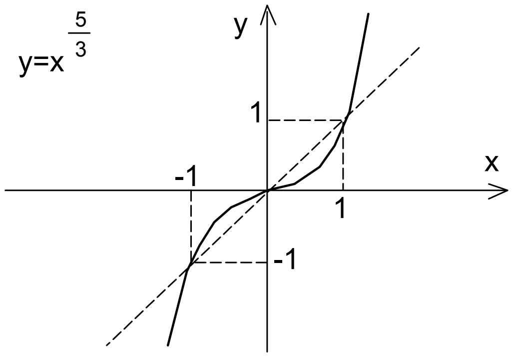
8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция монотонно возрастает на всей области определения, не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. При $p/q > 1$ функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения. При $p/q < 1$ функция всюду непрерывна, а дифференцируема только при $x \neq 0$.

10) *Выпуклость*. При $p/q > 1$ на промежутке $(-\infty,0]$ функция имеет выпуклость, направленную вверх, а на $[0,+\infty)$ - выпуклость, направленную вниз. При $p/q < 1$ на $(-\infty,0]$ функция выпукла вниз, а на $[0,+\infty)$ - вверх. График функции имеет точку перегиба $(0;0)$.

График функции проходит через точки $(-1;-1)$ и $(1;1)$. Если $p/q > 1$, то при $|x| > 1$ ветви графика функции растут круче, чем у графика $y = |x|$, а при $|x| < 1$ - график сильнее, по сравнению с $y = |x|$, прижимается к оси абсцисс. Если же $p/q < 1$, то, наоборот, при $|x| > 1$ функция растёт медленнее, чем $y = |x|$, а при $|x| < 1$ график функции более удалён от оси абсцисс, чем график $y = |x|$. Эскизы графиков функций $y = x^{3/5}$ и $y = x^{5/3}$ представлены на рисунке.





4. *Показатель степени p/q отрицательный (p-чётно, q-нечётно)*

Имеем $p = -2k$, $q = 2l$ +1 $(k,l \in N)$. Примерами таких функций могут служить степенные функции $y = x^{-2/3}$ и $y = x^{-4/3}$.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (0,+\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции не пересекает осей координат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на всей области определения.

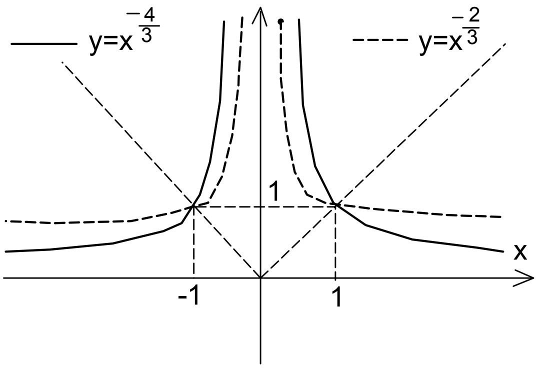
5) *Асимптоты*. График функции имеет вертикальную асимптоту $x=0$ и горизонтальную асимптоту $y=0$.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция является чётной. График функции симметричен относительно оси ординат.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция строго возрастает на интервале $(-\infty,0)$ и строго убывает на интервале $(0,+\infty)$. Функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения.



10) *Выпуклость*. Функция выпукла вниз на каждом из промежутков $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$.

График функции проходит через точки $(1;1)$ и $(-1;1)$ и напоминает гиперболу, у которой обе ветви лежат выше оси абсцисс.

Эскизы графиков функций $y=x^{-2/3}$ и $y=x^{-4/3}$ представлены на рисунке.

5. Показатель степени p/q отрицательный (p-нечётно, q-чётно)

Имеем $p=-(2k-1), q=2l \quad (k,l\in N)$. Примерами таких функций могут служить степенные функции $y=x^{-3/2}$ и $y=x^{-3/4}$.

1) *Область определения*: $D(y)=(0,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y)=(0,+\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. Пересечений нет.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на всей области определения.

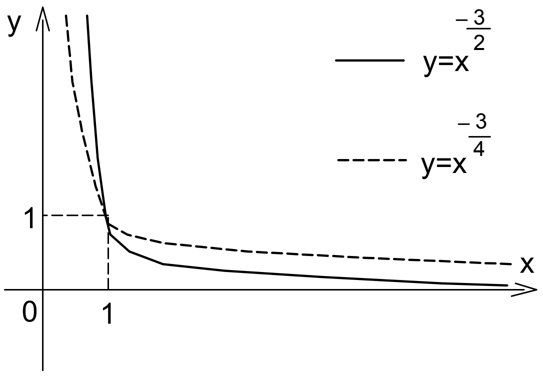
5) *Асимптоты*. График функции имеет вертикальную асимптоту $x=0$ и горизонтальную асимптоту $y=0$.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*.

Функция монотонно убывает на интервале $(0,+\infty)$. Функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.



9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вниз на всей области определения.

График функции проходит через точку $(1;1)$ и слегка напоминает ветвь гиперболы.

Эскизы графиков функций $y = x^{-3/2}$ и $y = x^{-3/4}$ представлены на рисунке.

6. *Показатель степени $\frac{p}{q}$ отрицательный (p -нечётно, q -нечётно)*

Имеем $p = -(2k-1), q = 2l+1$ $(k, l \in N)$. Примерами таких функций могут служить степенные функции $y = x^{-3/5}$ и $y = x^{-5/3}$.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции не пересекает осей координат.

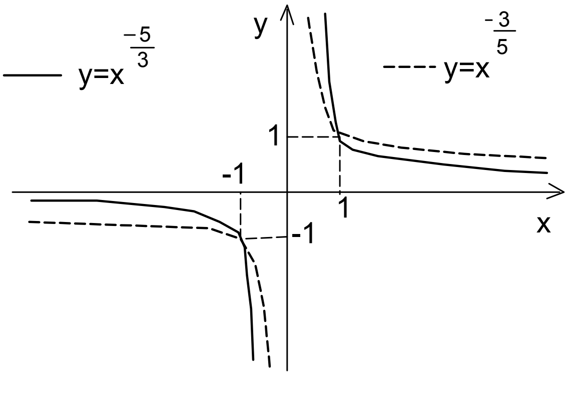
4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает отрицательные значения на интервале $(-\infty,0)$ и положительные значения на $(0,+\infty)$.

5) *Асимптоты*. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция нечётная.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция монотонно убывает на каждом из интервалов $(-\infty;0)$ и $(0,+\infty)$ (но не является убывающей на их объединении). Функция не имеет локальных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.



9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty,0)$ и выпукла вниз на интервале $(0,+\infty)$. Точек перегиба нет.

График функции проходит через точки $(-1;-1)$ и $(1;1)$ и слегка напоминает гиперболу. Эскизы графиков $y = x^{-3/5}$ и $y = x^{-5/3}$ представлены на рисунке.

Степенная функция с иррациональным показателем

Степенные функции данной группы задаются уравнением $y = x^{\alpha}$, где α - иррациональное число.

Определим иррациональную степень α положительного действительного числа x. Если число x равно единице, то полагают $x^{\alpha} = 1$. Пусть теперь $0 < x \neq 1$, тогда для любого иррационального α можно указать два рациональных числа p и q такие, что $p \leq \alpha \leq q$. Тогда, по определению, под x^{α} понимается такое положительное действительное число, которое для всевозможных рациональных чисел p и q таких, что $p \leq \alpha \leq q$, удовлетворяет неравенствам

$$x^{p} \leq x^{\alpha} \leq x^{q}, \text{ если } x > 1$$

и

$$x^{q} \leq x^{\alpha} \leq x^{p}, \text{ если } 0 < x < 1. \qquad (1)$$

Без доказательства принимается, что такое число x^{α} существует и единственно. Если $\alpha > 0$, то иррациональную степень можно определить для числа нуль: $0^{\alpha} = 0$. Отрицательная иррациональная степень числа нуль не определена. Не определена также иррациональная степень отрицательного числа.

1. *Показатель степени α положительный*

Примерами таких функций могут служить функции $y = x^{e}$ и $y = x^{1/\sqrt{17}}$.

1) *Область определения*: $D(y) = [0, +\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = [0, +\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции пересекает оси координат в точке $(0;0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на интервале $(0, +\infty)$.

5) *Асимптоты*. График функции не имеет асимптот.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция монотонно возрастает на интервале $(0, +\infty)$. Функция имеет минимум, равный нулю, на границе области определения в точке $x = 0$. Наименьшее значение функции также равно нулю, наибольшего значения функции не существует.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. При $\alpha > 1$ функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения (в граничной точке $x = 0$ – справа). При $\alpha < 1$ функция непрерывна на всей области определения, а дифференцируема – при $x > 0$. Производная вычисляется по формуле $y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

10) *Выпуклость*. При $\alpha > 1$ функция имеет выпуклость, направленную вниз. При $\alpha < 1$ функция выпукла вверх.

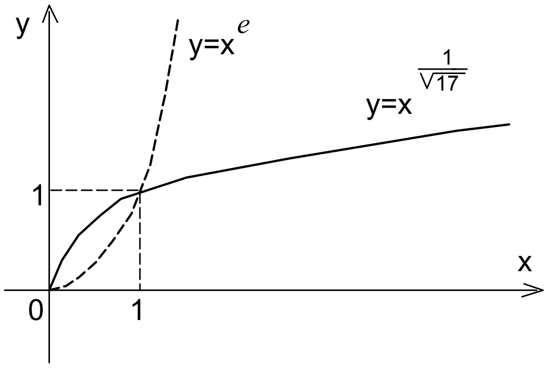


График функции проходит через точку $(1;1)$. Если $\alpha > 1$, то при $x > 1$ ветвь графика функции растёт круче, чем график $y = x$, а при $0 < x < 1$ - график сильнее, по сравнению с прямой $y = x$, прижимается к оси абсцисс. Если же $\alpha < 1$, то, наоборот, при $x > 1$ функция растёт медленнее, чем $y = x$, а при $0 < x < 1$ график лежит выше графика функции $y = x$.

Эскизы графиков функций $y = x^e$ и $y = x^{1/\sqrt{17}}$ представлены на рисунке.

2. *Показатель степени α отрицательный*

Примерами таких функций служат степенные функции $y = x^{-e}$ и $y = x^{-1/\sqrt{17}}$.

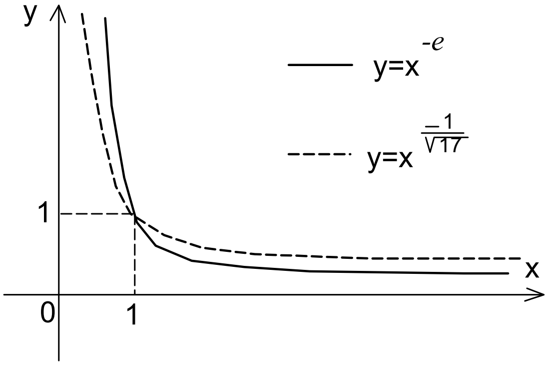
1) *Область определения*: $D(y) = (0, +\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (0, +\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции не пересекает осей координат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на всей области определения.

5) *Асимптоты*. График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную асимптоту $y = 0$.



6) *Периодичность*. Функция не является периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция монотонно убывает на интервале $(0, +\infty)$, не имеет локаль-

ных экстремумов, а также наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вниз. Точек перегиба нет.

График функции проходит через точку $(1;1)$ и слегка напоминает ветвь гиперболы. Эскизы графиков функций $y = x^{-e}$ и $y = x^{-1/\sqrt{17}}$ представлены на рисунке.

Дробно-линейная функция

Функция вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(a,b,c,d \in R, c \neq 0, a^2 + b^2 \neq 0\right)$ называется *дробно-линейной функцией*. Это частный случай дробно-рациональной функции.

1) *Область определения*: поскольку алгебраическая дробь не определена лишь в случае, когда её знаменатель обращается в нуль, то единственным значением аргумента x, при котором функция не определена, является $x = -d/c : D(y) = (-\infty,-d/c) \cup (-d/c,+\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (-\infty, a/c) \cup (a/c,+\infty)$. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. Для нахождения точек пересечения графика с осью абсцисс найдём нули функции, решив уравнение $y = 0$. Получим, что при $a \neq 0$ имеется единственный нуль $x = -b/a$, и, соответственно, единственная точка пересечения будет иметь координаты $(-b/a;0)$. При $a = 0$ график не имеет пересечений с осью абсцисс.

Для нахождения координат точки пересечения графика с осью ординат, положим в уравнении, определяющем функцию, $x = 0$ (это можно сделать, если коэффициент $d \neq 0$), и получим $y = b/d$. Таким образом, единственная точка пересечения графика с осью ординат имеет координаты $(0;b/d)$. В случае $d = 0$ график не имеет пересечений с осью ординат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Преобразуем функцию, выделив константу A, не зависящую от x:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) + b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2x+cd} = A + \frac{B}{x+C},$$

где $A = \dfrac{a}{c}$, $B = \dfrac{bc-ad}{c^2}$, $C = \dfrac{d}{c}$.

Если $A > 0, B > 0$, то $y < 0$ на интервале $(-b/a,-d/c)$,

$y > 0$ при остальных x.

Если $A > 0, B < 0$, то $y < 0$ на интервале $(-d/c,-b/a)$,

$y > 0$ при остальных x.

Если $A<0, B>0$, то $y>0$ на интервале $(-d/c, -b/a)$,

$y<0$ при остальных x.

Если $A<0, B<0$, то $y>0$ на интервале $(-b/a, -d/c)$,

$y<0$ при остальных x.

5) *Асимптоты*. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = A$, то это означает, что график функции имеет горизонтальную асимптоту, уравнение которой $y=a/c$. График функции имеет также вертикальную асимптоту, проходящую через точку, в которой функция не определена. Для нахождения уравнения вертикальной асимптоты необходимо приравнять знаменатель в уравнении функции к нулю и выразить из него x, получим $x=-d/c$. Построение графика дробно-линейной функции, как правило, начинают с построения асимптот.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической, так как каждое своё значение принимает ровно один раз.

7) *Чётность (нечётность). Наличие осей (центров) симметрии*. Функция является нечётной, если при всех x из области определения выполняется тождество $\dfrac{a(-x)+b}{c(-x)+d} = -\dfrac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow bd = acx^2$. Последнее равенство верно при всех $x \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=0 \end{cases}$. Если эти условия нарушаются, то дробно-линейная функция не относится ни к чётным, ни к нечётным функциям. При этом, используя определение центра симметрии, можно легко показать, что точка с координатами $(-d/c; a/c)$, являющаяся точкой пересечения асимптот, является одновременно для графика функции центром симметрии.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция монотонно возрастает на каждом из интервалов $(-\infty, -d/c)$ и $(-d/c, +\infty)$ в отдельности при $B<0$ (не являясь при этом монотонно возрастающей на их объединении), и убывает, соответственно, при $B>0$. В силу строгой монотонности на каждом из указанных интервалов, функция не имеет локальных экстремумов. В силу своей неограниченности, функция не имеет наименьшего и наибольшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения, причём $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

10) *Выпуклость*. При $B<0$ функция выпукла вниз на интервале $(-\infty, -d/c)$ и выпукла вверх на интервале $(-d/c, +\infty)$. При $B>0$, наоборот, функция выпукла вверх на $(-\infty, -d/c)$ и выпукла вниз на $(-d/c, +\infty)$.

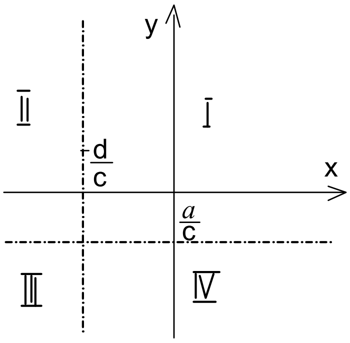
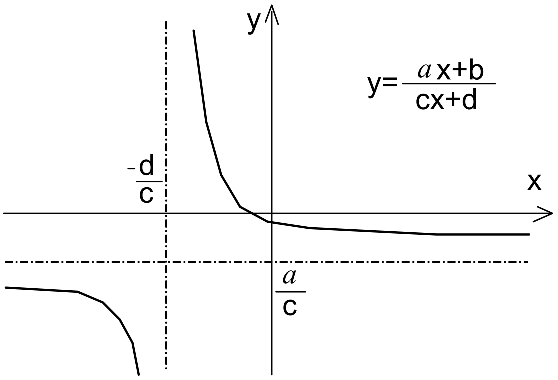


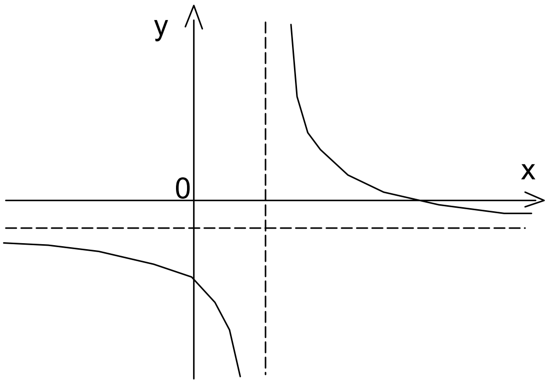
График функции называется гиперболой и состоит из двух ветвей. При этом, если в выражении $y=A+\frac{B}{x+C}$ коэффициент B положителен, то ветви графика будут располагаться в I и III четвертях относительно асимптот (см. рис. внизу), а если коэффициент B отрицателен, то ветви гиперболы располагаются во II и IV четвертях относительно пересекающихся асимптот (докажите это правило знаков самостоятельно).



Замечание. Если $k\neq 0, k\in R$, то зависимость переменной y от переменной x, определяемую уравнением $y=k/x$, называют *обратной пропорциональностью*. В этом случае говорят, что величина y обратно пропорциональна величине x с коэффициентом обратной пропорциональности k. Поэтому и функцию вида $y=\frac{k}{x}$ также часто называют *функцией обратной пропорциональности*.

(В отличие от этого линейную функцию вида $y=kx$ ($k\neq 0, k\in R$) принято называть *прямой пропорциональностью*; число k при этом называют коэффициентом прямой пропорциональности).

Пример 1. По виду графика функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(a>0)$ *определить знаки коэффициентов* b, c *и* d.



Решение. Преобразуем функцию к виду:

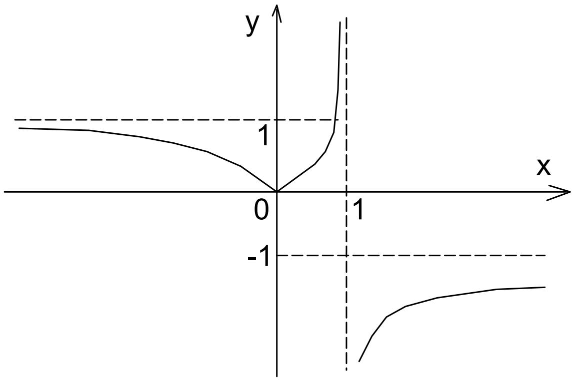
$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c}+b}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)/c^2}{x+\frac{d}{c}}=A+\frac{B}{x+C},$$

где $A=\frac{a}{c}$, $B=\frac{bc-ad}{c^2}$, $C=\frac{d}{c}$.

Отсюда уравнением горизонтальной асимптоты будет $y=A$, а уравнением вертикальной асимптоты будет $x=C$. На графике по положению асимптот определяем знаки $\begin{cases} A<0 \\ -C>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a/c<0 \\ -d/c>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c<0 \\ d>0 \end{cases}$. Заметим, что $y(0)<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b/d<0 \Leftrightarrow b<0$. *Ответ:* $b<0$, $c<0$, $d>0$.

Пример 2 [ВМиК-2004,устн.]. *Построить график функции* $y=\dfrac{|x|}{1-x}$.



Решение. Раскрыв модуль, упростим функцию:

$$y=\begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & если \quad x\ge 0 \\ \dfrac{x}{x-1}, & если \quad x<0 \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} -1-\dfrac{1}{x-1}, & x\ge 0 \\ 1+\dfrac{1}{x-1}, & x<0 \end{cases}$$

Пример 3. Каким условиям должны удовлетворять числа a,b,c,d $(c\ne 0)$, *чтобы функция* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *совпадала со своей обратной?*

Решение. Найдём обратную функцию к дробно-линейной функции. Для этого из данного в условии равенства выразим переменную x через y: $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$. Таким образом, обратная функция $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ также является дробно-линейной функцией. Согласно условию задачи, исходная функция и обратная к ней должны совпадать при всех допустимых значениях x, т.е. имеем тождество $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{-dx+b}{cx-a} \Rightarrow (ax+b)(cx-a)=(cx+d)(-dx+b) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow acx^2+(bc-a^2)x-ab=-cdx^2+(bc-d^2)x+bd$. Последнее равенство выполняется сразу при всех допустимых значениях x тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} ac=-cd \\ bc-a^2=bc-d^2 \\ -ab=bd \end{cases} \Leftrightarrow a=-d.$$

Показательная функция

Вспомним, как определяется произвольная действительная степень x действительного числа a. Если число a равно единице, то полагают $a^x\equiv 1$ при всех действительных значениях x. Пусть теперь $0<a\ne 1$, тогда для любого числа x можно указать два рациональных числа p и q такие, что

$p \le x \le q$. Тогда, по определению, действительной степенью x числа a называется такое действительное число y, что для всевозможных рациональных чисел p и q, где $p \le x \le q$, выполняется

$$a^p \le y \le a^q, \text{ если } a > 1$$

и

$$a^q \le y \le a^p, \text{ если } 0 < a < 1. \qquad (1)$$

Обозначение: $y = a^x$.

Сформулируем три важных утверждения, которые лежат в основе определения показательной функции.

Теорема. Пусть $0 < a \ne 1$. *Тогда справедливы три утверждения:*

1. *Число* a^x*, определённое указанным выше способом, существует и единственно для любого* $x \in R$.
2. *Уравнение* $y = a^x$ *для любого положительного* y *имеет единственный корень.*
3. *Число* a^x *всегда строго положительно.*

Первые два утверждения в школьной программе не доказываются. Докажем третье утверждение. Оно следует непосредственно из определения и того, что положительное число a, возведённое в любую рациональную степень, строго больше нуля. Для определённости предположим, что $a > 1$. Выберем какое-либо рациональное число p, удовлетворяющее условию $p \le x$. Тогда из определения (1) и указанного свойства рациональных степеней следует, что $0 < a^p \le a^x$. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Следствие. При любом $y \le 0$ уравнение $y = a^x$ не имеет действительных корней.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует корень x_0 этого уравнения при $y \le 0$. Но это означает, что число a, будучи возведённым в степень x_0, оказывается равно неположительному числу, что вступает в противоречие с третьим утверждением теоремы.

Таким образом, при $0 < a \ne 1$ определено отображение множества действительных чисел на множество положительных действительных чисел. При этом первое утверждение теоремы даёт нам право утверждать, что это отображение является функцией с областью определения, равной множеству действительных чисел. Второе и третье утверждения равносильны тому, что область значений этой функции есть бесконечный интервал $(0;+\infty)$, и каждое своё значение эта функция принимает ровно один раз.

Введённая таким образом функция называется *показательной функцией* $y = a^x$, а число a - *основанием* показательной функции. Если $a = e$, то функция $y = e^x$ носит название *экспоненциальной*. Обратимся к её свойствам.

1) *Область определения*: $D(y) = (-\infty, +\infty)$.

2) *Область значений*: $E(y) = (0, +\infty)$. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

3) *Пересечение графика с осями координат*. Согласно доказанному выше следствию, уравнение $y = a^x$ не имеет корней при любом $y \le 0$, поэтому график показательной функции не пересекает ось абсцисс. Точка пересечения графика с осью ординат имеет координаты $(0;1)$, которые не зависят от основания a, так как любом положительное a в нулевой степени есть единица.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на всей области определения.

5) *Асимптоты*. График показательной функции имеет единственную (горизонтальную) асимптоту – ось абсцисс.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической, поскольку принимает все свои значения ровно один раз.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является чётной, так как, например, принимает все свои значения ровно один раз. Функция не является нечётной, так как её область значений несимметрична относительно нуля.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Показательная функция монотонна. При этом если $a > 1$, то она является возрастающей функцией, а если $0 < a < 1$ – убывающей на всей области определения.

Доказательство. Докажем вначале монотонность показательной функции на множестве рациональных чисел. Пусть $a > 1$, возьмём два произвольных рациональных числа p_1 и p_2, причём $p_1 < p_2$. Тогда по свойству степеней с рациональными показателями выполнено

$$a^{p_2} - a^{p_1} = a^{p_1}\left(a^{p_2 - p_1} - 1\right).$$

Заметим, что знак разности $a^{p_2} - a^{p_1}$ определяется только знаком второго сомножителя, поскольку первый сомножитель a^{p_1} всегда больше нуля. Обозначим положительное рациональное число $p_2 - p_1 = m/n$, где $m, n \in N$. Тогда по свойствам числовых неравенств получаем цепочку равносильных неравенств:

$$a > 1 \Leftrightarrow a^m > 1 \Leftrightarrow \left(a^{m/n}\right)^n > 1 \Leftrightarrow a^{m/n} > 1$$

Таким образом, доказано, что $a^{p_2 - p_1} - 1 > 0$, т.е. $a^{p_1} < a^{p_2}$ при $p_1 < p_2$.

Теперь перейдём к доказательству монотонности показательной функции на множестве действительных чисел. Возьмём два произвольных действительных числа x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$. Известно (см., например, [2]), что для двух произвольных, не равных между собой, действительных чисел всегда существует хотя бы одно рациональное число, заключённое между ними. В силу этого, для выбранных чисел x_1 и x_2 найдутся два рациональных числа x' и x'' такие, что $x_1 < x' < x'' < x_2$, откуда, по определению действительной степени a^x и доказанному возрастанию показательной функции на множестве рациональных чисел, получаем

$$a^{x_1} \le a^{x'} < a^{x''} \le a^{x_2}.$$

Данное неравенство означает, что $a^{x_1} < a^{x_2}$ при $x_1 < x_2$, т.е. мы доказали возрастание функции на её области определения.

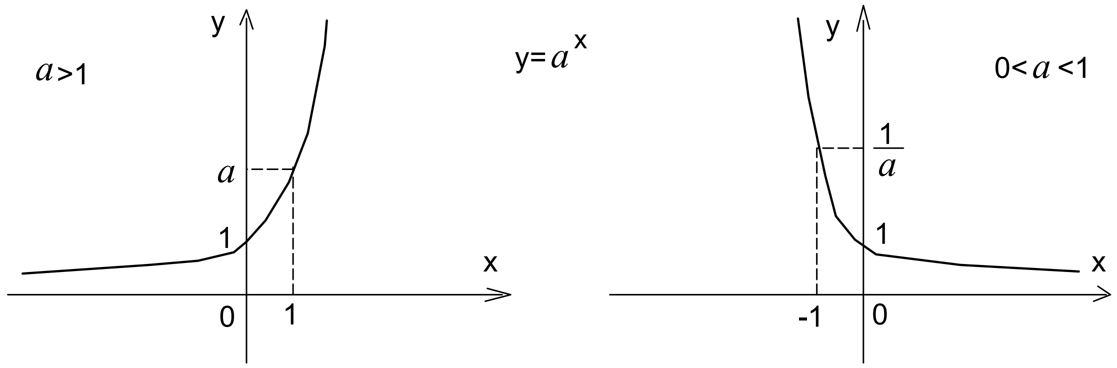
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

В силу строгой монотонности, показательная функция не имеет локальных экстремумов. Докажем, что показательная функция не имеет наименьшего и наибольшего значений. Действительно, предположим противное, т.е. что у функции есть наименьшее значение, обозначим его $y_{\min}$. Тогда $y_{\min}$ должно быть положительно (так как оно достигается при некотором x). По указанному выше свойству действительных чисел, существует число y такое, что $0 < y < y_{\min}$. Уравнение $y = a^x$ по второму утверждению теоремы имеет корень при любом положительном y. Следовательно, обязательно существует число x^* такое, что $a^{x^*} = y < y_{\min}$. Это противоречит тому, что $y_{\min}$ есть наименьшее значение показательной функции. Аналогично доказывается отсутствие у показательной функции наибольшего значения.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Показательная функция непрерывна и дифференцируема в любой точке своей области определения, причём её производная вычисляется по правилу $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ (эта формула верна и при $a = 1$).

10) *Выпуклость*. Показательная функция выпукла вниз при любом основании $0 < a \ne 1$.

График функции проходит через точку $(0;1)$. Эскизы графика функции в случаях $a > 1$ и $0 < a < 1$ представлены на рисунке.



<u>Пример</u> [МАИ]. *При каких* $a > 0$ *область значений функции* $y = \dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ *не содержит ни одного чётного натурального числа?*

Решение. 1) Найдём *область значений функции*. Воспользуемся для этого известным приёмом: рассмотрим данное в условии равенство как уравнение относительно a^x. Имеем $y = \dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a} \Leftrightarrow y\left(a^x+3a\right) = a^{x-1}+5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^x(ya-1) = 3a^2(5/(3a)-y)$. Проверка показывает, что при $y = 1/a$ это уравнение не имеет решений, следовательно, исходное уравнение привели к эквивалентному виду: $a^x = \dfrac{3a(5/(3a)-y)}{y-1/a}$. Это уравнение имеет решения x тогда и только тогда, когда $\dfrac{3a(5/(3a)-y)}{y-1/a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < y < \dfrac{5}{3a}$. Таким образом, областью значений функции является интервал $(1/a; 5/(3a))$.

2) Полученный интервал не содержит ни одного чётного натурального числа, только если он полностью «помещается» в отрезке $[2k-2, 2k]$, где $k \in N$. Запишем последнее условие в виде системы $\begin{cases} 2k-2 \le 1/a \\ \dfrac{5}{3a} \le 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k-2 \le 1/a \\ \dfrac{1}{a} \le \dfrac{6k}{5} \end{cases}$ (2).

Эта система имеет решения, если $2k-2 \le 6k/5$, т.е. при $k \le 5/2$. С учётом натуральности k имеем: k =1 или k =2. В первом случае, решая систему (2), находим $a \ge 5/6$, а во втором случае получаем $5/12 \le a \le 1/2$.

Ответ: $a \in [5/12, 1/2] \cup [5/6, +\infty)$.

Логарифмическая функция

Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где число $0 < a \ne 1$ называется *основанием* логарифмической функции, а переменная x принимает положительные значения (см. определение логарифма).

1) *Область определения*: $D(y) = (0, +\infty)$.

2) *Область значений:* $E(y) = (-\infty, +\infty)$, так как уравнение $y = \log_a x$ при любом значении y имеет один корень $x = a^y$. Функция, таким образом, не ограничена ни снизу, ни сверху, и, в частности, не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График логарифмической функции при любом допустимом основании a имеет ровно одну точку пере-

сечения с осью абсцисс – точку $(1;0)$, поскольку уравнение $\log_a x = 0$ имеет единственный корень $x = 1$. Точка $x = 0$ не принадлежит области определения функции, поэтому точек пересечения с осью ординат нет.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Если $a > 1$, то значения логарифмической функции отрицательны на промежутке $(0,1)$ и положительны на промежутке $(1,+\infty)$. Если же $0 < a < 1$, то, наоборот, значения логарифмической функции положительны на интервале $(0,1)$ и отрицательны на интервале $(1,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $x > 1$. Покажем, что в этом случае функция принимает положительные значения. Предположим противное: пусть существует такое значение x_0, большее 1, что значение функции $y_0 = \log_a x_0$ неположительно, т.е. $\log_a x_0 \le 0$. Применим к обеим частям этого неравенства показательную функцию с основанием $a > 1$. В силу возрастания этой функции получим $a^{\log_a x_0} \le a^0 = 1$. С другой стороны, в силу основного логарифмического тождества должно выполняться неравенство $a^{\log_a x_0} = x_0 > 1$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно, следовательно, функция принимает положительные значения. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

5) *Асимптоты*. График логарифмической функции имеет единственную (вертикальную) асимптоту – ось ординат.

6) *Периодичность*. Функция не является периодической, поскольку, определена лишь для положительных значений переменной.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как её область определения несимметрична относительно нуля.

8) *Монотонность, экстремумы*. Логарифмическая функция строго монотонна. При этом если её основание $a > 1$, то она является возрастающей функцией, а если $0 < a < 1$, то убывающей функцией на всей области определения.

Доказательство. Монотонность логарифмической функции следует непосредственно из монотонности показательной функции. Возьмём два положительных действительных числа x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$. Пусть $a > 1$. Соответствующие x_1 и x_2 значения логарифмической функции обозначим y_1 и y_2. Из определения логарифмической функции следует, что $a^{y_1} = x_1 < x_2 = a^{y_2}$. Из возрастания показательной функции с основанием $a > 1$ получаем, что $y_1 < y_2$. Это означает, что возрастание логарифмической функции в случае $a > 1$ доказано. Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

В силу строгой монотонности, логарифмическая функция не имеет локальных экстремумов.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Логарифмическая функция непрерывна и дифференцируема в любой точке своей области определения, причём её производная вычисляется по правилу $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$.

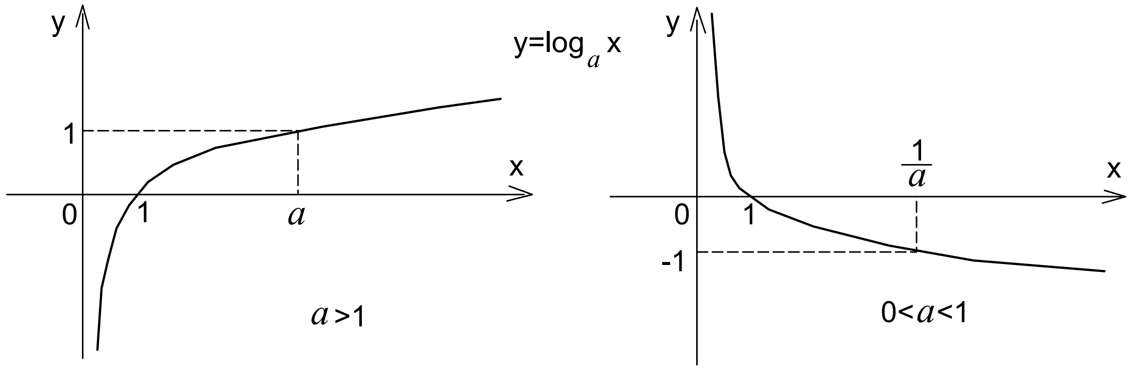
10) *Выпуклость*. Логарифмическая функция выпукла вверх, если $a > 1$, и выпукла вниз при $0 < a < 1$. Точек перегиба нет.

11) *Обратимость*. Логарифмическая функция строго монотонна на своей области определения, поэтому у неё существует обратная функция.

Найдём её. Для этого разрешим уравнение $y = \log_a x$ относительно переменной x. Пропотенцируем обе части уравнения по основанию a: $a^y = a^{\log_a x}$. Упростив правую часть в соответствии с основным логарифмическим тождеством, получим $a^y = x$. Поменяв местами обозначения переменных x и y, окончательно получим уравнение функции, обратной к логарифмической функции, это оказалась показательная функция $y = a^x$ с тем же основанием a.

Для этой пары взаимно обратных функций справедливы все свойства, характерные для подобного рода функций. В частности, графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ при одинаковых основаниях симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Отметим в заключение, что график логарифмической функции всегда проходит через точку $(1;0)$ (независимо от основания). Эскизы графика функции в случаях $a > 1$ и $0 < a < 1$ представлены на рисунке.



<u>Пример 1</u>. Построить график функции $y = \log_x x$*.*

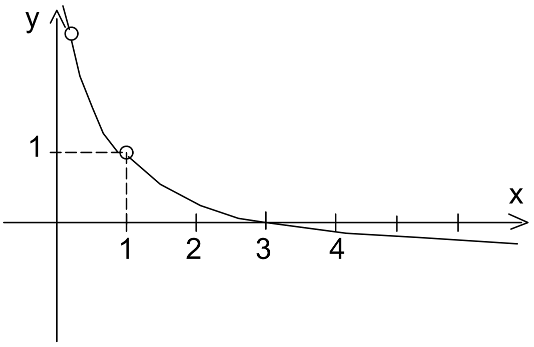
Решение. Область определения функции задаётся двойным неравенством: $0 < x \neq 1$, причём всюду, где функция определена, она тождественно равна единице. График функции имеет вид, изображённый на рисунке.

<u>*Пример 2*</u> [Геолог.-2004,устн.]. *Построить график функции*

$$y = \frac{\log_x 3 - \log_3 x}{\log_x 3x}.$$

Решение. Найдём область определения $D(y)$: $\begin{cases}0<x\neq 1\\ \log_x 3x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1/3\\ 1/3<x<1\\ x>1.\end{array}\right.$

Теперь упростим функцию на её области определения:



$$y=\frac{\log_x 3-\log_3 x}{\log_x 3x}=\frac{\dfrac{1}{\log_3 x}-\log_3 x}{\dfrac{\log_3 3x}{\log_3 x}}=$$

$$=\frac{1-\log_3^2 x}{1+\log_3 x}=\frac{(1+\log_3 x)(1-\log_3 x)}{1+\log_3 x}=$$

$=1-\log_3 x$.

Чтобы построить этот график, реализуем цепочку:

$$y=\log_3 x\rightarrow y=-\log_3 x\rightarrow y=1-\log_3 x.$$

Осталось учесть область определения функции, и график построен.

Ниже речь пойдёт о свойствах тригонометрических и обратных тригонометрических функций ([1,2,10,11,21]).

Тригонометрические функции

Перед прочтением данного параграфа рекомендуем повторить определения основных тригонометрических функций в разделе «Тригонометрия».

Свойства функции $y=\sin x$

1) *Область определения*: $D(\sin x)=R$.

В самом деле, так как для любого действительного числа x однозначно определена точка, являющаяся концом радиуса тригонометрической окружности, образующего угол величины x с положительным направлением оси Ox, то, в соответствии с определением синуса, областью определения этой функции является всё множество действительных чисел.

2) *Область значений:* $E(\sin x)=[-1,1]$.

Действительно, с одной стороны, ордината всякой точки, лежащей на окружности единичного радиуса, может изменяться лишь в пределах от -1 до 1. С другой стороны, для каждого значения a ординаты из отрезка $[-1,1]$ всегда можно указать хотя бы одну точку на окружности, имеющую эту ординату. Это вытекает из того, что любая прямая на плоскости может либо вовсе не пересекать данную окружность, либо пересекать её в одной или, максимум, в двух точках. Поэтому, в частности, прямая $y=a$, состоящая из точек с фиксированной ординатой, равной a, при условии $a\in[-1,1]$ обязательно пересечёт единичную окружность по крайней мере в одной точке. За каждой такой точкой стоит целая серия из бесконечного числа действительных чисел, синус каждого из которых, по определению, равен числу a. Следовательно, это значение a будет синусом любого из указанных действительных чисел (одним из них, например, будет $x = \arcsin a$).

Заметим дополнительно, что из ограниченности области значений функции следует, по определению ограниченной функции, что сама функция *ограничена* и сверху, и снизу. Геометрически это означает, что график данной функции располагается в полосе, ограниченной двумя горизонтальными прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

3) *Пересечение графика функции с осями координат*. График функции $y = \sin x$ будет пересекать ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением $\sin x = 0$, т.е. $x = \pi n$, $n \in Z$. Вторую координатную ось Oy график пересекает в единственной точке с ординатой $y = \sin 0 = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$\sin x > 0 \iff x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n),$$

$$\sin x < 0 \iff x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n), \ n \in Z.$$

Действительно, так как положительными являются только ординаты точек, расположенных в верхней полуплоскости, то значения синуса положительны для аргументов, расположенных в I и II четвертях (и отрицательны, соответственно, для аргументов, расположенных в III и IV четвертях).

5) *Асимптот* график функции не имеет (вертикальных и наклонных – из-за ограниченности функции, а горизонтальных - поскольку не существует $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$).

6) *Периодичность*. Функция является периодической, причём наименьший положительный период функции равен 2π.

Докажем вначале, что функция периодична, и 2π является одним из её периодов. Воспользуемся определением периодической функции. Во-первых, какое бы значение угла величины x мы ни взяли, функция будет определена и для значений $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$. Это объясняется тем, что величина центрального угла, опирающегося на дугу, совпадающую со всей окружностью, равна как раз 2π, и поэтому углам величины x , $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$ соответствует на тригонометрической окружности одна и та же точка. Во-вторых, поскольку это одна и та же точка, то синусы этих углов будут равны. В силу определения периодической функции, это означает, что функция $y = \sin x$ периодична с периодом $T = 2\pi$.

Покажем теперь, что 2π - главный период. Для этого рассмотрим значение функции $y = \sin x$, равное единице. Оно достигается только при $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. Так как ближайшие между собой точки этой серии удалены одна от другой по окружности на расстояние 2π, то, следовательно, никакое число меньшее 2π не может быть периодом этой функции.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция $y = \sin x$ является нечётной.

Докажем это, опираясь на определение нечётной функции. Во-первых, при любом действительном x функция определена одновременно для значений x и $(-x)$. Во-вторых, отметим, что всякий круг симметричен относительно любой прямой, проходящей через его центр, и равные по величине углы при симметрии переходят в равные углы. Поэтому, в частности, тригонометрический круг симметричен сам себе относительно оси абсцисс, и точки M_1 и M_2, отвечающие углам величины x и $(-x)$, симметричны друг другу относительно этой оси. Значит, их ординаты будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т.е. для любого x выполнено $\sin(-x) = -\sin x$, что и доказывает нечётность функции.

Следовательно, график функции будет *центрально симметричен* относительно точки начала координат. Более того, этот график имеет бесконечно много центров симметрии, координаты которых $(\pi n;0)$, $n \in Z$.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция $y = \sin x$ не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонной на отдельных промежутках, а именно:

возрастает на сегментах $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$,

убывает на сегментах $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Этот факт можно наглядно, но не вполне строго обосновать, пользуясь тригонометрическим кругом. Действительно, при изменении положения подвижной точки M из крайнего нижнего положения (соответствует углам величины $-\pi/2 + 2\pi n$) при движении против часовой стрелки до крайнего верхнего положения (соответствует углам $\pi/2 + 2\pi n$), ордината точки меняется, постепенно увеличиваясь, от значения -1 до значения +1. Аналогично, при движении этой точки из крайнего верхнего к крайнему нижнему своему положению, ее ордината непрерывно уменьшается от +1 до -1.

Можно привести и другое, более строгое, обоснование, опирающееся на определение возрастания функции. Докажем, например, возрастание функции на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Для этого рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из этого отрезка таких, что $x_1 < x_2$. Воспользуемся формулой разности синусов:

$$\sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \cos\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Покажем, что правая часть последнего равенства отрицательна. Действительно, так как для рассматриваемого промежутка $-\frac{\pi}{2} \le \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{x_1 - x_2}{2} < 0$ и $\cos((x_1 + x_2)/2) > 0$. Это означает, что $\sin x_1 < \sin x_2$, т.е., по определению, функция возрастает на этом сегменте. Доказательство убывания функции на сегменте $[\pi/2, 3\pi/2]$ проводится аналогично. В силу периодичности функции с периодом 2π, отсюда следует искомое утверждение о монотонности на указанных промежутках.

Так как для любого значения x из достаточно малой окрестности числа $\pi/2$ (x отлично от $\pi/2$) выполняется неравенство $\sin x < \sin(\pi/2) = 1$, то, по определению строгого локального максимума, можно заключить, что в точке $x = \pi/2$ функция имеет строгий *локальный максимум*, равный единице. Аналогично, поскольку для любого x из достаточно малой окрестности числа -$\pi/2$ (отличного от -$\pi/2$) выполняется неравенство $\sin x > \sin(-\pi/2) = -1$, то, по определению строгого локального минимума, в точке $x =$-$\pi/2$ функция имеет строгий *локальный минимум*, равный минус единице. В силу периодичности получаем, что Функция $y = \sin x$ имеет бесконечно много *локальных максимумов*, равных единице, в точках $x = \pi/2 + 2\pi n$, и бесконечно много *локальных минимумов*, равных минус единице, в точках $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Соответственно, так как при всех действительных x справедливо неравенство $\sin x \le 1$, причём существует значение x (равное, например, $\pi/2$) такое, что $\sin(\pi/2) = 1$, то, по определению, получаем, что *наибольшее значение* функции существует, равно 1 и достигается при $x = \pi/2 + 2\pi n, n \in Z$. Аналогично показывается, что *наименьшее значение* функции также существует, равно (–1) и достигается при $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке своей области определения, причём её производная вычисляется по формуле $(\sin x)' = \cos x$.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$ и выпукла вниз на промежутках $[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$, где n - произвольное целое число. Точки с координатами $(\pi n; 0)$ при этом являются точками перегиба графика функции.

Обратим внимание, что на полуинтервале $(0, \pi/2]$ график функции $y = \sin x$ лежит ниже прямой $y = x$, а на полуинтервале $[-\pi/2, 0)$, наоборот, выше этой прямой. Касательная к графику, построенная в точке с абсциссой 0, совпадает с прямой $y = x$. При всех x справедливо неравенство $|\sin x| \le |x|$, которое обращается в равенство только при $x = 0$ (при доказательстве можно воспользоваться теоремой из пункта «Касательная к графику функции. Геометрический и физический смысл производной»). Опираясь на исследованные выше свойства функции, получаем следующий график.

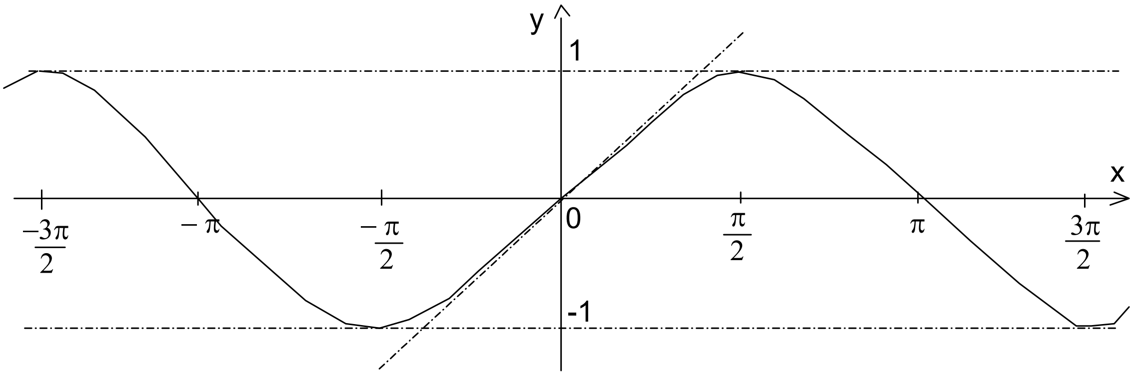


График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой*.

Свойства функции $y = \cos x$

1) *Область определения*: $D(\cos x) = R$.

В самом деле, так как для любого действительного числа x однозначно определена точка, являющаяся концом радиуса тригонометрической окружности, образующего угол величины x с положительным направлением оси Ox, то областью определения этой функции является все множество действительных чисел.

2) *Область значений*: $E(\cos x) = [-1,1]$. Действительно, с одной стороны, абсцисса всякой точки, лежащей на окружности единичного радиуса, может изменяться лишь в пределах от –1 до 1. С другой стороны, для каждого значения a абсциссы из отрезка $[-1,1]$ всегда можно указать хотя бы одну точку на окружности, имеющую эту абсциссу. Это вытекает из того, что любая прямая на плоскости может либо вовсе не пересекать данную окружность, либо пересекать её в одной или в двух точках. Поэтому, в частности, прямая $x = a$, состоящая из точек с фиксированной абсциссой, равной a, при условии $a \in [-1,1]$ обязательно пересечёт единичную окружность по крайней мере в одной точке. За каждой такой точкой стоит целая серия из бесконечного числа действительных чисел, косинус каждого из которых, по определению, равен числу a. Следовательно, это значение a будет косинусом любого из указанных действительных чисел (одним из них, например, будет $x = \arccos a$).

Заметим, что из ограниченности области значений функции следует, что данная функция *ограничена* и сверху, и снизу. Геометрически это означает, что график функции расположен в полосе, ограниченной снизу и сверху двумя горизонтальными прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

3) *Пересечение с осями координат*. График функции будет пересекать ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением $\cos x = 0$, т.е. $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. График пересекает вторую ось Oy в единственной точке с ординатой $y = \cos 0 = 1$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$\cos x > 0 \text{ на интервалах } (-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n),$$

$$\cos x < 0 \text{ на интервалах } (\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n),\ n \in Z.$$

Действительно, так как положительными являются лишь абсциссы точек, расположенных в правой полуплоскости, то значения косинуса положительны для аргументов, расположенных в I и IV четвертях (а отрицательны, соответственно, для аргументов, расположенных во II и III четвертях).

5) *Асимптот* график функции не имеет (вертикальных и наклонных – из-за ограниченности функции, а горизонтальных - поскольку не существует $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x$).

6) *Периодичность*. Функция является периодической, причём так же, как и у синуса, её наименьший положительный период равен 2π.

Докажем вначале, что функция периодична, и 2π является одним из её периодов. Воспользуемся определением периодической функции. Во-первых, какое бы значение x мы ни взяли, функция будет определена и для значений $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$. Это объясняется тем, что величина центрального угла, опирающегося на дугу, совпадающую со всей окружностью, равна 2π, и поэтому углам величины x, $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$ соответствует на тригонометрической окружности одна и та же точка. Во-вторых, поскольку это одна и та же точка, то косинусы величин этих углов будут равны. В силу определения периодической функции, это означает, что функция $y = \cos x$ периодична с периодом $T = 2\pi$.

Покажем теперь, что 2π - главный период. Для этого рассмотрим значение функции $y = \cos x$, равное единице. Оно достигается только при $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Так как ближайшие между собой точки этой серии удалены одна от другой по окружности на расстояние 2π, то, следовательно, никакое число меньшее 2π не может быть периодом этой функции.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция $y = \cos x$ является чётной.

Докажем это, опираясь на определение чётной функции. Во-первых, при любом действительном x функция определена одновременно для значений x и $(-x)$. Во-вторых, отметим, что всякий круг симметричен относительно любой прямой, проходящей через его центр, и равные по величине углы при симметрии переходят в равные углы. Поэтому, в частности, тригонометрический круг симметричен сам себе относительно оси абсцисс, и точки M_1 и M_2, отвечающие углам величины x и $(-x)$, симметричны друг другу относительно этой оси. Следовательно, их абсциссы будут равны, т.е. для любого x выполнено $\cos(-x) = \cos x$, что и доказывает чётность данной функции.

Следовательно, график функции будет *симметричен* относительно оси ординат. Более того, этот график имеет бесконечно много осей симметрии с уравнениями $x = \pi n, n \in Z$, и бесконечно много центров симметрии, координаты которых $(\pi/2 + \pi n; 0)$, $n \in Z$.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция $y = \cos x$ не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонной на отдельных промежутках, а именно:

возрастает на сегментах $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$,

убывает на сегментах $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Вначале обоснуем этот факт (не вполне строго), пользуясь тригонометрической окружностью. Так, при изменении положения подвижной точки M из крайнего левого положения (соответствует углам величины $x = \pi + 2\pi n$) при движении против часовой стрелки до крайнего правого положения (соответствует углам $x = 2\pi + 2\pi n$), абсцисса точки меняется, постепенно возрастая, от значения -1 до значения +1. Аналогично, при движении этой точки из крайнего правого к крайнему левому своему положению, её абсцисса непрерывно уменьшается от +1 до -1.

Можно привести более строгое обоснование, опирающееся на определение монотонной функции. Докажем, например, убывание функции на отрезке $[0, \pi]$. Для этого рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из этого отрезка, таких что $x_1 < x_2$. Воспользуемся формулой разности косинусов:

$$\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin((x_1 - x_2)/2) \cdot \sin((x_1 + x_2)/2).$$

Заметим, что правая часть последнего равенства положительна. Действительно, так как для рассматриваемого промежутка $-\pi/2 \le \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$ и $0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi$, то $\sin\frac{x_1 - x_2}{2} < 0$ и $\sin((x_1 + x_2)/2) > 0$. Это означает, что $\cos x_1 > \cos x_2$, т.е., по определению, функция убывает на этом сегменте. Доказательство возрастания функции на отрезке $[\pi, 2\pi]$ проводится аналогично. В силу периодичности функции с периодом 2π, отсюда следует искомое утверждение о монотонности на промежутках $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$ и $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

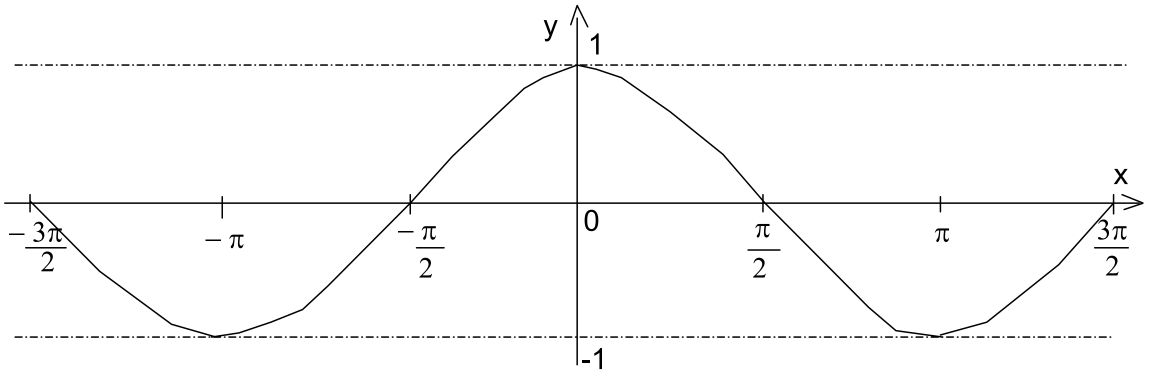
Так как для любого значения x из достаточно малой окрестности числа 0 (отличного от 0) выполняется неравенство $\cos x < \cos 0 = 1$, то, по определению строгого локального максимума, можно заключить, что в точке x=0 функция имеет строгий *локальный максимум*, равный единице. Аналогично, поскольку для любого x из достаточно малой окрестности числа π (отличного от π) выполняется неравенство $\cos x > \cos \pi = -1$, то, по определению строгого локального минимума, можно сделать вывод, что в точке $x = \pi$ функция имеет строгий *локальный минимум*, равный минус единице. В силу периодичности отсюда получаем, что функция $y = \cos x$ имеет бесконечно много *локальных максимумов*, равных единице, в точках вида $x = 2\pi n$, и бесконечно много *локальных минимумов*, равных минус единице, в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Далее, так как при всех действительных x справедливо неравенство $\cos x \le 1$, причём существует значение x (равное, например, нулю) такое, что $\cos 0 = 1$, то, по определению наибольшего значения функции, получаем, что *наибольшее значение* функции $y = \cos x$ существует, равно 1 и достигается при $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Аналогично показывается, что *наименьшее значение* функции также существует, равно (-1) и достигается при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке своей области определения, причём её производная вычисляется по правилу $(\cos x)' = -\sin x$.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутках $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$ и выпукла вниз на промежутках $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, где n - произвольное целое число. Точки с координатами $(\pi/2 + \pi n; 0)$ при этом являются точками перегиба графика функции.

График функции $y = \cos x$ называется *косинусоидой* и может быть получен смещением графика функции $y = \sin x$ влево вдоль оси Ox на величину $\pi/2$ (при всех действительных x справедливо равенство $\cos x = \sin(x + \pi/2)$).



Свойства функции $y = tgx$

Свойства функции $y = tgx$ следуют из её определения и свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

1) *Область определения*: $D(tgx) = R \setminus \{\pi/2 + \pi n; n \in Z\}$.

Это следует из определения тангенса: $tgx = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos x}, если \quad \cos x \neq 0; \\ не \quad определён, \qquad если \quad \cos x = 0. \end{cases}$

2) *Область значений функции*: $E(tgx) = R$.

Это можно было бы доказать, исходя из геометрических соображений (с помощью линии тангенсов), однако рассмотрим простое алгебраическое доказательство [1]. Пусть c - произвольное действительное число. Достаточно показать, что найдётся хотя бы одно значение x такое, что число c будет тангенсом x. Определим два вспомогательных числа a и b по формулам

$$a = 1\Big/\sqrt{1+c^2} \quad \text{и} \quad b = c\Big/\sqrt{1+c^2}.$$

Оба эти числа принадлежат отрезку $[-1{,}1]$ и, кроме того, для них выполняется равенство $a^2 + b^2 = 1$. То есть точка с координатами $(a;b)$ лежит на единичной окружности с центром в начале координат. Но это означает, что найдётся некоторый угол величины x, для которого данные числа являются соответственно косинусом и синусом. Тогда тангенс этого угла x равен c, что и требовалось доказать.

Таким образом, тангенс – не ограниченная ни сверху, ни снизу функция.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции будет пересекать ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением $tgx = 0$, то есть $x = \pi n$, $n \in Z$. Вторую ось Oy график пересекает в единственной точке с ординатой, определяемой равенством $y = tg0 = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства*:

$$tgx > 0 \text{ на интервалах } (\pi n, \pi/2 + \pi n),$$

$$tgx < 0 \text{ на интервалах } (-\pi/2 + \pi n, \pi n), \; n \in Z.$$

Действительно, из определения тангенса следует, что для любого угла величины x, синус и косинус которого имеют одинаковые знаки, тангенс x положителен; там же, где синус и косинус x имеют противоположные знаки, тангенс x отрицателен. То есть тангенс положителен (отрицателен) для любого аргумента x такого, что отвечающая ему точка на тригонометрической окружности расположена в I и III (соответственно II и IV) четвертях.

5) *Асимптоты*. График функции имеет бесконечно много *вертикальных асимптот*, уравнения которых имеют вид $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Это связано с тем, что при стремлении аргумента x к этим значениям вдоль оси абсцисс с левой стороны (со стороны меньших значений), синус стремится принять значение, равное единице, а косинус, оставаясь положительным, уменьшает свои значения, приближаясь к нулю. В результате их отношение, т.е. tgx, устремляется к $+\infty$ ($\lim\limits_{x \to \pi/2 + \pi n - 0} tgx = +\infty$). Аналогично, при стремлении x к этим же значениям вдоль оси абсцисс с правой стороны (со стороны больших значений), синус по-прежнему приближается к значению, равному единице, а косинус, будучи отрицательным, стремится к нулю. В результате их отношение, т.е. tgx, устремляется к $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to\pi/2+\pi n+0} tgx = -\infty$).

6) *Периодичность*. Функция $y = tgx$ является периодической, причём её наименьший положительный период равен π.

Докажем периодичность функции, используя определение периодической функции. Во-первых, для любого значения переменной x из области определения функции значения $x-\pi$ и $x+\pi$ также принадлежат области её определения. Действительно, это следует из того, что точки M_1 и M_2 тригонометрической окружности, отвечающие величинам $x-\pi$ и $x+\pi$, совпадают, причём их положение диаметрально противоположно точке M, отвечающей значению x. По этой причине, если $\cos x \neq 0$, то и $\cos(x \pm \pi) \neq 0$, и наоборот. Более того, из этого следует, что синус и косинус $x+\pi$ противоположны по знаку синусу и косинусу x. Поэтому, во-вторых, для любого такого x выполняется условие периодичности:

$$tg(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx,$$

что и доказывает периодичность тангенса с периодом π.

Остаётся показать, что никакое меньшее положительное число не может быть периодом этой функции. Рассмотрим, например, в этих целях такие значения x, при которых тангенс равен нулю. Как известно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т.е., в данном случае, когда $\sin x = 0$, или $x = \pi n$, $n \in Z$. Так как эти точки находятся на минимальном расстоянии π одна от другой, из этого следует, что никакое положительное число меньшее π не является периодом рассматриваемой функции.

Часть графика тангенса, отвечающая каждому из интервалов $(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n), n \in Z$, области определения, называется *ветвью* графика. Таким образом, полный график функции $y = tgx$ состоит из объединения бесконечного числа одинаковых ветвей.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция $y = tgx$ является нечётной.

В самом деле, для любого значения переменной x из области определения функции значение $(-x)$ также принадлежит области её определения. Это объясняется тем, что точки на тригонометрической окружности, отвечающие этим значениям аргумента, расположены симметрично друг другу относительно оси абсцисс и поэтому их абсциссы (косинусы x и $(-x)$) равны, а значит, одновременно обращаются либо не обращаются в нуль. Кроме того, при любом таком x выполняется условие нечётности:

$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$$

(при этом были использованы нечётность функции $y = \sin x$ и чётность функции $y = \cos x$).

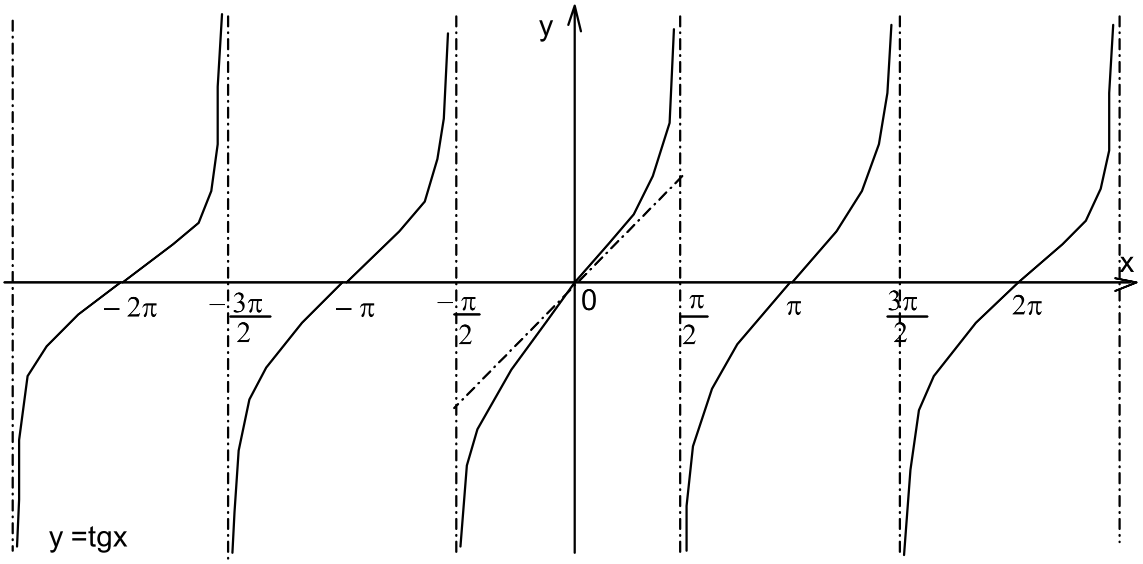
Из свойства нечётности вытекает, в частности, что график функции будет иметь центр симметрии в начале координат. Более того, каждая из ветвей графика на участке $(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$, $n \in Z$, также имеет свой центр симметрии в точке $(\pi n;0)$, являющийся одновременно центром симметрии всего графика.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция $y = tgx$ не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонно *возрастающей* на каждом из интервалов $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in Z$.

Докажем вначале, используя определение, строгое возрастание функции на промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Для этого рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из этого интервала такие, что $x_1 < x_2$. Согласно формуле разности тангенсов, $tgx_2 - tgx_1 = \dfrac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}$. Поскольку $0 < x_2 - x_1 < \pi$, то $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Также для этих значений x_1 и x_2 имеем $\cos x_1 > 0$ и $\cos x_2 > 0$. Поэтому $tgx_2 - tgx_1 > 0$, а это и означает, по определению, возрастание функции на данном интервале. В силу периодичности с периодом π, получаем, что функция является монотонно *возрастающей* на каждом из интервалов $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$.

В силу строгого возрастания функции $y = tgx$ на каждом из интервалов $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n), n \in Z$, она не имеет там локальных экстремумов, а поскольку её область изменения есть $(-\infty, +\infty)$, то функция не имеет также ни наибольшего, ни наименьшего значений.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке своей области определения, причём её производная вычисляется по правилу $(tgx)' = 1/\cos^2 x$. Точки $\pi/2 + \pi n, n \in Z,$ являются точками бесконечного разрыва функции.



10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутках $(-\pi/2 + \pi n, \pi n]$ и выпукла вниз на $[\pi n, \pi/2 + \pi n)$, где $n \in Z$. График функции имеет точки перегиба с координатами $(\pi n;0)$, $n \in Z$.

Отметим важный для правильного построения графика этой функции момент, а именно, что на интервале $(0,\pi/2)$ график функции лежит выше прямой $y=x$, а на интервале $(-\pi/2,0)$, наоборот, ниже этой прямой. Касательная к графику, построенная в точке с абсциссой 0, совпадает с прямой $y=x$.

График функции $y=tgx$ называется *тангенсоидой*.

При всех $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ справедливо неравенство $|tgx|\geq|x|$, которое обращается в равенство только при $x=0$.

Действительно, при $x\in(0,\pi/2)$ справедливость неравенства $tgx>x$ следует, например, из того, что при $x=0$ имеем $tgx=x$, а при $x\in(0,\pi/2)$ $(tgx)'=1/\cos^2 x>1=(x)'$. В силу нечётности обеих функций tgx и x, неравенство верно и при $x\in(-\pi/2,0)$.

Свойства функции $y=ctgx$

Свойства функции $y=ctgx$ также следуют из её определения и рассмотренных выше свойств функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

1) *Область определения*: $D(ctgx)=R\setminus\{\pi n;n\in Z\}$. Это следует непосредственно из определения котангенса: $ctgx=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\sin x}, \textit{если} \quad \sin x\neq 0;\\ \textit{не} \quad \textit{определён}, \quad \textit{если} \quad \sin x=0.\end{cases}$

2) *Область значений:* $E(ctgx)=R$.

Этот факт может быть доказан, исходя из геометрических соображений, однако рассмотрим алгебраическое доказательство. Пусть c - произвольное действительное число. Достаточно показать, что найдётся хотя бы одно значение x такое, что число c будет котангенсом x. Определим два вспомогательных числа a и b по формулам

$$a=c/\sqrt{1+c^2} \quad \text{и} \quad b=1/\sqrt{1+c^2}\ .$$

Оба эти числа принадлежат отрезку $[-1,1]$ и, кроме того, для них выполняется равенство $a^2+b^2=1$. Следовательно, точка с координатами $(a;b)$ лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, и, по основному тригонометрическому тождеству, найдётся некоторый угол величины x, для которого данные числа являются соответственно косинусом и синусом. Тогда котангенс этого числа x равен c, что и требовалось доказать.

Из неограниченности области значений котангенса вытекает, эта функция не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции будет пересекать ось Ox в точках с абсциссами, определяемыми уравнением $ctgx=0$, т.е. $x=\pi/2+\pi n$, $n\in Z$. Другую координатную ось Oy график не пересекает, так как функция не определена при $x=0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$ctgx>0$ на интервалах $(\pi n,\pi/2+\pi n)$,

$ctgx < 0$ на интервалах $\left(-\pi/2 + \pi n, \pi n\right)$, $n \in Z$.

В самом деле, из определения котангенса следует, что для любого x, синус и косинус которого имеют одинаковые знаки, котангенс x положителен; а там, где синус и косинус x имеют противоположные знаки, котангенс x отрицателен. То есть котангенс положителен (отрицателен) для любого аргумента x такого, что отвечающая ему точка на тригонометрической окружности расположена в I и III (соответственно II и IV) четвертях.

5) *Асимптоты*. График функции имеет бесконечно много *вертикальных асимптот*, уравнения которых имеют вид $x = \pi n$, $n \in Z$.

Действительно, при стремлении x к этим значениям вдоль оси абсцисс с левой стороны (со стороны меньших значений) значения функции устремляются к $-\infty$ ($\lim\limits_{x \to \pi n - 0} ctgx = -\infty$).

При стремлении же x к этим же значениям вдоль оси абсцисс с правой стороны (со стороны больших значений) значения функции устремляются к $+\infty$ ($\lim\limits_{x \to \pi n + 0} ctgx = +\infty$).

6) *Периодичность*. Функция $y = ctgx$ является периодической, причём её наименьший положительный период равен π.

Докажем это с помощью определения периодической функции. Во-первых, для любого значения переменной x из области определения функции значения $x - \pi$ и $x + \pi$ также принадлежат области её определения. Как и в случае с тангенсом, это следует из того, что точки M_1 и M_2 тригонометрической окружности, отвечающие значениям $x - \pi$ и $x + \pi$, совпадают, причём их положение диаметрально противоположно точке M, отвечающей значению x. По этой причине, если $\sin x \neq 0$, то и $\sin\left(x \pm \pi\right) \neq 0$, и наоборот. Более того, из этого следует, что синус и косинус $x + \pi$ противоположны по знаку синусу и косинусу x. Поэтому, во-вторых, для любого такого x выполняется условие периодичности:

$$ctg(x + \pi) = \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx,$$

что и означает периодичность котангенса с периодом π.

Остаётся показать, что никакое меньшее положительное число не может быть периодом этой функции. Рассмотрим, например, такие значения x, при которых котангенс равен нулю. Как известно, дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т.е., в данном случае, когда $\cos x = 0$, или $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$. Так как эти точки находятся на расстоянии как минимум π одна от другой, то из этого следует, что никакое положительное число меньшее π не может быть периодом этой функции.

Участок графика котангенса, рассмотренный на каждом из интервалов области определения $\left(\pi n, \pi + \pi n\right), n \in Z$, называется *ветвью графика*. Таким образом, полный график этой функции состоит из объединения бесконечного числа одинаковых ветвей.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция $y = ctgx$ является нечётной.

Во-первых, для любого значения x из области определения функции значение (-x) также принадлежит этой области. Это следует из того, что точки на тригонометрической окружности, отвечающие этим значениям аргумента, расположены симметрично друг другу относительно оси абсцисс, и поэтому их ординаты (синусы x и (-x)) равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, а значит, одновременно обращаются либо не обращаются в нуль. Во-вторых, при любом таком x выполняется условие нечётности:

$$ctg(-x)=\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\frac{\cos x}{-\sin x}=-ctgx$$

(при этом были использованы нечётность функции $y=\sin x$ и чётность функции $y=\cos x$).

Из свойства нечётности вытекает, в частности, что график функции имеет центр симметрии в начале координат. Более того, каждая из ветвей графика имеет свой центр симметрии, являющийся одновременно центром симметрии всего графика.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Функция $y=ctgx$ не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонно убывающей на каждом из интервалов $(\pi n,\pi+\pi n)$, $n\in Z$.

Докажем при помощи определения убывание функции на промежутке $(0,\pi)$. Для этого рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из этого интервала, такие что $x_1<x_2$. По формуле разности котангенсов имеем:

$$ctgx_2-ctgx_1=-\frac{\sin(x_2-x_1)}{\sin x_2\cdot\sin x_1}.$$

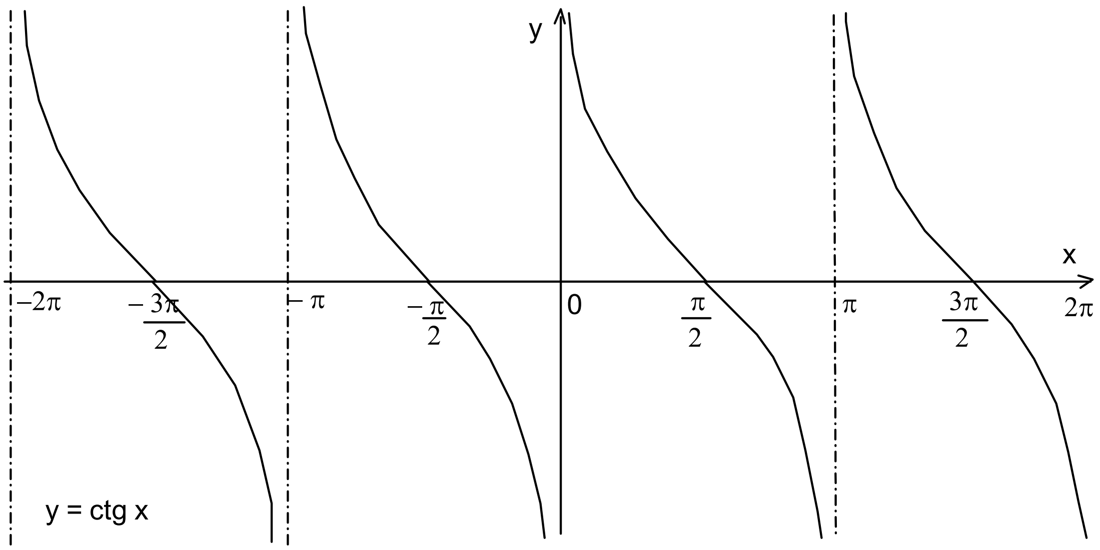
Поскольку для выбранных x_1 и x_2 имеем $0<x_2-x_1<\pi$, то $\sin(x_2-x_1)>0$. При этом $\sin x_1>0$, $\sin x_2>0$, поэтому $ctgx_2-ctgx_1<0$, а это и означает убывание функции на данном промежутке. В силу периодичности котангенса с периодом π, получаем в итоге, что функция $y=ctgx$ монотонно убывает на каждом из интервалов вида $(\pi n,\pi+\pi n)$, $n\in Z$.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке своей области определения, причём её производная вычисляется по правилу $(ctgx)'=-1/\sin^2 x$. Точки $\pi n, n\in Z$, являются точками бесконечного разрыва функции.

В силу строгой монотонности функции на каждом из интервалов $(\pi n,\pi+\pi n), n\in Z$, она не имеет там локальных экстремумов, а поскольку её область изменения есть $(-\infty;+\infty)$, то функция не имеет также ни наибольшего, ни наименьшего значений.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутках $[\pi/2+\pi n,\pi+\pi n)$ и выпукла вниз на промежутках $(\pi n,\pi/2+\pi n]$, где $n\in Z$. График функции имеет точки перегиба с координатами $(\pi/2+\pi n;0)$, $n\in Z$.

График функции $y=ctgx$ называется *котангенсоидой*. Заметим, в частности, что этот график может быть получен параллельным переносом тангенсоиды $y=tgx$ вправо вдоль оси Ox на $\pi/2$, и затем осевой симметрией относительно оси Ox (что алгебраически равноценно умножению функции на (-1)): $ctgx=-tg(x-\pi/2)$, $x\neq\pi n$.



Обратные тригонометрические функции

Тригонометрические функции $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ являются периодическими и поэтому любое свое значение они принимают сразу в бесконечном числе точек. По этой причине на всей числовой прямой для названных тригонометрических функций не существует обратных функций. Однако если рассматривать каждую из них на промежутках монотонности, то здесь они уже будут иметь обратные функции.

Свойства функции $y = \arcsin x$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, где она монотонно возрастает, принимая все свои значения от -1 до 1. Существующая обратная функция называется «арксинусом» и обозначается $y = \arcsin x$. Итак, $y = \arcsin x$ - это функция, обратная к функции $y = \sin x$ на промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$, и её свойства вытекают из свойств взаимно обратных функций.

В частности, напомним, что:

- область определения прямой функции переходит в область изменения обратной функции и наоборот, область изменения прямой функции становится областью определения обратной функции;

- прямая и обратная функции всегда имеют одинаковую монотонность (либо одновременно возрастают, либо одновременно убывают);

- графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$;

- если прямая функция является нечётной, то и обратная к ней – тоже, и наоборот, и т.д.

Можно было определить эту функцию иначе. Сформулируем соответствующее определение. *Арксинусом* действительного числа x, принадлежащего отрезку $\left[-1,1\right]$, называется такое действительное число y, принадлежащее отрезку $\left[-\pi/2,\pi/2\right]$, синус которого равен x. Тогда функцией $y=\arcsin x$ называется такое отображение отрезка $\left[-1,1\right]$ на отрезок $\left[-\pi/2,\pi/2\right]$, при котором каждому $x\in\left[-1,1\right]$ ставится в соответствие единственное значение $y\in\left[-\pi/2,\pi/2\right]$, равное арксинусу x.

Итак, для рассматриваемой функции имеем следующие свойства.

1) *Область определения*: $D(\arcsin x)=\left[-1,1\right]=E(\sin x)$.

2) *Область значений:* $E(\arcsin x)=\left[-\pi/2,\pi/2\right]=D(\sin x)$.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции пересекает обе координатные оси в единственной точке - начале координат.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения при $x\in\left(0,1\right]$, и отрицательные при $x\in\left[-1,0\right)$.

5) *Асимптоты*. График функции не имеет асимптот (вертикальных и наклонных – так как её область значений ограничена; горизонтальных – поскольку её область определения ограничена).

6) *Периодичность*. Функция не является периодической (поскольку, как любая обратимая функция, каждое своё значение она принимает ровно один раз).

7) *Чётность (нечётность)*. Так как функция $y=\sin x$ является нечётной, то и обратная к ней функция также является нечётной, т.е. для любого $x\in\left[-1,1\right]$ справедливо тождество

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Так как функция $y=\sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\pi/2,\pi/2\right]$, то и обратная функция $y=\arcsin x$ будет возрастающей на своей области определения $\left[-1,1\right]$. В силу строгой монотонности функция $y=\arcsin x$ не имеет в интервале $\left(-1,1\right)$ локальных экстремумов. При этом в точке $x=-1$ она достигает своего наименьшего значения, равного $-\pi/2$, а в точке $x=1$, соответственно, наибольшего значения, равного $\pi/2$.

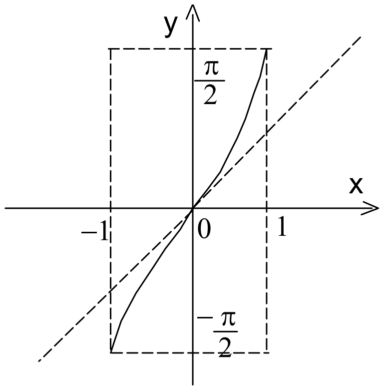
9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке интервала $\left(-1,1\right)$, причём производная арксинуса вычисляется по формуле $\left(\arcsin x\right)'=1\big/\sqrt{1-x^2}$ (см. теорему о производной обратной функции). В граничной точке $x=-1$ функция непрерывна справа, а в точке $x=1$ – непрерывна слева.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутке $\left[-1,0\right]$ и выпукла вниз на промежутке $\left[0,1\right]$. Точка с координатами $\left(0;0\right)$ является точкой перегиба графика функции.

11) *Обратимость*. Функция обратима (обратной к ней является функция $y=\sin x$, $x\in[-\pi/2,\pi/2]$), причём в силу свойств взаимно обратных функций справедливы тождества:

$$\sin(\arcsin x)=x \text{ при любом } x\in[-1,1],$$

$$\arcsin(\sin x)=x \text{ при любом } x\in[-\pi/2,\pi/2].$$



Опираясь на полученные в результате исследования функции $y=\arcsin x$ её характерные свойства, строим график функции.

Правильно построенный график $y=\arcsin x$ должен быть расположен при $x\in(0,1]$ выше, а при $x\in[-1,0)$ ниже графика прямой $y=x$ и симметричен графику функции $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi/2,\pi/2]$ относительно этой прямой.

Справедливо неравенство: $|\arcsin x|\ge|x|$, если $x\in[-1,1]$, причём $\arcsin x=x$ только при $x=0$.

Это неравенство следует из неравенства $|\sin x|\le|x|$ при $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ и симметрии относительно $y=x$ графиков синуса и арксинуса как обратных функций.

Свойства функции $y=\arccos x$

Функция $y=\cos x$ монотонно убывает на отрезке $[0,\pi]$ и принимает на нём все свои значения от -1 до 1. Существующая обратная функция называется «арккосинусом» и обозначается $y=\arccos x$. Итак, $y=\arccos x$ - это функция, обратная функции $y=\cos x$ на промежутке $[0,\pi]$, и её свойства вытекают из свойств взаимно обратных функций.

Возможно иное определение этой функции. Сформулируем его. *Арккосинусом* действительного числа x, принадлежащего отрезку $[-1,1]$, называется такое действительное число y, принадлежащее отрезку $[0,\pi]$, косинус которого равен x. Тогда функцией $y=\arccos x$ называется такое отображение отрезка $[-1,1]$ на отрезок $[0,\pi]$, при котором каждому $x\in[-1,1]$ ставится в соответствие единственное значение $y\in[0,\pi]$, равное арккосинусу x.

1) *Область определения*: $D(\arccos x)=[-1,1]=E(\cos x)$.

2) *Область значений:* $E(\arccos x)=[0,\pi]=D(\cos x)$.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции пересекает координатную ось Ox в точке с абсциссой $x=1$, а ось Oy - в точке с ординатой $y=\pi/2$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Функция принимает положительные значения на всей области определения, за исключением $x = 1$, т.е. при всех $x \in [-1,1)$.

5) *Асимптоты*. График функции не имеет асимптот (поскольку функция имеет ограниченные области определения и изменения).

6) *Периодичность*. Функция не периодична (поскольку является обратимой функцией и каждое своё значение принимает ровно один раз).

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной, при этом при всех $x \in [-1,1]$ справедливо тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x .$$

Докажем это. Так как функция $y = \cos x$ монотонна на отрезке $[0,\pi]$, а обе части тождества принимают значения из этого отрезка, то операция взятия косинуса от левой и правой частей данного равенства приводит к равносильному равенству: $\cos(\arccos(-x)) =$ $= \cos(\pi - \arccos x) \Leftrightarrow -x = -\cos(\arccos x) \Leftrightarrow -x = -x$, что, очевидно, верно.

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Так как функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0,\pi]$, то и обратная функция $y = \arccos x$ будет убывающей на своей области определения $[-1,1]$. В силу строгой монотонности функция $y = \arccos x$ не имеет в интервале $(-1,1)$ локальных экстремумов. При этом в точке $x = -1$ она достигает своего наибольшего значения, равного π, а в точке $x = 1$, соответственно, наименьшего значения, равного 0.

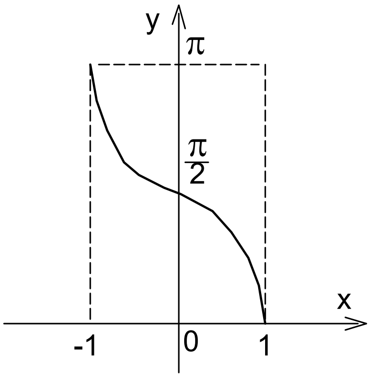
9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой внутренней точке своей области определения, причём производная арккосинуса вычисляется по формуле $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$. В граничной точке $x = -1$ функция непрерывна справа, а в точке $x = 1$ – соответственно слева.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутке $[0,1]$ и выпукла вниз на промежутке $[-1,0]$. Точка с координатами $(0;\pi/2)$ является точкой перегиба графика функции.

11) *Обратимость*. Функция обратима (обратной к ней является функция $y = \cos x$, $x \in [0,\pi]$), причём в силу свойств взаимно обратных функций справедливы тождества:

$$\cos(\arccos x) = x \text{ при любых } x \in [-1,1],$$

$$\arccos(\cos x) = x \text{ при любых } x \in [0,\pi].$$



Опираясь на свойства функции $y = \arccos x$, строим её график. Правильно построенный график $y = \arccos x$ должен быть симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0,\pi]$, относительно прямой $y = x$.

Докажем теперь весьма полезное тождество, справедливое при всех $x \in [-1,1]$ и связывающее между собой функции $\arcsin x$ и $\arccos x$:

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 .$$

Для этого перепишем тождество в виде: $\arcsin x = \pi/2 - \arccos x$. Оценим отдельно, какие значения могут принимать левая и правая части тождества. Для левой части, по определению арксинуса, имеем $-\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$. Для оценивания правой части учтём, что $0 \le \arccos x \le \pi$ и, следовательно, $-\pi/2 \le \pi/2 - \arccos x \le \pi/2$. На промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ функция синус монотонно возрастает, поэтому, применяя операцию взятия синуса к левой и правой частям данного тождества, получим равносильное тождество

$\sin(\arcsin x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) \Leftrightarrow x = \cos(\arccos x) \Leftrightarrow x = x$ - верно. Тождество доказано.

Свойства функции $y = arctgx$

Рассмотрим функцию $y = tgx$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Она монотонно возрастает на этом интервале. Поэтому у неё существует обратная функция. Эту обратную функцию называют «арктангенс» и обозначают $y = arctgx$.

Можно было определить эту функцию иначе. Сформулируем соответствующее определение. *Арктангенсом* произвольного действительного числа x называется такое действительное число y из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, тангенс которого равен x. Тогда функцией $y = arctgx$ называется такое отображение множества всех действительных чисел на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$, при котором каждому $x \in R$ ставится в соответствие единственное значение $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, равное арктангенсу x.

Отметим основные свойства этой функции.

1) *Область определения*: $D(arctgx) = (-\infty, +\infty) = E(tgx)$.

2) *Область значений:* $E(arctgx) = (-\pi/2, \pi/2) = D(tgx)$. Функция, таким образом, ограничена как сверху, так и снизу.

3) *Пересечение графика с осями координат*. Так как функция $y = tgx$ на $(-\pi/2, \pi/2)$, монотонно возрастая, принимает нулевое значение в единственной точке $x = 0$, то обратная функция также имеет единственную точку пересечения с осями координат – точку $(0,0)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Так как $tgx > 0$ при $x \in (0, \pi/2)$ и $tgx < 0$ при $x \in (-\pi/2, 0)$, то для арктангенса получаем:

$arctgx > 0$ при любом $x \in (0, +\infty)$, $arctgx < 0$ при любом $x \in (-\infty, 0)$.

5) *Асимптоты*. Поскольку график функции $y = tgx$ на рассматриваемом интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm\pi/2$, то при симметрии относительно прямой $y = x$ они перейдут, соответственно, для обратной функции $y = arctgx$ в две горизонтальные асимптоты $y = \pm\pi/2$.

6) *Периодичность*. Как и любая обратимая функция, функция $y = arctgx$ не может быть периодической, так как каждое свое значение она принимает ровно один раз.

7) *Чётность (нечётность)*. Так как функция $y = tgx$ является нечётной на $(-\pi/2, \pi/2)$, то и обратная функция также будет нечётной, т.е. при всех действительных x справедливо тождество

$$arctg(-x) = -arctgx\,.$$

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Поскольку функция $y = tgx$ возрастает на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, то и обратная функция $y = arctgx$ также строго монотонно возрастает на всей числовой прямой. Поэтому локальных экстремумов эта функция не имеет. Так как функция $y = tgx$ не определена на концах интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ и $tgx \to \pm\infty$ при $x \to \pm\pi/2$, то обратная функция не достигает ни при каком конечном x значений $\pm\pi/2$ (хотя в силу $E(arctgx)$ может принимать сколь угодно близкие к $-\pi/2$ и $+\pi/2$ значения). Поэтому функция $y = arctgx$ не имеет наибольшего и наименьшего значений.

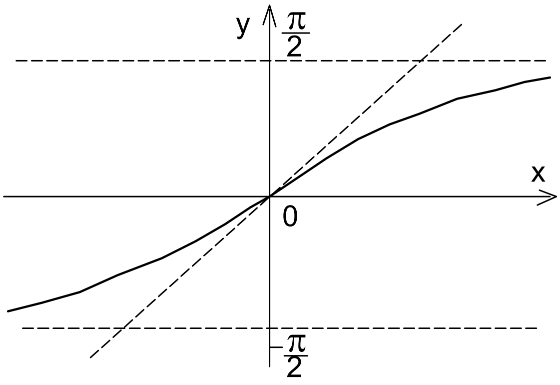
9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке своей области определения, причём производная арктангенса вычисляется по формуле $(arctgx)' = 1/(1 + x^2)$.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутке $[0, +\infty)$ и выпукла вниз на промежутке $(-\infty, 0]$. Точка с координатами $(0;0)$ является единственной точкой перегиба графика функции.

11) *Обратимость*. Функция обратима (обратной к ней является функция $y = tgx$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$), причём в силу свойств взаимно обратных функций справедливы тождества:

$$tg(arctgx) = x \text{ при всех } x \in R,$$

$$arctg(tgx) = x \text{ при любом } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$



Опираясь на исследованные свойства функции $y = arctgx$, строим её график. Правильно построенный график функции $y = arctgx$ должен быть симметричен ветви графика $y = tgx$, изображённой на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, относительно прямой $y = x$; при $x > 0$ располагаться ниже, а при $x < 0$ – выше этой прямой.

Справедливо тождество: $|arctgx| \le |x|$, $x \in R$.

Свойства функции $y = arcctgx$

Рассмотрим функцию $y = ctgx$ на интервале $(0, \pi)$. Она монотонно убывает на этом интервале. Поэтому у неё существует обратная функция. Эту обратную функцию называют «арккотангенсом» и обозначают $y = arcctgx$.

Рассмотрим другое определение этой функции. *Арккотангенсом* произвольного действительного числа x называется такое действительное число y из интервала $(0, \pi)$, котангенс которого равен x. Тогда функцией $y = arcctgx$ называется такое отображение множества всех действительных чисел на интервал $(0, \pi)$, при котором каждому $x \in R$ ставится в соответствие единственное значение $y \in (0, \pi)$, равное арккотангенсу x.

Перечислим её основные свойства.

1) *Область определения*: $D(arcctgx) = (-\infty, +\infty) = E(ctgx)$.

2) *Область значений:* $E(arcctgx) = (0, \pi) = D(ctgx)$. Таким образом, аналогично арктангенсу, функция ограничена как сверху, так и снизу.

3) *Пересечение графика с осями координат*. График функции не имеет общих точек с осью абсцисс и пересекает ось ординат в точке $(0, \pi/2)$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*. Всюду, где функция определена, она принимает только положительные значения:

$$arcctgx > 0 \text{ при любом } x \in R.$$

5) *Асимптоты*. Поскольку функция $y = ctgx$ на концах рассматриваемого интервала $(0, \pi)$ имеет две вертикальные асимптоты, то при симметрии относительно прямой $y = x$ они перейдут, соответственно, для обратной функции $y = arcctgx$ в две горизонтальные асимптоты $y = 0$ и $y = \pi$.

6) *Периодичность*. Поскольку, как любая обратимая функция, функция $y = arcctgx$ принимает каждое своё значение ровно один раз, то она не может быть периодической.

7) *Чётность (нечётность)*. Функция не является ни чётной, ни нечётной, при этом при всех действительных x справедливо тождество

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx.$$

Доказательство. Так как функция $y = ctgx$ монотонна на интервале $(0, \pi)$ (а обе части тождества принимают значения из этого интервала), то операция взятия котангенса от левой и правой частей данного равенства приведёт к равносильному равенству $ctg(arcctg(-x)) = ctg(\pi - arcctgx)$. Упрощая последнее равенство, получаем, что оно выполняется сразу при всех действительных x:

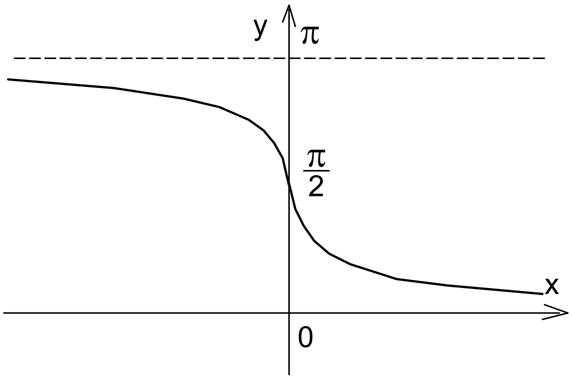
$$-x = -ctg(arcctgx) \Leftrightarrow -x = -x, \text{ что, очевидно, верно.}$$

8) *Монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения*. Поскольку функция $y = ctgx$ монотонно убывает на интервале $(0, \pi)$, то и обратная функция $y = arcctgx$ также будет монотонно убывать от π к 0, не дос-

тигая этих значений (хотя может принимать значения сколь угодно близкие к π и 0). Поэтому локальных экстремумов, а также наибольшего и наименьшего значений эта функция не имеет.

9) *Непрерывность и дифференцируемость*. Функция непрерывна и имеет конечную производную в любой точке своей области определения, причём производная арккотангенса вычисляется по формуле $(arcctgx)' = -1/(1+x^2)$.

10) *Выпуклость*. Функция выпукла вверх на промежутке $(-\infty, 0]$ и выпукла вниз на промежутке $[0, +\infty)$. Точка с координатами $(0; \pi/2)$ является единственной точкой перегиба графика функции.



11) *Обратимость*. Функция обратима (обратной к ней является функция $y = ctgx$, $x \in (0, \pi)$), причём в силу свойств взаимно обратных функций справедливы тождества:

$ctg(arcctgx) = x$ при всех $x \in R$,

$arcctg(ctgx) = x$ при всех $x \in (0, \pi)$.

Основываясь на исследованных выше свойствах функции $y = arcctgx$, строим её график. Правильно построенный график $y = arcctgx$ должен быть симметричен графику функции $y = ctgx$, рассмотренному на интервале $(0, \pi)$, относительно прямой $y = x$.

Докажем следующее тождество, справедливое при всех $x \in R$:

$$arctgx + arcctgx = \pi/2.$$

Перепишем тождество в виде $arctgx = \pi/2 - arcctgx$. Оценим отдельно, какие значения могут принимать левая и правая части тождества. Для левой части, по определению арктангенса, имеем $-\pi/2 < arctgx < \pi/2$. Для оценивания правой части учтём, что $0 < arcctgx < < \pi$ и, следовательно, $-\pi/2 < \pi/2 - arcctgx < \pi/2$. На интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ функция тангенс монотонно возрастает, поэтому, применяя операцию взятия тангенса к левой и правой частям данного тождества, получим равносильное тождество:

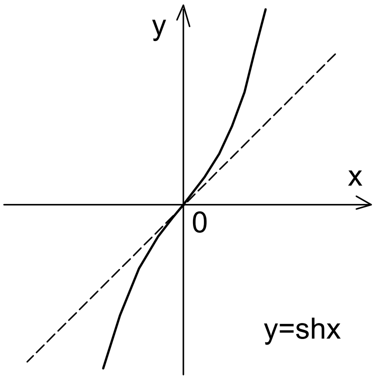
$tg(arctgx) = tg(\pi/2 - arcctgx) \Leftrightarrow x = ctg(arcctgx) \Leftrightarrow x = x$ - верно. Тождество доказано.

Гиперболические функции$^{(*)}$

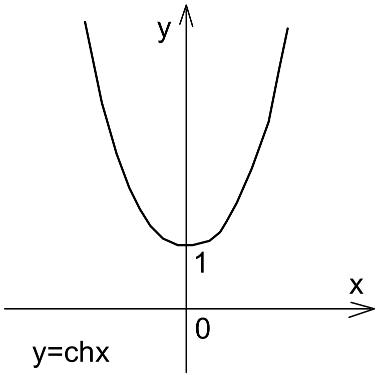
Гиперболические функции были известны *Ф.Муавру* (1707), определяющие соотношения даны *В.Риккати* (1757), названия дал *И.Ламберт* (1768). Не только похожие наименования, но и соотношения, связывающие между собой гиперболические функции, во многом напоминают соответствующие названия и соотношения для тригонометрических функций. Это не случайно. В теории функций комплексного переменного доказывается существование тесной связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями.

Класс *гиперболических функций* определяется через экспоненциальную функцию следующим образом.

Гиперболическим синусом действительного числа x называется функция, определяемая равенством $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Это нечётная функция, определённая и монотонно возрастающая на всей числовой прямой, её график проходит через начало координат (касательная к графику в этой точке имеет угол наклона 45^0) и отдалённо напоминает основную ветвь тангенсоиды (без асимптот).

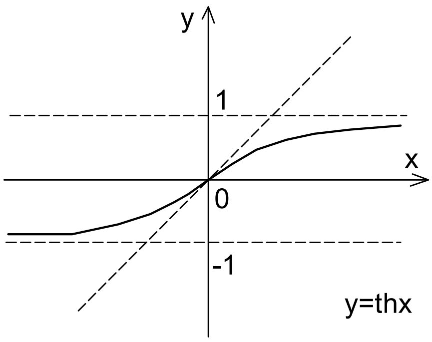


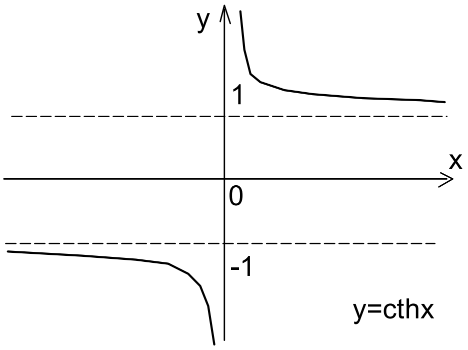
Гиперболическим косинусом действительного числа x называется функция, определяемая равенством $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Это чётная положительная функция, определённая на всей числовой прямой, её график имеет минимум, равный единице, при $x=0$ и отдалённо напоминает параболу.



Обобщением функции $y=chx$ является так называемая «*цепная линия*»: $y=a\cdot ch\frac{x}{a}$ ($a>0$). Форму данной линии принимает гибкая тяжёлая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках.

Гиперболическим тангенсом действительного числа x называется функция, определяемая равенством $thx=\frac{shx}{chx}$. Это нечётная функция, определённая и монотонно возрастающая на всей числовой прямой. Её график проходит через начало координат (касательная к графику в этой точке имеет угол наклона 45^0), имеет две горизонтальные асимптоты $y=-1$ и $y=1$, и отдалённо напоминает график арктангенса.





Гиперболическим котангенсом действительного числа x называется функция, определяемая равенством $cthx = \frac{chx}{shx}$. Это также нечётная функция, определённая на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$. График состоит из двух ветвей (отдалённо напоминая график гиперболы $y = 1/x$) и имеет три асимптоты: вертикальную, совпадающую с осью ординат, и две горизонтальные $y = \pm 1$. Одна ветвь расположена правее оси ординат и выше прямой $y = 1$, приближаясь к этим прямым асимптотически, а другая, соответственно, центрально симметрична первой относительно точки начала координат.

Гиперболические секанс и косеканс определяются, соответственно, как

$$\sec hx = \frac{1}{chx} \text{ и } \cos echx = \frac{1}{shx}.$$

Гиперболические функции имеют производные всюду на своей области определения, которые могут быть вычислены по формулам:

$$(shx)' = chx,\ (chx)' = shx,\ (thx)' = \frac{1}{ch^2 x},\ (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Отметим, наконец, что, поскольку гиперболические функции обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам тригонометрических функций, большинство из тригонометрических формул имеют свои аналоги в классе гиперболических функций. Приведём основные формулы, которые (при допустимых x) могут быть доказаны непосредственно по определению гиперболических функций.

Основное гиперболическое тождество: $ch^2 x - sh^2 x = 1$.

Формулы одного аргумента $1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}$, $cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}$ $(x \neq 0)$.

Формулы двойного аргумента: $sh2x = 2 \cdot shx \cdot chx$, $ch2x = ch^2 x + sh^2 x$.

Формулы понижения степени: $ch^2 x = \frac{ch2x + 1}{2}$, $sh^2 x = \frac{ch2x - 1}{2}$.

Формулы сложения: $shx \pm shy = 2sh\frac{x \pm y}{2}ch\frac{x \mp y}{2}$, $chx + chy = 2ch\frac{x+y}{2}ch\frac{x-y}{2}$,

$chx - chy = 2sh\frac{x+y}{2}sh\frac{x-y}{2}$. *Формула* $(chx \pm shx)^n = ch(nx) \pm sh(nx)$, $n \in Z$.

Формулы суммы и разности двух аргументов:

$$sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm shy \cdot chx,\ ch(x \pm y) = chx \cdot chy \pm shx \cdot shy,$$

$$th(x \pm y) = \frac{thx \pm thy}{1 \pm thx \cdot thy},\ cth(x \pm y) = \frac{cthx \cdot cthy \pm 1}{cthy \pm cthx}\ (x \pm y \neq 0).$$

Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:

$$shx \cdot chy = \frac{1}{2}(sh(x+y) + sh(x-y)),\ chx \cdot chy = \frac{1}{2}(ch(x+y) + ch(x-y)),$$

$$shx \cdot shy = \frac{1}{2}\left(ch(x+y) - ch(x-y)\right).$$

Формулы универсальной подстановки: $shx = \frac{2th(x/2)}{1 - th^2(x/2)}$, $chx = \frac{1 + th^2(x/2)}{1 - th^2(x/2)}$.

Обратные гиперболические функции$^{(*)}$

Рассмотрим кратко вопрос о существовании обратных функций у гиперболических функций. Так как функция $y = shx$ монотонно возрастает на R, то у неё существует обратная функция, называемая *Ареа-синусом* и обозначаемая $y = Arsh(x)$. Данная функция имеет аналитическое представление в виде

$$Arshx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in R,$$

которое несложно найти, используя экспоненциальное представление гиперболического синуса и стандартные правила нахождения уравнения обратной функции.

Функция $y = chx$ монотонно убывает на полуинтервале $(-\infty, 0]$ и монотонно возрастает при $x \in [0, +\infty)$, принимая своё наименьшее значение, равное единице, при $x = 0$, поэтому на каждом из промежутков $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ функция является обратимой. Обратные функции к каждой из двух монотонных ветвей $y = chx$ носят общее название *Ареа-косинуса* и обозначаются $y = Arch(x)$. Данная функция имеет аналитическое представление в виде

$$Archx = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right), \ x \geq 1.$$

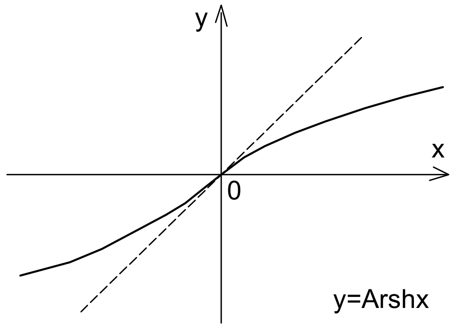
Гиперболический тангенс монотонно возрастает на всей прямой, и, следовательно, имеет обратную функцию, называемую *Ареа-тангенсом* и обозначаемую $y = Arth(x)$. Ареа-тангенс выражается через элементарные функции следующим образом:

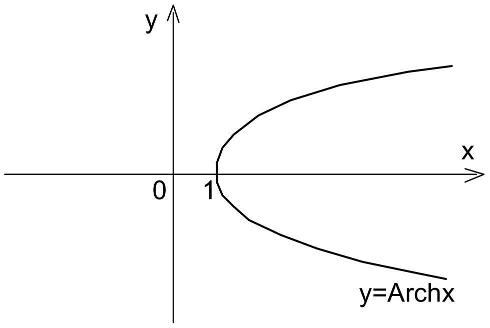
$$Arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \ (|x| < 1).$$

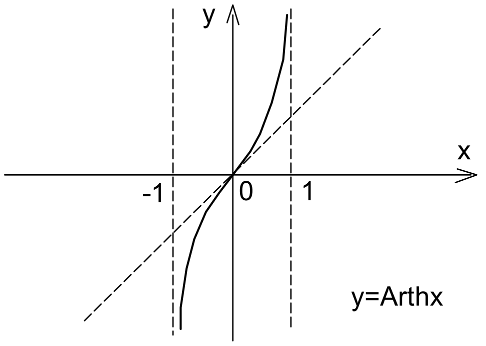
Гиперболический котангенс также осуществляет взаимно однозначное соответствие между своими областью определения и множеством значений, поэтому является обратимой функцией. Обратная функция носит название *Ареа-котангенса* и обозначается $y = Arcth(x)$. Аналитически уравнение этой функции имеет вид

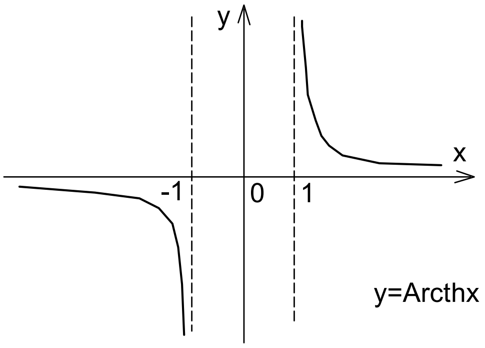
$$Arcthx = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \ (|x| > 1).$$

Графики обратных гиперболических функций можно построить, опираясь на известное свойство взаимно обратных функций, а именно, что их графики симметричны относительно прямой $y = x$.









<u>Пример 1</u>. Приведите примеры элементарных функций f *таких, что для любых* $x, y \in D(f)$ *выполняются равенства*

а) $f(x+y)=f(x)f(y)$; *б)* $f(x+y)=f(x)+f(y)$; *в)* $f(xy)=f(x)f(y)$;

г) $f(xy)=f(x)+f(y)$; *д)* $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ *при* $f(x)f(y)\neq 1$.

Ответ: а) $f(x)=a^x$ $(a>0)$; б) $f(x)=ax$; в) $f(x)=x^a$; г) $f(x)=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$; д) $f(x)=tgx$.

<u>Пример 2</u>. Приведите пример элементарной функции f *такой, что* $f(\sin x)+f(\cos x)=3$ *для всех* $x\in R$.

Ответ: $f(x)=3x^2$, $x\in R$.

<u>Пример 3</u>. Приведите пример функции f $(D(f)=R)$ *такой, что* $f(f(f(x)))=x$ *для всех* $x\in R$*, но* $f(x)$ *тождественно не равна* x.

Ответ: Например, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in R\setminus\{1;2;3\}; \\ 2, & x=1; \\ 3, & x=2; \\ 1, & x=3. \end{cases}$

Неэлементарные функции$^{(*)}$

К простейшим *неэлементарным функциям* относятся, например, *кусочно-непрерывные функции* – функции, которые в любом конечном интервале имеют конечное число точек разрыва (имеются в виду точки разрыва 1-го рода, но столь подробную классификацию точек разрыва в курсе элементарной математики не дают). Примерами таких функций служат функции $y=\operatorname{sgn} x$ (сигнум x, или знак числа), $y=[x]$ (целая часть числа), $y=\{x\}$ (дробная часть числа).

Также к разряду неэлементарных относят *функции, заданные с помощью пределов*, например:

$$y=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^n},\ x\in[0,+\infty).$$

После упрощения в результате вычисления предельных значений в зависимости от x, эту функцию можно привести к более традиционному виду

$$y=\begin{cases}0, & \textit{если} \quad x\in[0,1);\\ 1/2, & \textit{если} \quad x=1;\\ 1, & \textit{если} \quad x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

Ещё одним примером неэлементарных функций являются функции, определяемые при помощи интегралов:

$$Si(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$$ - интегральный синус,

$$Ci(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt \quad (x>0)$$ - интегральный косинус

(эти функции были введены *Л.Маскерони* (1790)),

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}dt \quad (x<0)$$ – интегральная показательная функция,

$$li(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t} \quad (x>0,\, x\neq 1)$$ – интегральный логарифм

(был введён в математический анализ *Л.Эйлером* (1768)).

1.4. Преобразования графиков функций

Рассмотрим простейшие методы построения графиков функций, не использующие производной и основанные на использовании *элементарных преобразований графиков*.

Пусть известен график некоторой функции $y=f(x)$, и требуется построить другой график, связанный с исходным последовательностью преобразований. В приведённой ниже таблице содержатся сведения о наиболее употребляемых преобразованиях графиков, таких как параллельный перенос, растяжение или сжатие графиков функций вдоль координатных осей, осевая симметрия относительно заданной прямой.

№	Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
1	$y = f(x) + A$	Параллельный перенос графика вдоль оси Oy: на A единиц вверх, если $A > 0$; на $\lvert A \rvert$ единиц вниз, если $A < 0$.
2	$y = f(x - A)$	Параллельный перенос графика вдоль оси Ox: на A единиц вправо, если $A > 0$; на $\lvert A \rvert$ единиц влево, если $A < 0$.
3	$y = A \cdot f(x)$	При $A > 1$ - растяжение вдоль Oy в A раз; при $0 < A < 1$ - сжатие вдоль Oy в $1/A$ раз; при $A = -1$ - осевая симметрия относительно Ox.
4	$y = f(A \cdot x)$	При $A > 1$ - сжатие вдоль оси Ox в A раз; при $0 < A < 1$ - растяжение вдоль Ox в $1/A$ раз; при $A = -1$ - осевая симметрия относительно Oy.
5	$y = f(\lvert x - A \rvert)$	Вначале строится график $y = f(x - A)$ при $x \geq A$, а затем результат зеркально отражается относительно прямой $x = A$ в область $x < A$.
6	$y = f(A - x)$	Этот график симметричен графику $y = f(x - A)$ относительно прямой $x = A$.
7	$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика $f(x)$, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси в верхнюю полуплоскость $y \geq 0$. Остальная часть графика $f(x)$ (где $f(x) \geq 0$) остаётся без изменения.

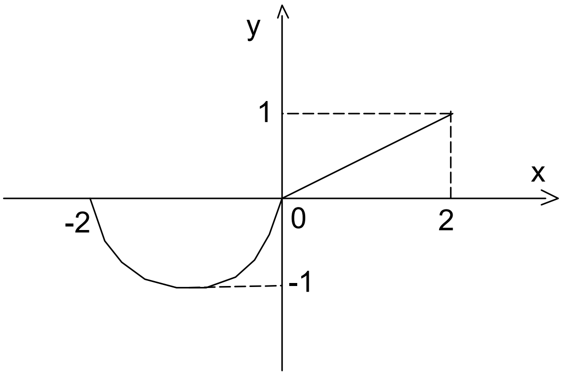
Рассмотренные в таблице основные преобразования графиков функций могут комбинироваться между собой. Например, чтобы построить по известному графику функции $f(x)$ график функции $y = A \cdot f(ax + b) + B$, можно воспользоваться схемой:

$$f(x) \to f(ax) \to A \cdot f(ax) \to A \cdot f(ax) + B \to A \cdot f(a(x + (b/a)) + B).$$

<u>Пример 1</u>. На рисунке слева изображён график функции $y = f(x)$. Построить графики функций:

1) $f(x) + 2$; *2)* $f(x - 3)$;

3) $-2f(x)$; *4)* $f(2x)$;



5) $f(-x/2)$; *6)* $f(2x-1)$; *7)* $|f(x)|$; *8)* $f(|x|)$; *9)* $f(|x-1|)$; *10)* $1+2f(3x-6)$.

Решение. 1) График функции $y=f(x)+2$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси ординат вверх на 2.

2) График функции $y=f(x-3)$ получается смещением исходного графика вправо вдоль Ox на 3.

3) График функции $y=-2f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи последовательного применения двух преобразований, осуществляемых в любом порядке: симметричного отображения относительно оси абсцисс и растяжения вдоль оси Oy в 2 раза.

4) График функции $y=f(2x)$ получается сжатием графика $y=f(x)$ в 2 раза к оси Oy.

5) График функции $y=f(-x/2)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи последовательного применения двух преобразований, осуществляемых в любом порядке: симметричного отображения относительно оси ординат и растяжения вдоль оси Ox в 2 раза (от оси ординат).

6) Поскольку $f(2x-1)=f(2(x-1/2))$, то график функции $y=f(2x-1)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи последовательного применения двух преобразований - сжатия в 2 раза вдоль оси абсцисс (к прямой $x=0$) и сдвигом вправо на $1/2$: $f(x) \quad \to \quad f(2x) \quad \to \quad f(2(x-1/2))$.

Можно было изменить порядок проведения преобразований

$$f(x) \quad \to \quad f\left(x-\frac{1}{2}\right) \to f\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right),$$

тогда вначале исходный график следует сместить вправо на $1/2$, а затем сжать в 2 раза, но уже к прямой $x=1/2$.

7) График $y=|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ путём симметричного отображения тех участков графика, где $f(x)<0$, в верхнюю полуплоскость $y \geq 0$ относительно оси абсцисс. Участки исходного графика, на которых $f(x) \geq 0$, остаются без изменения.

8) График чётной функции $y=f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат. Для его построения следует вначале построить ту часть графика, которая отвечает неотрицательным значениям переменной x, а затем отобразить её в левую полуплоскость $x<0$ симметрично оси ординат.

9) График функции $y=f(|x-1|)$ имеет ось симметрии $x=1$, поэтому вначале можно построить график в полуплоскости $x \geq 1$ (он совпадает на этом участке с графиком функции $y=f(x-1)$), а затем отобразить его в полуплос-

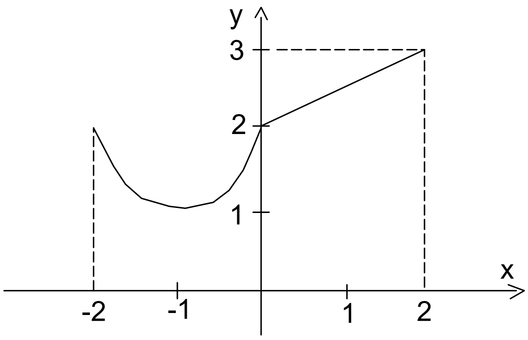
кость $x<1$ симметрично относительно прямой $x=1$.

10) График функции $y=1+2f(3x-6)$ можно построить за несколько шагов: сжатие в 3 раза вдоль оси Ox (к прямой x=0), сдвиг вправо на 2 единицы, растяжение в 2 раза вдоль оси Oy (от прямой $y=0$) и параллельный перенос вверх вдоль Oy на 1 единицу.

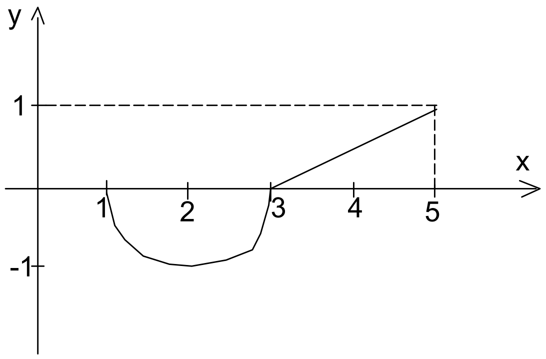
$$f(x) \to f(3x) \to f(3(x-2)) \to 2f(3(x-2)) \to 1+2f(3(x-2)).$$

Построенные графики функций изображены ниже на рисунках:

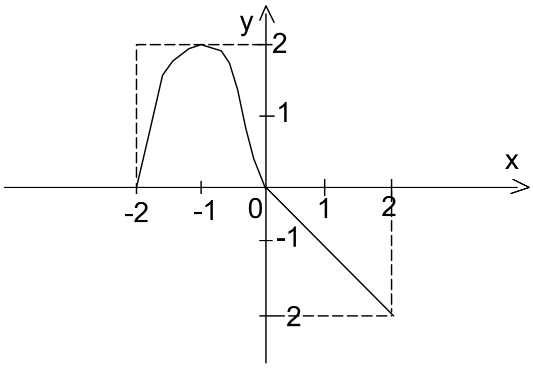
1)



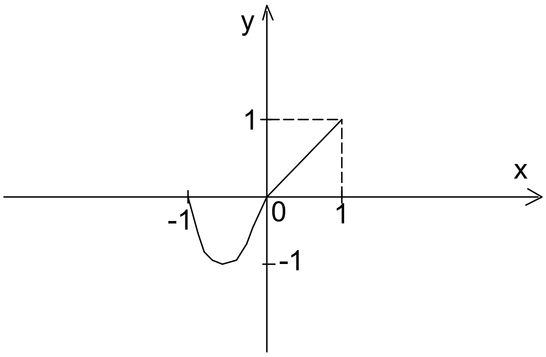
2)



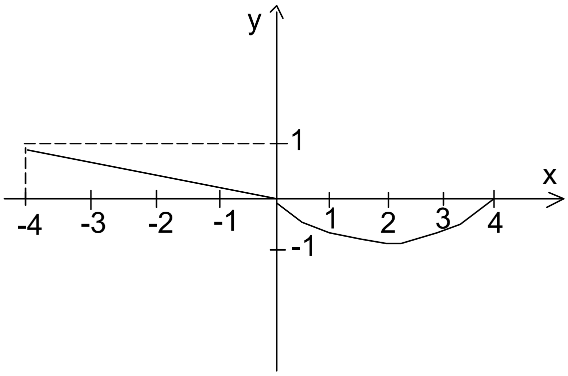
3)



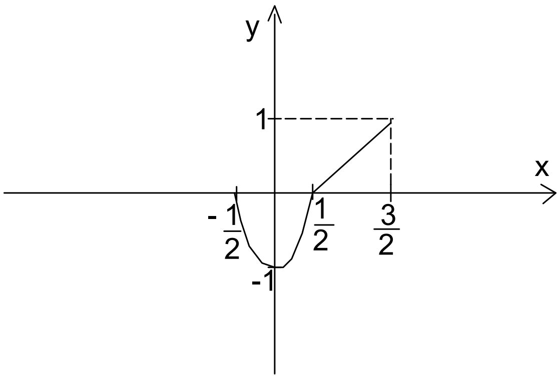
4)



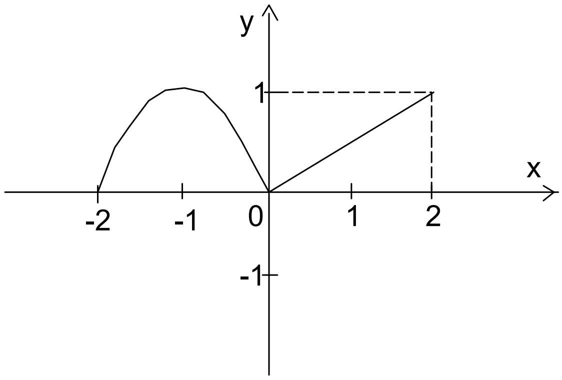
5)



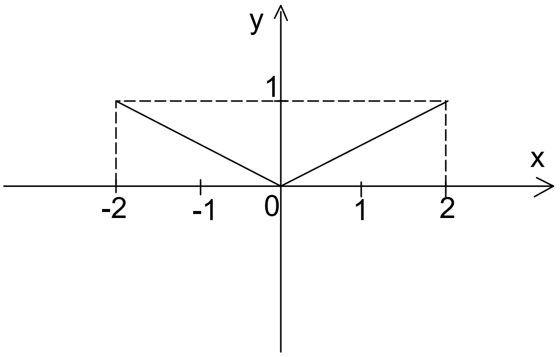
6)



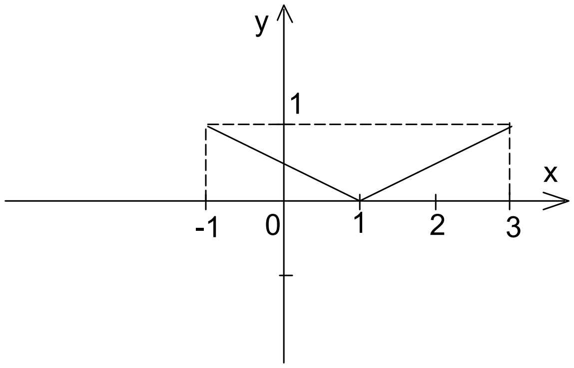
7)



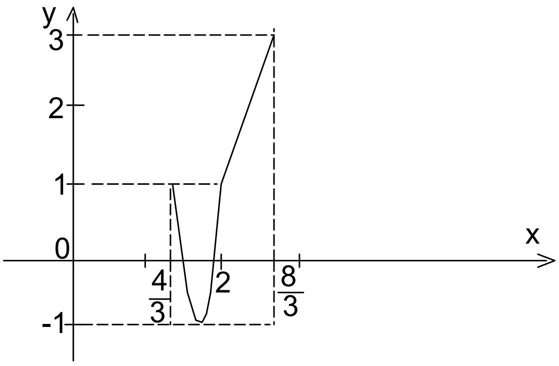
8)



9)



10)



Пример 2. Построить графики функций: *а)* $y=\sqrt{x-1}$; *б)* $y=\sqrt{1-x}$; *в)* $y=\sqrt{|1-x|}$; *г)* $y=\sqrt{1-|x|}$; *д)* $y=\sqrt[3]{|x|}$.

Решение. а) График данной функции получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ параллельным переносом вправо вдоль оси абсцисс на 1 единицу.

б) График функции симметричен графику функции $y=\sqrt{x-1}$ относительно прямой $x=1$.

в) График данной функции $y=\sqrt{|x-1|}$ имеет ось симметрии $x=1$. Вначале строится график этой функции в области $x\geq 1$, где, раскрывая модуль, получаем $y=\sqrt{x-1}$. Затем построенный участок графика отображается в полуплоскость $x<1$ симметрично относительно прямой $x=1$. Объединяя обе ветви, получаем искомый график функции.

г) Поскольку данная функция является чётной, то её график симметричен относительно оси ординат. Достаточно построить график вначале в области $x\geq 0$, где функция имеет вид $y=\sqrt{1-x}$, а затем отобразить этот участок графика в левую полуплоскость $x<0$ и объединить обе полученные ветви.

д) Данная функция также чётна, поэтому строим график в области $x\geq 0$ (там функция имеет вид $y=\sqrt[3]{x}$), а потом достраиваем его чётным образом в полуплоскость $x<0$.

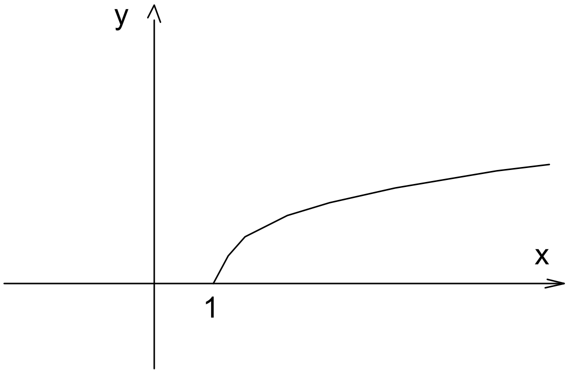


Рис. а)

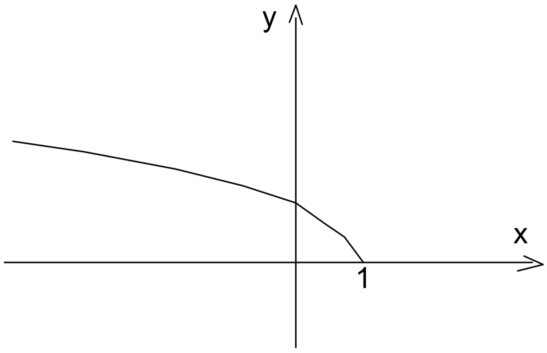


Рис. б)

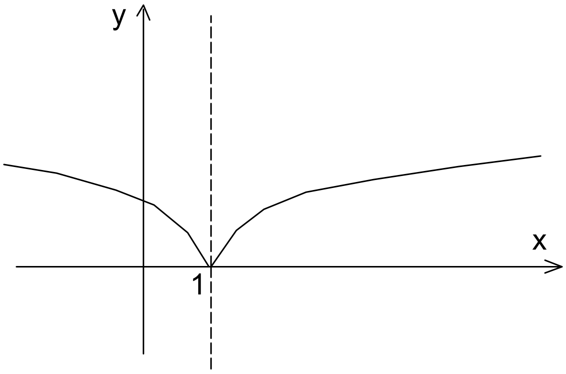


Рис. в)

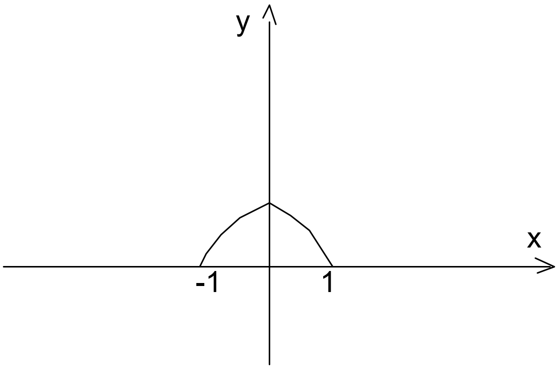


Рис. г)

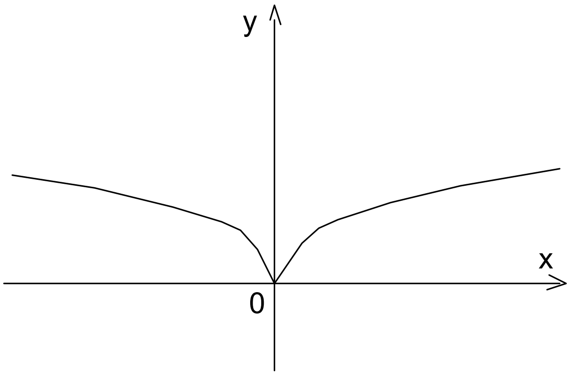


Рис. д)

Задачи к разделу 1: «Функции, их свойства и графики»

🕮 Задачи на нахождение области определения и области значений функции

1.1 [**2003, устн., 1**] Найти область значений функции $y=-\sqrt{55-6x-x^2}$.

1.2 [**2003, устн., 2**] Найти область значений функции $y=-\sqrt{55-6x-x^2}$ на отрезке $[-4{,}4]$.

1.3 [**2003, устн., 3**] Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\cdot\lg(3-x)}\,.$$

1.4 [**2004, устн.**] Найти область значений функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

1.5 [**2007, устн.**] Определить множество значений функции $y=\sqrt{x-2x^2+1}$.

🕮 Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

1.6 [**2001, устн.**] Найти наименьшее значение функции $y=2x^2-1+\dfrac{1}{x^2+1}$.

1.7 [**2004, устн., 1**] Найти наибольшее значение функции $y=\dfrac{x^2+2}{x^4+4}$.

1.8 [**2004, устн., 2**] Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{(x+2)^2}{x^2+4}\,.$$

🕮 Задачи на периодические функции

1.9 [**2003, устн.**] Найти основной период функции $y=\cos^2\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

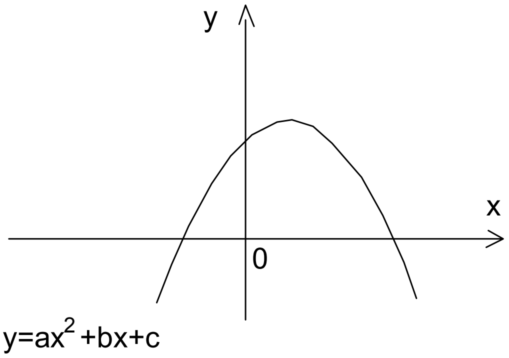
1.10 [**2004, май, устн.**] Найти период T функции $y(x)=2\sin\dfrac{2x}{15}-3\cos\dfrac{8x}{35}$, удовлетворяющий неравенствам: $0<T<500$.

🕮 Разные задачи

1.11 [**1988, 6**] Найти все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $y=\dfrac{\sin x+2(1-a)}{a-\cos^2 x}$ содержит отрезок $[1{,}2]$.

1.12 [1993, 6] Найти все действительные значения параметра k, при которых ровно одна точка графика функции $y=2x+(\lg k)\sqrt{\cos(2k\pi x)+2\cos(k\pi x)-3}+1$ лежит в области $(2x-7)^2+4(y-3)^2\le 25$.

1.13 [1994, май, устн.] По виду параболы определить знаки коэффициентов a,b,c квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, графиком которого является:



1.14 [1995, май, 7] Пусть $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-3$, $g(x)=\sqrt{x}-a$, a - параметр. Решить относительно x неравенство $f(g(x))\le 0$.

1.15 [2004, устн.] При каких значениях a и b многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ является квадратом некоторого квадратного трёхчлена?

1.16 [2006, устн.] Доказать, что при целых значениях x функция

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-4$$

принимает только целочисленные значения. Каково наименьшее из этих значений?

1.17 [2007, устн., 1] Доказать, что при любых целых значениях x функция

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-10$$

принимает целые значения.

1.18 [2007, устн., 2] Доказать, что если функция $y=ax^2+bx+c$ принимает целые значения при целочисленных x, то $2a, a+b$ и c – целые числа.

Раздел 2.

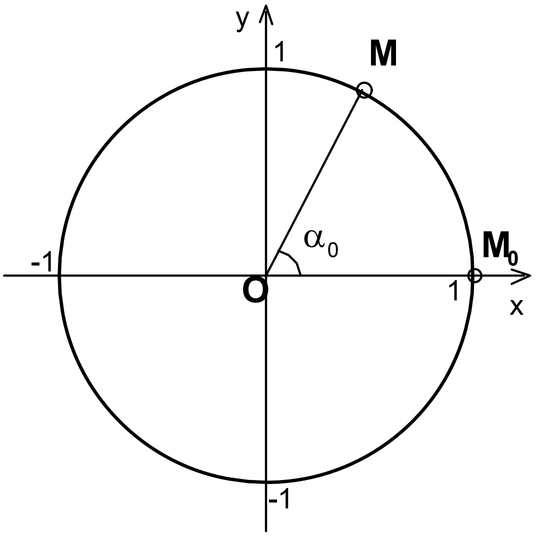
ТРИГОНОМЕТРИЯ

> *«**Тригонометрия** (от греческого «треугольник измеряю») – раздел геометрии, в котором метрические соотношения между элементами треугольника описываются через тригонометрические функции, а также устанавливаются соотношения между тригонометрическими функциями».*
>
> *Большой энциклопедический словарь* [4]

2.1. Основные определения

Несмотря на то, что тригонометрия исторически рассматривается как подраздел геометрии, в настоящее время она представляет собой достаточно самостоятельный раздел математики. Обратимся к базовым понятиям в тригонометрии.

Градусная и радианная меры угла. Тригонометрический круг. Определение тригонометрических функций



Рассмотрим на координатной плоскости Oxy окружность единичного радиуса с центром в начале координат $O(0;0)$.

За начало отсчёта на ней примем точку $M_0(1;0)$. Назовём *положительным* направлением движения по окружности движение против часовой стрелки, а *отрицательным* – движение по часовой стрелке. Пусть M – некоторая подвижная точка окружности. Рассмотрим луч OM с началом в точке O; он образует с положительным направлением оси Ox некоторый угол величины $\alpha_0 \in [0,2\pi)$.

Заметим, что любой плоский угол традиционно измеряется либо в *радианной*, либо в *градусной мере*. Так, один полный оборот подвижного луча OM против часовой стрелки считается равным 360^0, а радианная мера этого же угла полагается равной 2π радиан. Отсюда, приравнивая эти величины, получаем, что угол величины 1 радиан равен углу величиной $180/\pi$ градусов, что примерно соответствует 57^0. При этом началу отсчёта – точке M_0 – соответствует угол в 0^0 (или 0 радиан).

Любому действительному числу α, если интерпретировать его как величину α некоторого угла, выраженную в радианах, соответствует определённое положение подвижного луча, а следовательно, и единственная точка M на единичной окружности, отвечающая этому α. И наоборот, каждой точке M на этой окружности соответствует бесконечно много углов, отличающихся друг от друга на целое число полных оборотов. Величины этих углов отличаются на $2\pi n$, где n – произвольное целое число.

Замечание. В данном разделе для краткости записи в ситуациях, когда надо сказать, что n – *произвольное* целое число, т.е. $n = 0;\pm1;\pm2;\ldots$, будет использоваться обозначение $n \in Z$.

Таким образом, одной точке M единичной окружности отвечает бесконечная серия углов величины $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n$, где $n \in Z$. Введённую таким образом единичную окружность (с выбранными началом и направлением положительного отсчёта) принято называть *тригонометрической окружностью*, а соответствующий круг – *тригонометрическим кругом*. В учебной литературе по тригонометрии часто эти понятия отождествляют [1].

Пусть теперь на единичной окружности даны две точки M_1 и M_2. Они разбивают окружность на две дуги, одна из которых больше либо равна другой. Если не оговорено противное, то под дугой $\cup M_1M_2$ обычно понимают меньшую из этих двух дуг. Угловая величина дуги измеряется, по определению, величиной стягиваемого ею угла $\angle M_1OM_2$. Так как полная длина единичной окружности равна 2π, то численно угловая величина дуги $\cup M_1M_2$ равна длине этой дуги. В частности, углу в 1 радиан можно дать следующее определение: это такой угол с вершиной в центре единичной окружности, который опирается на дугу с длиной, равной 1. В общем случае можно сказать, что угол величиной в 1 радиан – это угол с вершиной в центре окружности радиуса R, который «вырезает» на этой окружности дугу длиной R.

Введём определение четырёх *основных тригонометрических понятий*: синуса, косинуса, тангенса и котангенса действительного числа (угла).

Зафиксируем произвольное действительное число α и отложим от точки M_0 на тригонометрическом круге в соответствующем (положительном или отрицательном) направлении угол величины α. Получили некоторую точку M.

Синусом угла величины α (или синусом действительного числа α) называется действительное число, равное ординате указанной выше точки M, и обозначаемое $\sin\alpha$. *Косинусом угла* величины α называется число, равное абсциссе точки M, и обозначаемое $\cos\alpha$.

Так как каждому действительному значению α на тригонометрическом круге соответствует единственная точка M, то данные определения задают однозначное отображение множества действительных чисел на множества значений, которые могут принимать синус и косинус, а значит, задают *функции одной действительной переменной* $y=\sin\alpha$ и $y=\cos\alpha$.

Тангенсом угла величины α (или тангенсом действительного числа α), где $\alpha \ne \pi/2+\pi n$, $n\in Z$, называется действительное число, равное отношению синуса α к его косинусу, и обозначаемое $tg\alpha$. При $\alpha=\pi/2+\pi n, n\in Z$, тангенс α не определён. *Котангенсом угла* величины α, где $\alpha\ne\pi n$, $n\in Z$, называется число, равное отношению косинуса α к его синусу, и обозначаемое $ctg\alpha$. При $\alpha=\pi n, n\in Z$, котенгенс α не определён. Поскольку каждому действительному значению α, кроме $\alpha=\pi/2+\pi n, n\in Z$, соответствует одно и только одно значение $tg\alpha$, то тем самым задана *функция* $y=tg\alpha$. Аналогично вводится в рассмотрение *функция* $y=ctg\alpha$.

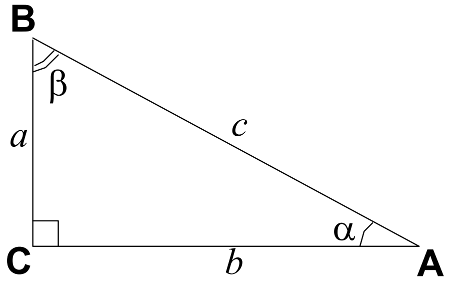
Основываясь на введённых понятиях синуса и косинуса действительного числа α, можно ввести ещё две дополнительные тригонометрические величины. Это – *секанс* и *косеканс*, которые определяются формулами

$$\sec\alpha=1/\cos\alpha\ \ (\alpha\ne\pi/2+\pi n, n\in Z),\ \cos ec\alpha=1/\sin\alpha\ \ (\alpha\ne\pi n, n\in Z).$$

Тригонометрические функции $\sec\alpha$ и $\cos ec\alpha$ используются редко, обычно их сразу выражают через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

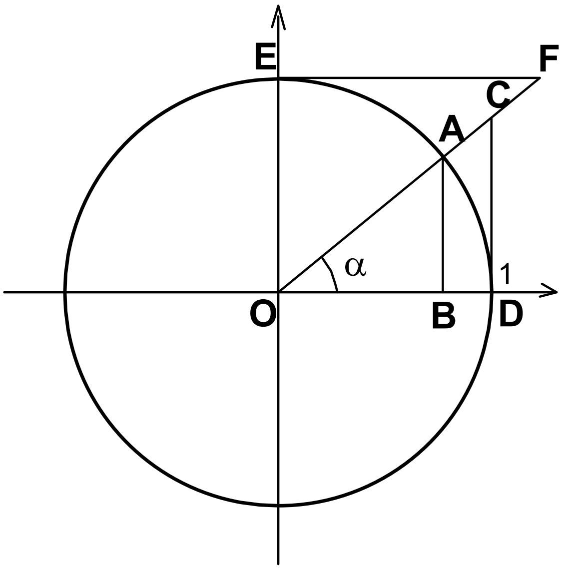
При записи тригонометрических функций чаще используется радианное измерение, причём обозначение радиан опускается, и тригонометрические функции считаются функциями числового аргумента. Например, запись $\sin 2$ означает «синус двух радиан». Обратим внимание читателя также на то, что иногда для краткости изложения будет использоваться формулировка «угол α» в тех случаях, когда правильнее было бы сказать «угол величины α».

Замечание 1 (*геометрическая интерпретация тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике*). В произвольном прямоугольном треугольнике синус острого угла α численно равен отношению длины противолежащего катета к длине гипотенузы: $\sin\alpha=a/c$. Косинус этого угла равен отношению длины прилежащего катета к длине гипотенузы: $\cos\alpha=b/c$.



Тангенс угла α равен отношению длин противолежащего и прилежащего катетов $tg\alpha = a/b$, а котангенс – наоборот, отношению длин прилежащего и противолежащего катетов: $ctg\alpha = b/a$. При этом секанс α равен $\sec\alpha = c/b$, а косенканс, соответственно, $\cos ec\alpha = c/a$.

<u>Замечание 2</u>. Происхождение *названий* тригонометрических функций связано с их геометрическим представлением (для острого угла α) как определённых отрезков по отношению к окружности единичного радиуса. Так, латинское 'tangens' означает *касающийся* (на рисунке ниже $tg\alpha$ изображается отрезком CD касательной к окружности), 'secans' – *секущая* ($\sec\alpha$ изображается отрезком OC секущей к окружности) [5].



Название «синус» (от латинского 'sinus' – пазуха) представляет точный перевод арабского «джайб», являющегося, по-видимому, искажением санскритского слова «джива» (буквально – «тетива лука»), которым индийские математики обозначали синус ($\sin\alpha$ изображается отрезком AB). Приставка «ко-» в названиях «косинус», «котангенс», «косеканс» происходит от сокращения слова 'complementi' (дополнение). Например, «косинус» – от 'complementi sinus' (синус дополнения). Это связано с тем, что $\cos\alpha$, $ctg\alpha$, $\cos ec\alpha$ равны соответственно синусу, тангенсу и секансу аргумента, дополняющего α до $\pi/2$: $\cos\alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$, $ctg\alpha = tg(\pi/2 - \alpha)$, $\cos ec\alpha = \sec(\pi/2 - \alpha)$. На рисунке выше $\cos\alpha$ изображается отрезком OB, $ctg\alpha$ соответствует отрезку EF, $\cos ec\alpha$ равен по величине отрезку OF.

2.2. Основные формулы тригонометрии

Подавляющее большинство задач в тригонометрии сводятся к *преобразованиям тригонометрических выражений* и решению тригонометрических *уравнений* или *систем уравнений*. Поэтому одно из важнейших умений, которое необходимо развить при изучении этой темы, – это умение выполнять достаточно сложные преобразования тригонометрических выражений. Для этого надо всегда иметь под рукой (помнить наизусть или уметь быстро выводить) запас «рабочих» формул и научиться использовать их там, где это необходимо.

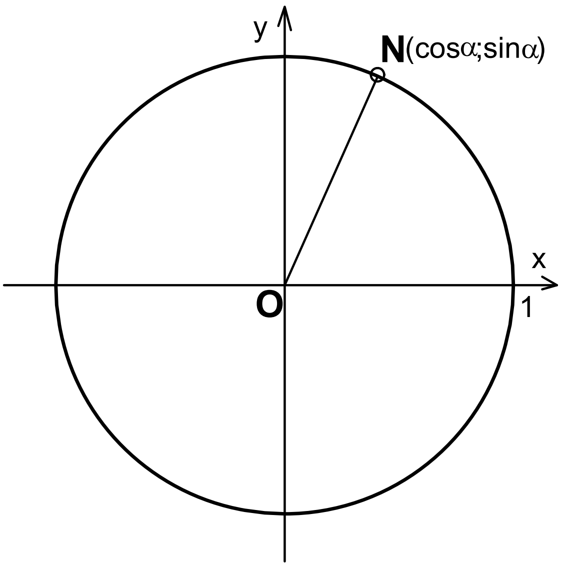
В данном параграфе рассматриваются (с выводом) все *основные тригонометрические формулы* и соотношения ([1,21]). Краткий перечень формул приводится также в Приложении 2.

Основное тригонометрическое тождество и другие соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Теорема 1 (основное тригонометрическое тождество). Для любого действительного числа α справедливо тождество

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Доказательство. Пусть дан некоторый угол величиной α радиан. Найдём на тригонометрической окружности точку N, соответствующую этому углу. Эта точка имеет координаты $N(\cos\alpha;\sin\alpha)$.



Пусть $O(0;0)$ – точка начала координат. По формуле расстояния между двумя точками плоскости N и O, заданными своими координатами, имеем:

$$NO=\sqrt{(\cos\alpha-0)^2+(\sin\alpha-0)^2}\ .$$

С другой стороны, так как точка N принадлежит окружности единичного радиуса, а точка O является её центром, то это расстояние NO равно единице. Приравнивая, получаем:

$$\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1,$$

или $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, что и требовалось доказать.

Верна и более общая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы два числа x и y могли одновременно являться косинусом и синусом одного и того же угла величины α, необходимо и достаточно, чтобы сумма их квадратов была равна единице.

Доказательство. 1) *Необходимость*. Если $x=\cos\alpha$ и $y=\sin\alpha$, то, по основному тригонометрическому тождеству, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, т.е. $x^2+y^2=1$.

2) *Достаточность*. Пусть теперь $x^2+y^2=1$. Данное равенство можно преобразовать к эквивалентному виду: $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=1$. В соответствии с формулой расстояния между двумя точками плоскости, это означает, что расстояние от точки N с координатами $(x;y)$ до точки $O(0;0)$ равно единице, т.е. точка N расположена на единичной окружности с центром в начале ко-

ординат. Радиус-вектор ON этой точки образует с положительным направлением оси абсцисс некоторый угол величины $\alpha \in [0,2\pi)$. Тогда, по определению синуса и косинуса, координаты x и y точки N равны, соответственно, косинусу и синусу α, т.е. нашлось такое α, что $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$, что и требовалось доказать.

Прежде чем перейти к следствиям данной теоремы, рассмотрим несколько примеров на её использование при решении экзаменационных задач.

Пример 1. Могут ли одновременно выполняться равенства

$$\sin\alpha = \frac{1-a^2}{1+a^2} \text{ и } \cos\alpha = \frac{2a}{1+a^2} \text{ ?}$$

Решение. Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно проверить выполнение основного тригонометрического тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{\left(1-a^2\right)^2 + (2a)^2}{\left(1+a^2\right)^2} = \frac{1-2a^2+a^4+4a^2}{\left(1+a^2\right)^2} = 1.$$

Очевидно, оно верно при всех действительных a. Следовательно, данные равенства выполняются одновременно (при всех значениях a).

Пример 2 [ВШБ-2004]. *Найти наибольшее значение выражения* $3x-2y$ *на множестве переменных* x, y*, удовлетворяющих условию* $4x^2+y^2=16$*.*

Решение. Один из способов решения этой задачи – тригонометрическая подстановка. Перепишем равенство из условия в виде $(x/2)^2+(y/4)^2=1$. Поскольку сумма квадратов чисел $x/2$ и $y/4$ равна единице, то, по доказанной теореме, для каждой пары $(x;y)$ найдётся такое действительное α, что одно из этих чисел можно принять за $\cos\alpha$, а другое, соответственно, за $\sin\alpha$. Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 4\sin\alpha. \end{cases}$$

Тогда выражение $3x-2y$ примет тригонометрический вид:

$$3x-2y = 6\cos\alpha - 8\sin\alpha = \sqrt{6^2+8^2}\left(\frac{6}{\sqrt{6^2+8^2}}\cos\alpha - \frac{8}{\sqrt{6^2+8^2}}\sin\alpha\right) =$$

$$= 10\left(\frac{3}{5}\cos\alpha - \frac{4}{5}\sin\alpha\right) = 10(\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha) = 10\sin(\varphi-\alpha),$$

где $\varphi = \arcsin(3/5)$. Так как при таких α величина $\sin(\varphi-\alpha)$ может принимать все значения от –1 до 1, то, соответственно, выражение $3x-2y$ может принимать любое значение из отрезка $[-10{,}10]$. Итак, мы нашли диапазон изменения значений для выражения $3x-2y$, осталось выбрать наибольшее из них, это 10. Оно достигается на числах α, удовлетворяющих равенству $\sin(\varphi-\alpha)=1 \Leftrightarrow \varphi-\alpha=\pi/2+2\pi n$, $n\in Z$; например при $\alpha=\varphi-\pi/2$.

Ответ: $\max(3x-2y)=10$.

Пример 3 [ВМиК-2000,устн.]. *Известно, что* $m^2+n^2=1$, $k^2+l^2=1$ *и* $mk+nl=0$. *Чему равно значение* $mn+kl$?

Решение. Так как $m^2+n^2=1$, то в силу теоремы 2 найдётся α такое, что $m=\sin\alpha$, $n=\cos\alpha$. Аналогично найдётся такое β, что $k=\sin\beta$, $l=\cos\beta$. По условию, $mk+nl=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)=0$. Но тогда $mn+kl=$ $=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=\sin\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}=\sin(\alpha+\beta)\times$ $\times\cos(\alpha-\beta)=0$.

Следствие 1. Для любого действительного числа α *справедливы тождества*

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\text{, т.е. }\cos\alpha=\begin{cases}\sqrt{1-\sin^2\alpha}, & \textit{если}\quad \cos\alpha\ge 0\\ -\sqrt{1-\sin^2\alpha}, & \textit{если}\quad \cos\alpha\le 0,\end{cases}$$

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\text{, т.е. }\sin\alpha=\begin{cases}\sqrt{1-\cos^2\alpha}, & \textit{если}\quad \sin\alpha\ge 0\\ -\sqrt{1-\cos^2\alpha}, & \textit{если}\quad \sin\alpha\le 0.\end{cases}$$

Следствие 2. Для любого действительного числа α *такого, что* $\alpha\ne\pi/2+\pi n$, $n\in Z$, *справедливо тождество*

$$1+tg^2\alpha=1/\cos^2\alpha, \tag{1}$$

а для любого α *такого, что* $\alpha\ne\pi n$, $n\in Z$, *справедливо тождество*

$$1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha. \tag{2}$$

Доказательство. $1+tg^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

$$1+ctg^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Замечание 1. Выразим косинус и синус α через тангенс того же аргумента. Для этого:

а) равенство (1) перепишем в виде $\cos^2\alpha=1/(1+tg^2\alpha)$, откуда получим

$$\cos\alpha=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, & \textit{если}\quad \cos\alpha>0\\ -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, & \textit{если}\quad \cos\alpha<0,\end{cases}$$

б) равенство (1) перепишем в виде $1+tg^2\alpha=1/(1-\sin^2\alpha)$, откуда получаем

$\sin^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$, что равносильно

$$\sin\alpha = \begin{cases} \dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \cos\alpha > 0 \\ -\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \cos\alpha < 0. \end{cases}$$

<u>Пример 4</u>. Вычислить $\cos\alpha$*, если* $tg\alpha = -3$ *и* $\alpha \in (\pi/2, \pi)$.

Решение. Так как $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, то $\cos\alpha < 0$ и, значит, $\cos\alpha = -1\big/\sqrt{1+tg^2\alpha}$ = $=-1\big/\sqrt{10}$. *Ответ:* $\cos\alpha = -1\big/\sqrt{10}$.

<u>Замечание 2</u>. Можно выразить, наоборот, тангенс α через косинус или синус того же аргумента:

а) Так, из (1) вначале получаем $tg^2\alpha = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, откуда уже находим, что

$$tg\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, & \textit{если} \quad \sin\alpha \ge 0; \\ -\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, & \textit{если} \quad \sin\alpha \le 0; \end{cases}$$

б) Аналогично из (1) можно выразить $tg^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$, откуда имеем

$$tg\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \cos\alpha > 0; \\ -\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \cos\alpha < 0. \end{cases}$$

<u>Замечание 3</u>. Выразим теперь синус и косинус α через котангенс того же числа. Для этого:

а) перепишем равенство (2) в виде $\sin^2\alpha = 1\big/\left(1+ctg^2\alpha\right)$, т.е.

$$\sin\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \sin\alpha > 0; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \sin\alpha < 0; \end{cases}$$

б) если же записать (2) в виде $1+ctg^2\alpha = 1\big/\left(1-\cos^2\alpha\right)$, то отсюда $\cos^2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$, что равносильно

$$\cos\alpha = \begin{cases} \dfrac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \sin\alpha > 0; \\ -\dfrac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \sin\alpha < 0. \end{cases}$$

Замечание 4. Наконец, можно выразить котангенс α через его синус или косинус.

а) Так, из (2) получаем $ctg^2\alpha = \dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, откуда имеем

$$ctg\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, & \textit{если} \quad \cos\alpha \ge 0; \\ -\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, & \textit{если} \quad \cos\alpha \le 0; \end{cases}$$

б) также из (2) можно записать $ctg^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$, откуда

$$ctg\alpha = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \sin\alpha > 0; \\ -\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}, & \textit{если} \quad \sin\alpha < 0. \end{cases}$$

Отметим дополнительно, что из определения тангенса и котангенса одного и того же аргумента следует справедливость следующего утверждения: *для любого действительного* α *такого, что* $\alpha \ne \pi n/2, n \in Z$, *справедливы тождества* $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, $tg\alpha = 1/ctg\alpha$, $ctg\alpha = 1/tg\alpha$.

Формулы приведения

Формулы приведения (от слова «приводить») предназначены для того, чтобы выражать значения тригонометрических функций произвольных аргументов через аналогичные функции иных (более удобных для решения задачи) аргументов, например, величин острого угла. Такие формулы часто используются для различных преобразований и упрощений тригонометрических выражений. Все относящиеся к этому типу формулы справедливы при произвольных значениях величины α (естественно, входящих в область определения соответствующих функций).

Разобьём формулы приведения на следующие четыре группы.

I группа

Формулы этой группы позволяют избавиться от рассмотрения аргументов отрицательной величины:

$$\forall \alpha \in R \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,,$$

$$\forall\alpha\in R\,,\alpha\neq\pi/2+\pi n, n\in Z\,,\qquad tg(-\alpha)=-tg(\alpha)\,,$$

$$\forall\alpha\in R\,,\alpha\neq\pi n\,,n\in Z\,,\qquad ctg(-\alpha)=-ctg(\alpha)\,.$$

Эти четыре формулы выражают свойства чётности или нечётности соответствующих функций и доказываются с помощью тригонометрического круга в разделе, посвящённом свойствам функций.

Напомним, например, как доказывается формула $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. Во-первых, при любом действительном α значение косинуса определено одновременно для чисел α и $(-\alpha)$. Во-вторых, отметим, что всякий круг симметричен относительно любой прямой, проходящей через его центр, и равные по величине углы при симметрии переходят в равные углы. Поэтому, в частности, тригонометрический круг симметричен сам себе относительно оси абсцисс, и точки M_1 и M_2, отвечающие углам величины α и $(-\alpha)$, симметричны друг другу относительно этой оси. Следовательно, их абсциссы будут равны, т.е. для любого α выполнено $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, что и доказывает справедливость данной формулы.

II группа

Формулы этой группы позволяют преобразовывать аргументы тригонометрических функций (с сохранением значений этих функций!), увеличивая или уменьшая значения этих аргументов (в зависимости от преследуемой цели) на число, кратное 2π:

$$\forall\alpha\in R\,,n\in Z\qquad \sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha\,,\ \cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$$

(для синуса и косинуса) или, соответственно, кратное π:

$$\forall\alpha\in R\,,\alpha\neq\pi/2+\pi n, n\in Z\,,\quad tg(\alpha+\pi n)=tg\alpha\,,$$

$$\forall\alpha\in R\,,\alpha\neq\pi n\,,n\in Z\,,\qquad ctg(\alpha+\pi n)=ctg\alpha$$

(для тангенса и котангенса). Эти формулы выражают, по сути, свойства периодичности соответствующих функций и также доказываются в разделе о свойствах функций.

Приведём в качестве примера обоснование на тригонометрическом круге формулы $\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$. Заметим, что любому действительному α на тригонометрической окружности соответствует единственная точка. Так как величина центрального угла, опирающегося на дугу, совпадающую со всей окружностью, равна в точности 2π, то аргументам $\alpha\,,\alpha\pm2\pi\,,\alpha\pm4\pi\,,\ldots$, т.е. вида $\alpha+2\pi n$, где $n\in Z$, соответствует на тригонометрической окружности одна и та же точка. И поскольку это одна и та же точка, то косинусы этих углов (они определяются как абсциссы этой точки) будут равны.

III группа

С помощью этих формул можно изменить аргумент тригонометрической функции на величину, равную π, и, тем самым, получить выражение тригонометрических функций через функции угла, величина которого не превышает развёрнутый угол:

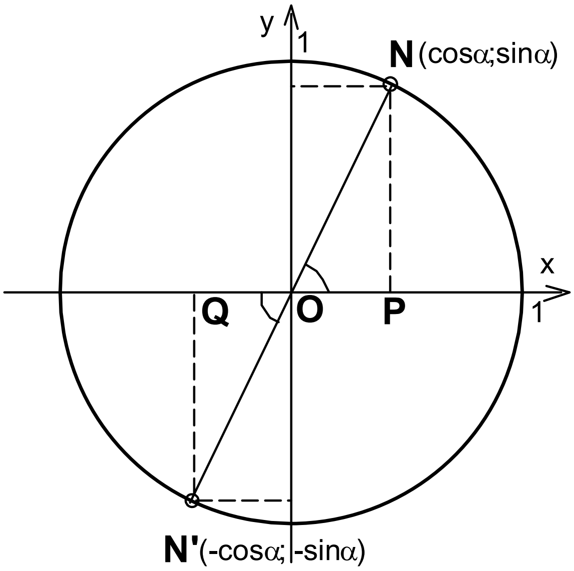
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\,,\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\,,$$

$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha\,,\qquad ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha\,.$$

Доказательство.

А) Докажем первые две формулы (для синуса и косинуса). Зафиксируем произвольное действительное значение α. Пусть этому α соответствует на тригонометрической окружности некоторая точка $N(\cos\alpha;\sin\alpha)$.

Рассмотрим вначале случай, когда точка N не лежит в местах пересечения окружности с осями координат. Тогда величине $\pi+\alpha$ на этой единичной окружности будет соответствовать точка N', по своему положению диаметрально противоположная точке N и поэтому тоже не лежащая на координатных осях. Иными словами, точки N и N' центрально симметричны друг другу относительно начала координат. Если рассмотреть образовавшиеся при этом прямоугольные треугольники ONP и $ON'Q$, где точки P и Q являются основаниями перпендикуляров, проведённых из точек N и N' к оси абсцисс, то они окажутся равными, поскольку $ON = ON' = 1$, углы при вершинах P и Q – прямые, а углы $\angle NOP$ и $\angle N'OQ$ равны как вертикальные.



Из равенства этих треугольников следует, что $OQ = OP$, $PN = QN'$, т.е. абсциссы (и ординаты) точек N и N' равны по абсолютной величине. При этом они противоположны по знаку, т.е. точка N' имеет координаты $(-\cos\alpha;-\sin\alpha)$. Таким образом, доказано, что $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$ и

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha .$$

Справедливость доказываемых формул приведения в случае, если точка N лежит на любой из координатных осей, практически очевидна (рассмотрите этот случай самостоятельно).

Б) Справедливость второй пары формул при допустимых значениях α непосредственно следует из периодичности тангенса и котангенса (с периодом π), но можно также обосновать это, используя только что доказанные формулы для синуса и косинуса:

$$tg(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha ,$$

и аналогично для котангенса.

Если в формулах приведения из I и III групп заменить α на $-\alpha$, то, как следствие, получим ещё несколько известных формул:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\pi+(-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha ,$$

$$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi+(-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha ,$$

$$tg(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha ,$$

$$ctg(\pi-\alpha) = \frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -ctg\alpha .$$

IV группа

Формулы этой группы позволяют получить выражение данной тригонометрической функции через тригонометрическую функцию величины острого угла:

$$\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos\alpha\,, \qquad \cos(\pi/2 \pm \alpha) = \mp\sin\alpha\,,$$

$$tg(\pi/2 \pm \alpha) = \mp ctg\alpha\,, \qquad ctg(\pi/2 \pm \alpha) = \mp tg\alpha\,.$$

А) Докажем формулы приведения $\sin(\pi/2 \pm \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\pi/2 \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$. Вначале покажем, что $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$. Для доказательства воспользуемся формулой косинуса разности двух аргументов (она будет выведена при помощи тригонометрической окружности в следующем пункте): для произвольных чисел α и β справедливо соотношение $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$. Возьмём здесь в качестве β число $\pi/2$: $\cos(\alpha - \pi/2) = \cos\alpha \cdot \cos(\pi/2) + \sin\alpha \cdot \sin(\pi/2)$. Учитывая, что $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, получим $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin\alpha$, или, принимая во внимание чётность косинуса,

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha\,. \tag{1}$$

Докажем теперь, что $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$. Действительно, заменяя в доказанном соотношении (1) α на $(-\alpha)$: $\cos(\pi/2 - (-\alpha)) = \sin(-\alpha)$, и учитывая нечётность синуса, получим ещё одну формулу приведения:

$$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha\,. \tag{2}$$

Далее, подставляя в полученное равенство (2) вместо α сумму $\pi/2 + \alpha$: $\cos(\pi/2 + (\pi/2 + \alpha)) = -\sin(\pi/2 + \alpha)$ и учитывая, что, согласно доказанной ранее формуле приведения, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, из последнего соотношения получаем

$$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha\,. \tag{3}$$

Наконец, подставляя в равенство (3) вместо α число $(-\alpha)$: $\sin(\pi/2 + (-\alpha)) = \cos(-\alpha)$ и принимая во внимание чётность косинуса, получаем формулу приведения

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha\,. \tag{4}$$

Б) Для тангенса и котангенса соответствующие формулы следуют (конечно, при допустимых значениях α) из равенств:

$$tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha\,,\ ctg(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha\,,$$

$$tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha\,, \quad ctg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha\,.$$

Перечисленные четыре группы формул приведения могут быть сформулированы в виде одного общего правила.

Теорема (формулы приведения). Любая из четырёх основных тригонометрических функций аргумента $\pi n/2+\alpha$ $(n\in Z)$ *равна по абсолютной величине той же функции аргумента* α *при* n *– чётном, и переходит в кофункцию этого числа* α *(т.е.* $\sin\to\cos$, $\cos\to\sin$, $tg\to ctg$, $ctg\to tg$*), если* n *– нечётно. При этом если исходная функция аргумента* $\pi n/2+\alpha$ *положительна в случае* $\alpha\in(0;\pi/2)$*, то в результате знак сохраняется, а если отрицательна, то знак меняется на противоположный.*

Следствие. Для любого действительного α *и любого* $n\in Z$ *справедливы тождества:*

$$\sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cdot\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cdot\cos\alpha.$$

Для доказательства достаточно убедиться в справедливости этих тождеств в случаях, когда n – чётно и когда n – нечётно. В частности, из последнего тождества при $\alpha=0$ имеем $\cos\pi n=(-1)^n$.

Пример 1. Доказать тождество

$$\frac{tg(3\pi/2-\alpha)-\cos(\pi-\alpha)\cdot\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(-7\pi/2+\alpha)+\sin(\alpha+1{,}5\pi))^2-1}=\frac{1}{2}ctg^2\alpha.$$

Доказательство. Упростим входящие в левую часть тождества выражения с помощью формул приведения: $tg(3\pi/2-\alpha)=tg(\pi/2-\alpha)=ctg\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, $\sin(3\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-7\pi/2+\alpha)=\cos(\pi/2+\alpha)=$ $=-\sin\alpha$, $\sin(\alpha+1{,}5\pi)=-\cos\alpha$. Подставляя в левую часть тождества, получаем

$$\frac{ctg\alpha-(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}{(-\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1}=\frac{ctg\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{ctg\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)=$$

$=\frac{1}{2}ctg^2\alpha$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислить $tg5^0\cdot tg15^0\cdot tg25^0\cdot\ldots\cdot tg65^0\cdot tg75^0\cdot tg85^0$.

Решение. Сгруппируем первый из сомножителей с последним, второй – с предпоследним и так далее:

$$(tg5^0\cdot tg85^0)(tg15^0\cdot tg75^0)(tg25^0\cdot tg65^0)\cdot(tg35^0\cdot tg55^0)\cdot tg45^0.$$

Рассмотрим, например, $tg5^0\cdot tg85^0=tg5^0\cdot tg(90^0-5^0)=tg5^0\cdot ctg5^0=1$. Таким образом, все сомножители в этом произведении оказались равными единице.

Ответ: значение выражения равно 1.

Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов (формулы сложения)

Теорема 1 (косинус разности двух аргументов). Для произвольных действительных α *и* β *справедливо тождество*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad (1)$$

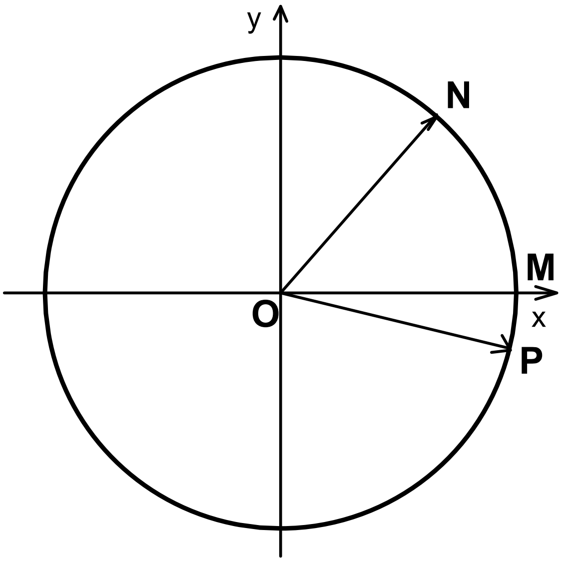
(т.е. косинус разности двух любых действительных аргументов равен произведению косинуса уменьшаемого аргумента на косинус вычитаемого аргумента плюс произведение синуса уменьшаемого аргумента на синус вычитаемого аргумента).

Доказательство. Пусть на плоскости даны прямоугольная система координат Oxy и тригонометрическая окружность с центром в начале координат. Началу отсчёта соответствует неподвижный единичный радиус OM, где $M(1;0)$. Пусть аргумент α задаётся подвижным единичным радиусом, конец которого совпадает с точкой $N(\cos\alpha;\sin\alpha)$ единичной окружности; аргумент β - подвижным единичным радиусом с концом в точке $P(\cos\beta;\sin\beta)$ единичной окружности.

Возможны два случая расположения точек N и P: они или совпадают, или не совпадают. Доказательство проведём отдельно в каждом из этих случаев.

1) Пусть точки N и P совпадают. В этом случае найдётся целое число n такое, что аргументы α и β связаны между собой соотношением $\alpha=\beta+2\pi n$. Равенство (1) при этом примет вид:

$$\cos 2\pi n=\cos(\beta+2\pi n)\cos\beta+\sin(\beta+2\pi n)\sin\beta .$$

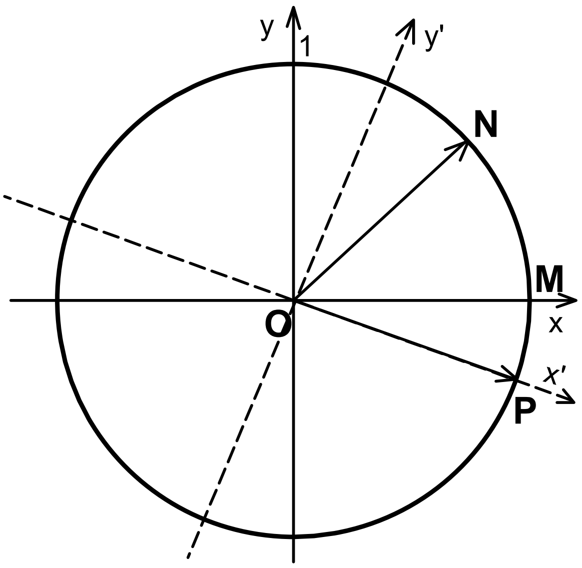


Поскольку стоящий в левой части равенства $\cos 2\pi n$ равен 1 и, в силу периодичности с периодом 2π функций синуса и косинуса, а также основного тригонометрического тождества, выражение в правой части также равно 1, то справедливость тождества в этом случае доказана.

2) Пусть теперь точки N и P не совпадают. Тогда $\alpha\neq\beta+2\pi n$ ни для какого целого n. Вычислим двумя способами длину отрезка PN.

С одной стороны, в данной системе координат координаты точек N и P известны, поэтому по теореме о длине отрезка с заданными координатами его концов для квадрата длины отрезка PN имеем:

$$PN^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 . \qquad (2)$$



С другой стороны, введём новую прямоугольную систему координат $Ox'y'$ так, чтобы масштабная единица совпадала с уже выбранной ранее единицей длины; положительное направление оси абсцисс Ox' совпадало бы с продолжением радиуса OP, а положительное направление оси ординат Oy' образовывало бы положительный угол величины $\pi/2$ с положительным направлением оси Ox'.

В новой системе координат точка P будет иметь координаты $P(1;0)$. Примем теперь радиус OP за неподвижный единичный радиус, т.е. за новое начало отсчёта значений аргументов. Система координат $Ox'y'$ вводится так, чтобы новое начало отсчёта (радиус OP) было смещено на угол величины β относительно предыдущего начала отсчёта (единичного неподвижного радиуса OM). Тогда относительно нового начала отсчёта величин углов подвижный единичный радиус ON будет задавать угол величины $(\alpha-\beta)$, и в системе координат $Ox'y'$ точка N будет иметь координаты $N(\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta))$. По формуле расстояния между двумя точками на плоскости находим квадрат длины отрезка PN:

$$PN^2=(1-\cos(\alpha-\beta))^2+(0-\sin(\alpha-\beta))^2. \qquad (3)$$

Так как квадрат расстояния между двумя фиксированными точками N и P, найденный в двух разных прямоугольных системах координат с одной и той же единицей длины, есть одно и то же число, то, приравнивая, получаем:

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2.$$

Отсюда, раскрывая скобки и применяя основное тригонометрическое тождество, имеем:

$$-2\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=-2\cdot\cos(\alpha-\beta),$$

т.е. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько следствий из доказанной теоремы.

Теорема 2 (косинус суммы двух аргументов). Для произвольных действительных α и β справедливо тождество

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Доказательство. Представим сумму $\alpha+\beta$ в виде разности $\alpha-(-\beta)$ и воспользуемся результатом *теоремы 1*, а также свойствами чётности косинуса и нечётности синуса:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теорема 3 (синус суммы двух аргументов). Для произвольных действительных α и β справедливо тождество

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Доказательство. Пользуясь формулами приведения и доказанной формулой косинуса разности, получим

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\pi/2-(\alpha+\beta))=\cos((\pi/2-\alpha)-\beta)=\cos(\pi/2-\alpha)\cdot\cos\beta+$$
$$+\sin(\pi/2-\alpha)\cdot\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теорема 4 (синус разности двух аргументов). Для произвольных действительных α и β справедливо тождество:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Доказательство. Представим разность $\alpha-\beta$ в виде суммы $\alpha+(-\beta)$ и применим формулу синуса суммы:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Теорема 5 (тангенс суммы двух аргументов). Для произвольных действительных α и β таких, что $\alpha\neq\pi/2+\pi n$, $\beta\neq\pi/2+\pi k$, $\alpha+\beta\neq\pi/2+\pi m$, $n,k,m\in Z$, справедливо тождество $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$.

Доказательство. Воспользуемся формулами синуса и косинуса суммы, а также определением тангенса, и для произвольных допустимых значений α и β запишем

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=$$

(поделим одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha\cdot\cos\beta$; обратим внимание, что в этот момент сужается область допустимых значений α и β в рассматриваемом выражении)

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 6 (тангенс разности двух аргументов). Для произвольных действительных α и β таких, что $\alpha\neq\pi/2+\pi n$, $\beta\neq\pi/2+\pi k$, $\alpha-\beta\neq\pi/2+\pi m$, $n,k,m\in Z$, справедливо тождество $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$.

Теорема 7 (котангенс суммы и разности двух аргументов). Для любых двух действительных α и β таких, что $\alpha \neq \pi n$, $\beta \neq \pi k$, $n, k \in Z$, справедливы тождества

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta} \quad \text{при} \quad \alpha+\beta \neq \pi m,$$

$$ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha-\beta \neq \pi m, \ m \in Z.$$

Замечание 1. Правые и левые части четырёх последних тождеств имеют *различные* области определения, поэтому при их использовании без учёта ОДЗ возможны потеря (при замене их левых частей правыми) или, наоборот, приобретение (при замене их правых частей левыми) корней.

Замечание 2. Строго говоря, в общем виде (при *любых* значениях аргументов) формула тангенса суммы (разности) выглядит следующим образом [2]:

$$tg(\alpha \pm \beta) = \begin{cases} \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}, & \text{если} \quad \alpha \pm \beta \neq \pi/2 + \pi n, \alpha \neq \pi/2 + \pi k, \beta \neq \pi/2 + \pi m; \\ \mp ctg\beta, & \text{если} \quad \alpha = \pi/2 + \pi k, \beta \neq \pi m; \\ -ctg\alpha, & \text{если} \quad \beta = \pi/2 + \pi m, \alpha \neq \pi k; \\ \text{в частности}, \ 0, & \text{если} \quad \alpha = \pi/2 + \pi k, \beta = \pi/2 + \pi m; \\ \text{не существует}, & \text{если} \quad \alpha \pm \beta = \pi/2 + \pi n, \end{cases}$$

где $n, k, m \in Z$. Аналогичную общую формулу можно было бы выписать и на случай котангенса суммы (разности).

Пример 1 [ВМиК-1996,устн.]. *Доказать, что если* $\cos(\alpha+\beta) = 0$, *то* $\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что условие $\cos(\alpha+\beta) = 0$ можно записать в виде $\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta$. Далее,

$$\sin(\alpha+2\beta) = \sin((\alpha+\beta)+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta + \cos(\alpha+\beta)\sin\beta =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\beta = \sin\alpha\cos^2\beta + \sin\beta(\cos\alpha\cos\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos^2\beta + \sin\beta(\sin\alpha\sin\beta) = \sin\alpha(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = \sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2 [ВМиК-2000,устн.]. *Доказать тождество*

$$tg\alpha + tg2\alpha - tg3\alpha = -tg\alpha \cdot tg2\alpha \cdot tg3\alpha.$$

Доказательство. При допустимых значениях α имеем:

$$tg\alpha + tg2\alpha - tg3\alpha = tg\alpha + tg2\alpha - \frac{tg\alpha + tg2\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg2\alpha} = (tg\alpha + tg2\alpha) \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - tg\alpha \cdot tg2\alpha}\right) =$$

$$=-(tg\alpha+tg2\alpha)\cdot\frac{tg\alpha\cdot tg2\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg2\alpha}=-\frac{tg\alpha+tg2\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg2\alpha}\cdot tg\alpha\cdot tg2\alpha=-tg3\alpha\cdot tg\alpha\cdot tg2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3 [ВМиК-2003,устн.]. *Доказать, что если* $\alpha+\beta+\gamma=\pi$*, то*

$$ctg\alpha\cdot ctg\beta+ctg\alpha\cdot ctg\gamma+ctg\beta\cdot ctg\gamma=1.$$

Доказательство. Так как, по условию, $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, то имеем:

$$ctg\gamma=ctg(\pi-(\alpha+\beta))=-ctg(\alpha+\beta)=\frac{1-ctg\alpha\cdot ctg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}.$$

Умножая равенство $ctg\gamma=\dfrac{1-ctg\alpha\cdot ctg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$ на знаменатель $ctg\alpha+ctg\beta$, после преобразований получим искомое тождество. Аналогично решается задача: «Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$, то справедливы тождества:

$tg\alpha\cdot tg\beta+tg\alpha\cdot tg\gamma+tg\beta\cdot tg\gamma=1$, $ctg\alpha+ctg\beta+ctg\gamma=ctg\alpha\cdot ctg\beta\cdot ctg\gamma$ ».

Пример 4 [ВМиК-2004,устн.]. *Сравнить числа:*

$$tg5^0\cdot tg20^0+tg5^0\cdot tg65^0+tg20^0\cdot tg65^0 \text{ и } tg50^0.$$

Решение. Поскольку $5^0+20^0+65^0=90^0$, то, применяя результат упомянутой выше задачи, получаем, что первое из чисел равно 1: $tg5^0\cdot tg20^0+tg5^0\cdot tg65^0+tg20^0\cdot tg65^0=1$. Представляя затем единицу в виде $1=tg45^0$ и учитывая монотонное возрастание тангенса на интервале $(0^0,90^0)$, получаем окончательно: $tg45^0<tg50^0$. *Ответ:* первое число меньше.

Пример 5. Доказать, что если α,β,γ *– величины острых углов и* $ctg\alpha\cdot ctg\beta+ctg\alpha\cdot ctg\gamma+ctg\beta\cdot ctg\gamma=1$*, то* $\alpha+\beta+\gamma=\pi$*.*

Доказательство. Выразим из данного в условии задачи тождества, например, $ctg\alpha$:

$$ctg\alpha=\frac{1-ctg\beta\cdot ctg\gamma}{ctg\beta+ctg\gamma}=-ctg(\beta+\gamma)=ctg(\pi-(\beta+\gamma)),$$

следовательно, $\alpha=\pi-\beta-\gamma+\pi n$, $n\in Z$. Итак, имеем $\alpha+\beta+\gamma=\pi(n+1)$. Поскольку, по условию, $0<\alpha<\pi/2$, $0<\beta<\pi/2$, $0<\gamma<\pi/2$, то сумма этих углов заключена в пределах $0<\alpha+\beta+\gamma<3\pi/2$. Отсюда получаем, что $0<\pi(n+1)<$ $<3\pi/2\Leftrightarrow n=0$. Таким образом, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, что и требовалось доказать.

Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов. Формулы понижения степени

Теорема 1 (синус и косинус двойного аргумента). Для любого действительного α *справедливы тождества*

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Доказательство.

1) Положим в формуле для синуса суммы двух аргументов $\beta = \alpha$:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \text{ ;}$$

2) положим в формуле для косинуса суммы двух аргументов $\beta = \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \text{ .}$$

Следствие 1. Косинус двойного аргумента можно выразить только через синус одинарного аргумента или только через его косинус:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (2)$$

Следствие 2 (формулы понижения для второй степени синуса и косинуса). Из формул (1) и (2) получаем

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Теорема 2 (тангенс и котангенс двойного аргумента).

1) Для любого действительного α такого, что $\alpha \neq \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, и $\alpha \neq \pi/4 + \pi k/2$, $k \in Z$, справедливо тождество $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$;

2) Для любого действительного α такого, что $\alpha \neq \pi n/2$, $n \in Z$, справедливо тождество $ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$.

Доказательство.

1) Положим в формуле для тангенса суммы двух аргументов $\beta = \alpha$:

$$tg 2\alpha = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha};$$

2) положим в формуле для котангенса суммы двух аргументов $\beta = \alpha$:

$$ctg 2\alpha = ctg(\alpha + \alpha) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\alpha - 1}{ctg\alpha + ctg\alpha} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Замечание. Обращаем ещё раз внимание на то, что левые и правые части в формулах тангенса и котангенса двойного аргумента имеют *различные* области определения, и этот факт необходимо учитывать при использовании этих формул в решении задач, иначе возможны как потеря, так и приобретение корней.

Теорема 3 (синус и косинус тройного аргумента). Для любого действительного α справедливы тождества

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad (3)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \qquad (4)$$

Доказательство.

1) Положим в формуле для синуса суммы двух аргументов $\beta = 2\alpha$:

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot \left(1 - 2\sin^2\alpha\right) +$$

$$+ \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha \cdot \left(1 - \sin^2\alpha\right) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

2) положим в формуле для косинуса суммы двух аргументов $\beta = 2\alpha$:

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha = \cos\alpha \cdot \left(2\cos^2\alpha - 1\right) -$$

$$-\sin\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha \cdot \left(1 - \cos^2\alpha\right) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

<u>Следствие</u> *(формулы понижения для третьей степени синуса и косинуса).* Из формул (3) и (4) получаем

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}, \quad \cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

<u>Пример 1</u>*. Вычислить без калькулятора и таблиц* $\sin 18^0$.

Решение. Так как по формулам приведения легко устанавливается справедливость числового равенства $\sin 36^0 = \cos 54^0$, то, обозначая $18^0 = x$, получаем: $\sin 2x = \cos 3x$. Применяя формулы синуса двойного аргумента и косинуса тройного аргумента, преобразуем данное равенство к виду

$$2\sin x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

и затем разложим на множители

$$\cos x\left(2\sin x - 4\cos^2 x + 3\right) = 0.$$

Поскольку $\cos x = \cos 18^0 \neq 0$, то, сократив на $\cos x$ и заменив $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, придём к квадратному уравнению относительно $\sin x$, решив которое, найдём $\sin x = \left(-1 \pm \sqrt{5}\right)/4$. С учётом положительности $\sin 18^0$, определяем, что $\sin 18^0 = \left(\sqrt{5} - 1\right)/4$.

<u>Теорема 4</u> *(тангенс и котангенс тройного аргумента).*

1) При любых действительных α *таких, что* $\alpha \neq \pi/6 + \pi n/3, n \in Z$*, справедливо тождество* $tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$*;*

2) при любых действительных α *таких, что* $\alpha \neq \pi n/3, n \in Z$*, справедливо тождество* $ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$.

Доказательство. 1) $tg3\alpha = tg(2\alpha + \alpha) = \dfrac{tg2\alpha + tg\alpha}{1 - tg2\alpha \cdot tg\alpha} =$

$$= \frac{\dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} + tg\alpha}{1 - \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha + tg\alpha \cdot \left(1 - tg^2\alpha\right)}{1 - tg^2\alpha - 2tg^2\alpha} = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha};$$

2) $ctg3\alpha = ctg(2\alpha+\alpha) = \dfrac{ctg2\alpha \cdot ctg\alpha - 1}{ctg2\alpha + ctg\alpha} =$

$$= \frac{\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}\cdot ctg\alpha - 1}{\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}+ctg\alpha} = \frac{(ctg^2\alpha-1)ctg\alpha - 2ctg\alpha}{ctg^2\alpha-1+2ctg^2\alpha} = \frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}.$$

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} tgx = 1/2 \\ tg3x = 11/2. \end{cases}$

Решение. Зная, что $tgx = 1/2$, вычислим $tg3x$: $tg3x = \dfrac{3tgx - tg^3x}{1-3tg^2x} = \dfrac{3/2-(1/2)^3}{1-3\cdot(1/2)^2} =$ $=11/2$. Полученный результат согласуется со вторым уравнением системы и означает, что второе уравнение является следствием первого уравнения. Но тогда решениями системы будут решения первого из уравнений.

Ответ: $x = arctg(1/2)+\pi n, n\in Z$.

Замечание. С помощью формул сложения можно, последовательно их применяя, вычислить любую тригонометрическую функцию аргумента, *кратного* α , т.е. $n\cdot\alpha$, где $n\in N$.

Пример 3. Доказать формулы понижения для четвёртой степени синуса и косинуса:

$$\sin^4 x = \frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{8};\quad \cos^4 x = \frac{3+4\cos 2x+\cos 4x}{8}.$$

Доказательство. Докажем, например, вторую из формул (первая доказывается полностью аналогично). Имеем, $8\cos^4 x = 2(2\cos^2 x)^2 = 2(1+\cos 2x)^2 =$ $= 2+4\cos 2x+2\cos^2 2x = 2+4\cos 2x+(1+\cos 4x) = 3+4\cos 2x+\cos 4x$.

Тригонометрические функции половинного аргумента

Теорема 1 (синус и косинус половинного аргумента через косинус целого). Для любого действительного α *справедливы тождества*

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Доказательство. Эти формулы непосредственно следуют из формул понижения степени.

Пример 1 [ВШЭ, тесты]. *Вычислить* $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, *если* $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ *и* $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Решение. $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+1/3}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Далее, поскольку $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, то $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ и, следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2}<0$. Итак, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

<u>Теорема 2</u> (тангенс и котангенс половинного аргумента через косинус целого).

1) Для любого действительного α такого, что $\alpha\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$, справедливо тождество $\left|tg\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

2) для любого действительного α такого, что $\alpha\neq 2\pi k$, $k\in Z$, справедливо тождество $\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Доказательство. Для доказательства этих формул поделим формулы (1) почленно друг на друга (при допущенных ограничениях на α).

В правых частях приведённых в *теореме 2* формул содержатся радикалы в виде квадратных корней, что, вообще говоря, делает их использование менее удобным. Однако тангенс и котангенс половинного аргумента можно представить и с помощью *рационального* выражения.

<u>Теорема 3</u> (тангенс половинного аргумента через синус и косинус целого).

1) Для любого действительного α такого, что $\alpha\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$, справедливо тождество $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

2) для любого действительного α такого, что $\alpha\neq\pi n$, $n\in Z$, справедливо тождество $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Доказательство. 1) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

2) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Теорема доказана.

<u>Пример 2</u> [ВМиК-2002,устн.]. *Вычислить без помощи таблиц и калькулятора $tg142^0 30'$.*

Решение. $tg142^0 30'=\frac{1-\cos 285^0}{\sin 285^0}=\frac{1-\cos\left(270^0+15^0\right)}{\sin\left(270^0+15^0\right)}=\frac{1-\sin 15^0}{-\cos 15^0}=$

$=\frac{1-\sin\left(45^0-30^0\right)}{-\cos\left(45^0-30^0\right)}=\frac{1-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4}{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{4}\right)/4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-4\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}=$

$$=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

Теорема 4 (котангенс половинного аргумента через синус и косинус целого).

1) Для любого действительного α *такого, что* $\alpha \neq \pi n, n \in Z$, *справедливо тождество* $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

2) для любого действительного α *такого, что* $\alpha \neq 2\pi n$, $n \in Z$, *справедливо тождество* $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы 3. Однако будет проще воспользоваться доказанными в этой теореме формулами и тем фактом, что $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{tg(\alpha/2)}$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс и котангенс половинного аргумента (формулы универсальной подстановки)

Теорема 1 (синус и косинус одинарного аргумента через тангенс половинного аргумента). Для любого действительного α *такого, что* $\alpha \neq \pi+2\pi n$, $n \in Z$, *справедливы тождества:*

$$\sin\alpha=\frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}; \qquad \cos\alpha=\frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}. \tag{1}$$

Доказательство. 1) $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)}$. Поделим одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos^2(\alpha/2)\neq 0$ (в этот момент сужается область допустимых значений α), и получим выражение $\frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}$;

2) Действуя аналогично рассмотренному выше случаю, вначале перейдём к половинному аргументу $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)}$, затем поделим одновременно числитель и знаменатель дроби на $\cos^2(\alpha/2)\neq 0$ и получим в результате $\frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}$.

Пример 1. Вычислить $\sin 2\alpha$, *если* $\cos 2\alpha \geq -1/3$, $tg\alpha \leq -\sqrt{2}$.

Решение. Обозначим $tg\alpha=t$ и, используя формулы универсальной подстановки, переформулируем задачу: «Найти $\frac{2t}{1+t^2}$, если $\begin{cases} \frac{1-t^2}{1+t^2} \ge -\frac{1}{3} \\ t \le -\sqrt{2} \end{cases}$». Решая данную алгебраическую систему неравенств, находим $t=-\sqrt{2}$. Тогда $\sin 2\alpha$ = $=\frac{2t}{1+t^2}$ = $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

<u>Теорема 2</u> *(тангенс и котангенс одинарного аргумента через тангенс половинного аргумента).*

1) Для любого действительного α *такого, что* $\alpha \ne \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, *справедливо тождество* $tg\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1-tg^2(\alpha/2)}$;

2) для любого действительного α *такого, что* $\alpha \ne \pi n$, $n \in Z$, *справедливо тождество* $ctg\alpha = \frac{1-tg^2(\alpha/2)}{2tg(\alpha/2)}$.

Доказательство. Для доказательства этих формул достаточно поделить формулы (1) почленно друг на друга (при допущенных ограничениях на α).

<u>Замечание</u>. Можно сформулировать и доказать аналогичные теоремы для формул, выражающих четыре основные тригонометрических функции через *котангенс половинного аргумента*:

$$\sin\alpha = \frac{2ctg(\alpha/2)}{1+ctg^2(\alpha/2)},\ \cos\alpha = \frac{ctg^2(\alpha/2)-1}{ctg^2(\alpha/2)+1}\ (\alpha \ne 2\pi n, n \in Z),$$

$$tg\alpha = \frac{2ctg(\alpha/2)}{ctg^2(\alpha/2)-1}\ (\alpha \ne 2\pi n, n \in Z, \alpha \ne \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in Z),\ ctg\alpha = \frac{ctg^2(\alpha/2)-1}{2ctg(\alpha/2)}$$

$$(\alpha \ne \pi n, n \in Z).$$

<u>Пример 2</u> [ВМиК-2003,устн.]. *Вычислить* $\sin(2arcctg2)+\cos(2arcctg3)$.

Решение. Обозначим $arcctg2=\alpha$, $arcctg3=\beta$. Тогда, очевидно, $ctg\alpha=2$, $ctg\beta=3$. Имеем $\sin 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{2ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}+\frac{ctg^2\beta-1}{ctg^2\beta+1} = \frac{2\cdot 2}{1+2^2}+\frac{3^2-1}{3^2+1} = \frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$.

Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму (разность)

<u>Теорема</u>. *Для произвольных действительных* α *и* β *справедливы тождества:*

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = (\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))/2,$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = (\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))/2,$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = (\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))/2.$$

Доказательство.

1) Для преобразования произведения синусов воспользуемся формулами косинуса суммы и разности двух аргументов. Выпишем их, а затем вычтем почленно друг из друга:

$$\begin{array}{l} - \; \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ \underline{\;\;\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\ \;\;\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\sin\beta, \end{array}$$

после деления на два получим искомую формулу.

2) Чтобы преобразовать произведение косинусов, воспользуемся теми же формулами, но, в отличие от предыдущего случая, почленно сложим их друг с другом:

$$\begin{array}{l} + \; \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ \underline{\;\;\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \\ \;\;\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta. \end{array}$$

После деления на два получим искомую формулу.

3) Наконец, для вывода формулы преобразования произведения синуса и косинуса воспользуемся формулами синуса суммы и разности. Сложив их почленно, получаем

$$\begin{array}{l} + \; \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \underline{\;\;\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} \\ \;\;\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta. \end{array}$$

Поделив на два, получим искомую формулу. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров задач, при решении которых используются эти формулы.

<u>*Пример 1*</u> [Геолог.-2000,устн.]. *Вычислить произведение*

$$\sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 80^0.$$

Решение. $\sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 80^0 = \left(\sin 20^0\cdot\sin 40^0\right)\cdot\sin 80^0 =$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos 20^0-\cos 60^0\right)\cdot\sin 80^0=\frac{1}{2}\left(\cos 20^0-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 10^0=\frac{1}{2}\left(\cos 20^0\cdot\cos 10^0-\frac{\cos 10^0}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 30^0+\cos 10^0}{2}-\frac{\cos 10^0}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

<u>*Пример 2*</u>. *Вычислить произведение* $tg20^0\cdot tg40^0\cdot tg80^0$.

Решение. $tg20^0\cdot tg40^0\cdot tg80^0=\dfrac{\sin 20^0\cdot\sin 40^0\cdot\sin 80^0}{\cos 20^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 80^0}=$

$$=\frac{\sin 20^0\cdot\left(2\sin 20^0\cos 20^0\right)\cdot\left(2\sin 40^0\cos 40^0\right)}{\cos 20^0\cdot\cos 40^0\cdot\cos 80^0}=\frac{2\sin 20^0\left(2\sin 20^0\sin 40^0\right)}{\cos 80^0}=$$

$$= \frac{2\sin 20^0\left(\cos 20^0 - \cos 60^0\right)}{\cos 80^0} = \frac{2\sin 20^0 \cos 20^0 - \sin 20^0}{\cos 80^0} = \frac{\sin 40^0 - \sin 20^0}{\cos\left(90^0 - 10^0\right)} =$$

$$= \frac{2\sin 10^0 \cos 30^0}{\sin 10^0} = \sqrt{3}.$$

Пример 3 [МГ открытый университет]. *Доказать, что если* α, β, γ *– величины углов треугольника, то справедливо неравенство*

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Доказательство. $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} =$ $= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} =$ (так как $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, то $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$ $= \cos\frac{\pi-\gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$) $= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$. Если рассмотреть теперь это выражение как квадратичную функцию относительно $t = \sin\frac{\gamma}{2} > 0$ $f(t) = \frac{t}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - t\right)$, то её максимум достигается в вершине $t_0 = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и равен $f(t_0) = \frac{1}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \le \frac{1}{8}$. Таким образом, неравенство доказано.

Пример 4 [Мехмат-2000,май].

Найти $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma)}$, *если* $\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{4}{9}$.

Решение. Преобразуем общий числитель дробей:

$$\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma) = (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma))/2.$$

Преобразуем оба знаменателя:

$$\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma) = (\cos(\alpha+\beta+2\gamma) + \cos(\alpha+\beta))/2,$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))/2.$$

Обозначим $a = \cos(\alpha-\beta)$, $b = \cos(\alpha+\beta+2\gamma)$, $c = \cos(\alpha+\beta)$. Тогда задачу можно сформулировать в виде: «Найти величину $B = \frac{a-b}{b+c}$, если $A = \frac{a-b}{a+c} = \frac{4}{9}$».

Имеем: $\frac{A}{B} = \frac{b+c}{a+c} = \frac{(b-a)+(a+c)}{a+c} = -A+1$, следовательно, $B = \frac{A}{1-A} = \frac{4}{5}$.

Рассмотрим полезный *приём*, используемый в тех задачах, где имеется произведение косинусов, аргументы которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным 2:

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^n\alpha\right) \ (\alpha \ne \pi n, n \in Z).$$

Для упрощения этого произведения следует одновременно умножить и разделить его на $2^{n+1}\sin\alpha$, а затем $n+1$ раз воспользоваться в числителе получившейся дроби формулой синуса двойного аргумента. В итоге получаем следующую формулу:

$$\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos\left(2^n\alpha\right)=\frac{\sin\left(2^{n+1}\alpha\right)}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

<u>Пример 5</u> [МГТУ гражданской авиации]. *Доказать тождество*

$$\cos 10^0\cdot\cos 20^0\cdot\cos 30^0\cdot\cos 40^0=\frac{\sqrt{3}}{16}ctg10^0.$$

Доказательство.

$$\cos 10^0\cdot\cos 20^0\cdot\cos 40^0=\frac{2\left(2\left(2\sin 10^0\cos 10^0\right)\cos 20^0\right)\cos 40^0}{8\sin 10^0}=\frac{\sin 80^0}{8\sin 10^0}=\frac{\cos 10^0}{8\sin 10^0}=$$

$=\frac{ctg10^0}{8}$. Учитывая, что $\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем окончательно тождество доказанным.

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

<u>Теорема 1</u> *(сумма и разность синусов; сумма и разность косинусов). Для произвольных действительных* α *и* β *справедливы тождества*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Доказательство.

1) Чтобы вывести формулу суммы синусов, сложим почленно два равенства:

$$\begin{array}{l} +\ \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \\ \underline{\ \ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y} \\ \ \ \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \end{array}\qquad (1)$$

Обозначим $\begin{cases}\alpha=x+y\\ \beta=x-y\end{cases}$ и выразим отсюда x,y через α,β: $\begin{cases}x=(\alpha+\beta)/2\\ y=(\alpha-\beta)/2.\end{cases}$ Тогда, подставив эти выражения в равенство (1), окончательно получим $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2) Для вывода формулы разности синусов необходимо не сложить, а вычесть почленно те же два исходных равенства; далее действовать аналогично.

3) Выведем формулу суммы косинусов. Для этого сложим друг с другом два равенства:

$$+\begin{array}{l}\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\ \underline{\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y}\end{array}$$

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y\,. \qquad (2)$$

Сделаем подстановку $\begin{cases}\alpha=x+y\\ \beta=x-y\end{cases}$. Отсюда имеем $\begin{cases}x=(\alpha+\beta)/2\\ y=(\alpha-\beta)/2\end{cases}$, и, подставляя эти выражения вместо x и y в (2), получим необходимую формулу $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4) Для вывода формулы разности косинусов требуется не сложить, как в предыдущем случае, а вычесть почленно два исходных равенства; далее действовать по аналогии. Теорема доказана.

Пример 1 [ВМиК-1996,устн.] *Доказать, что при условии* $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ *выполняются тождества*

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}, \qquad (3)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

Доказательство. Докажем первое из тождеств:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=(\cos\alpha+\cos\beta)+(\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma))=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma\right)\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\gamma\right)\right)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=4\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Второе тождество доказывается аналогично.

Пример 2 [ВМиК-2002,устн.] *Вычислить* $\frac{20\sin 80^0\cdot\sin 65^0\cdot\sin 35^0}{\sin 20^0+\sin 50^0+\sin 110^0}$.

Решение. Поскольку $20^0+50^0+110^0=180^0$, то для решения данной задачи можно воспользоваться тождеством (4) и сразу получить ответ. Рассмотрим иной способ решения (на случай, если это тождество абитуриенту не известно):

$$\sin 20^0+(\sin 50^0+\sin 110^0)=\sin 20^0+2\sin 80^0\cdot\cos 30^0=\sin 20^0+2\cos 10^0\cdot\sin 60^0=$$

$$=2\cos 10^0\cdot(\sin 10^0+\sin 60^0)=2\sin 80^0\cdot(2\sin 35^0\cdot\cos 25^0)=4\sin 80^0\cdot\sin 35^0\cdot\sin 65^0.$$

Таким образом, значение выражения равно 5.

Пример 3 [Финансовая академия при правительстве РФ-2001]. *Найти* $\cos 6\alpha - \cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha$*, если* $\sin 3\alpha + \sin\alpha = 1$.

Решение. Заметим, что $\sin 3\alpha + \sin\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha = 1$. Тогда имеем:

$$\cos 6\alpha - \cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha = (\cos 6\alpha - \cos 2\alpha) + 2\cos 4\alpha = -2\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha +$$

$$+ 2(1 - 2\sin^2 2\alpha) = -4\sin^2 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2 - 4\sin^2 2\alpha = -4\sin^2 2\alpha \cdot (\cos 2\alpha + 1) + 2 =$$

$$= -4\sin^2 2\alpha \cdot (2\cos^2\alpha) + 2 = -2(2\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha)^2 + 2 = -2 + 2 = 0.$$

Теорема 2 (сумма и разность тангенсов; сумма и разность котангенсов).

1) Для произвольных действительных α *и* β *таких, что* $\alpha \neq \pi/2 + \pi n$, $\beta \neq \pi/2 + \pi k$*, где* $n, k \in Z$*, справедливы тождества*

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}, \quad tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}.$$

2) Для произвольных действительных α *и* β *таких, что* $\alpha \neq \pi n$, $\beta \neq \pi k$*, где* $n, k \in Z$*, справедливы тождества*

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}, \quad ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Доказательство.

1) Используя определение тангенса и формулу синуса суммы, имеем:

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

2) Аналогично предыдущему случаю.

3) Используя определение котангенса и формулу синуса суммы, имеем:

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

4) Аналогично предыдущему случаю. Теорема доказана.

Так же доказываются две дополнительные формулы

$$tg\alpha + ctg\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad tg\alpha - ctg\beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \beta \neq \pi k; n, k \in Z).$$

Приведём полезное *правило*, используемое в тех задачах, где имеется сумма синусов или косинусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию. Решение такого рода задач может существенно упроститься, если умножить и разделить эту сумму на $2\sin\frac{d}{2}$, где d – разность арифметической прогрессии, а затем воспользоваться в числителе получившейся дроби формулами преобразования произведений синусов и косинусов в суммы. Упрощение состоит в том, что большая часть образовавшихся при этом в числителе слагаемых взаимно уничтожится.

Пример 4. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

Решение. Так как числа $\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{6\pi}{7}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=\frac{2\pi}{7}$, то домножим и разделим данную сумму на число $2\sin\frac{\pi}{7}$:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)\cdot 2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{\left(-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}\right)+\left(-\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\pi\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Вычислить сумму: 1) $S=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha$;

2) $S=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos(n\alpha)$ $(n\in N)$.

Решение. 1) Если $\alpha=2\pi n$, то $S=0$. Если $\alpha\neq 2\pi n$, то домножим и разделим эту сумму на $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$S=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin((n-1)\alpha)+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin(n\alpha)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)+\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)+\ldots+\left(\cos\frac{(2n-3)\alpha}{2}-\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right)+}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{+\left(\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)}{}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

2) Аналогично доказывается, что $S=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos(n\alpha)=$ $=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, если $\alpha\neq 2\pi n$, и $S=n$, если $\alpha=2\pi n$.

Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью введения вспомогательного аргумента

Рассмотрим тригонометрическое выражение в виде суммы или разности (с некоторыми коэффициентами a и b) синуса и косинуса одного и того же аргумента x, т.е.

$$a\sin x \pm b\cos x,$$

в котором без ограничения общности будем считать $a,b > 0$. Случай, когда коэффициент a отрицателен, вынесением знака минус за скобку легко сводится к данному случаю; если же хотя бы один из коэффициентов a или b равен нулю, то данное выражение вообще не требует применения подобного подхода. Ниже с помощью тождественных преобразований приведём это выражение к виду одного синуса или одного косинуса, но уже с новым аргументом, отличным от x.

Для этого вначале домножим и разделим данное выражение на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Поскольку при этом $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то, по основному тригонометрическому тождеству, найдётся число φ такое, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (а так как, в силу положительности a и b, имеем $\cos\varphi > 0$ и $\sin\varphi > 0$, то, например, можно считать, что $\varphi \in (0, \pi/2)$).

Тогда $a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sin x\cos\varphi \pm \cos x\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x\pm\varphi)$. Здесь одновременно выбираются либо верхние, либо нижние знаки. При этом φ носит название *вспомогательного аргумента* (отсюда название метода, основанного на этих преобразованиях, – *метод введения вспомогательного аргумента*), и его можно записать любым из следующих способов: $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или $\varphi = arctg\frac{b}{a}$, или $\varphi = arcctg\frac{a}{b}$.

Заметим, что, с другой стороны, выражение $a\sin x \pm b\cos x$ можно было бы свести не к синусу, а к косинусу некоторого аргумента, и в ряде задач это имеет принципиальное значение. В этих целях следовало, наоборот, принять $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ за синус, а $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ за косинус некоторого θ, $\theta \in (0, \pi/2)$, и тогда в результате аналогичных преобразований получили бы следующее:

$$a\sin x \pm b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cdot(\sin\theta\sin x \pm \cos\theta\cos x) = \pm\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x \mp \theta),$$

где, соответственно, в качестве вспомогательного аргумента θ можно взять $\theta = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или $\theta = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или $\theta = arctg\frac{a}{b}$, или $\theta = arcctg\frac{b}{a}$.

<u>Пример 1</u>. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = 6\sin^2 x + 8\cos^2 x + 4\sin x\cos x.$$

Решение. Используя формулы понижения степени для $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$, а также формулу синуса двойного аргумента, перейдём вначале в выражении, определяющем функцию, к двойному аргументу:

$$y = 6\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + 8\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} + 2\sin 2x = 2\sin 2x + \cos 2x + 7.$$

Преобразуем теперь сумму синуса и косинуса согласно методу введения вспомогательного аргумента:

$$y = \sqrt{2^2+1^2}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}\cdot\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\cdot\cos 2x\right) + 7 = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right) + 7 =$$

$= \sqrt{5}(\sin\varphi\cdot\sin 2x + \cos\varphi\cdot\cos 2x) + 7 = \sqrt{5}\cdot\cos(2x-\varphi)+7$, где $\varphi = \arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)$.

Отсюда видно, что если x принимает всевозможные действительные значения, то аргумент $2x-\varphi$ также принимает все действительные значения. Значит, $\cos(2x-\varphi)$ принимает все значения из отрезка $[-1{,}1]$, и тогда областью изменения данной функции служит сегмент $[7-\sqrt{5}, 7+\sqrt{5}]$. Поэтому наименьшее и наибольшее значения функции равны соответственно $7-\sqrt{5}$ и $7+\sqrt{5}$, и достигаются, когда $\cos(2x-\varphi)$=-1 (наименьшее) и $\cos(2x-\varphi)$=1 (наибольшее). *Ответ:* $\min\limits_{x\in R} y = 7-\sqrt{5}$, $\max\limits_{x\in R} y = 7+\sqrt{5}$.

<u>Пример 2</u> [Географ.-2000]. *Решить уравнение*

$$5\sin x + 12(\cos x - 1) + 2\cos(2x + 4arctg(2/3)) + 1 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(5\sin x + 12\cos x) + 2\cos(2(x + 2arctg(2/3))) - 11 = 0.$$

Преобразуем выражение в первых скобках согласно методу введения вспомогательного аргумента:

$$13\left(\frac{5}{13}\cdot\sin x + \frac{12}{13}\cdot\cos x\right) + 2\cos(2(x + 2arctg(2/3))) - 11 = 0,$$

$$13(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x) + 2\cos(2(x + 2arctg(2/3))) - 11 = 0,$$

$$13\sin(x+\varphi) + 2\cos(2(x + 2arctg(2/3))) - 11 = 0,$$

где $\varphi = arctg(12/5)$ (так как в уравнении уже присутствует арктангенс, то удобно представить вспомогательный аргумент φ также в виде арктангенса). Сравним числа $arctg(12/5)$ и $2arctg(2/3)$. Так как оба числа принадлежат интервалу $(0, \pi/2)$, на котором тангенс монотонно возрастает, то тангенсы этих чисел связаны между собой тем же знаком, что и сами числа. Покажем, что $tg(arctg(12/5))$ равен $tg(2arctg(2/3))$. Действительно, $tg(arctg(12/5)) = 12/5$, но и $tg\left(2arctg\,\frac{2}{3}\right) = \frac{2tg(arctg(2/3))}{1-tg^2(arctg(2/3))} = \frac{2\cdot 2/3}{1-(2/3)^2} = \frac{12}{5}$. Тогда, обозначая $t = x + arctg\,\frac{12}{5}$, получаем уравнение

$$13\sin t + 2\cos 2t - 11 = 0 \Leftrightarrow 13\sin t + 2\left(2\cos^2 t - 1\right) - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13\sin t + 4\cos^2 t - 13 = 0 \Leftrightarrow 13\sin t + 4\left(1-\sin^2 t\right) - 13 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 4 - 13\sin t + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 9/4 > 1 \\ \sin t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + arctg(12/5) = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z, \Leftrightarrow x = \pi/2 - arctg(12/5) + 2\pi n =$$

$= arcctg(12/5) + 2\pi n$. *Ответ:* $x = arcctg(12/5) + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin x - \sin 15x \cdot \cos x = \frac{3}{2}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, используя метод введения вспомогательного аргумента и полагая в нём $a = 1$, $b = \sin 15x$ (коэффициенты a и b, вообще говоря, могут зависеть от x):

$$\sqrt{1+\sin^2 15x}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 15x}}\sin x - \frac{\sin 15x}{\sqrt{1+\sin^2 15x}}\cos x\right) = \frac{3}{2},$$

$$\sqrt{1+\sin^2 15x}\cdot\left(\cos\varphi(x)\sin x - \sin\varphi(x)\cos x\right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin(x - \varphi(x)) = \frac{3}{2\sqrt{1+\sin^2 15x}}.$$

Для того чтобы последнее уравнение имело решения, необходимо, чтобы положительное выражение в правой его части принимало значение не больше единицы. Сравним числа $\frac{3}{2\sqrt{1+\sin^2 15x}}$ и 1:

$$3 \vee 2\sqrt{1+\sin^2 15x} \Leftrightarrow 9 \vee 4\left(1+\sin^2 15x\right) \Leftrightarrow 5 \vee 4\sin^2 15x.$$

Так как при любом x, очевидно, $5 > 4\sin^2 15x$, то $\frac{3}{2\sqrt{1+\sin^2 15x}} > 1$, и, следовательно, уравнение не имеет решений.

Существует удобная *геометрическая интерпретация* на единичной окружности решений тригонометрического уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = c, \qquad (1)$$

где $abc \neq 0$ (так называемого неоднородного тригонометрического уравнения 1-й степени относительно функций $\sin x$ и $\cos x$). Можно, не решая указанного уравнения, не только заранее установить, будет ли это уравнение иметь решения, но и наглядно «увидеть» эти решения на тригонометрической окружности. В задачах, где надо делать проверку дополнительных условий или учитывать иные ограничения на решения, это иногда существенно упрощает отбор решений. Этот приём можно использовать и при решении неравенств вида

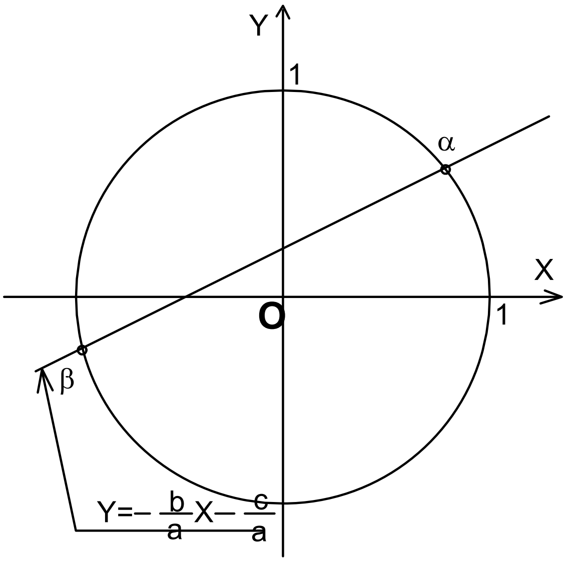
$$a\sin x + b\cos x > c \qquad (2)$$

(знак в неравенстве может быть произвольным).

Рассмотрим суть данного приёма. Введём систему координат OXY, в которой тригонометрическая окружность задаётся уравнением $X^2+Y^2=1$, и проведём прямую, определяемую уравнением

$$a\cdot Y + b\cdot X = c\,, \qquad (3)$$

или, выражая Y, $Y=-\frac{b}{a}\cdot X+\frac{c}{a}$. Уравнение (3) получается непосредственно из уравнения (1), если заменить в нём $\cos x \to X$, $\sin x \to Y$. Тогда, если эта прямая не пересекает тригонометрический круг, то это означает, что данное уравнение (1) не имеет решений.



Если же прямая пересекает тригонометрическую окружность, например, в двух точках, соответствующих аргументам α и β, то стоящие за этими точками серии $x=\alpha+2\pi n$ и $x=\beta+2\pi k$ ($n,k\in Z$) и будут искомыми решениями уравнения.

В случае с тригонометрическим неравенством (2), действуя аналогично, приходим к алгебраическому неравенству вида

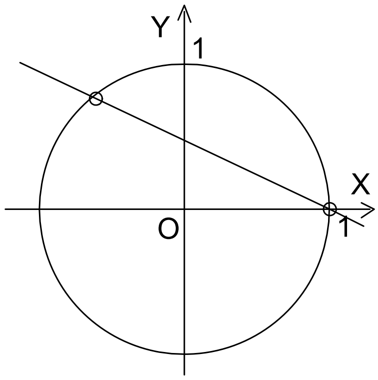
$$a\cdot Y + b\cdot X > c\,, \qquad (4)$$

определяющему в системе координат OXY некоторую полуплоскость. Геометрическим образом решений неравенства (2) в данном случае будет служить дуга тригонометрической окружности, принадлежащая этой полуплоскости.

Пример 4 [Геолог.-2001,устн.]. *Решить уравнение* $2|\sin x| + \cos x = 1$.

Решение. Раскроем модуль по определению, рассмотрев два возможных случая: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \ge 0 \\ 2\sin x + \cos x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -2\sin x + \cos x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$ Для учёта неравенств в системах воспользуемся геометрической интерпретацией решений уравнений этих систем на плоскости.

1) Решения уравнения $2\sin x + \cos x = 1$ в первой из систем отображаются на тригонометрической окружности двумя точками, которые являются пересечением данной окружности с прямой $Y = 1/2 - X/2$.



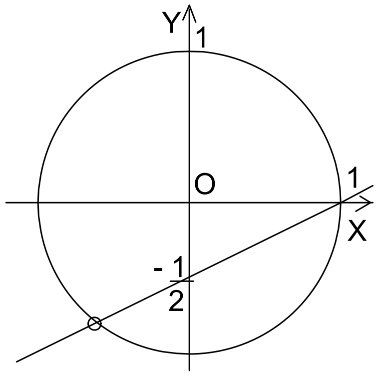
Из рисунка видно, что обе серии, отвечающие этим двум точками, удовлетворяют неравенству $\sin x \ge 0$ и поэтому будут решениями системы. Осталось найти все решения уравнения. Это можно сделать, например, методом введения вспомогательного аргумента:

$$2\sin x + \cos x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt5}\sin x + \frac{1}{\sqrt5}\cos x = \frac{1}{\sqrt5} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \ \sin(x+\varphi) = \frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \ x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \pi n \ (\, n \in Z\,)$$

$$\Leftrightarrow \ x = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \pi n\,.$$

2) Решения уравнения $-2\sin x + \cos x = 1$ второй системы также отображаются на тригонометрической окружности двумя точками, но теперь уже являющимися пересечением окружности с прямой $Y = X/2 - 1/2$. Из двух серий, отвечающих этим точкам, условию $\sin x < 0$ удовлетворяет только одна, расположенная в нижней полуплоскости. Поэтому решением системы будет единственная серия, соответствующая этой точке.



Решим уравнение методом введения вспомогательного аргумента: $-2\sin x + \cos x = 1 \ \Leftrightarrow \ 2\sin x - \cos x = -1 \ \Leftrightarrow \ \frac{2}{\sqrt5}\sin x -$ $- \frac{1}{\sqrt5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5} \ \Leftrightarrow \ \cos\varphi\sin x - \sin\varphi\cos x = -\frac{1}{\sqrt5} \ \Leftrightarrow \ \sin(x-\varphi) = -\frac{1}{\sqrt5}$, где $\varphi =$

$$= \arcsin\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \varphi = \arcsin\left(-1/\sqrt5\right) + 2\pi k, k \in Z \\ x - \varphi = \pi - \arcsin\left(-1/\sqrt5\right) + 2\pi m, m \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ x = \pi + 2\arcsin\left(1/\sqrt5\right) + 2\pi m. \end{array}\right.$$

Так как $x = 2\pi k\ , k \in Z$, не подходит, то получаем решения второй системы в виде серии $x = \pi + 2\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right) + 2\pi m$, $m \in Z$. Объединяя все полученные решения, приходим к ответу:

$$x = -\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right) + (-1)^n \arcsin\left(1/\sqrt{5}\right) + \pi n\ ,\ x = \pi + 2\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right) + 2\pi m\ ,\ n, m \in Z\ .$$

Тригонометрические функции обратных тригонометрических функций

Тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс, котангенс) обратных тригонометрических функций (арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса) являются уже не тригонометрическими, а алгебраическими функциями. В следующей таблице приведены тождества, справедливые в области определения соответствующих функций:

$$\sin(\arcsin x) = x\ ,\ |x| \le 1\ ; \qquad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}\ , |x| \le 1\ ;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}\ ,\ |x| \le 1\ ; \qquad \cos(\arccos x) = x\ ,\ |x| \le 1\ ;$$

$$tg(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,\ |x| < 1\ ; \qquad tg(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\ ,\ 0 < |x| \le 1\ ;$$

$$ctg(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\ , 0 < |x| \le 1\ ; \qquad ctg(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ , |x| < 1\ ;$$

$$\sin(arctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\ , x \in R\ ; \qquad \sin(arcctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\ , x \in R\ ;$$

$$\cos(arctgx) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\ , x \in R\ ; \qquad \cos(arcctgx) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\ , x \in R\ ;$$

$$tg(arctgx) = x\ , x \in R\ ; \qquad tg(arcctgx) = \frac{1}{x}\ , x \in R \setminus \{0\}\ ;$$

$$ctg(arctgx) = \frac{1}{x}\ , x \in R \setminus \{0\}\ ; \qquad ctg(arcctgx) = x\ , x \in R\ .$$

Приведённые здесь формулы легко могут быть получены из определения обратных тригонометрических функций и соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

Выведем, например, формулу $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}\ , |x| \le 1$. Из основного тригонометрического тождества имеем: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, где знак перед квадратным корнем выбирается с учётом значения аргумента α . Положим в последнем равенстве $\alpha = \arcsin x\ , |x| \le 1$. Так как, в силу определения арксинуса, $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, то косинус такого α заведомо неотрицателен, поэтому квадратный корень берётся со знаком плюс. Тогда, используя тот факт, что

$\sin(\arcsin x) = x$, получаем $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$, что и требовалось доказать. Аналогично выводится симметричная формула $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \le 1$.

Докажем теперь тождество $tg(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$. В самом деле, по определению тангенса, $tg(\arcsin x) = \dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, где $|x| < 1$.

Докажем, далее, тождество $tg(arcctgx) = \dfrac{1}{x}, x \in R \setminus \{0\}$. Действительно, согласно соотношению, связывающему тангенс и котангенс, имеем:

$$tg(atcctgx) = \frac{1}{ctg(arcctgx)} = \frac{1}{x} \text{ при всех } x \neq 0.$$

Докажем, что $\cos(arctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R$. Воспользуемся формулой $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Выразим из неё $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$, где знак перед дробью выбирается с учётом значения аргумента α. Положим в последнем равенстве $\alpha = arctgx$. Поскольку, в силу определения арктангенса, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, то косинус такого α будет положителен, поэтому квадратный корень берётся со знаком плюс. Итак, $\cos(arctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2(arctgx)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R$, что и требовалось доказать. Отсюда, в частности, получаем, что $\sin(arctgx) = tg(arctgx)\cdot\cos(arctgx) = x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Аналогично доказываются другие тождества из приведённой выше таблицы.

<u>Пример 1</u> [ВМиК-2001,апрель,устн.]. *Вычислить* $tg\left(\dfrac{arcctg3}{2}\right)$.

Решение. Обозначим $\alpha = arcctg3$ и воспользуемся формулой $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Поделим числитель и знаменатель последней дроби на $\sin\alpha \neq 0$:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{1/\sin\alpha + ctg\alpha}. \qquad (1)$$

Так как $\sin(arcctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$, то $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$; кроме того, $ctg\alpha = 3$. Подставляя это в выражение (1), получим окончательно, что

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{1/\sin\alpha+ctg\alpha}=\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\sqrt{10}-3.$$

<u>Пример 2</u>. Преобразовать к алгебраическому виду выражение

$$\sin(4arctgx).$$

Решение. $\sin(4arctgx)=2\sin(2arctgx)\cdot\cos(2arctgx)$. (2)

Так как $\sin(2arctgx)=2\sin(arctgx)\cdot\cos(arctgx)=2\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{1+x^2}$,

$$\cos(2arctgx)=\cos^2(arctgx)-\sin^2(arctgx)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2},$$

то, подставляя в (2), получим $\sin(4arctgx)=\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, $x\in R$.

2.3. Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства (включая неравенства с обратными тригонометрическими функциями)

К *простейшим* тригонометрическим уравнениям традиционно относят уравнения вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $tgx=a$, $ctgx=a$, где x – неизвестная (и искомая) величина, a – заданное число. Поскольку все четыре основные тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ являются периодическими, то это означает, что если простейшее уравнение имеет хотя бы одно решение, то оно обязательно имеет сразу бесчисленное множество решений. Чтобы найти все корни тригонометрического уравнения, достаточно найти его корни на любом промежутке, длина которого равна периоду соответствующей тригонометрической функции, и затем воспользоваться условием периодичности. Таким образом, в силу периодичности, решения простейших тригонометрических уравнений, к которым, как правило, сводится решение произвольных тригонометрических уравнений, представляют собой *серии* решений.

В следующих четырёх пунктах, чтобы различать переменные x, y, откладываемые на осях декартовой системы координат Oxy, в которой рассматривается тригонометрическая окружность, с аргументами тригонометрических функций в простейших уравнениях, аргументы в уравнениях будем обозначать буквой α. В дальнейшем для обозначения неизвестной в уравнениях и неравенствах, как чаще принято, будем использовать букву x.

Тригонометрическое уравнение $\sin\alpha = a$

Рассмотрим, как решается относительно α уравнение $\sin\alpha = a$ ([1,10,11,21]). Для начала найдём все решения α этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi/2;3\pi/2)$, длина которого составляет 2π, что составляет главный период синуса. Разобьём данный полуинтервал на две части $\mathrm{I}_1 = [-\pi/2,\pi/2]$ и $\mathrm{I}_2 = (\pi/2,3\pi/2)$, и решим уравнение на каждом из этих промежутков.

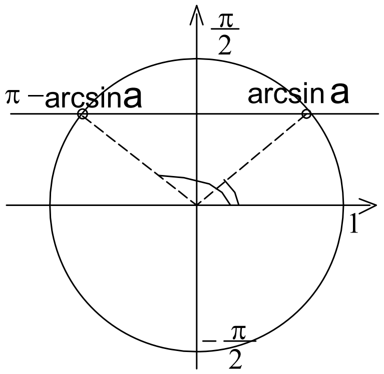
Так как, по определению, синусом действительного числа α называется ордината конца радиуса единичной окружности, отвечающего углу величины α, то для решения уравнения $\sin\alpha = a$ достаточно найти на окружности все точки, имеющие ординату a. Все такие точки в системе координат Oxy лежат, как известно, на прямой $y = a$.

При $|a| > 1$ прямая и окружность не будут иметь общих точек, и поэтому рассматриваемое уравнение не будет иметь решений. При $a = 1$ прямая будет касаться окружности в единственной точке, соответствующей углу величины $\alpha = \pi/2$, поэтому, с учётом периодичности, в этом случае решениями уравнения будет серия $\alpha = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$. Аналогично, при $a = -1$ также будет единственная точка касания прямой с окружностью, и в результате решениями уравнения станет серия $\alpha = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

В наиболее общем случае, когда $|a| < 1$, прямая пересекает окружность в двух различных точках, симметричных друг другу относительно оси Oy.

Одна из них (та, что правее) будет принадлежать множеству I_1, другая (та, что левее) – множеству I_2. Как уже отмечалось ранее, на множестве I_1 функция $y = \sin\alpha$ возрастает, и поэтому у неё существует обратная функция, называемая арксинусом. Каждому значению a, $|a| < 1$, она ставит в соответствие единственное на I_1 число $\alpha_1 = \arcsin a$. То есть та точка, которая расположена на круге правее, соответствует углу величины $\arcsin a$. Учитывая периодичность синуса, получаем первую серию решений

$$\alpha_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z.$$



Далее, второй точке пересечения прямой с окружностью (той, которая расположена левее) соответствует, в силу симметрии этих двух точек относительно оси ординат, единственный на множестве I_2 угол величины $\alpha_2 = \pi - \arcsin a$, поэтому в итоге имеем еще одну серию решений

$$\alpha_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n\,,\ \ n \in Z\,.$$

Других решений рассматриваемое уравнение иметь не может, поскольку иначе это означало бы, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках, что невозможно (аналитически этот факт можно доказать, используя уравнения окружности и прямой на плоскости).

Для сокращения записи две полученные серии решений можно объединить в одну

$$\alpha = (-1)^n \arcsin a + \pi n\,,\ \ n \in Z\,,$$

причём при чётных значениях n из этой формулы получаем первую серию решений, а при нечётных n – вторую серию решений. В частности, при $a = 0$ решениями уравнения $\sin\alpha = 0$ является серия $\alpha = \pi n$, $n \in Z$.

Замечание 1. Легко показать, что тригонометрическое уравнение

$$\sin\alpha = \sin a$$

имеет решения при всех действительных a, причём эти решения находятся по формуле $\alpha = (-1)^n \cdot a + \pi n$, $n \in Z$. Разбивая последнюю серию на две, получаем, что $\sin\alpha = \sin a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = a + 2\pi n, n \in Z\\ \alpha = \pi - a + 2\pi k, k \in Z.\end{array}\right.$

Замечание 2. Уравнение $\sin^2\alpha = a$ имеет решения при любом $a \in [0,1]$, причём, как хорошо видно на тригонометрической окружности, эти решения могут быть найдены по формуле $\alpha = \pm\arcsin\sqrt{a} + \pi n$, $n \in Z$. Другой способ решения данного уравнения – с помощью формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = a \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = a \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2a \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}\arccos(1-2a) + \pi k\,,\ \ k \in Z\,.$$

Пример [Геолог.-1982]. *Решить уравнение* $\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Раскрывая уравнение как простейшее тригонометрическое, получаем на первом этапе: $\left[\begin{array}{l}\frac{4}{3}\pi\sin x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z\\ \frac{4}{3}\pi\sin x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z\end{array}\right.$. Упрощая с учётом того, что $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, и выражая из каждого уравнения $\sin x$, приходим к совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{8} + \frac{3n}{2}\\ \sin x = \frac{5}{8} + \frac{3k}{2}.\end{array}\right.$ Необходимым и достаточным условием того, чтобы эти уравнения имели решения, являются ограничения на правые части: $-1 \le \frac{1}{8} + \frac{3n}{2} \le 1$, т.е. $n = 0$, и $-1 \le \frac{5}{8} + \frac{3k}{2} \le 1$, т.е. $k = -1;0$. Таким образом, задача свелась к решению совокупности трёх простейших тригонометрических уравнений $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1/8 \\ \sin x = -7/8 \\ \sin x = 5/8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^m \arcsin(1/8) + \pi m, m \in Z; \\ x = (-1)^{l+1} \arcsin(7/8) + \pi l, l \in Z; \\ x = (-1)^p \arcsin(5/8) + \pi p, p \in Z. \end{array}\right.$

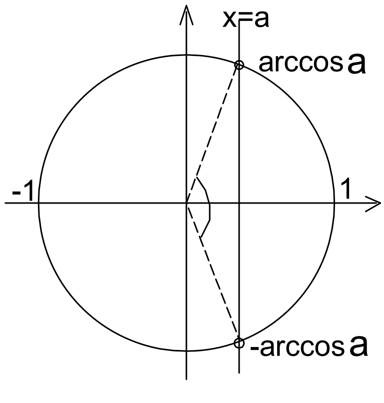
Ответ: $x \in \left\{(-1)^m \arcsin\frac{1}{8} + \pi m; (-1)^{l+1} \arcsin\frac{7}{8} + \pi l; (-1)^p \arcsin\frac{5}{8} + \pi p\right\}$, $m, l, p \in Z$

Тригонометрическое уравнение $\cos\alpha = a$

Косинус действительного числа α есть, по определению, абсцисса точки, являющейся концом радиуса единичной окружности, отвечающего углу величины α. Поэтому для решения относительно α уравнения $\cos\alpha = a$ необходимо найти на окружности все точки, имеющие абсциссу a, т.е. лежащие на вертикально расположенной прямой $x = a$.

Найдём для начала решения этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-\pi, \pi]$ длины 2π, что равно главному периоду косинуса, а затем, чтобы найти все решения уравнения, воспользуемся периодичностью этой функции. Разобьём данный полуинтервал на две части $\mathrm{I}_1 = (-\pi, 0)$ и $\mathrm{I}_2 = [0, \pi]$, и решим уравнение на каждой из них.

При $|a| > 1$ прямая $x = a$ не будет иметь с окружностью общих точек, и, следовательно, уравнение не будет иметь решений. При $|a| = 1$ прямая будет касаться окружности в единственной точке. В частности, если $a = 1$, то точке касания соответствует угол величиной в 0 радиан, поэтому, с учётом периодичности, в этом случае решениями уравнения будет серия $\alpha = 2\pi n$, $n \in Z$. Если $a = -1$, то точке касания прямой с окружностью соответствует угол величины $\alpha = \pi$, и тогда решениями уравнения станет серия $\alpha = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.



В общем случае, когда $|a| < 1$, прямая пересекает окружность в двух различных точках, симметричных друг другу относительно оси Ox. Одна из них (та, что ниже) принадлежит множеству I_1, другая (та, что выше) – множеству I_2. На множестве I_2 функция $y = \cos\alpha$ является убывающей и поэтому обратимой, причём её обратная функция арккосинус каждому значению a ставит в соответствие единственное на I_2 число $\alpha_2 = \arccos a$.

Иными словами, та точка, которая расположена на круге выше, соответствует углу величины $\arccos a$. Учитывая периодичность косинуса, получаем первую серию решений

$$\alpha_2 = \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Далее, второй точке пересечения прямой с окружностью (той, которая расположена ниже) соответствует, в силу симметрии этих двух точек относительно оси абсцисс, единственный на множестве I_1 угол величины $\alpha_1 = -\arccos a$, поэтому в итоге имеем еще одну серию решений

$$\alpha_1 = -\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Других решений рассматриваемое уравнение иметь не может, поскольку окружность и прямая могут пересекаться не более чем в двух точках.

Для сокращения записи две полученные серии решений обычно объединяют в одну

$$\alpha = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

В частности, при $a = 0$ решениями уравнения $\cos\alpha = 0$ является серия $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Замечание 1. Легко показать, что уравнение

$$\cos\alpha = \cos a$$

имеет решения при всех a, причём эти решения находятся по формуле $\alpha = \pm a + 2\pi n$, $n \in Z$. Разбивая последнюю серию на две, получаем, что

$$\cos\alpha = \cos a \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = a + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = -a + 2\pi k, k \in Z\end{array}\right. .$$

Замечание 2. Уравнение вида $\cos^2\alpha = a$ при любом $a \in [0,1]$ имеет решения, которые могут быть найдены по формуле $\alpha = \pm\arccos\sqrt{a} + \pi n$, $n \in Z$. Можно решать такого рода уравнения иначе – с помощью формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = a \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = a \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 2a - 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{1}{2}\arccos(2a-1) + \pi k,\ k \in Z.$$

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $\cos(3\sin x) = a$ имеет решения?

Решение. Обозначим $t = 3\sin x$, при этом при всевозможных действительных значениях x величина t может варьироваться в пределах $t \in [-3{,}3]$, т.е. от (-3) до 3 радиан. Сформулируем задачу в виде: «При каких a уравнение $\cos t = a$ имеет решения, если $t \in [-3{,}3]$?» С помощью тригонометрического круга определяем, что при таких ограничениях на t левая часть уравнения, т.е. $\cos t$, может принимать все значения от $\cos 3$ до 1 включительно. Распространяя эти ограничения на параметр, стоящий в правой части уравнения, приходим к ответу. *Ответ:* при $a \in [\cos 3{,}1]$.

Пример 2. При каких значениях параметра a промежуток $[0,a]$ содержит не менее двух корней уравнения $\cos x = 1/4$?

Решение. Решениями данного уравнения являются две серии

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos(1/4) + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\arccos(1/4) + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Отберём неотрицательные решения. В первой серии это будут $\arccos(1/4)$, $\arccos(1/4) + 2\pi, \ldots$ Во второй серии это будут $-\arccos(1/4) + 2\pi$, $-\arccos(1/4) + 4\pi, \ldots$ Таким образом, если упорядочить в порядке возрастания положительные корни исходного уравнения, то первые два будут $\arccos(1/4)$ и затем $-\arccos(1/4) + 2\pi$. Но тогда условия задачи выполняются, если $a \geq 2\pi - \arccos(1/4)$. *Ответ:* при $a \in [2\pi - \arccos(1/4), +\infty)$.

Пример 3 [Социолог.-2004]. *Найти все решения уравнения $\sin\sqrt{3x+\pi} = 0$, каждое из которых меньше любого решения уравнения $\cos\sqrt{x - 4\pi} = 0$.*

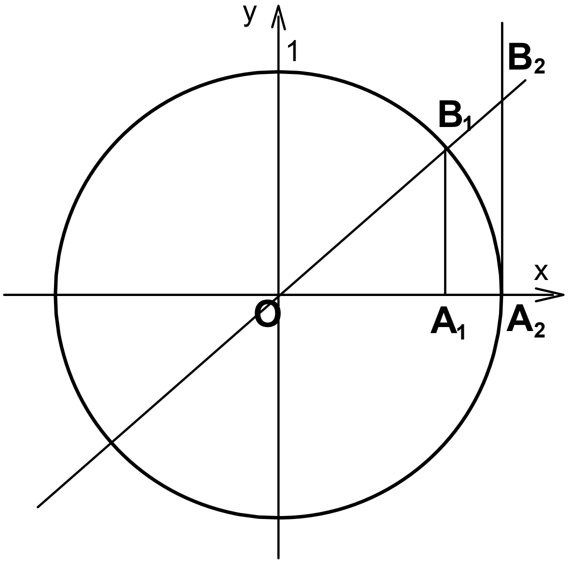
Решение. 1) Решим второе уравнение: $\cos\sqrt{x-4\pi} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4\pi} = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, $\Leftrightarrow$ $x - 4\pi = (\pi/2 + \pi n)^2$, где $n \geq 0$. Наименьший из этих корней отвечает $n = 0$ и равен $4\pi + (\pi/2)^2$. Обозначим его буквой a.

2) Решим первое уравнение: $\sin\sqrt{3x+\pi} = 0$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3x+\pi} = \pi n$, $n \in Z$, $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3x + \pi = (\pi n)^2$ при $n \geq 0$. Обозначим решения этого уравнения $a_n = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{(\pi n)^2}{3}$. По условию, при всех целых $n \geq 0$ должно выполняться неравенство $a_n < a$, т.е. $-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{(\pi n)^2}{3} < 4\pi + \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$. Решая это неравенство, находим $n^2 < \dfrac{13}{\pi} + \dfrac{3}{4}$. Так как $4 < \dfrac{13}{\pi} + \dfrac{3}{4} < 6$, то отбираем следующие значения n: $n = 0;1;2$. Им отвечают решения $a_0 = -\dfrac{\pi}{3}$, $a_1 = \dfrac{\pi^2 - \pi}{3}$, $a_2 = \dfrac{4\pi^2 - \pi}{3}$.

Тригонометрическое уравнение $tg\alpha = a$

Пусть $\alpha \neq \pi/2 + \pi n, n \in Z$. Тангенсом действительного числа α называется, по определению, отношение синуса α к его косинусу, т.е. отношение ординаты к абсциссе конца радиуса единичной окружности, соответствующего углу величины α. Поэтому для решения уравнения $tg\alpha = a$ надо найти на окружности все точки, для которых отношение ординаты к абсциссе является заданным числом a, т.е. лежащие одновременно и на прямой $y = ax$. Так как эта прямая проходит через центр окружности (начало координат точку O), то она всегда пересекает окружность в двух диаметрально противоположных точках, т.е. уравнение имеет решения при любых значениях a. Каждой из полученных точек соответствует на числовой прямой бесконечное множество точек, отстоящих друг от друга на расстояние 2π. Все они являются решениями рассматриваемого уравнения.

Пусть $a \neq 0$. Из двух точек пересечения прямой $y = ax$ с единичной окружностью обозначим буквой B_1 ту, что лежит правее. Через B_2 обозначим точку пересечения этой прямой с вертикальной прямой $x = 1$, а через A_1 и A_2 – основания перпендикуляров, опущенных из B_1 и B_2 на ось абсцисс.



Рассмотрим образовавшиеся подобные прямоугольные треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2. С одной стороны, в этих треугольниках тангенс острого угла при вершине O равен

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2}$$

(в случае, когда $a < 0$, величины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 считать отрицательными; величины отрезков OA_1 и OA_2 всегда положительны), а с другой стороны, он равен $tg\alpha$. Поскольку длина отрезка OA_2 равна единице, то получаем, что тангенс α численно равен величине (с учётом знака) отрезка A_2B_2, т.е. $tg\alpha = A_2B_2$.

Отсюда получаем удобный на практике способ решения уравнения $tg\alpha = a$ на тригонометрическом круге. Чтобы решить уравнение, надо провести вертикальную прямую $x = 1$ (её обычно называют *линией тангенсов*). Это числовая прямая с началом отсчёта в точке $A_2(1;0)$ и положительным направлением вверх от точки A_2. Выберем на ней ту же масштабную единицу, что и в рассматриваемой системе координат Oxy. Теперь отложим на этой линии величину правой части a. Через полученную точку на линии тангенсов и центр окружности проведём прямую (это будет прямая $y = ax$), и найдём две точки пересечения этой прямой с окружностью единичного радиуса. Эти две точки, а точнее, стоящие за ними величины углов, и будут решениями данного тригонометрического уравнения.

Найдём теперь аналитический вид полученных решений. Поскольку функция $y = tg\alpha$ на своей области определения периодична с главным периодом π, то достаточно найти решения уравнения на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ длиной в период, а затем воспользоваться периодичностью тангенса. На этом интервале функция $y = tg\alpha$ монотонно возрастает и, следовательно, имеет обратную функцию, называемую арктангенсом. Каждому действительному значению a арктангенс ставит в соответствие единственное на этом интервале значение $\alpha = arctga$. Поэтому за соответствующей точкой на тригонометрической окружности (всегда той, что расположена правее) стоит серия решений

$$\alpha_1 = arctga + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Диаметрально противоположной точке отвечает ещё одна серия решений

$$\alpha_2 = (\pi + arctga) + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Обычно, учитывая периодичность тангенса, обе серии записывают одной формулой

$$\alpha = arctga + \pi n,\ n \in Z.$$

При этом при чётных значениях n из этой формулы получаем первую серию решений, а при нечётных n – вторую серию решений.

Других решений рассматриваемое уравнение иметь не может, поскольку окружность и прямая, проходящая через её центр, как уже отмечалось выше, всегда пересекаются ровно в двух диаметрально противоположных точках.

Замечание 1. Уравнения $tg\alpha = 0$ и $\sin\alpha = 0$ равносильны и имеют своими решениями серию $\alpha = \pi n,\ n \in Z$.

Замечание 2. Уравнение $tg\alpha = tga$ имеет решения при всех $a \neq \pi/2 + \pi n$, причём эти решения находятся по формуле $\alpha = a + \pi n,\ n \in Z$.

Замечание 3. Уравнение $tg^2\alpha = a$ имеет решения при любых $a \in [0, +\infty)$, причём эти решения могут быть найдены по формуле

$$\alpha = \pm arctg\sqrt{a} + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример. Решить уравнение $tg\dfrac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ $(n \in Z)$ $\Leftrightarrow$ $(3n-1)x^2 + (3n-7)x + 3n - 1 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно x с целочисленным параметром n, получаем, что $D = -27n^2 - 18n + 45 = -9(n-1)(3n+5) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $n = -1; 0; 1$. При этом корни уравнения могут быть вычислены по формуле

$$x=\frac{(7-3n)\pm\sqrt{-9(n-1)(3n+5)}}{2(3n-1)}. \qquad (1)$$

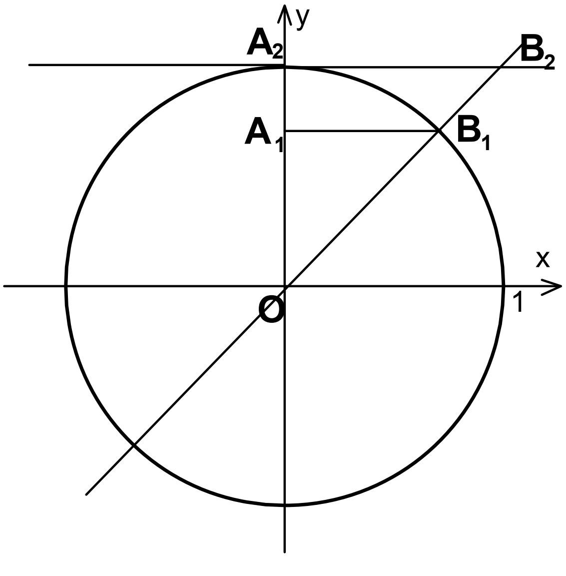
Если $n=-1$, то из (1) находим $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1/2. \end{array}\right.$

Если $n=0$, то из (1) находим $\left[\begin{array}{l} x=-\left(7+\sqrt{45}\right)/2 \\ x=\left(\sqrt{45}-7\right)/2. \end{array}\right.$

Если $n=1$, то из (1) находим $x=1$. Итак, $x\in\left\{-2;-\frac{1}{2};1;\frac{-7\pm\sqrt{45}}{2}\right\}$.

Тригонометрическое уравнение $ctg\alpha=a$

Пусть $\alpha\neq\pi n, n\in Z$. Котангенс числа α равен, по определению, отношению косинуса α к его синусу, т.е. отношению абсциссы к ординате конца радиуса единичной окружности, соответствующего углу величины α. Поэтому для решения уравнения $ctg\alpha=a$ надо найти на окружности все точки, для которых отношение абсциссы к ординате является заданным числом a, т.е. лежащие одновременно и на прямой $ay=x$. Так как эта прямая проходит через центр окружности (начало координат точку O), то она всегда пересекает окружность в двух диаметрально противоположных точках, т.е. уравнение имеет решения при любых значениях a. Каждой из полученных точек соответствует на числовой прямой бесконечное множество точек, отстоящих друг от друга на расстояние 2π. Все они являются решениями рассматриваемого уравнения. Из двух точек пересечения прямой $ay=x$ с единичной окружностью обозначим буквой B_1 ту, что лежит выше. Через B_2 обозначим точку пересечения этой прямой с горизонтальной прямой $y\equiv1$, а через A_1 и A_2 – основания перпендикуляров, опущенных из B_1 и B_2 на ось ординат.



Пусть $a\neq0$. Рассмотрим образовавшиеся подобные прямоугольные треугольники OA_1B_1 и OA_2B_2.

С одной стороны, в этих треугольниках котангенс острого угла при вершинах B_1 и B_2 равен $\frac{A_1B_1}{OA_1}=\frac{A_2B_2}{OA_2}$ (в случае, когда $a<0$, величины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 считать отрицательными;

величины отрезков OA_1 и OA_2 всегда положительны), а с другой стороны, он равен $ctg\alpha$. Поскольку длина отрезка OA_2 равна единице, то получаем, что $ctg\alpha$ численно равен величине отрезка A_2B_2.

Отсюда получаем удобный на практике способ решения уравнения $ctg\alpha = a$ на тригонометрическом круге. Чтобы решить уравнение, надо провести горизонтальную прямую $y = 1$ (её обычно называют *линией котангенсов*). Выберем на ней ту же масштабную единицу, что и в рассматриваемой системе координат, за начало отсчёта возьмём точку $A_2(0;1)$, а за положительное направление примем направление отсчёта вправо. Теперь отложим на этой линии величину правой части a. Через полученную точку на линии котангенсов и центр окружности проведём прямую (это будет прямая $ay = x$), и найдём две точки пересечения этой прямой с окружностью единичного радиуса. Эти две точки, а точнее, стоящие за ними величины углов, и будут решениями данного тригонометрического уравнения.

Найдём теперь аналитический вид полученных решений. Поскольку функция $y = ctg\alpha$ на своей области определения периодична с главным периодом π, то достаточно найти решения уравнения на интервале $(0, \pi)$ длиной в период, а затем воспользоваться периодичностью котангенса. На этом интервале функция $y = ctg\alpha$ монотонно убывает и, следовательно, имеет обратную функцию, называемую арккотангенсом. Каждому действительному значению a арккотангенс ставит в соответствие единственное на этом интервале значение $\alpha = arcctga$. Поэтому за соответствующей точкой на тригонометрической окружности (всегда той, что расположена выше) стоит серия решений

$$\alpha_1 = arcctga + 2\pi n\,,\ n \in Z\,.$$

Диаметрально противоположной точке отвечает ещё одна серия решений

$$\alpha_2 = (\pi + arcctga) + 2\pi n\,,\ n \in Z\,.$$

Обычно, учитывая периодичность котангенса, обе серии записывают одной формулой

$$\alpha = arcctga + \pi n\,,\ n \in Z\,.$$

При этом при чётных значениях n из этой формулы получаем первую серию решений, а при нечётных n – вторую серию решений.

Других решений рассматриваемое уравнение иметь не может, поскольку окружность и прямая, проходящая через её центр, как отмечалось выше, всегда пересекаются ровно в двух диаметрально противоположных точках.

Замечание 1. Уравнения $ctg\alpha = 0$ и $\cos\alpha = 0$ равносильны и имеют своими решениями серию $\alpha = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$.

Замечание 2. Уравнение $ctg\alpha = ctga$ имеет решения при всех $a \neq \pi n$, причём эти решения находятся по формуле $\alpha = a + \pi n$, $n \in Z$.

Замечание 3. Уравнение $ctg^2\alpha = a$ имеет решения при любом $a \in [0,+\infty)$, причём эти решения могут быть найдены по формуле

$$\alpha = \pm arcctg\sqrt{a} + \pi n, \; n \in Z.$$

Пример. Решить уравнение $3ctg^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3x - \frac{\pi}{3} = \pm arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n, n \in Z, \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Простейшие тригонометрические неравенства

К *простейшим тригонометрическим неравенствам* относят неравенства вида

$$f(x) \vee a,$$

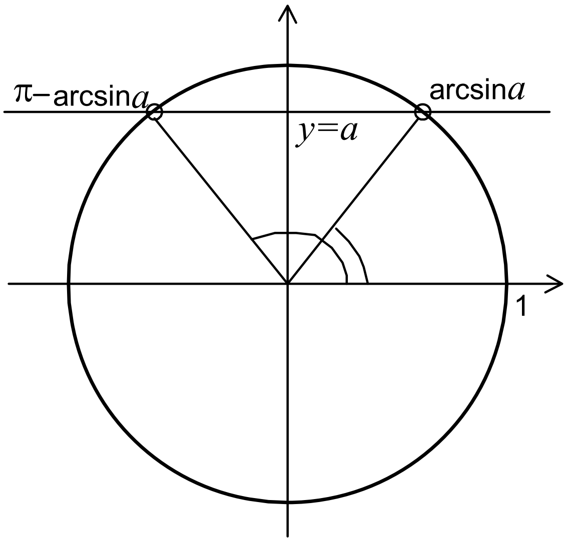
где $f(x)$ – одна из четырёх тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$, а знак $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq, \neq$.

Решить любое из указанных неравенств помогает иллюстрация на тригонометрическом круге аналогично тому, как это было сделано в случае с уравнениями.

Неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$, $\sin x \neq a$.

Решение неравенств этого типа существенно зависит от значения правой части a.

Решение неравенства $\sin x > a$.



Геометрический образ решений данного неравенства на координатной плоскости – это множество точек тригонометрической окружности, имеющих ординату больше, чем a.

1) Если $a \in (-\infty,-1)$, то окружность не пересекается с прямой $y = a$, целиком располагаясь в полуплоскости $y > a$. Ордината каждой её точки больше a, и поэтому неравенство верно при всех $x \in R$.

2) Если $a \in [-1,1)$, то прямая $y = a$ пересекает окружность в двух точках,

имеющих ординаты, равные a. Им соответствуют, например, углы величины $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$. Точки же этой окружности, имеющие ординату больше a, образуют дугу с концами в указанных точках, лежащую выше прямой $y = a$. Этой дуге с учётом периодичности синуса с периодом 2π отвечает объединение бесконечного числа интервалов, которые и будут образовывать множество всех решений неравенства в данном случае:

$$(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n), \text{ где } n \in Z.$$

3) Если $a \in [1, +\infty)$, то окружность целиком расположена ниже прямой $y = a$, и поэтому ни одна её точка не может иметь ординаты больше, чем a. Следовательно, в этом случае неравенство не имеет решений.

Неравенство $\sin x < a$ решается аналогично рассмотренному выше.

1) Если $a \in (-\infty, -1]$, то неравенство не имеет решений.

2) Если $a \in (-1, 1]$, то решением неравенства будет объединение интервалов $x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n, \arcsin a + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

3) Если $a \in (1, +\infty)$, то неравенство верно при всех $x \in R$.

Нестрогие неравенства рассматриваются таким же образом. Например, решая неравенство $\sin x \geq a$, получим (сравните, в чём разница):

1) Если $a \in (-\infty, -1]$, то неравенство верно при всех $x \in R$.

2) Если $a \in (-1, 1]$, то решением неравенства будет объединение интервалов $(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$, где $n \in Z$.

3) Если $a \in (1, +\infty)$, то неравенство не имеет решений.

Решениями неравенства $\sin x \neq a$ будут все действительные значения x, за исключением тех, которые являются решениями уравнения $\sin x = a$. То есть при $|a| > 1$ неравенство верно при всех действительных x. При $|a| \leq 1$ решениями неравенства будут все действительные x, кроме

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z.$$

<u>Пример</u>. Решить неравенство

$$а)\ \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{2}; \qquad б)\ \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2}.$$

Решение. а) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z, \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 2\pi n\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}\right], n \in Z;$$

б) $\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z, \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5x\in\left(-\pi+2\pi n,-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5},-\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi n}{5}\right),\ n\in Z.$$

Неравенства вида $\cos x>a$, $\cos x<a$, $\cos x\ge a$, $\cos x\le a$, $\cos x\ne a$

Решение неравенства $\cos x>a$.

Геометрический образ решений данного неравенства на координатной плоскости – это множество точек тригонометрической окружности, имеющих абсциссу больше, чем a.

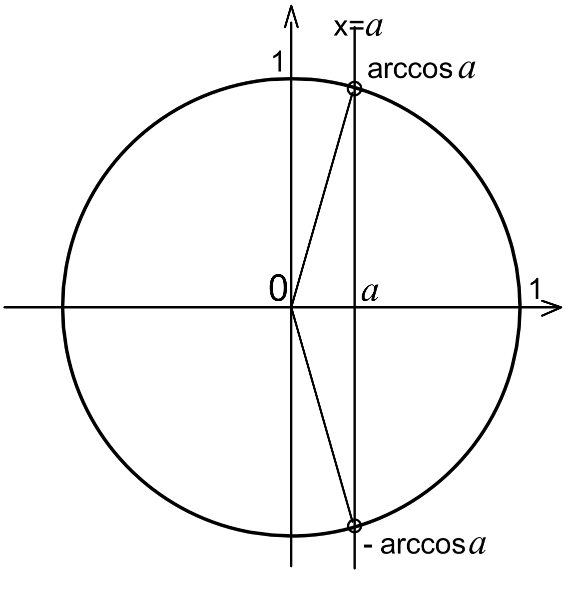
1) Если $a\in(-\infty,-1)$, то окружность не пересекается с прямой $x=a$, целиком располагаясь в полуплоскости $x>a$. Абсцисса каждой её точки больше a, и поэтому неравенство верно при всех $x\in R$.

2) Если $a\in[-1,1)$, то прямая $x=a$ пересекает окружность в двух точках, имеющих абсциссы, равные a. Им соответствуют, например, углы величины $-\arccos a$ и $\arccos a$. Точки же этой окружности, имеющие абсциссу больше a, образуют дугу с концами в указанных точках, лежащую правее прямой $x=a$. Этой дуге с учётом периодичности косинуса с периодом 2π отвечает объединение бесконечного числа интервалов, которые и будут образовывать множество всех решений неравенства в данном случае:

$$(-\arccos a+2\pi n,\arccos a+2\pi n),\text{ где } n\in Z.$$

3) Если $a\in[1,+\infty)$, то окружность целиком расположена левее прямой $x=a$, и поэтому ни одна её точка не может иметь абсциссу больше, чем a. Следовательно, в этом случае неравенство не имеет решений.

Решение неравенства $\cos x<a$.



Неравенство $\cos x<a$ решается аналогично рассмотренному выше.

1) Если $a\in(-\infty,-1]$, то неравенство не имеет решений.

2) Если $a\in(-1,1]$, то решением неравенства будет объединение интервалов

$$x\in(\arccos a+2\pi n,2\pi-\arccos a+2\pi n),$$

где $n\in Z$.

3) Если $a\in(1,+\infty)$, то неравенство верно при всех $x\in R$.

Решение *нестрогих* неравенств рассмотрите самостоятельно.

Наконец, *решениями неравенства* $\cos x\ne a$ будут все действительные значения x, за исключением тех, которые являются решениями уравнения $\cos x = a$. То есть при $|a| > 1$ неравенство верно при всех действительных x. При $|a| \le 1$ решениями неравенства будут все действительные x, кроме

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n. n \in Z.$$

<u>Пример 1</u> [ВМиК-2000]. *Решить неравенство* $\sin x \cdot \sin|x| \ge -\dfrac{1}{2}$.

Решение. Для раскрытия модуля рассмотрим два случая.

1) Пусть $x \ge 0$, тогда неравенство принимает вид $\sin^2 x \ge -1/2$; его решениями являются все действительные x. С учётом рассматриваемого промежутка имеем следующие решения: $x \in [0,+\infty)$.

2) Пусть $x < 0$, тогда неравенство принимает вид $\sin^2 x \le 1/2$, что равносильно $\dfrac{1-\cos 2x}{2} \le \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\cos 2x \ge 0$ $\Leftrightarrow$ $2x \in [-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$, $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in [-\pi/4 + \pi n, \pi/4 + \pi n]$. Очевидно, все отрезки указанного вида, соответствующие значениям $n \le -1$, принадлежат рассматриваемому промежутку, а из отрезка, отвечающего $n = 0$, в ответ войдёт только половина $[-\pi/4, 0)$. Таким образом, в этом случае имеем решения $x \in \bigcup\limits_{n=-\infty}^{-1} [-\pi/4 + \pi n, \pi/4 + \pi n] \cup [-\pi/4, 0)$.

Объединяя все полученные решения, приходим к ответу.

Ответ: $x \in \left(\bigcup\limits_{n=-\infty}^{-1} [-\pi/4 + \pi n, \pi/4 + \pi n] \right) \cup [-\pi/4, +\infty)$.

<u>Пример 2</u> [ВМиК-2000]. *Решить неравенство* $\cos(x^2) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Имеем $\cos(x^2) < 1/\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $x^2 \in (\pi/4 + 2\pi n, 7\pi/4 + 2\pi n), n \in Z$. Так как x^2 может принимать лишь неотрицательные значения, то n должно удовлетворять ограничению $n \ge 0$. Решения неравенств

$$\pi/4 + 2\pi n < x^2 < 7\pi/4 + 2\pi n \text{, или } \sqrt{\pi/4 + 2\pi n} < |x| < \sqrt{7\pi/4 + 2\pi n},$$

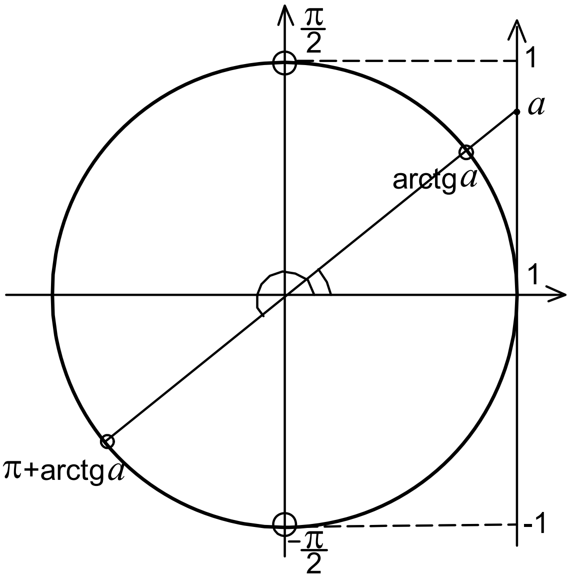
представляют собой объединение промежутков

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(-\sqrt{7\pi/4 + 2\pi n}, -\sqrt{\pi/4 + 2\pi n} \right) \cup \left(\sqrt{\pi/4 + 2\pi n}, \sqrt{7\pi/4 + 2\pi n} \right) \right).$$

Неравенства вида $tgx > a$, $tgx < a$, $tgx \ge a$, $tgx \le a$, $tgx \ne a$.

Эти неравенства также удобно решать с помощью тригонометрического круга. Они имеют решения при любых действительных значениях правой части a.

Чтобы решить неравенство $tgx > a$, надо найти на тригонометрической окружности все точки, у которых отношение ординаты к абсциссе больше заданного числа a. Эти точки лежат на прямых, определяемых уравнением вида $y = kx$, где угловой коэффициент k превышает a. Данные прямые проходят через начало координат, пересекая окружность в двух диаметрально противоположных точках, правой из которых соответствует, в частности, угол величины $arctga$, принадлежащий интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$. Решая неравенство на этом интервале с учётом монотонного возрастания на нём тангенса, находим, что неравенству $tgx > a$ отвечают точки дуги окружности $(arctga, \pi/2)$. Принимая во внимание периодичность тангенса с периодом π и добавляя к концам полученного интервала решений целое число периодов, окончательно получим множество всех решений неравенства как объединение интервалов $(arctga + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, где $n \in Z$.



Рассуждая аналогичным образом, получим, что решением неравенства $tgx < a$ является объединение интервалов $(-\pi/2 + \pi n, arctga + \pi n)$, $n \in Z$. Отметим также, что решением нестрогого неравенства $tgx \geq a$ является объединение полуинтервалов $[arctga + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, где $n \in Z$, а решением нестрогого неравенства $tgx \leq a$ является соответственно объединение полуинтервалов $(-\pi/2 + \pi n, arctga + \pi n]$, $n \in Z$.

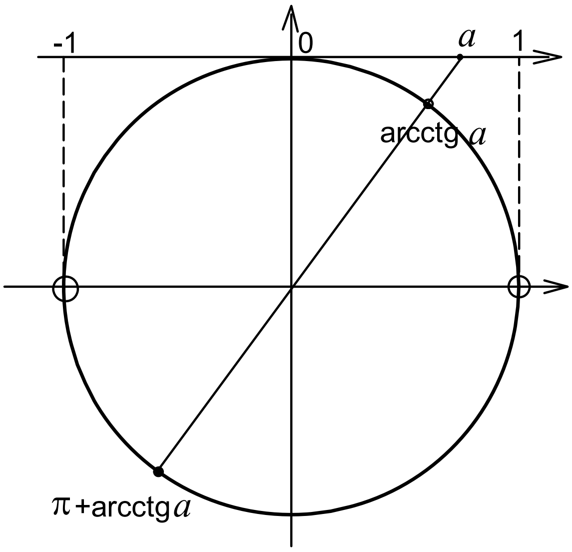
Наконец, *решениями неравенства* $tgx \neq a$ для любого фиксированного a будут все действительные значения x из ОДЗ неравенства ($x \neq \pi/2 + \pi n, n \in Z$), за исключением тех, которые являются решениями уравнения $tgx = a$, т.е. кроме $x = arctga + \pi n, n \in Z$.

Неравенства вида $ctgx > a$, $ctgx < a$, $ctgx \geq a$, $ctgx \leq a$, $ctgx \neq a$

Как и в случае с тангенсом, все перечисленные неравенства имеют решения при любых действительных значениях правой части a.

Для решения неравенства $ctgx > a$ надо найти на тригонометрической окружности все точки, у которых отношение абсциссы к ординате больше заданного числа a. Эти точки лежат на прямых, описываемых уравнением вида

$ky = x$, где коэффициент k превышает a. Данные прямые проходят через начало координат, пересекая окружность в двух диаметрально противоположных точках, верхней из которых соответствует, в частности, угол величины $arcctga$, принадлежащий интервалу $(0, \pi)$. Решая неравенство на этом интервале с учётом монотонного убывания на нём котангенса, находим, что неравенству $ctgx > a$ отвечают точки дуги окружности $(0, arcctga)$. Принимая во внимание периодичность котангенса с периодом π и добавляя к концам полученного интервала решений целое число периодов, окончательно получим множество всех решений неравенства как объединение интервалов $(\pi n, arcctga + \pi n)$, где $n \in Z$.



Рассуждая аналогичным образом, получим, что решением неравенства $ctgx < a$ является объединение интервалов $(arcctga + \pi n, \pi + \pi n)$, где $n \in Z$.

Решением нестрогого неравенства $ctgx \ge a$ является объединение полуинтервалов $(\pi n, arcctga + \pi n]$, где $n \in Z$.

Решением нестрогого неравенства $ctgx \le a$ является объединение полуинтервалов $[arcctga + \pi n, \pi + \pi n)$, где $n \in Z$.

Решениями неравенства $ctgx \ne a$ для любого фиксированного a будут все действительные значения x из ОДЗ неравенства, за исключением тех, которые являются решениями уравнения $ctgx = a$, т.е. кроме

$$x = arcctga + \pi n, n \in Z .$$

Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

Уравнения вида $\arcsin x = a$

Функция арксинус, находящаяся в левой части уравнения, определена на отрезке $x \in [-1,1]$ и монотонно возрастает на нём, последовательно принимая все значения из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$. Поэтому, во-первых, областью допустимых значений уравнения является отрезок $x \in [-1{,}1]$ и, во-вторых, наличие решения зависит от значения правой части a. Причём, если решение существует, то, в силу монотонности арксинуса, оно единственно.

1) Если $a \in [-\pi/2, \pi/2]$, то уравнение имеет решение. Чтобы найти его, необходимо применить к левой и правой частям уравнения операцию взятия синуса. Так как обе части уравнения в этом случае принимают свои значения из сегмента $[-\pi/2, \pi/2]$, на котором функция синус возрастает, то в результате получаем равносильное равенство $\sin(\arcsin x) = \sin a$. Поскольку синус и арксинус суть взаимно обратные функции, то $\sin(\arcsin x) = x$, и окончательно получаем решение уравнения в виде $x = \sin a$.

2) Если $a \notin [-\pi/2, \pi/2]$, то уравнение не имеет решений.

Уравнения вида $\arccos x = a$

Функция арккосинус, находящаяся в левой части уравнения, определена на отрезке $x \in [-1{,}1]$ и монотонно убывает на нём, принимая все значения из промежутка $[0, \pi]$. Поэтому, во-первых, областью допустимых значений уравнения является отрезок $x \in [-1{,}1]$ и, во-вторых, наличие решения зависит от значения правой части a. Причём, если решение существует, то, в силу монотонности арккосинуса, оно единственно.

1) Если $a \in [0, \pi]$, то уравнение имеет решение. Чтобы найти его, необходимо применить к левой и правой частям уравнения операцию взятия косинуса. Так как обе части уравнения в этом случае принимают свои значения из сегмента $[0, \pi]$, на котором функция косинус убывает, то в результате получаем равносильное равенство $\cos(\arccos x) = \cos a$. Поскольку косинус и арккосинус суть взаимно обратные функции, то $\cos(\arccos x) = x$, и окончательно получаем решение уравнения: $x = \cos a$.

2) Если $a \notin [0, \pi]$, то уравнение не имеет решений.

Уравнения вида $arctgx = a$

Функция арктангенс, находящаяся в левой части уравнения, определена при всех $x \in R$ и монотонно возрастает, принимая последовательно все значения из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. Поэтому наличие решения зависит от значения правой части a. Причём, если решение существует, то, в силу монотонности арктангенса, оно единственно.

1) Если $a \in (-\pi/2, \pi/2)$, то уравнение имеет решение. Чтобы найти его, необходимо применить к левой и правой частям уравнения операцию взятия тангенса. Так как обе части уравнения в этом случае принимают свои значе-

ния из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, на котором функция тангенс возрастает, то в результате получаем равносильное равенство $tg(arctgx) = tga$. Поскольку тангенс и арктангенс суть взаимно обратные функции, то $tg(arctgx) = x$, и окончательно получаем решение уравнения в виде $x = tga$.

2) Если $a \notin (-\pi/2, \pi/2)$, то уравнение не имеет решений.

Уравнения вида $arcctgx = a$

Функция арккотангенс, находящаяся в левой части уравнения, определена при всех $x \in R$ и монотонно убывает, принимая все значения из интервала $(0, \pi)$. Поэтому наличие решения зависит от значения правой части a. Причём, если решение существует, то, в силу монотонности арккотангенса, оно единственно.

1) Если $a \in (0, \pi)$, то уравнение имеет решение. Чтобы найти его, необходимо применить к левой и правой частям уравнения операцию взятия котангенса. Так как обе части уравнения в этом случае принимают свои значения из интервала $(0, \pi)$, на котором функция котангенс убывает, то в результате получаем равносильное равенство $ctg(arcctgx) = ctga$. Поскольку котангенс и арккотангенс суть взаимно обратные функции, то $ctg(arcctgx) = x$, и окончательно получаем решение уравнения $x = ctga$.

2) Если $a \notin (0, \pi)$, то уравнение не имеет решений.

Пример. *Решить уравнение* $\sin(3arcctgx) = 1$.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению $3arcctgx = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$, или $arcctgx = \pi/6 + 2\pi n/3$. Последнее уравнение имеет решения, только если его правая часть удовлетворяет ограничениям $0 < \pi/6 + 2\pi n/3 < \pi$, т.е. $n = 0;1$. Таким образом, уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} arcctgx = \pi/6 \\ arcctgx = 5\pi/6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = ctg(\pi/6) = \sqrt{3} \\ x = ctg(5\pi/6) = -ctg(\pi/6) = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Все рассмотренные в данном пункте неравенства можно решать как аналитически, так и графически (см. графики обратных тригонометрических функций в разделе «Функции и графики»).

Неравенства вида

$\arcsin x > a$, $\arcsin x < a$, $\arcsin x \geq a$, $\arcsin x \leq a$, $\arcsin x \neq a$

Рассмотрим решение *неравенства* $\arcsin x > a$.

Отметим, что областью допустимых значений неравенства является отрезок $[-1,1]$, а областью значений арксинуса является отрезок $[-\pi/2,\pi/2]$. В связи с этим возможны три случая.

1) Если $a \in (-\infty,-\pi/2)$, то неравенство верно при всех $x \in [-1,1]$.

2) Если $a \in [-\pi/2,\pi/2)$, то для нахождения решений неравенства применим к его левой и правой частям операцию взятия синуса. Так как обе части неравенства в данном случае принимают свои значения из сегмента $[-\pi/2,\pi/2]$, на котором функция синус возрастает, то в результате получаем равносильное неравенство $\sin(\arcsin x) > \sin a$. Поскольку синус и арксинус суть взаимно обратные функции, то $\sin(\arcsin x) = x$, и получаем решения неравенства $x > \sin a$. С учётом ОДЗ окончательно имеем в качестве решений промежуток $(\sin a,1]$.

3) Если $a \in [\pi/2,+\infty)$, то неравенство не имеет решений.

Решение неравенства $\arcsin x < a$.

1) Если $a \in (-\infty,-\pi/2]$, то неравенство не имеет решений.

2) Если $a \in (-\pi/2,\pi/2]$, то неравенство имеет решения. Чтобы найти их, применим к левой и правой частям неравенства операцию взятия синуса и получим в результате равносильное неравенство $\sin(\arcsin x) < \sin a$. Так как $\sin(\arcsin x) = x$, то получаем решения неравенства $x < \sin a$. С учётом ОДЗ окончательно имеем в ответе промежуток $[-1,\sin a)$.

3) Если $a \in (\pi/2,+\infty)$, то неравенство выполняется сразу для всех x, принадлежащих области допустимых значений.

Нестрогие неравенства решаются аналогично.

Рассмотрим решение неравенства $\arcsin x \neq a$.

1) При $|a| > \pi/2$ неравенство верно при всех действительных $x \in [-1,1]$.

2) При $|a| \leq \pi/2$ неравенство верно при всех действительных x, принадлежащих отрезку $[-1,1]$, кроме того значения, которое является решением уравнения $\arcsin x = a$, т.е. кроме $x = \sin a$.

Неравенства вида

$\arccos x > a$, $\arccos x < a$, $\arccos x \geq a$, $\arccos x \leq a$, $\arccos x \neq a$

Рассмотрим *решение неравенства* $\arccos x > a$.

Отметим, что областью допустимых значений неравенства является отрезок $[-1,1]$, а областью значений арккосинуса является отрезок $[0,\pi]$. В связи с этим возможны три случая.

1) Если $a \in (-\infty,0)$, то неравенство верно при всех $x \in [-1,1]$.

2) Если $a \in [0,\pi)$, то для нахождения решений неравенства применим к его левой и правой частям операцию взятия косинуса. Так как обе части неравенства в данном случае принимают свои значения из сегмента $[0,\pi]$, на котором функция косинус убывает, то в результате получаем равносильное неравенство $\cos(\arccos x) < \cos a$. Поскольку косинус и арккосинус суть взаимно обратные функции, то $\cos(\arccos x) = x$, и получаем решения неравенства $x < \cos a$. С учётом ОДЗ окончательно имеем $[-1, \cos a)$.

3) Если $a \in [\pi, +\infty)$, то неравенство не имеет решений.

Решение неравенства $\arccos x < a$.

1) Если $a \in (-\infty, 0]$, то неравенство не имеет решений.

2) Если $a \in (0,\pi]$, то неравенство имеет решения. Чтобы найти их, применим к левой и правой частям неравенства операцию взятия косинуса и получим в результате равносильное неравенство $\cos(\arccos x) > \cos a$. Так как $\cos(\arccos x) = x$, то получаем решения неравенства $x > \cos a$. С учётом ОДЗ окончательно имеем $(\cos a, 1]$.

3) Если $a \in (\pi, +\infty)$, то неравенство выполняется сразу для всех $x \in [-1,1]$.

Нестрогие неравенства решаются аналогично.

Решение неравенства $\arccos x \neq a$.

1) При $a \notin [0,\pi]$ неравенство верно при всех действительных $x \in [-1,1]$.

2) При $a \in [0,\pi]$ неравенство верно при всех действительных x, принадлежащих отрезку $[-1,1]$, кроме того значения, которое является решением уравнения $\arccos x = a$, т.е. кроме $x = \cos a$.

Неравенства вида

$arctgx > a$, $arctgx < a$, $arctgx \geq a$, $arctgx \leq a$, $arctgx \neq a$

Все рассмотренные в этом пункте неравенства можно решать как аналитически, так и графически. Заметим, что областью допустимых значений данных неравенств является вся числовая прямая (т.е. любое $x \in R$), а областью значений арктангенса – интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

Рассмотрим решение неравенства $arctgx > a$. Возможны три случая.

1) Если $a \in (-\infty, -\pi/2]$, то неравенство верно при всех $x \in R$.

2) Если $a \in (-\pi/2, \pi/2)$, то для нахождения решений применим к левой и правой частям неравенства операцию взятия тангенса. Так как обе части неравенства в данном случае принимают свои значения из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, на котором функция тангенс возрастает, то в результате получаем равносильное неравенство $tg(arctgx) > tga$. Поскольку тангенс и арктан-

генс суть взаимно обратные функции, то $tg(arctgx) = x$, и в результате получаем решения неравенства $x > tga$.

3) Если $a \in [\pi/2, +\infty)$, то неравенство не имеет решений.

Решение неравенства $arctgx < a$.

1) Если $a \in (-\infty, -\pi/2]$, то неравенство не имеет решений.

2) Если $a \in (-\pi/2, \pi/2)$, то неравенство имеет решения. Чтобы найти их, применим к левой и правой частям неравенства операцию взятия тангенса и получим в результате равносильное неравенство $tg(arctgx) < tga$. Так как $tg(arctgx) = x$, то окончательно получаем решения неравенства $x < tga$.

3) Если $a \in [\pi/2, +\infty)$, то неравенство выполняется сразу для всех действительных x. Нестрогие неравенства решаются аналогично.

Решение неравенства $arctgx \neq a$.

1) При $a \notin (-\pi/2, \pi/2)$ неравенство верно при всех действительных x.

2) При $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ неравенство верно при всех действительных x, кроме решения уравнения $arctgx = a$, т.е. кроме $x = tga$.

Неравенства вида

$arcctgx > a$, $arcctgx < a$, $arcctgx \geq a$, $arcctgx \leq a$, $arcctgx \neq a$

Заметим, что областью допустимых значений данных неравенств является множество всех действительных чисел, а областью значений арккотангенса – интервал $(0, \pi)$.

Рассмотрим решение неравенства $arcctgx > a$.

1) Если $a \in (-\infty, 0]$, то неравенство верно при всех $x \in R$.

2) Если $a \in (0, \pi)$, то неравенство также имеет решения. Чтобы найти их, применим к левой и правой частям неравенства операцию взятия котангенса. Так как обе части неравенства в данном случае принимают свои значения из интервала $(0, \pi)$, на котором функция котангенс убывает, то в результате получаем равносильное неравенство $ctg(arcctgx) < ctga$. Поскольку котангенс и арккотангенс суть взаимно обратные функции, то $ctg(arcctgx) = x$, и в результате получаем решения неравенства $x < ctga$.

3) Если $a \in [\pi, +\infty)$, то неравенство не имеет решений.

Рассмотрим решение неравенства $arcctgx < a$.

1) Если $a \in (-\infty, 0]$, то неравенство не имеет решений.

2) Если $a \in (0, \pi)$, то неравенство имеет решения. Чтобы найти их, применим к левой и правой частям неравенства операцию взятия котангенса и

получим в результате равносильное неравенство $ctg(arcctgx) > ctga$. Так как $ctg(arcctgx) = x$, то окончательно получаем решения неравенства $x > ctga$.

3) Если $a \in [\pi, +\infty)$, то неравенство выполняется сразу для всех $x \in R$.

Нестрогие неравенства решаются аналогично.

Рассмотрим решение неравенства $arcctgx \neq a$.

1) При $a \notin (0, \pi)$ неравенство верно при всех действительных x.

2) При $a \in (0, \pi)$ неравенство верно при всех действительных x, кроме $x = ctga$.

Пример. Решить неравенство $\pi - 3 \le arcctg(x-1) < \pi/2$.

Решение. Так как числа $\pi - 3$ и $\pi/2$ принадлежат интервалу $(0, \pi)$, на котором функция котангенс строго убывает, то, применяя эту функцию к неравенству, приходим к равносильному неравенству: $ctg(\pi - 3) \ge x - 1 > ctg(\pi/2)$, или $0 < x - 1 \le ctg(\pi - 3)$, откуда находим решения: $1 < x \le ctg(\pi - 3) + 1$.

2.4. Различные типы тригонометрических задач и методы их решения

Если речь идёт о решении тригонометрических уравнений, то основная схема их решения во многом совпадает с аналогичной схемой решения алгебраических уравнений. Так же как и в алгебре, решение тригонометрического уравнения сводится к решению элементарных (простейших) уравнений. Средства решения – тригонометрические и алгебраические преобразования, разложение на множители, замена неизвестной и другие известные методы и приёмы. Таким образом, решение алгебраического уравнения – очень часто встречающийся этап решения уравнений самых различных видов. Именно поэтому навыки и умения *решать алгебраические уравнения* являются фундаментальными и должны быть отработаны в первую очередь.

Одна из особенностей тригонометрических уравнений состоит в том, что *ответ* во многих случаях *может быть записан различными способами*. Например, ответ, записанный с помощью функции арксинус, может быть также записан и через арктангенс, поскольку справедливо тождество $\arcsin\alpha = arctg\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, где $|\alpha| < 1$. Чаще всего ответы к одной и той же тригонометрической задаче оказываются по форме различными из-за выбора различных способов решения, приводящих к различным элементарным уравнениям.

Другой особенностью тригонометрических задач является то, что из-за периодичности основных тригонометрических функций часто решения представляют собой *серии*, состоящие из бесконечного количества чисел.

Так как анализ и классификация многих из существующих методов решения алгебраических задач уже были проведены в разделе «Алгебраические уравнения и неравенства», то в данном разделе не будем подробно останавливаться на этих методах. Большинство из них успешно используются и при решении тригонометрических уравнений. Перечислим, пожалуй, лишь некоторые из наиболее часто используемых подходов для решения тригонометрических задач.

Использование тригонометрических (и прочих) преобразований

Большинство тригонометрических уравнений (исключая простейшие, а также те, которые заменой сразу сводятся к алгебраическим, и некоторые другие) требуют выполнения различных преобразований входящих в уравнение выражений: тригонометрических (с помощью тригонометрических формул), а также алгебраических.

В рассмотренном ниже примере тригонометрические преобразования позволяют свести уравнение вначале к простейшему, а уже затем, решая полученное элементарное уравнение, привести задачу к решению квадратного уравнения с целочисленным параметром.

Пример 1 [Физфак-2001,март]. *Решить уравнение*

$$2\sin 3x \cdot \sin\left(4x^2\right) + \cos\left(4x^2 + 3x\right) = 0 .$$

Решение. Чтобы упростить уравнение, преобразуем вначале произведение синусов в разность косинусов:

$$\left(\cos\left(3x - 4x^2\right) - \cos\left(3x + 4x^2\right)\right) + \cos\left(4x^2 + 3x\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\left(4x^2 - 3x\right) = 0 .$$

Решая это уравнение простейшего вида, приходим к квадратному уравнению с целым параметром n:

$$4x^2 - 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \text{ , } \Leftrightarrow\; 4x^2 - 3x - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0 .$$

Необходимым и достаточным условием того, что это уравнение имеет решения, является условие неотрицательности его дискриминанта $D = 9 + 16\left(\pi/2 + \pi n\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; n = 0,1,2,...$ Решения находим по формуле корней квадратного уравнения $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 16\left(\pi/2 + \pi n\right)}}{8}$, где $n = 0,1,2,...$

В следующем примере вначале используется простое тригонометрическое преобразование, которое позволяет в результате рассмотреть полученное уравнение как квадратное относительно тригонометрической функции $\sin x$.

Пример 2 [Химфак-1998]. *Решить уравнение*

$$\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2 .$$

Решение. Заменив $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, перепишем уравнение в следующем виде

$$\sin^2 x - (\cos 2x + \cos 6x)\sin x + 1 = 0 .$$

Будем решать теперь полученное уравнение как квадратное относительно функции $\sin x$. Согласно теории, чтобы это уравнение имело решения, необходимо, чтобы его дискриминант принимал неотрицательные значения:

$$D = (\cos 2x + \cos 6x)^2 - 4 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\cos 2x + \cos 6x| \ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos 2x + \cos 6x \ge 2 \\ \cos 2x + \cos 6x \le -2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x + \cos 6x = 2 \\ \cos 2x + \cos 6x = -2. \end{array}\right.$ Рассмотрим отдельно каждый из этих двух случаев.

1) Пусть $\cos 2x + \cos 6x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ x = \pi k/3, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z$.

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + \pi m, m \in Z .$$

В этом случае решений нет, так как система $\begin{cases} x = \pi n, n \in Z \\ x = \pi/2 + \pi m, m \in Z \end{cases}$ противоречива.

2) Пусть теперь $\cos 2x + \cos 6x = -2$, т.е. $\begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/2 + \pi n, n \in Z \\ x = \pi/6 + \pi k/3, k \in Z \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. В этом случае исходное уравнение принимает вид

$$\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2 + 2\pi m, m \in Z .$$

Последняя серия и будет образовывать множество решений уравнения.

Ответ: $x = -\pi/2 + 2\pi m, m \in Z$.

Метод разложения на множители

Это известный алгебраический приём, применимый и в тригонометрии. Мы выделяем его в отдельный метод в силу его широкой распространённости. При решении тригонометрических уравнений разложением на множители, когда от уравнения переходят к совокупности уравнений, следует помнить, что *не принято дублировать* в ответе полученные значения неизвестной (т.е. надо избегать ситуаций, когда одни и те же значения неизвестной записываются в ответе в составе различных серий решений). Существуют приёмы, позволяющие отследить возникновение «дублей» и не допустить их включения в ответ.

В рассмотренном далее примере предварительные тригонометрические преобразования позволяют выделить общий множитель, благодаря чему уравнение затем легко расщепляется на совокупность двух более простых уравнений.

Пример 1 [Физфак-2002,март]. *Решить уравнение*

$$2\sqrt{3}\sin^2 6x\cdot tg(\cos x)+\cos 12x=1.$$

Решение. Заменим выражение $\sin^2 6x$ на $\dfrac{1-\cos 12x}{2}$ и получим в итоге:

$$\sqrt{3}(1-\cos 12x)\cdot tg(\cos x)-(1-\cos 12x)=0.$$

Раскладывая теперь левую часть уравнения на множители, приходим к уравнению

$$(1-\cos 12x)\left(\sqrt{3}tg(\cos x)-1\right)=0.$$

Осталось решить равносильную этому уравнению совокупность двух тригонометрических уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos 12x=1\\ tg(\cos x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n/6,\,n\in Z\\ \cos x=\pi/6+\pi k,\,k\in Z.\end{array}\right.$ Второе из уравнений имеет решения только при $k=0$: $x=\pm\arccos(\pi/6)+2\pi m,\,m\in Z$.

Ответ: $x=\pi n/6,\,n\in Z$, $x=\pm\arccos(\pi/6)+2\pi m,\,m\in Z$.

В следующем примере при решении уравнения возможно образование в ответе «дублей», но в действительности их удаётся исключить ещё в процессе решения путём простейшего анализа уравнений в полученной совокупности.

Пример 2 [Химфак-2000,май]. *Решить уравнение*

$$\cos 0{,}2x-\cos 0{,}8x+\cos 0{,}6x=1.$$

Решение. Перенесём в данном уравнении все слагаемые в одну сторону и разложим на множители:

$$(1+\cos 0{,}8x)-(\cos 0{,}6x+\cos 0{,}2x)=0\ \Leftrightarrow\ 2\cos^2 0{,}4x-2\cos 0{,}4x\cdot\cos 0{,}2x=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 0{,}4x(\cos 0{,}4x-\cos 0{,}2x)=0\ \Leftrightarrow\ 4\cos 0{,}4x\cdot\sin 0{,}3x\cdot\sin 0{,}1x=0.$$

Формально последнее уравнение расщепляется на совокупность трёх простейших уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos 0{,}4x=0\\ \sin 0{,}3x=0\\ \sin 0{,}1x=0,\end{array}\right.$ однако заметим, что второе из уравнений является следствием третьего, и поэтому содержит все его решения. По этой причине третье уравнение оптимальнее будет «отбросить» и решать совокупность оставшихся двух уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos 0{,}4x=0\\ \sin 0{,}3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\pi/4+5\pi n/2,\,n\in Z;\\ x=10\pi k/3,\,k\in Z.\end{array}\right.$

Метод замены переменных

Это, как известно, один из наиболее распространённых методов, используемых при решении уравнений любой природы, в том числе и тригонометрических. Количество вводимых переменных, а также выбор того, что именно принимать за новую переменную (переменные), обычно обусловлены общей целесообразностью и удобством решения получаемого в результате уравнения, и зависит от конкретной задачи. После проведённой замены часто имеем некоторое алгебраическое уравнение.

Не так уж редки среди экзаменационных задач уравнения, которые, хотя и являются тригонометрическими по внешнему виду, по существу таковыми не оказываются, поскольку уже после первого шага – замены неизвестной – превращаются в алгебраические, а возвращение к тригонометрии происходит лишь на этапе решения элементарных тригонометрических уравнений. Подчеркнём: замену неизвестной следует делать в большинстве случаев при первой же возможности, получившееся после замены уравнение необходимо решить до конца, включая этап отбора корней, и лишь затем возвратиться к первоначальной неизвестной, сделав обратную подстановку.

Пример 1 [Психфак-2001]. *Решить уравнение*

$$3\sin^2 x-3\cos x-6\sin x+2\sin 2x+3=0.$$

Решение. Начнём постепенно преобразовывать уравнение:

$$3\sin^2 x-3(\cos x+2\sin x)+4\sin x\cos x+\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\right)=0,$$

$$\left(4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x\right)-3(2\sin x+\cos x)+2=0,$$

$$(2\sin x+\cos x)^2-3(2\sin x+\cos x)+2=0.$$

Теперь, когда стала ясной его структура, сделаем подстановку $t=2\sin x+\cos x$ и получим квадратное уравнение относительно новой переменной t: $t^2-3t+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2. \end{array}\right.$ Заменив обратно t на выражение $2\sin x+\cos x$, приходим к совокупности двух тригонометрических уравнений, которые решаем введением вспомогательного аргумента φ: $\left[\begin{array}{l} 2\sin x+\cos x=1 \\ 2\sin x+\cos x=2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt5}\sin x+\frac{1}{\sqrt5}\cos x=\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5}\sin x+\frac{1}{\sqrt5}\cos x=\frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x+\varphi)=\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(x+\varphi)=\frac{2}{\sqrt5}, \end{array}\right. \quad \text{где } \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt5}.$$

Ответ: $x=-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi n, n\in Z$,

$$x=-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+(-1)^k\arcsin\frac{2}{\sqrt5}+\pi k, k\in Z.$$

Пример 2 [ВМиК-2002]. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}\sqrt{13\cos x+98\sin y}-\sqrt{13\cos x+28\sin y}=4\\ 2\sqrt{13\cos x+28\sin y}-\sqrt{70\sin y+8}=2.\end{cases}$$

Решение. В данной задаче удобно сделать (главное, не побояться этого) тройную подстановку: $a=\sqrt{13\cos x+98\sin y}\ge 0$, $b=\sqrt{13\cos x+28\sin y}\ge 0$, $c=\sqrt{70\sin y+8}\ge 0$. Самостоятельно составив третье уравнение с неизвестными a,b,c, добавим его в систему, и в результате получим следующую алгебраическую систему уравнений $\begin{cases}a-b=4\\ 2b-c=2\\ a^2-b^2=c^2-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b+4\\ c=2b-2\\ (b+4)^2-b^2=(2b-2)^2-8,\end{cases}$

приводящую к единственному неотрицательному решению $\begin{cases}a=9\\ b=5\\ c=8.\end{cases}$ Выполняя обратную подстановку, приходим к несложной тригонометрической системе уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{13\cos x+98\sin y}=9\\ \sqrt{13\cos x+28\sin y}=5\\ \sqrt{70\sin y+8}=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin y=\dfrac{4}{5}\\ \cos x=\dfrac{1}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=(-1)^k\arcsin\dfrac{4}{5}+\pi k, k\in Z;\\ x=\pm\arccos\dfrac{1}{5}+2\pi n, n\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $x=\pm\arccos(1/5)+2\pi n, n\in Z$, $y=(-1)^k\arcsin(4/5)+\pi k, k\in Z$.

Метод оценок

Этот нестандартный метод уже рассматривался в разделе «Алгебраические уравнения и неравенства» в Части 1 данного пособия. Обратимся сразу к примерам, в каждом из которых использование оценок значений для ограниченных функций позволяет эффективно решить задачу.

Пример 1 [Олимпиада «Ломоносов-2006»]. *Решить неравенство*

$$4(1-tgx)^{2004}+(1+tgx)^{2006}\ge 2^{2006}.$$

Решение. Положим $t=tgx$, тогда неравенство примет алгебраический вид

$$4(1-t)^{2004}+(1+t)^{2006}\ge 2^{2006}.$$

Далее рассмотрим три возможных случая.

1) Если $t\ge 1$, то имеем оценки:

$$4(1-t)^{2004}+(1+t)^{2006}\ge(1+t)^{2006}\ge(1+1)^{2006}=2^{2006},$$

т.е. неравенство верно при всех таких t.

2) Если $t\le -1$, то имеем аналогично оценки:

$$4(1-t)^{2004}+(1+t)^{2006}\ge 4(1-t)^{2004}\ge 4(1-(-1))^{2004}=2^{2006},$$

т.е. неравенство верно и при этих t.

3) Наконец, пусть $-1<t<1$, тогда сделаем тригонометрическую подстановку $t=\cos\varphi$, $0<\varphi<\pi$ (тогда $0<\varphi/2<\pi/2$, $0<\sin(\varphi/2)<1$, $0<\cos(\varphi/2)<1$):

$$4(1-\cos\varphi)^{2004}+(1+\cos\varphi)^{2006}=4\left(2\sin^2(\varphi/2)\right)^{2004}+\left(2\cos^2(\varphi/2)\right)^{2006}=$$
$$=2^{2006}\left(\sin^{4008}(\varphi/2)+\cos^{4012}(\varphi/2)\right)<2^{2006}\left(\sin^2(\varphi/2)+\cos^2(\varphi/2)\right)=2^{2006},$$

что противоречит решаемому неравенству.

Таким образом, неравенство равносильно условию $|t|\ge 1$. Делая обратную подстановку, получаем неравенство $|tgx|\ge 1$, решая которое, находим ответ.

Ответ: $x\in[\pi/4+\pi n,\pi/2+\pi n)\cup(\pi/2+\pi n,3\pi/4+\pi n]$, где $n\in Z$.

<u>Пример 2</u> [ВМК-2001,устн.]. *Решить уравнение* $\sqrt[6]{\frac{1}{2}-\sin x}+\sqrt[6]{\frac{1}{2}+\sin x}=1$.

Решение. ОДЗ: $-1/2\le\sin x\le 1/2$. Здесь так же, как и в предыдущем примере, целесообразно рассмотреть на ОДЗ три возможных случая.

1) Если $-1/2<\sin x<1/2$, то $\sqrt[6]{1/2-\sin x}>1/2-\sin x$ и $\sqrt[6]{1/2+\sin x}>1/2+\sin x$. Складывая почленно два последних неравенства, получаем следующую оценку значений для левой части уравнения:

$$\sqrt[6]{1/2-\sin x}+\sqrt[6]{1/2+\sin x}>1,$$

что вступает в противоречие с решаемым уравнением, т.е. решений нет.

2) Если $\sin x=1/2$, то подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что оно выполняется. Таким образом, имеем серию решений $x=(-1)^n\pi/6+\pi n, n\in Z$.

3) Если $\sin x=-1/2$, то подстановкой в исходное уравнение аналогично убеждаемся, что оно выполняется. Таким образом, имеем ещё одну серию решений $x=(-1)^k(-\pi/6)+\pi k, k\in Z$. Объединяя решения, приходим к ответу.

Ответ: $x=\pm\pi/6+\pi m, m\in Z$.

Перейдём к рассмотрению распространённых *видов тригонометрических задач,* встречающихся на вступительных экзаменах по математике.

Задачи на упрощение и вычисление значений тригонометрических выражений, их сравнение, а также на доказательство тригонометрических тождеств и неравенств

Успешное решение задач указанного типа во многом опирается на хорошее знание тригонометрических формул и, конечно, алгебраических преобразований, умение их применить для качественного упрощения задачи. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Упростить и вычислить $\cos\frac{9\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}$.

Решение. $\cos\frac{9\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\frac{3\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=$

$$=\frac{2\sin(\pi/5)\cos(\pi/5)\cos(2\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\frac{2\sin(2\pi/5)\cos(2\pi/5)}{2\sin(\pi/5)}=\frac{\sin(4\pi/5)}{2\sin(\pi/5)}=\frac{\sin(\pi-\pi/5)}{2\sin(\pi/5)}=$$

$$=\frac{\sin(\pi/5)}{2\sin(\pi/5)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2 [ВМК-1997,устн.]. *Сравнить числа:* $\sin\frac{30\pi}{11}$ *и* $\cos 406^0$.

Решение. Учитывая, что удобнее сравнивать между собой функции одного вида (например, синус с синусом), имеющие одинаковую меру угла (например, выраженную в радианах), вначале упростим каждое из чисел: $\sin\frac{30\pi}{11}=\sin\left(2\pi+\frac{8\pi}{11}\right)=\sin\frac{8\pi}{11}$, причём обратим внимание, что $\frac{\pi}{2}<\frac{8\pi}{11}<\frac{3\pi}{4}$. Далее, $\cos 406^0=\cos\left(406\cdot\frac{\pi}{180}\right)=\cos\frac{203\pi}{90}=\cos\left(2\pi+\frac{23\pi}{90}\right)=\cos\frac{23\pi}{90}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{22\pi}{90}\right)=$

$=\sin\frac{11\pi}{45}$, причём $\frac{11\pi}{45}<\frac{\pi}{4}$. Таким образом, имеем следующую цепочку:

$$\sin\frac{30\pi}{11}=\sin\frac{8\pi}{11}>\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}>\sin\frac{11\pi}{45}=\cos 406^0,$$

которая и обосновывает ответ. *Ответ:* первое число больше.

Пример 3. Доказать тождество

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right)=\frac{3}{2}.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть тождества:

$$\left(\frac{1-\cos(\pi/8)}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos(3\pi/8)}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos(5\pi/8)}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\cos(7\pi/8)}{2}\right)^2=$$

$$=1-\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}}{2}+\frac{\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}}{4}=$$

$$=1-\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}}{2}+\frac{4+\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)}{8}=\frac{3}{2},$$

так как суммы косинусов в числителях обеих дробей равны нулю.

Пример 4. Упростить и вычислить:

а) $\arcsin(\sin 10)$; *б)* $\sin\left(arcctg\sqrt{15}\right)$; *в)* $\arcsin(\cos 17)$.

Решение. а) Было бы ошибкой написать, что $\arcsin(\sin 10)=10$, так как тождество $\arcsin(\sin x)\equiv x$ справедливо только при $x\in[-\pi/2,\pi/2]$. Чтобы использование данного тождества стало возможным, надо предварительно преобразованиями добиться того, чтобы аргумент под знаком синуса стал принимать значения из указанного отрезка. Попробуем сделать это, для начала, используя периодичность синуса. Если вычесть один период, то получим $\arcsin(\sin 10)=\arcsin(\sin(10-2\pi))$, но $10-2\pi>\pi/2$, и тождество всё равно применять нельзя. Если вычесть два периода, то получим $\arcsin(\sin(10-4\pi))$, однако $10-4\pi<-\pi/2$ и тождество по-прежнему применять нельзя. То есть получили, что если вычесть один период, то этого мало, а если два, то много. Тогда попробуем вычесть полтора периода. Воспользуемся формулой приведения $\sin\alpha=\sin(3\pi-\alpha)$: $\arcsin(\sin 10)=\arcsin(\sin(3\pi-10))$. Вот теперь число $3\pi-10$ попадает в нужный отрезок $[-\pi/2,\pi/2]$, и, применяя тождество $\arcsin(\sin x)\equiv x$, получаем ответ: $\arcsin(\sin 10)=3\pi-10$.

б) Для упрощения выражения $\sin\left(arcctg\sqrt{15}\right)$ вспомним, какие из известных тригонометрических формул связывают синус и котангенс. Это формула $1+ctg^2\alpha=1/\sin^2\alpha \quad (\alpha\neq\pi n, n\in Z)$. Выразим из неё синус через котангенс: $|\sin\alpha|=1/\sqrt{1+ctg^2\alpha}$. Подставим в эту формулу вместо α выражение $arcctg\sqrt{15}$. Учтём, что $0<arcctg\sqrt{15}<\pi$, и поэтому $\sin\left(arcctg\sqrt{15}\right)>0$. Тогда по формуле $\sin\left(arcctg\sqrt{15}\right)=1/\sqrt{1+ctg^2\left(arcctg\sqrt{15}\right)}$, используя соотношение $ctg(arcctgx)=x$ при любом x, получаем ответ: $\sin\left(arcctg\sqrt{15}\right)=1/4$.

в) Воспользуемся тождеством $\arcsin x+\arccos x=\pi/2 \quad (-1\leq x\leq 1)$: $\arcsin(\cos 17)=\pi/2-\arccos(\cos 17)$. Попробуем вначале с помощью периодичности косинуса добиться того, чтобы аргумент косинуса в последнем выражении оказался в пределах от 0 до π, и тогда можно будет воспользоваться известным тождеством $\arccos(\cos x)\equiv x$ при $x\in[0,\pi]$. Если вычесть из 17 радиан два периода, то этого мало, так как $17-4\pi>\pi$, а если три – то слишком много, поскольку $17-6\pi<0$. Значит, попробуем вычесть два с половиной периода, то есть 5π, и действительно, $0<17-5\pi<\pi$. Возьмём для выполнения преобразований формулу приведения $\cos\alpha=-\cos(5\pi-\alpha)$. Тогда получим

$$\arccos(\cos 17)=\arccos(-\cos(5\pi-17))=\pi-\arccos(\cos(5\pi-17))$$

(так как $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ при любом $x\in[-1,1]$). Далее, в силу чётности косинуса, $\pi-\arccos(\cos(5\pi-17))=\pi-\arccos(\cos(17-5\pi))=\pi-(17-5\pi)=6\pi-17$, и тогда $\arcsin(\cos 17)=\pi/2-(6\pi-17)=17-11\pi/2$.

Можно было решать задачу иначе, воспользовавшись формулой приведения $\cos\alpha = \sin(\alpha - 11\pi/2)$, тогда сразу получили бы $\arcsin(\cos 17) = = \arcsin(\sin(17 - 11\pi/2)) = 17 - 11\pi/2$, поскольку $-\pi/2 < 17 - 11\pi/2 < \pi/2$.

Задачи на построение графиков тригонометрических функций, нахождение их наибольших (наименьших) значений, периода (или доказательство непериодичности), построение ГМТ, использование графического подхода при решении уравнений

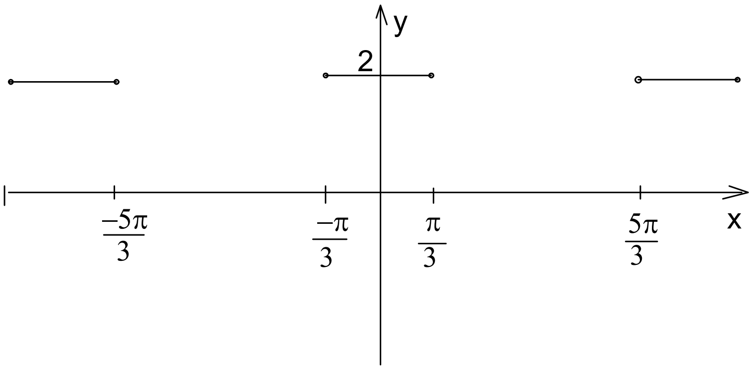
Рассмотрим некоторые примеры, в которых графический подход используется для решения тригонометрической задачи.

Пример 1 [ВМК-2002,устн.]. *Построить график функции*

$$f(x) = \sqrt{2\cos x + 2\sqrt{2\cos x - 1}} + \sqrt{2\cos x - 2\sqrt{2\cos x - 1}}.$$

Решение. Область определения данной функции задаётся неравенством $\cos x \geq 1/2$, т.е. $x \in [-\pi/3 + 2\pi n, \pi/3 + 2\pi n]$, где $n \in Z$. Пусть $t = \sqrt{2\cos x - 1}$, заметим, что $0 \leq t \leq 1$. Тогда уравнение функции примет вид

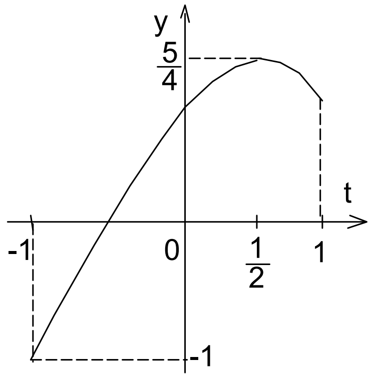
$$g(t) = \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = |t+1| + |t-1|.$$



С учётом $0 \leq t \leq 1$ получаем: $g(t) \equiv 2$, $t \in [0,1]$. Возвращаясь к первоначальной переменной, имеем $f(x) \equiv 2$ при $x \in [-\pi/3 + 2\pi n, \pi/3 + 2\pi n]$, $n \in Z$. Осталось построить график функции.

Задача решена.

Пример 2 [ВМК-2002,устн.]. *Найти наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x) = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$.



Решение. Воспользуемся заменой переменной. Обозначим $t = \sin^3 x$, где $-1 \leq t \leq 1$. Тогда задача сведётся к нахождению наименьшего и наибольшего значений квадратичной функции $g(t) = -t^2 + t + 1$ на отрезке $t \in [-1,1]$. Построим график этой функции. С помощью рисунка определяем наименьшее и наибольшее значения:

$$\min_{x \in R} f(x) = \min_{t \in [-1,1]} g(t) = g(-1) = -1 \text{ и}$$

$$\max_{x \in R} f(x) = \max_{t \in [-1,1]} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

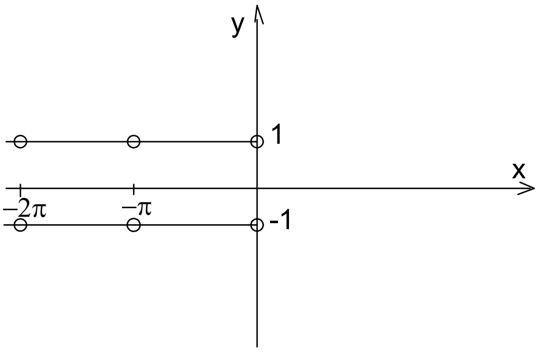
Пример 3 [Геолог.-2001,май,устн.]. *Построить множество точек плоскости, координаты которых $(x;y)$ удовлетворяют уравнению*

$$|y|=\frac{\cos(|x|+\pi/2)}{\sin x}.$$

Решение. Упростим правую часть уравнения: если $x>0$, то получаем $|y|=\frac{\cos(x+\pi/2)}{\sin x}=-1$, что невозможно.

Это означает, что вся фигура будет располагаться в левой полуплоскости.

Пусть теперь $x<0$, тогда уравнение примет вид $|y|=1 \Leftrightarrow y=\pm1$. С учётом условия $\sin x\neq 0$, т.е. $x\neq \pi n, n\in Z$, строим ГМТ (см. рис.).

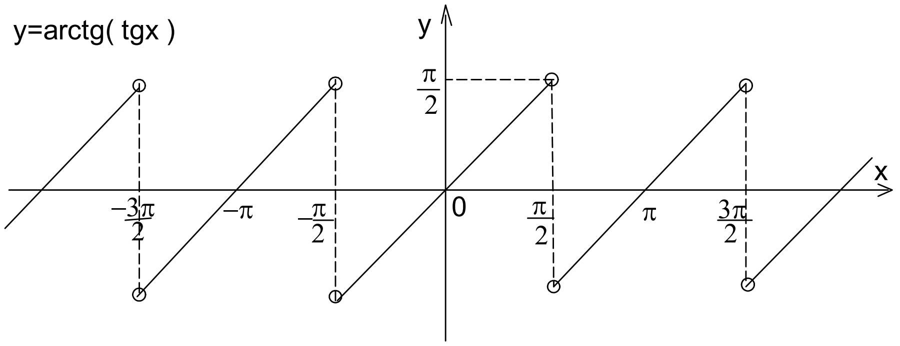


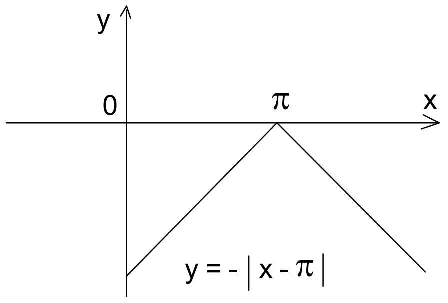
Пример 4 [ВМК-2002,устн.]. *Решить уравнение* $|x-\pi|+arctg(tgx)=0$.

Решение. Эту задачу удобно решать графически. Для этого перепишем уравнение в таком виде, чтобы разнородные функции оказались по разные стороны от знака равенства (так проще строить графики): $arctg(tgx)=-|x-\pi|$.

Построим графики левой и правой частей уравнения.

Функция $y=arctg(tgx)$ не определена в точках вида $x=\pi/2+\pi n, n\in Z$, является нечётной и периодической с периодом, равным π. На интервале $-\pi/2<x<\pi/2$ её график, в силу тождества $arctg(tgx)\equiv x$, верного при любом $x\in(-\pi/2,\pi/2)$, совпадает с графиком функции $y=x$. Таким образом, график функции $y=arctg(tgx)$ имеет вид, изображённый на рисунке.





Строим график функции $y=-|x-\pi|$.

Совмещая оба графика в одной системе координат и определяя их точки пересечения, приходим к ответу: $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

В практике конкурсного экзамена встречаются и такие нестандартные тригонометрические задачи, решение которых основывается на чётности (нечётности), монотонности, периодичности, знакоопределённости и других *свойствах функций*.

<u>Пример 5</u> . При каких целых отрицательных n функция

$$f(x) = \cos 7nx \cdot \sin \frac{25x}{n^2}$$

является периодической с периодом 7π ?

Решение. Согласно опеределению периодической функции, для любого действительного x должно выполняться условие

$$f(x + 7\pi) = f(x),$$

т.е.
$$\cos(7n(x + 7\pi)) \cdot \sin\left(\left(\frac{25(x + 7\pi)}{n^2}\right)\right) = \cos(7nx) \cdot \sin\left(\frac{25 \cdot x}{n^2}\right). \qquad (1)$$

Положим в последнем тождестве $x = 0$:

$$\cos(7n \cdot 7\pi) \cdot \sin\left(\frac{25 \cdot 7\pi}{n^2}\right) = 0 .$$

Так как $\cos 49\pi n = \cos \pi n = (-1)^n$ и, таким образом, в нуль никогда не обращается, то, следовательно, имеем уравнение относительного параметра n:

$$\sin\left(\frac{25 \cdot 7\pi}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{25 \cdot 7\pi}{n^2} = \pi k, k \in Z \text{ , } \Leftrightarrow \frac{25 \cdot 7}{n^2} = k .$$

Иными словами, требуется найти все целые отрицательные n такие, что число $25 \cdot 7$ делится нацело на n^2. Очевидно, что n^2 может принимать лишь значения 1 и 25, и, следовательно, $n = -1$ или $n = -5$. Теперь необходимо сделать проверку найденных значений n.

1) Если $n = -1$, то, подставляя в условие периодичности (1), получаем:

$$\cos(7x + 49\pi) \cdot \sin(25x + 175\pi) = \cos 7x \cdot \sin 25x \text{ - верно.}$$

2) Если $n = -5$, то подстановкой в (1) аналогично убеждаемся в том, что и это значение удовлетворяет условиям задачи. *Ответ:* $n \in \{-5; -1\}$.

Задачи, в которых необходимо отбирать корни, учитывая дополнительные условия и ограничения

Ведущий принцип при решении любой задачи – не допустить потери корней. Это означает, что при упрощении уравнения (неравенства, системы и проч.) в процессе решения можно либо пользоваться равносильными преобразованиями, либо, в крайнем случае, допускать появление посторонних корней. То есть каждое последующее уравнение в цепочке преобразований должно быть равносильно предыдущему или являться его следствием. В последнем случае одним из основных способов отбора корней (отсеивания посторонних), является проверка.

Следует отметить, что в случае тригонометрических уравнений трудности, связанные с отбором корней и проверкой, как правило, резко возрастают (по сравнению с уравнениями алгебраическими). Ведь приходится проверять серии, состоящие из бесконечного числа членов. К тому же эти серии могут иметь сложный трансцендентный вид, что часто приводит к нетривиальным задачам на сравнение и оценку чисел и выражений.

Пример 1 [Социолог.-2000]. *Решить уравнение*

$$\sqrt{11-8\cos^4 x-4\sin x\cos x}=3\sin x+\cos x .$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\sin x+\cos x\ge 0 \\ 11-8\cos^4 x-4\sin x\cos x=(3\sin x+\cos x)^2 . \end{cases}$$

Решим вначале уравнение системы.

$$11-8\cos^4 x-2\sin 2x=9(1-\cos^2 x)+3\sin 2x+\cos^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+8\cos^2 x-8\cos^4 x-5\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2+8\cos^2 x(1-\cos^2 x)-5\sin 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+2\sin^2 2x-5\sin 2x=0 \Leftrightarrow (\sin 2x-1/2)(\sin 2x-2)=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &2x=\pi/6+2\pi n, n\in Z \\ &2x=5\pi/6+2\pi k, k\in Z \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=\pi/12+\pi n, n\in Z \\ &x=5\pi/12+\pi k, k\in Z. \end{aligned}\right.$$

Подстановкой проверим обе найденные серии, удовлетворяют ли они неравенству системы.

1) Рассмотрим первую серию $x=\pi/12+\pi n, n\in Z$. Воспользуемся тождествами $\sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cos\alpha$:

$$3\sin(\pi/12+\pi n)+\cos(\pi/12+\pi n)=3\cdot(-1)^n\sin(\pi/12)+(-1)^n\cos(\pi/12).$$

Если $n=2l, l\in Z$, то $3\cdot(-1)^n\sin(\pi/12)+(-1)^n\cos(\pi/12)=3\sin(\pi/12)+\cos(\pi/12)>0$, таким образом, получаем часть решений $x=\pi/12+2\pi l, l\in Z$. Если $n=2l+1$, $l\in Z$, то получим $3\cdot(-1)^n\sin(\pi/12)+(-1)^n\cos(\pi/12)=-3\sin(\pi/12)-\cos(\pi/12)<0$ - не подходят.

2) Рассмотрим вторую серию $x=5\pi/12+\pi k, k\in Z$. Подставим в неравенство: $3\sin(5\pi/12+\pi k)+\cos(5\pi/12+\pi k)=3\cdot(-1)^k\sin(5\pi/12)+(-1)^k\cos(5\pi/12)$. Если $k=2p$, $p\in Z$, то $3\cdot(-1)^k\sin(5\pi/12)+(-1)^k\cos(5\pi/12)=3\sin(5\pi/12)+\cos(5\pi/12)>0$, таким образом, получаем часть решений $x=5\pi/12+2\pi p, p\in Z$. Если же $k=2p+1, p\in Z,$ то получаем $3\cdot(-1)^k\sin(5\pi/12)+(-1)^k\cos(5\pi/12)=$
$=-3\sin(5\pi/12)-\cos(5\pi/12)<0$ - не подходят.

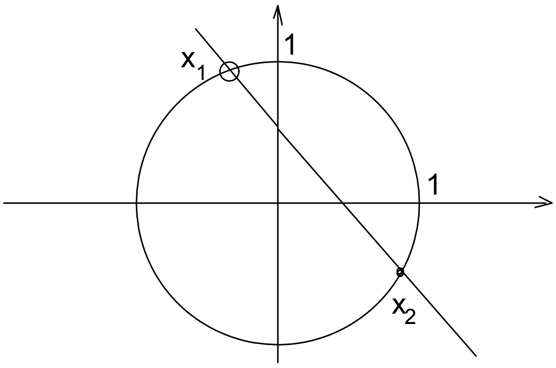
Ответ: $x=\pi/12+2\pi l, l\in Z$, $x=5\pi/12+2\pi p, p\in Z$.

Пример 2 [Черноморский филиал МГУ, Севастополь-2000,май].
Решить уравнение $1+|\cos x| = \cos x + 2\sin x$.

Решение. Для раскрытия модуля рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \ge 0\\ \sin x = 1/2\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0\\ 2\sin x + 2\cos x = 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \ge 0\\ x = (-1)^n\ \pi/6 + \pi n, n \in Z\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x < 0\\ \cos(x - \pi/4) = 1/\left(2\sqrt{2}\right).\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система даёт серию $x = \pi/6 + 2\pi n, n \in Z$. Уравнение второй системы приводит к серии $x = \dfrac{\pi}{4} \pm \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z$.



Необходимо отобрать из неё значения, удовлетворяющие условию $\cos x < 0$. Воспользуемся геометрической интерпретацией решений на тригонометриической окружности для уравнения $2\sin x + 2\cos x = 1$. Для этого проведём прямую $2Y + 2X = 1$.

Очевидно, что правой точке на окружности соответствует серия $x_2 = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z$ (косинус положителен), а левой точке – серия $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m, m \in Z$ (косинус отрицателен).

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m, m \in Z$.

Обратимся теперь к рассмотрению некоторых конкретных видов тригонометрических уравнений и неравенств.

Однородные тригонометрические уравнения 1-й и 2-й степеней относительно функций $\sin x$ *и* $\cos x$

Однородные уравнения 1-й степени – это уравнения вида

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

($ab \ne 0$). Решаются такие уравнения либо делением обеих частей уравнения на $\cos x$ и сведением к элементарному уравнению $tgx = -b/a$, либо делением уравнения на $\sin x$ и сведением к уравнению $ctgx = -a/b$. Заметим, что в данном однородном уравнении выражения $\cos x$ и $\sin x$ не могут обращаться в нуль, в противном случае это противоречило бы основному тригонометрическому тождеству.

Однородные уравнения 2-й степени – это уравнения вида

$$a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x\cdot\cos x+c\cdot\cos^2 x=0, \qquad (1)$$

где среди коэффициентов a, b и c есть отличные от нуля.

1) Если $ac\neq 0$ (ни один из старших коэффициентов a и c не обращается в нуль), то уравнения решают делением обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ с последующей заменой $t=tgx$. Заметим, что при этом $\cos^2 x\neq 0$, так как в противном случае из уравнения получили бы, что и $\sin^2 x=0$, что одновременно невозможно. В результате задача сводится к решению квадратного уравнения относительно новой неизвестной t:

$$at^2+bt+c=0\,.$$

Заметим, что уравнения указанного вида можно также решать делением на $\sin^2 x$ ($\sin^2 x\neq 0$), заменой $u=ctgx$ с последующим сведением к квадратному уравнению $cu^2+bu+a=0$.

2) Если же в уравнении (1) один из коэффициентов a или c обращается в нуль, то такое уравнение решают разложением на множители, например,

$$a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x\cdot\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x\cdot(a\sin x+b\cos x)=0 \text{ и т.д.}$$

<u>Пример</u>. Решить уравнение $10\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

Решение. Так как $\cos^2 x\neq 0$, то, поделив обе части уравнения на это выражение и сделав подстановку $t=tgx$, получаем квадратное уравнение $10t^2+t-2=0$, которое имеет два действительных корня

$$\left[\begin{array}{l} t=-1/2\\ t=2/5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx=-1/2\\ tgx=2/5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-arctg(1/2)+\pi n, n\in Z\\ x=arctg(2/5)+\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-arctg(1/2)+\pi n, n\in Z$, $x=arctg(2/5)+\pi k, k\in Z$.

Неоднородные тригонометрические уравнения 1-й и 2-й степеней относительно функций $\sin x$, $\cos x$

Неоднородные уравнения 1-й степени – это уравнения вида

$$a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$$

($a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$). Такие уравнения можно решать тремя способами (в каждом конкретном случае следует выбирать наиболее удобный способ).

Во-первых, это можно сделать *методом введения вспомогательного аргумента*. Для этого поделим обе части данного уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\,.$$

Приняв $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ за $\cos\varphi$, а $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, соответственно, за $\sin\varphi$, получим

$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если правая часть уравнения не превышает по модулю единицу $\left(c^2 \le a^2+b^2\right)$, то уравнение имеет решения

$$x=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+\pi n,\ n\in Z,\text{ где }\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Этот метод позволяет быстро решить уравнение, однако форма полученной записи ответа достаточно громоздка, и в случаях, когда требуется дальнейшее исследование найденных корней, этот метод может оказаться неудобным.

Во-вторых, можно перейти к половинному аргументу, воспользовавшись формулами $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, $c=c\cdot\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$, и в итоге свести уравнение к однородному тригонометрическому уравнению 2-й степени относительно функций $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos\frac{x}{2}$:

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right),$$

которое делением на $\cos^2\frac{x}{2}\neq 0$ и заменой $t=tg\frac{x}{2}$ сводится к квадратному уравнению относительно новой неизвестной t.

В-третьих, можно применить *формулы универсальной подстановки* $\sin\alpha=\frac{2tg(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}$, $\cos\alpha=\frac{1-tg^2(\alpha/2)}{1+tg^2(\alpha/2)}$ и получить алгебраическое уравнение:

$$a\cdot\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}+b\cdot\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=c$$

(для тех x, при которых $tg(x/2)$ определен. Те же значения x, для которых $tg(x/2)$ не определён, следует рассмотреть отдельно, подстановкой проверив, удовлетворяют ли они решаемому исходному уравнению). После замены $t=tg(x/2)$ получаем уравнение, сводимое к квадратному относительно t, причём точно такому, что и в предыдущем способе решения.

Пример. Решить уравнение $3\sin 2x+\cos 2x+1=0$.

Решение. 1 способ.

Решим задачу с помощью введения вспомогательного аргумента:

$$3\sin 2x+\cos 2x=-1\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{\sqrt{10}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos 2x=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sin(2x+\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{10}},\text{ где }\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}},\ \Leftrightarrow\ 2x+\varphi=(-1)^{n+1}\varphi+\pi n,\ n\in Z,$$

причём при чётных $n=2k$, $k\in Z$, получаем $2x+\varphi=-\varphi+2\pi k$, или $x=-\varphi+\pi k$; при нечётных $n=2m+1$, $m\in Z$, получаем $2x+\varphi=\varphi+\pi(2m+1)$, или $x=\pi/2+\pi m$. *Ответ:* $x=-\arcsin\left(1/\sqrt{10}\right)+\pi k$, $k\in Z$; $x=\pi/2+\pi m$, $m\in Z$.

2 способ. Решим теперь ту же задачу переходом к половинному аргументу: $3\sin 2x+\cos 2x+1=0 \Leftrightarrow 3\cdot 2\sin x\cos x+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos x(3\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 3\sin x+\cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi/2+\pi m, m\in Z\\ tgx=-1/3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi/2+\pi m, m\in Z\\ x=-arctg(1/3)+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pi/2+\pi m$, $m\in Z$; $x=-arctg(1/3)+\pi n$, $n\in Z$.

3 способ. Решим, наконец, это же уравнение при помощи формул универсальной подстановки.

1) Пусть tgx определён (т.е. $\cos x\neq 0$), тогда положим $t=tgx$ и получим вместо $3\sin 2x+\cos 2x+1=0$ алгебраическое уравнение $3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{6t+1-t^2+1+t^2}{1+t^2}=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow tgx=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-arctg\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

2) Пусть теперь $\cos x=0$, т.е. $x=\pi/2+\pi m$, $m\in Z$. Сделаем проверку, подставив эту серию в исходное уравнение: $3\sin(2(\pi/2+\pi m))+\cos(2(\pi/2+\pi m))+1=$ $=3\sin(\pi+2\pi m)+\cos(\pi+2\pi m)+1=$ 0-1+1=0 – удовлетворяет уравнению.

Ответ: $x=-arctg(1/3)+\pi n$, $n\in Z$; $x=\pi/2+\pi m$, $m\in Z$.

Неоднородное уравнение 2-й степени – это уравнения вида

$$a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x\cdot\cos x+c\cdot\cos^2 x=d$$

($a^2+c^2\neq 0, d\neq 0$). Решаются такие уравнения представлением правой части d в виде $d\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$. В результате уравнение сводится к однородному уравнению 2-й степени, решение которых уже было рассмотрено выше.

Пример. Решить уравнение $-2\sin^2 x+6\sin x\cos x+2\cos^2 x=3$.

Решение. $-2\sin^2 x+6\sin x\cos x+2\cos^2 x=3\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5\sin^2 x-6\sin x\cos x+\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 5tg^2x-6tgx+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx=1/5\\ tgx=1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=arctg(1/5)+\pi n, n\in Z;\\ x=\pi/4+\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=arcctg5+\pi n$, $n\in Z$; $x=\pi/4+\pi k$, $k\in Z$.

Однородные и неоднородные тригонометрические уравнения степени выше 2-й относительно функций $\sin x$, $\cos x$

Например, *однородные уравнения 3-й степени* имеют вид

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0 .$$

Если оба коэффициента a и d не равны нулю, то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^3 x$, в результате чего получается кубическое уравнение относительно tgx. Если же хотя бы один из этих коэффициентов обращается в нуль, то уравнение решается разложением его левой части на множители. Аналогичным образом решаются и однородные уравнения произвольной натуральной степени $n > 3$, оказываясь сведёнными заменой $t = tgx$ к алгебраическим уравнениям степени n относительно переменной t.

Пример 1 [Сканави,8.388]. *Один из углов прямоугольного треугольника удовлетворяет уравнению* $\sin^3 x + \sin x\sin 2x - 3\cos^3 x = 0$. *Доказать, что треугольник равнобедренный.*

Доказательство. Приведя уравнение к виду однородного 3-й степени

$$\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - 3\cos^3 x = 0 ,$$

поделим обе его части на $\cos^3 x \neq 0$: $tg^3 x + 2tg^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (tg^3 x - tg^2 x) + (3tg^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow tg^2 x(tgx - 1) + 3(tgx - 1)(tgx + 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (tgx - 1)(tg^2 x + 3tgx + 3) = 0$. Так как выражение, заключённое во вторых скобках, в нуль не обращается, то исходное уравнение равносильно тому, что $tgx = 1$, т.е. $x = \pi/4 + \pi n, n \in Z$. Учитывая, что искомый угол $x \in (0, \pi/2)$, получаем $x = \pi/4$. Но тогда и второй острый угол прямоугольного треугольника равен $\pi/4$, т.е. треугольник – равнобедренный.

Рассмотрим пример, когда уравнение изначально не является однородным, но путём несложных преобразований может быть сведено к нему.

Пример 2. *Решить уравнение* $2\sin^3 x = \cos x$.

Решение. 1-й способ. Поделим обе части уравнения на $\cos^3 x \neq 0$:

$$2tg^3 x = 1/\cos^2 x \Leftrightarrow 2tg^3 x = tg^2 x + 1 \Leftrightarrow (2tg^3 x - 2tg^2 x) + (tg^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2tg^2 x(tgx - 1) + (tgx + 1)(tgx - 1) = 0 \Leftrightarrow (tgx - 1)(2tg^2 x + tgx + 1) = 0$. Так как выражение, заключённое во вторых скобках, в нуль не обращается, то исходное уравнение равносильно тому, что $tgx = 1$, т.е. $x = \pi/4 + \pi n, n \in Z$.

2-й способ. Можно было решить эту же задачу иначе, «умножив» правую часть уравнения на тригонометрическую единицу и сведя его, таким образом, к однородному уравнению третьей степени: $2\sin^3 x = \cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x - \cos^3 x = 0 \Leftrightarrow 2tg^3 x - tg^2 x - 1 = 0$ и далее аналогично изложенному выше.

Неоднородные уравнения вида $a\sin^{2n}x + b\sin^n x\cos^n x + c\cos^{2n}x = d \quad (d \neq 0)$ в общем случае решаются заменой правой части d на $d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^n$.

Пример 3. Решить уравнение $4\sin^2 x\cos^2 x + 4\cos^4 x = 3$.

Решение. Воспользуемся рекомендацией и «умножим» константу в правой части уравнения на квадрат тригонометрической единицы:

$$4\sin^2 x\cos^2 x + 4\cos^4 x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 \Leftrightarrow 3\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x = 0.$$

Рассматривая последнее уравнение как однородное уравнение второй степени относительно функций $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ (или как однородное уравнение четвёртой степени относительно функций $\sin x$ и $\cos x$) и решая его, находим, что $tg^2 x = 1/3 \Leftrightarrow x = \pm arctg\left(1/\sqrt{3}\right) + \pi n, n \in Z$, $\Leftrightarrow x = \pm\pi/6 + \pi n, n \in Z$.

Уравнения вида $a \cdot \cos 2x + b \cdot \sin^2 x + c \cdot \cos^2 x + d \cdot \sin x + e = 0$

Замена $t = \sin x$ приводит данное уравнение к квадратному, поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Если же вместо слагаемого $d \cdot \sin x$ уравнение содержит $d \cdot \cos x$, то необходимая замена будет $t = \cos x$.

Пример [Эконом.-1998,вечернее отд.]. *Решить уравнение*

$$\cos\left(2x^2\right) - \sqrt{3}\cos\left(x^2\right) - 2 = 0.$$

Решение. Положим $y = \cos\left(x^2\right)$, тогда получим квадратное уравнение $\left(2y^2 - 1\right) - \sqrt{3}y - 2 = 0$, или $2y^2 - \sqrt{3}y - 3 = 0$, откуда находим два корня

$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(x^2\right) = \sqrt{3} > 1 \\ \cos\left(x^2\right) = -\sqrt{3}/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \arccos\left(-\sqrt{3}/2\right) + 2\pi n, n \in Z \\ x^2 = -\arccos\left(-\sqrt{3}/2\right) + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 5\pi/6 + 2\pi n, n = 0,1,2... \\ x^2 = -5\pi/6 + 2\pi k, k = 1,2,3,... \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{5\pi/6 + 2\pi n}, n = 0,1,2,... \\ x = \pm\sqrt{-5\pi/6 + 2\pi k}, k = 1,2,3,... \end{array}\right.$$

Задачи, решаемые методом универсальной подстановки

Теоретически почти любое тригонометрическое уравнение может быть сведено (и, таким образом, решено) к алгебраическому уравнению с помощью *формул универсальной подстановки*:

$$\sin\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)},\ \cos\alpha = \frac{1 - tg^2(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}\ (\alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z),\ tg\alpha = \frac{2tg(\alpha/2)}{1 - tg^2(\alpha/2)}$$

$(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in Z)$, $ctg\alpha = \frac{1 - tg^2(\alpha/2)}{2tg(\alpha/2)} (\alpha \neq \pi n, n \in Z)$, а также

$$\sin\alpha = \frac{2ctg(\alpha/2)}{1 + ctg^2(\alpha/2)},\ \cos\alpha = \frac{ctg^2(\alpha/2) - 1}{ctg^2(\alpha/2) + 1}(\alpha \neq 2\pi n, n \in Z),\ tg\alpha = \frac{2ctg(\alpha/2)}{ctg^2(\alpha/2) - 1}$$

$$(\alpha \neq 2\pi n,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; n,k \in Z),\quad ctg\alpha = \frac{ctg^2(\alpha/2) - 1}{2ctg(\alpha/2)}\ (\alpha \neq \pi n\ , n \in Z).$$

При этом следует помнить, что левые и правые части этих равенств имеют разные области определения, и это надо учитывать во избежание потери корней (или, наоборот, приобретения посторонних корней). К тому же практическая значимость этих формул зачастую оказывается невелика из-за возникновения алгебраических уравнений высоких степеней. Однако в ряде случаев применение этих формул может быть весьма эффективным.

Пример 1 [Геолог.-1978]. *Решить уравнение* $tg2x + \sin 2x = \frac{8}{3}ctgx$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$ Сделаем замену $t = ctgx$ и получим алгебраическое уравнение $\frac{2t}{t^2 - 1} + \frac{2t}{t^2 + 1} = \frac{8t}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ 1/(t^2 - 1) + 1/(t^2 + 1) = 4/3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ctgx = 0 \\ ctgx = \pm\sqrt{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + \pi n, n \in Z; \\ x = \pm arcctg\sqrt{2} + \pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

Ответ: $x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$, $x = \pm arcctg\sqrt{2} + \pi k, k \in Z$.

Пример 2. *Решить уравнение* $3\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

Решение. 1) Пусть tgx определён, т.е. $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$. Тогда воспользуемся для решения уравнения формулами универсальной подстановки. Обозначим $t = tgx$, и уравнение примет вид

$$3 \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 = 0 .$$

Приводя выражение в левой части к общему знаменателю и упрощая, получим, что $t = -1/3 \Leftrightarrow tgx = -1/3 \Leftrightarrow x = arctg(-1/3) + \pi n$, $n \in Z$. Заметим, что найдены, вообще говоря, не все корни уравнения.

2) Осталось рассмотреть случай, когда tgx не определён, и, следовательно, формулами универсальной подстановки пользоваться нельзя. Если не рассмотреть этот случай, то возможна потеря решений. Это считается грубой ошибкой при использовании данного метода, основанного на применении формул универсальной подстановки. Итак, сделаем проверку, подставим значения $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, в исходное уравнение:

$$3\sin(2(\pi/2 + \pi k)) + \cos(2(\pi/2 + \pi k)) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0 \text{ - верно.}$$

Значит, имеем ещё одну серию решений $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$. Объединяя найденные решения, получаем окончательный ответ.

Ответ: $x = arctg(-1/3) + \pi n$, $x = \pi/2 + \pi k$, $n,k \in Z$.

В следующем примере использование формул универсальной подстановки облегчает учёт ОДЗ.

Пример 3 [Черноморский филиал МГУ-2001]. *Решить уравнение*

$$\frac{4\sin x-3}{\sqrt{7}\sin x+3\cos x}=1.$$

Решение. ОДЗ: $\sqrt{7}\sin x+3\cos x\neq 0$. Перепишем при допустимых значениях x уравнение в виде $4\sin x-3=\sqrt{7}\sin x+3\cos x$. Такое уравнение относится к неоднородным тригонометрическим уравнениям первой степени относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, и поэтому может быть решено, например, методом введения вспомогательного аргумента. Но в этом случае будет затруднительно учесть ОДЗ. Поэтому поступим иначе. Преобразуем уравнение к виду $\left(4-\sqrt{7}\right)\sin x=3(1+\cos x)\ \Leftrightarrow\ 2\left(4-\sqrt{7}\right)\sin(x/2)\cos(x/2)=6\cos^2(x/2)$. Раскладывая на множители, приходим к совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos(x/2)=0\\ \left(4-\sqrt{7}\right)\sin(x/2)-3\cos(x/2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x/2=\pi/2+\pi n, n\in Z;\\ tg(x/2)=3/\left(4-\sqrt{7}\right)=\left(4+\sqrt{7}\right)/3.\end{array}\right.$$

Первое из уравнений даёт серию $x=\pi+2\pi n, n\in Z$. Несложной проверкой убеждаемся, что эта серия целиком удовлетворяет условию необращения в нуль знаменателя в исходном уравнении. Из второго уравнения также можно найти ещё одну серию, однако вначале проверим ОДЗ. Воспользуемся для этого формулами универсальной подстановки и вычислим отвечающие последней серии x значения $\sin x$ и $\cos x$:

$$\sin x=\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{2\cdot\left(4+\sqrt{7}\right)/3}{1+\left(\left(4+\sqrt{7}\right)/3\right)^2}=\frac{3}{4};\cos x=\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{1-\left(\left(4+\sqrt{7}\right)/3\right)^2}{1+\left(\left(4+\sqrt{7}\right)/3\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Подставляя эти значения в неравенство из ОДЗ, получаем: $\sqrt{7}\sin x+3\cos x=\sqrt{7}\cdot\frac{3}{4}-3\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$=0, т.е. данная серия не относится к решениям уравнения. *Ответ:* $x=\pi(2n+1)$, $n\in Z$.

Уравнения вида $R(\sin x\pm\cos x;\sin x\cdot\cos x)=0$

Если в уравнение (неравенство, функцию) неизвестная x входит лишь в составе выражений $\sin x+\cos x$ (или $\sin x-\cos x$) и $\sin x\cdot\cos x$, то решение задачи может существенно упроститься, если реализовать замену $y=\sin x+\cos x$ (или, соответственно, $y=\sin x-\cos x$). Заметим при этом, что новая переменная может принимать значения из отрезка $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Тогда $\sin x\cdot\cos x=\left(y^2-1\right)/2$ (или, соответственно, $\sin x\cdot\cos x=\left(1-y^2\right)/2$). В результате замены получается алгебраическое уравнение (неравенство, функция), решая которое и делая обратную подстановку в равенство $y=\sin x+\cos x$

($y=\sin x-\cos x$), вы получаете искомые решения. Можно делать обратную подстановку и в уравнение $\sin 2x=\pm\left(y^2-1\right)$, однако этот способ не вполне удобен тем, что приходится делать дополнительно проверку корней, поскольку при возведении в квадрат равенства $y=\sin x\pm\cos x$, вообще говоря, появляются посторонние корни.

<u>Пример 1</u> [Черноморский филиал МГУ-2001]. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin x\cos x}=5.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$ Приводя все дроби к общему знаменателю и перенося слагаемые в одну сторону, получаем, что на ОДЗ уравнение равносильно следующему уравнению: $\sin x+\cos x-5\sin x\cos x+1=0$.

Положим $y=\sin x+\cos x$, тогда $\sin x\cdot\cos x=\left(y^2-1\right)/2$ и уравнение примет алгебраический вид $y-\frac{5}{2}\left(y^2-1\right)+1=0 \Leftrightarrow 5y^2-2y-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=7/5\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=-1\\ \sin x+\cos x=7/5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)=-1\\ \sqrt{2}\sin(x+\pi/4)=7/5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(x+\pi/4)=-1/\sqrt{2}\\ \sin(x+\pi/4)=7/\left(5\sqrt{2}\right).\end{array}\right.$$

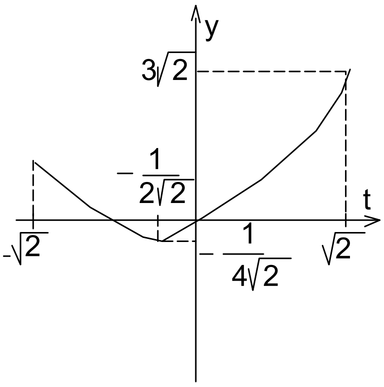
Первое из уравнений равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}x+\pi/4=\arcsin\left(-1/\sqrt{2}\right)+2\pi n, n\in Z\\ x+\pi/4=\pi-\arcsin\left(-1/\sqrt{2}\right)+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\pi/2+2\pi n\notin ОДЗ\\ x=\pi+2\pi k\notin ОДЗ.\end{array}\right.$$

Второе уравнение приводит к серии $x=-\pi/4+(-1)^m\arcsin\left(7/\left(5\sqrt{2}\right)\right)+\pi m, m\in Z$, которая удовлетворяет ОДЗ. *Ответ:* $x=-\pi/4+(-1)^m\arcsin\left(7/\left(5\sqrt{2}\right)\right)+\pi m, m\in Z$.

<u>Пример 2</u> [Геолог.-2004,устн.]. *Не используя производной, найти наименьшее и наибольшее значения функции* $y=\sin x+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin 2x+\cos x$.

Решение. Группируя слагаемые и выделяя полный квадрат, преобразуем функцию к виду: $y=(\sin x+\cos x)+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)^2$. Положим $t=\sin x+\cos x$ и учтём, что в условиях задачи $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Тогда получим квадратичную функцию $y=t\left(\sqrt{2}t+1\right)$. Построим эскиз её графика.



Согласно свойствам квадратичной функции, по эскизу графика заключаем, что наименьшее значение, равное $\left(-1/\left(4\sqrt{2}\right)\right)$, функция достигает в вершине параболы при $t=-1/\left(2\sqrt{2}\right)$, а наибольшее, равное $3\sqrt{2}$, на правом конце отрезка при $t=\sqrt{2}$. *Ответ:* $\min\limits_{x\in R} y=-1/\left(4\sqrt{2}\right)$, $\max\limits_{x\in R} y=3\sqrt{2}$.

Уравнения вида $\sin f(x)=\sin g(x)$, $\cos f(x)=\cos g(x)$, $\sin f(x)=\cos g(x)$

Уравнения вида $\sin f(x)=\sin g(x)$ решаются стандартно переносом обоих слагаемых по одну сторону от знака равенства и разложением на множители при помощи формулы разности синусов. Можно также воспользоваться эквивалентным, но, вообще говоря, более коротким способом решения:

$$\sin f(x)=\sin g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)+2\pi n\\ f(x)=\pi-g(x)+2\pi k\end{array}\right.,\text{ где } n,k\in Z,$$

имеющим простое обоснование на тригонометрической окружности.

Уравнения вида $\cos f(x)=\cos g(x)$ также можно решать либо при помощи формулы разности косинусов, либо следующим образом:

$$\cos f(x)=\cos g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)+2\pi n\\ f(x)=-g(x)+2\pi k\end{array}\right.,\text{ где } n,k\in Z.$$

Наконец, *уравнения вида* $\sin f(x)=\cos g(x)$ с помощью формул приведения сводится к одному из рассмотренных выше типов уравнений:

$$\sin f(x)=\cos g(x)\Leftrightarrow \sin f(x)=\sin(\pi/2-g(x)),$$

или

$$\sin f(x)=\cos g(x)\Leftrightarrow \cos(\pi/2-f(x))=\cos g(x).$$

<u>Пример 1</u> [Филолог.-1977]. *Найти наименьший положительный корень уравнения* $\cos\left(\pi x^2\right)=\cos\left(\pi\left(x^2+2x+1\right)\right)$.

Решение. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\pi\left(x^2+2x+1\right)=\pi x^2+2\pi n, n\in Z\\ \pi\left(x^2+2x+1\right)=-\pi x^2+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=2n, n\in Z\\ 2x^2+2x+1=2k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет решением серию $x=n-1/2, n\in Z$, с наименьшим положительным корнем $x_1=1/2$ $(n=1)$. Второе, квадратное, уравнение имеет следующие решения при условии неотрицательности дискриминанта $(k\in N)$:

$$\left[\begin{array}{l}x=\left(-1+\sqrt{4k-1}\right)/2, k\in N;\\ x=\left(-1-\sqrt{4k-1}\right)/2, k\in N,\end{array}\right.$$

при этом в первой из серий наименьшим положительным будет корень $x_2=\left(\sqrt{3}-1\right)/2$ $(k=1)$, а вторая серия положительных корней не имеет. Так как $x_2<x_1$, то приходим к ответу. *Ответ:* $\left(\sqrt{3}-1\right)/2$.

<u>Пример 2</u>. Решить уравнение $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$.

Решение. Приведём уравнение к виду

$$\cos((\pi/2)-\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x),$$

тогда оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\pi\sin x=\dfrac{\pi}{2}-\pi\cos x+2\pi n, n\in Z\\ \pi\sin x=-\dfrac{\pi}{2}+\pi\cos x+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}+2n\\ \sin x-\cos x=-\dfrac{1}{2}+2k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4n+1}{2\sqrt{2}};\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4k-1}{2\sqrt{2}}.\end{array}\right.$$

Необходимые условия существования решений у этих уравнений: $-1\le\dfrac{4n+1}{2\sqrt{2}}\le 1$ и $-1\le\dfrac{4k-1}{2\sqrt{2}}\le 1$, откуда находим $n=k=0$. Таким образом, исходное уравнение свелось к совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin(x+\pi/4)=1/\left(2\sqrt{2}\right)\\ \sin(x-\pi/4)=-1/\left(2\sqrt{2}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\pi/4+(-1)^m\arcsin\left(1/\left(2\sqrt{2}\right)\right)+\pi m, m\in Z;\\ x=\pi/4+(-1)^{l+1}\arcsin\left(1/\left(2\sqrt{2}\right)\right)+\pi l, l\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^m\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\pi m, m\in Z$, $x=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{l+1}\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\pi l, l\in Z$.

Уравнения вида $tgf(x)=tg(g(x)), ctgf(x)=ctg(g(x)), tgf(x)=ctg(g(x))$

Уравнения вида $tgf(x)=tg(g(x))$ можно решать либо при помощи формулы разности тангенсов, либо, что проще, по формуле:

$$tgf(x)=tg(g(x))\ \Leftrightarrow\ f(x)=g(x)+\pi n, n\in Z$$

(конечно, равносильность здесь будет только на ОДЗ уравнения).

Уравнения вида $ctgf(x)=ctg(g(x))$ также можно решать либо при помощи формулы разности котангенсов, либо на ОДЗ по формуле:

$$ctgf(x)=ctg(g(x))\ \Leftrightarrow\ f(x)=g(x)+\pi n, n\in Z.$$

Уравнения вида $tgf(x)=ctg(g(x))$ с помощью формул приведения сводится к одному из рассмотренных выше типов уравнений:

$$tgf(x)=ctg(g(x))\ \Leftrightarrow\ tgf(x)=tg(\pi/2-g(x)),$$

или
$$tgf(x)=ctg(g(x))\ \Leftrightarrow\ ctg(\pi/2-f(x))=ctg(g(x)).$$

<u>*Пример 1*</u> [Геолог.-1998,май,устн.]. *Решить уравнение* $ctg5x=ctgx$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}\sin 5x\ne 0\\ \sin x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\ \sin 5x\ne 0\ \Leftrightarrow\ x\ne\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z$. На ОДЗ уравнение равносильно тому, что $5x-x=\pi k, k\in Z$, $\Leftrightarrow\ x=\pi k/4$, $k\in Z$. Отберём из полученной серии те значения x, которые принадлежат ОДЗ, для этого приравняем: $\pi k/4=\pi n/5\ \Leftrightarrow\ 4n=5k$. Чтобы k удовлетворяло последнему равенству, необходимо и достаточно, чтобы оно было кратно четырём, т.е. имело вид $k=4l, l\in Z$. Таким образом, чтобы числа вида $x=\pi k/4, k\in Z$, принадлежали ОДЗ, необходимо и достаточно, чтобы $k\ne 4l$, $l\in Z$.

Ответ: $x=\pi k/4$, $k\in Z$, $k\ne 4l$, $l\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $tg5x \cdot tg3x = 1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$ Поскольку, в силу уравнения, $tg3x \neq 0$, то перепишем уравнение в равносильном виде: $tg5x = ctg3x \Leftrightarrow tg5x = tg(\pi/2 - 3x)$ $\Leftrightarrow 5x = \pi/2 - 3x + \pi n$, $n \in Z$, $\Leftrightarrow 8x = \pi/2 + \pi n \Leftrightarrow x = \pi/16 + \pi n/8$, $n \in Z$. Нетрудно проверить, что найденная серия удовлетворяет ОДЗ.

Рассмотрим некоторые виды уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

Уравнения вида

$$\arcsin f(x) = g(x),\ \arccos f(x) = g(x),\ arctgf(x) = g(x),\ arcctgf(x) = g(x)^{(*)}$$

Рассмотрим решение уравнений $\arcsin f(x) = g(x)$. Очевидно, что это уравнение равносильно следующей системе условий, включающей ОДЗ уравнения и первый шаг решения (избавление от обратной функции арксинус):

$$\arcsin f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le f(x) \le 1, & (1) \\ -\pi/2 \le g(x) \le \pi/2, & (2) \\ f(x) = \sin g(x). & (3) \end{cases}$$

Заметим при этом, что поскольку при выполнении условия (2) обе части исходного уравнения принимают свои значения из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$, на котором функция синус строго монотонно возрастает, то операция взятия синуса от обеих частей уравнения приводит к равносильному на ОДЗ уравнению (3). Далее, так как условие (1) вытекает непосредственно из условия (3) (если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (3), то она с необходимостью удовлетворяет условию (1)), то условие (1) можно рассматривать как избыточное и тогда можно удалить его из системы. Таким образом, получаем следующий метод решения для уравнений подобного рода:

$$\arcsin f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi/2 \le g(x) \le \pi/2 \\ f(x) = \sin g(x). \end{cases}$$

Пример 1 [Эконом.-1999]. *Решить уравнение*

$$x + \frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \cdot \sin 2x) = \frac{\pi}{12}.$$

Решение. Приведём уравнение к виду

$$\arccos(\cos 15x + \sin 6x - \sin 2x) = \pi/2 - 6x.$$

В соответствии с рассмотренным выше методом для решения такого вида уравнений, получаем равносильную систему

$$\begin{cases}0 \le \pi/2 - 6x \le \pi \\ \cos 15x + \sin 6x - \sin 2x = \cos(\pi/2 - 6x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\pi/12 \le x \le \pi/12 \\ \cos 15x - \sin 2x = 0.\end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$$\cos 15x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}15x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + 2\pi n, n \in Z \\ 15x = 2x - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{34} + \dfrac{2\pi n}{17}, n \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{26} + \dfrac{2\pi k}{13}, k \in Z.\end{array}\right.$$

Из первой серии двойному неравенству системы удовлетворяет число $x = \pi/34 \ (n = 0)$, а из второй – число $x = -\pi/26 \ (k = 0)$. *Ответ:* $x \in \left\{-\frac{\pi}{26}; \frac{\pi}{34}\right\}$.

С уравнениями вида $\arccos f(x) = g(x)$, $arctgf(x) = g(x)$, $arcctgf(x) = g(x)$ можно поступать аналогично:

$$\arccos f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}0 \le g(x) \le \pi \\ f(x) = \cos g(x),\end{cases}$$

$$arctgf(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}-\pi/2 < g(x) < \pi/2 \\ f(x) = tg(g(x)),\end{cases}$$

$$arcctgf(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}0 < g(x) < \pi \\ f(x) = ctg(g(x)).\end{cases}$$

Справедливости ради отметим, что не всегда уравнения рассмотренного вида решаются указанным способом. Например, встречаются задачи, в которых надо вначале найти ОДЗ (т.е. решить совместно неравенства (1) и (2)), и в результате оказывается, что ОДЗ представляет собой одно или несколько значений переменной x. В этих случаях уравнение как таковое не решают, а просто подставляют в него найденные значения x, делая проверку.

<u>*Пример 2*</u> [Химфак-2001,май]. *Решить уравнение* $\arcsin\frac{6x-7}{2x-1} = 2\pi - \pi x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}-1 \le \dfrac{6x-7}{2x-1} \le 1 \\ -\pi/2 \le 2\pi - \pi x \le \pi/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 \le x \le 3/2 \\ 3/2 \le x \le 5/2\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Подставим это единственное значение в уравнение и сделаем проверку: $\arcsin 1 = \pi/2$ - верно. *Ответ:* $x \in \{3/2\}$.

В следующем примере удобнее сразу воспользоваться методом оценок.

<u>*Пример 3*</u> . *Решить уравнение* $\arcsin(\sin^2 \pi x) = -(x-1)^2$.

Решение. Заметим, что, так как при любых действительных x верно неравенство $\sin^2 \pi x \ge 0$, то для выражения в левой части уравнения в силу свойств арксинуса имеем следующую оценку: $\arcsin(\sin^2 \pi x) \ge 0$. С другой стороны, правая часть уравнения удовлетворяет очевидному неравенству $-(x-1)^2 \le 0$. Это означает, что данное в условии задачи равенство может выполняться тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \arcsin(\sin^2 \pi x) = 0, \\ -(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Уравнения вида

$\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$, $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$, $\arcsin f(x) = arctg(g(x))$, $\arcsin f(x) = arcctg(g(x))$ и т.п. $^{(*)}$

Рассмотрим решение *уравнений вида* $\arcsin f(x) = \arcsin g(x)$.

Очевидно, что данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -1 \le f(x) \le 1, & (1) \\ -1 \le g(x) \le 1, & (2) \\ f(x) = g(x). & (3) \end{cases}$$

Эту систему можно упростить. Действительно, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ равны, то из двух условий (1) и (2) принадлежности этих функций отрезку $[-1,1]$ можно оставить одно (обычно оставляют то неравенство, которое проще решается). Заметим при этом, что поскольку при выполнении условий (1) и (2) обе части исходного уравнения принимают свои значения из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$, на котором функция синус строго монотонно возрастает, то применение операции взятия синуса от обеих частей уравнения приводит к равносильному на ОДЗ уравнению (3). Поэтому окончательно получаем следующий метод решения: $\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le f(x) \le 1 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

Уравнения вида $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$

Составим систему, равносильную данному уравнению и включающую ОДЗ уравнения и первый шаг в решении собственно уравнения:

$$\begin{cases} -1 \le f(x) \le 1, & (1) \\ -1 \le g(x) \le 1, & (2) \\ \sin(\arcsin f(x)) = \sin(\arccos g(x)). & (3) \end{cases}$$

Этот первый шаг состоит в избавлении от обратных тригонометрических функций, что можно сделать, применив к обеим частям исходного уравнения операцию взятия синуса (или косинуса). Покажем, что эта процедура приведёт к равносильному уравнению (3). Кроме того, проведённый анализ позволит уточнить ОДЗ.

В самом деле, левая часть уравнения, т.е. $\arcsin f(x)$, принимает на ОДЗ значения из отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$, а правая, т.е. $\arccos g(x)$, - значения из отрезка $[0, \pi]$. Чтобы их значения могли совпасть, необходимо, чтобы обе части уравнения принимали свои значения из пересечения указанных промежутков, т.е. из отрезка $[0, \pi/2]$. В силу свойств арксинуса и арккосинуса это, в свою очередь, означает, что $0 \le f(x) \le 1$ и $0 \le g(x) \le 1$. Равносильность перехода от исходного уравнения к (3) вытекает из того, что обе части первоначального уравнения принимают свои значения из отрезка $[0, \pi/2]$, на котором функция синус строго монотонно возрастает (косинус строго убывает). Следовательно, применение операции взятия синуса (косинуса) от обеих частей уравнения приводит к равносильному на ОДЗ уравнению. Итак, имеем:

$$\begin{cases} 0 \le f(x) \le 1, & (1) \\ 0 \le g(x) \le 1, & (2) \\ f(x) = \sqrt{1 - g^2(x)} & (3) \end{cases} \quad \text{(или} \quad \begin{cases} 0 \le f(x) \le 1, & (1) \\ 0 \le g(x) \le 1, & (2) \\ \sqrt{1 - f^2(x)} = g(x). & (3) \end{cases}\text{).}$$

Эту систему можно упростить. Так как условие (1), а также условие $g(x) \le 1$ вытекает из условия (3), то они являются, вообще говоря, избыточными и их можно опустить. При втором способе решения избыточными будут условия (2) и $f(x) \le 1$. Окончательно, получаем следующий общий метод решения уравнений указанного вида: $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = \sqrt{1 - g^2(x)} \end{cases}$ (или $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ \sqrt{1 - f^2(x)} = g(x) \end{cases}$).

Уравнения вида $\arcsin f(x) = arctg(g(x))$

При решении данного уравнения также возможны два способа. В первом случае для избавления от обратных тригонометрических функций применяется операция применения синуса, а во втором случае – тангенса к обеим частям уравнения. В обоих случаях это будет на ОДЗ равносильным переходом, поскольку на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, из которого могут принимать свои значения обе части уравнения, функции синус и тангенс строго возрастают.

$$\begin{cases} -1 < f(x) < 1, & (1) \\ \sin(\arcsin f(x)) = \sin(arctg(g(x))) & (2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 < f(x) < 1, & (1) \\ tg(\arcsin f(x)) = tg(arctg(g(x))). & (2) \end{cases}$$

После упрощения получаем

$$\begin{cases} -1 < f(x) < 1, & (1) \\ f(x) = \dfrac{g(x)}{\sqrt{1 + g^2(x)}}; & (2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -1 < f(x) < 1, & (1) \\ \dfrac{f(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} = g(x). & (2) \end{cases}$$

Обе системы можно упростить. Так как условие (1) вытекает из условия (2), то окончательно получаем следующий метод решения такого рода уравнений:

$$\arcsin f(x) = arctg(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}$$

или $$\arcsin f(x) = arctg(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} = g(x).$$

Уравнения вида $\arcsin f(x) = arcctg(g(x))$

Возможны два способа решения данного уравнения:

$$\begin{cases} -1 \le f(x) \le 1, & (1) \\ \sin(\arcsin f(x)) = \sin(arcctg(g(x))), & (2) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -1 \le f(x) \le 1, & (1) \\ ctg(\arcsin f(x)) = ctg(arcctg(g(x))). & (2) \end{cases}$$

Здесь было учтено, что обе части уравнения могут принимать свои значения лишь из полуинтервала $(0, \pi/2]$, на котором как синус, так и котангенс строго монотонны. Кроме того, последнее замечание позволяет уточнить ограничения на функции $f(x), g(x)$:

$$\begin{cases} 0 < f(x) \le 1, & (1) \\ 0 < g(x), & (2) \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}}; & (3) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < f(x) \le 1, & (1) \\ 0 < g(x), & (2) \\ \dfrac{\sqrt{1-f^2(x)}}{f(x)} = g(x). & (3) \end{cases}$$

Далее, условие (1) при первом способе решения вытекает из условия (3). При втором способе решения условие $f(x) \le 1$ также следует из (3), кроме того, из двух условий $f(x) > 0, g(x) > 0$ в этом случае можно оставить одно. Учитывая это, окончательно получаем следующие методы решения:

$$\arcsin f(x) = arcctg(g(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}}; \end{cases}$$

или $$\arcsin f(x) = arcctg(g(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \quad (\text{или} \quad g(x) > 0), \\ \dfrac{\sqrt{1-f^2(x)}}{f(x)} = g(x). \end{cases}$$

Решение уравнений вида $\arccos f(x) = \arccos g(x)$, $\arccos f(x) = arctg(g(x))$, $\arccos f(x) = arcctg(g(x))$ рассмотрите по аналогичной схеме самостоятельно.

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin x = \arcsin\left(x^2 - 2x - 4\right)$.

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x = x^2 - 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1\}$.

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin x - arcctgx = 0$.

Решение. ОДЗ: $-1 \le x \le 1$. Перепишем уравнение в виде: $\arcsin x = arcctgx$. Левая часть уравнения (как арксинус) принимает значения из отрезка $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$, а правая (как арккотангенс) – из интервала $(0, \pi)$. Чтобы равенство выполнялось, обе части уравнения должны принимать значения, принадлежащие пересечению этих множеств, т.е. полуинтервалу $\left(0, \pi/2\right]$. Это позволяет уточнить ОДЗ: $\arcsin x \in \left(0, \pi/2\right] \Leftrightarrow x \in (0,1]$. Применяя операцию взятия синуса к обеим частям уравнения и учитывая, что синус монотонно возрастает на промежутке $\left(0, \pi/2\right]$, приходим к равносильному уравнению

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

решая которое, находим $x = \pm\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}$. С учётом ОДЗ оставляем только положительное значение $x = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}$. *Ответ:* $x \in \left\{\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}\right\}$.

Системы тригонометрических уравнений (неравенств)

Говоря о решении *систем тригонометрических уравнений*, следует отметить следующие особенности. Во-первых, если исходная система в процессе решения свелась к системе, состоящей из элементарных тригонометрических уравнений, то при решении каждого из этих элементарных уравнений необходимо использовать *свой целочисленный параметр*. Пренебрежение этим правилом приводит, как правило, к потери решений, что недопустимо. Тот же принцип обычно практикуется и при записи решений в совокупностях уравнений, хотя в последнем случае допускается использование одной буквы при записи целочисленного параметра в различных сериях. Аналогичное замечание относится и к случаю систем тригонометрических неравенств.

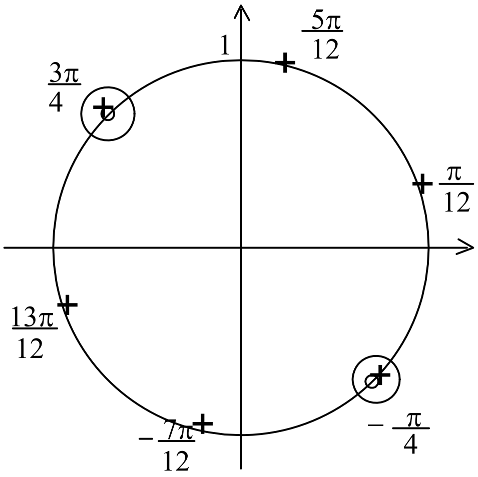
Во-вторых, так как при решении систем уравнений ищутся общие корни уравнений, то возникает необходимость уметь находить *пересечение двух или нескольких серий*. Для этих целей могут быть использованы разные приёмы. Рассмотрим некоторые из них.

1) *Использование тригонометрической окружности*. Этот приём обычно используют в тех случаях, когда полученные при решении уравнений серии таковы, что для их главных периодов число 2π является общим кратным.

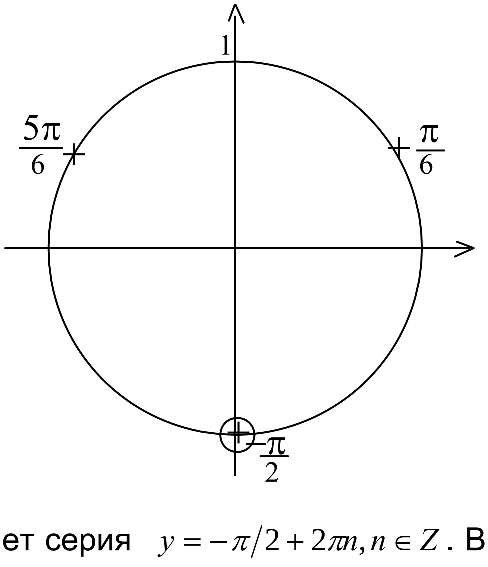
Например, применительно к системе $\begin{cases} x = x_1 + T_1 n, n \in Z; \\ x = x_2 + T_2 k, k \in Z; \end{cases}$ это означает, что 2π делится нацело на каждый из периодов T_1 и T_2. В этой ситуации каждой серии будет соответствовать конечное число точек на тригонометрической окружности. Точки, отвечающие различным сериям, обычно обозначаются на окружности различными значками. Одним из ограничений на использование этого подхода является достаточно большое количество точек на окружности. К достоинствам рассмотренного способа поиска общих решений можно отнести его наглядность.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin 2x = -1, \\ \sin 6x = 1. \end{cases}$

Решение. Решая каждое из уравнений, легко приходим к системе из двух серий $\begin{cases} x = -\pi/4 + \pi n, n \in Z; \\ x = \pi/12 + \pi k/3, k \in Z. \end{cases}$ Изобразим обе серии на тригонометрической окружности. Точки, отвечающие первой серии, будем обозначать знаком «о», а второй серии – знаком «$+$».



Очевидно, первой серии на единичной окружности отвечают две диаметрально противоположные точки, а второй серии, соответственно, шесть точек, равномерно с периодом $\pi/3$ распределённых на окружности. Из рисунка хорошо видно, что первая серия является подмножеством второй, т.е. решением системы является серия $x = -\pi/4 + \pi n, n \in Z$.



Замечание. Удобнее было вначале сделать замену $y = 2x$, тогда задача свелась бы к решению более простой системы

$$\begin{cases} \sin y = -1 \\ \sin 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z; \\ y = \pi/6 + 2\pi k/3, k \in Z. \end{cases}$$

В этом случае первой серии на единичной окружности отвечала бы единственная точка, а второй серии, соответственно, 3 точки. Из рисунка видно, что имеется единственная общая точка, которой соответствует серия $y = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z$. Выполнив обратную подстановку, придём к тому же ответу: $x = -\pi/4 + \pi n, n \in Z$.

2) «*Приравнивание» серий* друг к другу и сведение задачи к решению диофантовых линейных уравнений в целых числах. Это самый общий способ решения систем уравнений, применимый в большинстве случаев. В рассмотренном ниже примере вначале уравнение сводится к системе уравнений.

Пример 2 [Химфак-2003]. *Решить уравнение*

$$\cos^2 8x+\sin^2 x=2\sin^2 x\cdot\cos^2 8x.$$

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени:

$$\frac{1+\cos 16x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}=2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 16x}{2},$$

$$\cos 2x\cdot\cos 16x=-1 \Leftrightarrow \cos 14x+\cos 18x=-2. \qquad (1)$$

Так как при любых действительных x справедливы оценки $\cos 14x\ge -1$ и $\cos 18x\ge -1$, то для суммы косинусов имеем: $\cos 14x+\cos 18x\ge -2$ и, следовательно, для того чтобы выполнялось уравнение (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система условий $\begin{cases}\cos 14x=-1,\\ \cos 18x=-1.\end{cases}$

Решая уравнения системы, находим две серии $\begin{cases}x=\pi/14+\pi n/7,\, n\in Z;\\ x=\pi/18+\pi k/9,\, k\in Z.\end{cases}$

Чтобы определить теперь пересечение этих серий, приравняем их правые части: $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi}{18}+\frac{\pi k}{9}$. Сократив на π и умножив на $НОК(14;7;18;9)=$ $=НОК(14;18)=2\cdot НОК(7;9)=2\cdot 7\cdot 9$, приходим к уравнению в целых числах

$$9+18n=7+14k \Leftrightarrow 9n+1=7k.$$

Подбором найдём одно из решений этого уравнения $n=3, k=4$. Вычитая из равенства $9n+1=7k$ тождество $9\cdot 3+1=7\cdot 4$, получим равносильное уравнение $9(n-3)=7(k-4)$. Выражение в правой части, очевидно, делится нацело на 7, следовательно, и выражение в левой части также должно быть кратно 7, т.е. $n-3=7t, t\in Z$, или $n=3+7t$. Подставляя в первую серию системы вместо n полученное выражение $3+7t$, находим все решения системы, а, значит, и исходного уравнения: $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}(3+7t)=\frac{\pi}{2}+\pi t$, где $t\in Z$.

3) Если из двух уравнений в системе одно является следствием другого, то, заметив это, можно «отбросить» уравнение-следствие, и, таким образом, в системе станет на одно уравнение меньше, и задача упростится.

Пример 3. *Решить систему уравнений* $\begin{cases}tgx=1/2,\\ tg3x=11/2.\end{cases}$

Решение. Так как, по условию, $tgx=1/2$, то вычислим $tg3x$:

$$tg3x=\frac{3tgx-tg^3x}{1-3tg^2x}=\frac{3/2-(1/2)^3}{1-3\cdot(1/2)^2}=\frac{11}{2}.$$

Полученный результат согласуется со вторым уравнением системы и означает, что второе уравнение является следствием первого уравнения. Но тогда решениями системы будут решения первого из уравнений.

Ответ: $x=arctg(1/2)+\pi n, n\in Z$.

Тригонометрические неравенства общего вида

При решении *тригонометрических неравенств*, в основном, используются те же приёмы, что и при решении алгебраических неравенств, однако имеются и свои особенности. Одна из них связана с периодичностью основных тригонометрических функций. Так, при решении неравенства вида $f(x)>0$, где $f(x)$ – любая периодическая функция с главным периодом T, достаточно решить это неравенство на любом промежутке, имеющем длину T, например для $0\le x<T$, а затем найденные на этом промежутке решения периодически продолжить, добавляя Tn, $n\in Z$, и получая для каждого из них соответствующую серию решений.

Рассмотрим некоторые из существующих подходов к решению тригонометрических неравенств.

Сведение к простейшим тригонометрическим неравенствам путём алгебраических и тригонометрических преобразований

Во многих случаях решение тригонометрического неравенства сводится преобразованиями к решению элементарных неравенств вида $\sin x>a$, $\cos x>a$, $tgx>a$, $ctgx>a$ или $\sin f(x)>a$, $\cos f(x)>a$, $tgf(x)>a$, $ctgf(x)>a$ (знак в неравенстве может быть любым).

Пример 1 [Сканави,9.276]. *Решить неравенство*

$$\sin 2x\cdot\sin 3x-\cos 2x\cdot\cos 3x>\sin 10x.$$

Решение. Последовательными преобразованиями приведём неравенство к виду, удобному для дальнейшего решения:

$$-\cos(2x+3x)>\sin 10x \;\Leftrightarrow\; \cos 5x+2\sin 5x\cdot\cos 5x<0 \;\Leftrightarrow\; \cos 5x(1+2\sin 5x)<0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos 5x>0\\ \sin 5x<-1/2\end{cases}\\ \begin{cases}\cos 5x<0\\ \sin 5x>-1/2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n<5x<-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n<5x<\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5}<x<-\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2\pi n}{5}\\ \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\pi n}{5}<x<\dfrac{7\pi}{30}+\dfrac{2\pi n}{5}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)\cup\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}\right)$, где $n\in Z$.

Пример 2. Решить неравенство $4\sin x-3\cos x\ge 0$.

Решение. Заметим, что для решения данного однородного тригонометрического неравенства достаточно рассмотреть три случая:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x>0\\ tgx\ge 3/4\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0\\ tgx\le 3/4\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x=0\\ \sin x\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} arctg\frac{3}{4}+2\pi n\le x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ \frac{\pi}{2}+2\pi n<x\le \pi+arctg\frac{3}{4}+2\pi n,\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Объединяя на тригонометрической окружности все полученные решения, приходим к ответу: $arctg\frac{3}{4}+2\pi n\le x\le \pi+arctg\frac{3}{4}+2\pi n$, где $n\in Z$.

Замечание. Можно было решать неравенство иначе - при помощи введения вспомогательного аргумента: $4\sin x-3\cos x\ge 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{4}{5}\sin x-\frac{3}{5}\cos x\ge 0$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\sin(x-\varphi)\ge 0$, где $\varphi=\arcsin\frac{3}{5}$, $\Leftrightarrow$ $2\pi n\le x-\varphi\le\pi+2\pi n, n\in Z$, $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\varphi+2\pi n\le x\le\pi+\varphi+2\pi n$ (причём φ можно было также представить как $\arccos\frac{4}{5}$, или $arctg\frac{3}{4}$, или $arcctg\frac{4}{3}$, получая различные, эквивалентные между собой формы ответа). *Ответ:* $x\in\left[arctg\frac{3}{4}+2\pi n, arctg\frac{3}{4}+\pi(2n+1)\right]$, $n\in Z$.

Метод замены переменной

Иногда с помощью замены переменной удаётся свести решение тригонометрического неравенства к решению алгебраического неравенства. Решив алгебраическое неравенство, в конце делают обратную подстановку, возвращаясь к первоначальной переменной.

Пример 3 [Сканави,9.287]. *Решить неравенство* $2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$.

Решение. Вначале преобразуем неравенство:

$$(1-2\sin^2 x)+(\sin x-\sin 3x)>0 \Leftrightarrow \cos 2x-2\sin x\cdot\cos 2x>0 \Leftrightarrow \cos 2x(1-2\sin x)>0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{2}\sin x)(1+\sqrt{2}\sin x)(1-2\sin x)>0 \Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)>0.$$

Положим $t=\sin x$, тогда имеем алгебраическое неравенство

$$(t-\sqrt{2}/2)(t+\sqrt{2}/2)(t-1/2)>0,$$

решая которое методом интервалов и учитывая, что $-1\le t\le 1$, находим, что

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}/2 < t < 1/2 \\ t > \sqrt{2}/2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2}/2 < \sin x < 1/2 \\ \sin x > \sqrt{2}/2. \end{array}\right.$$

Решая каждое из неравенства на тригонометрической окружности, получаем ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z$.

Метод интервалов (секторов)

Но, пожалуй, основным методом решения тригонометрических неравенств является *метод интервалов*. Этим методом решаются неравенства, у которых с одной стороны от знака неравенства (он может быть любым) находится произведение (частное) нескольких сомножителей тригонометрического вида, зависящих от неизвестной x (например, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$), а в другой – нуль, например: $\frac{A(x) \cdot B(x)}{C(x)} > 0$.

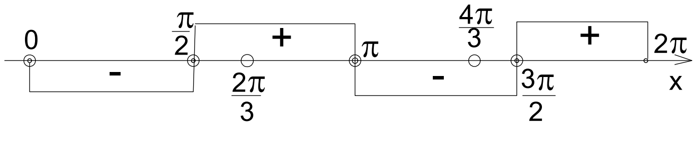
Метод решения на примере приведённого неравенства состоит в том, что вначале у функции $\frac{A(x) \cdot B(x)}{C(x)}$ определяется главный период T (наименьший общий положительный период сомножителей), и затем на любом промежутке длины T, например, на полуинтервале $[0, T)$ определяются те значения x, в которых обращается в нуль хотя бы один из сомножителей числителя и знаменателя дроби (назовём эти значения x критическими точками). Далее на каждом промежутке между этими значениями расставляются знаки всех сомножителей и, в целом, функции $\frac{A(x) \cdot B(x)}{C(x)}$ (или, что быстрее, просто учитывается *перемена* (либо её отсутствие) в каждой критической точке *знака* того сомножителя, из которого была найдена данная точка). В результате выписывается ответ для одного периода (включая в него в случае нестрогих неравенств те критические точки x, для которых обращается в нуль числитель, но не равен нулю знаменатель). Окончательный ответ получаем, прибавляя Tn, $n \in Z$, ко всем найденным на $[0, T)$ решениям.

<u>Пример 4</u>. Решить неравенство $\sin 2x \cdot (\cos 3x - 1) < 0$.

Решение. Воспользуемся *методом интервалов*. Период функции $\sin 2x$ равен π, а период функции $\cos 3x - 1$ равен $2\pi/3$. Их наименьшим общим периодом будет 2π. Рассмотрим промежуток $[0, 2\pi)$.

Приравняв каждый из двух сомножителей к нулю, найдём корни полученных уравнений (критические точки) и отберём те из них, что попадают в рассматриваемый промежуток. Так, уравнение $\sin 2x = 0$ даёт четыре точки 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, при переходе через каждую из которых выражение $\sin 2x$, а вместе с ним и вся левая часть неравенства, меняют свой знак на противоположный. Уравнение $\cos 3x-1$=0 даёт три точки 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$, в которых сомножитель $\cos 3x-1$ обращается в нуль, но при переходе через них знака не меняет, сохраняя при остальных x отрицательное значение (следовательно, в указанных точках вся левая часть неравенства также не меняет своего знака).

Расставим все найденные точки на числовой прямой (их в силу строгости неравенства следует на рисунке «выколоть», не включив в ответ) и определим знак в любом из образовавшихся промежутков, например, от 0 до $\pi/2$. Подставим любое пробное значение из данного интервала, например $x=\pi/4$, в каждый из сомножителей и найдём, что при этом значении аргумента $\sin 2x$ =1>0, а $\cos 3x-1$=$-\frac{\sqrt{2}}{2}-1<0$. Таким образом, на этом промежутке левая часть неравенства принимает отрицательные значения. Теперь мысленно начинаем «движение» от 0 вдоль оси Ox слева направо, отслеживая перемену знака в каждой из критических точек. Так, в точке $\pi/2$ сомножитель $\sin 2x$, а с ним и вся левая часть, поменяет знак с «-» на «+», и до следующей точки (конечно, исключая $2\pi/3$) левая часть неравенства принимает положительные значения. В точке π, выражение $\sin 2x$ поменяет знак с «+» на «-»; в точке $3\pi/2$ - опять с «-» на «+». Итак, имеем следующую кривую знакоопределённости для левой части решаемого неравенства:



Глядя на эту схему, осталось только отобрать в ответ промежутки, отвечающие знаку минус и «выколов» при этом значение $4\pi/3$, попавшее в один из них.

Ответ: $x\in\left(2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n,\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Существует удобная на практике (когда $T\le 2\pi$) разновидность этого метода, называемая *методом секторов*, реализующая метод интервалов на тригонометрическом круге. Если в стандартном алгебраическом методе интервалов каждому линейному сомножителю числителя и знаменателя вида $(x-x_0)$ на числовой оси соответствует точка x_0, и при переходе через эту точку данный сомножитель $(x-x_0)$ меняет знак, то в методе секторов каждому сомножителю вида $(f(x)-a)$, где $f(x)$ - одна из функций $\sin x$ или $\cos x$ и

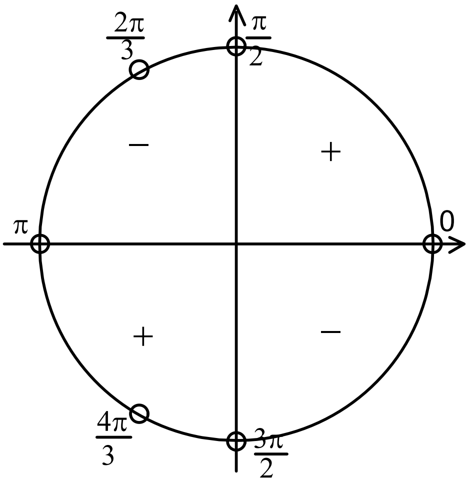
$a \in (-1{,}1)$, на полной тригонометрической окружности ($T = 2\pi$) соответствуют две точки x_1 и x_2 ($f(x_1) = f(x_2) = a$), которые делят круг на два сектора. При переходе через эти точки x_1 и x_2 сомножитель $(f(x) - a)$ меняет знак на противоположный. Сомножители вида $(\sin x - a)$ или $(\cos x - a)$, где $|a| > 1$, сохраняют знак для всех значений x. Сомножители вида $\pm(\sin x - 1)$ или $\pm(\cos x - 1)$ обращаются в нуль в одной точке окружности, а в остальных сохраняют постоянный знак.

Аналогично, каждому сомножителю вида $(f(x) - a)$, где $f(x)$ есть tgx или $ctgx$, при решении неравенства на полном круге ($T = 2\pi$) отвечают две диаметрально противоположные точки x_1 и x_2 ($f(x_1) = f(x_2) = a$), при переходе через которые соответствующий сомножитель $(f(x) - a)$ меняет знак на противоположный. При этом необходимо учитывать, что сомножители вида $(tgx - a)$ (или $(ctgx - a)$) дополнительно меняют знак при переходе через точки, в которых tgx (или, соответственно, $ctgx$) не определён.

Рассмотрим использование метода секторов на примере решения неравенства $\frac{A(x) \cdot B(x)}{C(x)} > 0$, где каждый из трёх сомножителей имеет вид $(f(x) - a)$, а $f(x)$ есть одна из функций $\sin x$, $\cos x$, tgx или $ctgx$. Пусть наименьший общий положительный период сомножителей равен 2π, значит, решать задачу будем на полной тригонометрической окружности. Приравняв каждый из сомножителей к нулю, решим полученные уравнения, отобрав те решения, которые попадают в полуинтервал $[0, 2\pi)$. Построим окружность, нанесём на неё все полученные критические точки, соединив их радиусами с центром окружности. Окружность оказалась разделена на отдельные секторы. Определяем знак левой части неравенства в каком-либо секторе (обычно в том, в котором это сделать удобнее, подставляя принадлежащее этому сектору табличное значение аргумента x). Как только знак определён, приписываем его данному сектору, поставив на рисунке соответствующий значок, и переходим к следующему (соседнему) сектору. Пользуясь описанным выше правилом отслеживания перемены знака, определяем знак выражения из левой части неравенства в каждом секторе. После этого остаётся отобрать секторы с тем знаком, который отвечает знаку неравенства, и записать ответ, добавляя к границам секторов целое число периодов, т.е. в данном случае $2\pi n$, $n \in Z$.

<u>Пример 5</u>. Решить неравенство $\sin 2x \cdot (\cos 3x - 1) < 0$.

Решение. Воспользуемся *методом секторов*. Действуя вначале аналогично рассмотренному выше решению данной задачи, определим общий наименьший период функций $\sin 2x$ и $\cos 3x - 1$, равный 2π. Приравняв каждый из двух указанных сомножителей к нулю, найдём корни полученных уравнений, попадающие в промежуток $[0,2\pi)$: это точки 0, $\pi/2$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $3\pi/2$, причём в точках 0, $2\pi/3$ и $4\pi/3$ второй из сомножителей только обращается в нуль, при остальных же x он отрицателен. То есть перемены знака левой части неравенства из-за этого сомножителя в упомянутых точках не произойдёт.



На рисунке их следует только выколоть, учитывая строгий знак в решаемом неравенстве. Учитывая отрицательность выражения $\cos 3x-1$ (при $x\neq 0, 2\pi/3,\ 4\pi/3$), поделим обе части исходного неравенства на него и будем решать оставшееся в результате более простое неравенство $\sin 2x>0$.

Расставим найденные точки 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, в которых $\sin 2x$ обращается в нуль и, кроме того, меняет свой знак, на тригонометрической окружности, и, соединив эти точки с центром окружности, получим, что тригонометрический круг разбился на четыре сектора, в каждом из которых левая часть неравенства сохраняет определённый знак. Осталось найти эти знаки.

Обратимся, например, к сектору от 0 до $\pi/2$. Подставим любое пробное значение из данного сектора, скажем, $x=\pi/4$, в выражение $\sin 2x$ и найдём, что при этом значении аргумента $\sin 2x$=1>0. Таким образом, в этом секторе левая часть неравенства принимает положительные значения. Ставим знак «+» в этом секторе. Теперь мысленно начинаем «движение» против часовой стрелки вдоль окружности. В точке $\pi/2$ выражение $\sin 2x$ поменяет знак с «+» на «-». Значит, приписываем очередному сектору знак «-». В точке π выражение $\sin 2x$ снова поменяет знак, теперь уже с «-» на «+»; в точке $3\pi/2$ - опять с «+» на «-». Итак, имеем общую картину знакоопределённости для левой части решаемого неравенства $\sin 2x>0$ (см. рис.). Осталось, выбирая на полученной схеме секторы со знаком «+», выписать ответ, не забыв исключить значение $4\pi/3$, попавшее во второй из положительных секторов.

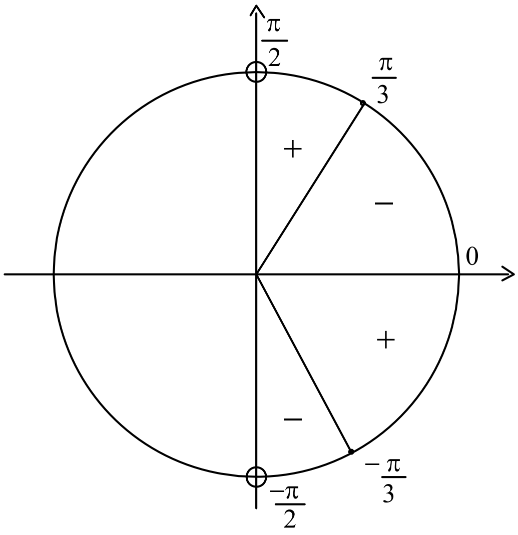
Ответ: $x\in\left(2\pi n,\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)\bigcup\left(\pi+2\pi n,\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n\right)\bigcup\left(\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n,\dfrac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

Рассмотрим пример, в котором наименьший общий период сомножителей T меньше, чем 2π (а именно, равен π).

Пример 6. Решить неравенство $tg^3x-3tgx\le 0$.

Решение. Разложив левую часть на множители, перепишем неравенство в виде $tgx\left(tgx-\sqrt{3}\right)\left(tgx+\sqrt{3}\right)\le 0$, и так как каждый из трёх образовавшихся сомножителей в левой части неравенства имеет период π, то будем решать неравенство, например, на правой половине тригонометрического круга, т.е. от $-\pi/2$ до $\pi/2$, прибавляя в ответе к концевым точкам промежутков πn, $n\in Z$. Сразу же «выколем» на окружности обе граничные точки $x=\pm\pi/2$, в которых tgx не определён. Найдём значения пременной x из интервала $(-\pi/2,\pi/2)$, в которых хотя бы один из трёх сомножителей обращается в нуль: $tgx=0 \Leftrightarrow x=0$; $tgx-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=\pi/3$; $tgx+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=-\pi/3$.

Заметим, что в каждой из трёх найденных точек левая часть неравенства меняет свой знак на противоположный.



Разобьём теперь рассматриваемую половину тригонометрического круга на секторы, соединив эти точки с центром окружности, и оценим знак выражения, стоящего в левой части неравенства, в каждом из четырёх образовавшихся секторов.

Так, подставляя вместо x значение $\frac{\pi}{4}$ в выражение $tgx\left(tgx-\sqrt{3}\right)\left(tgx+\sqrt{3}\right)$, оцениваем его знак. Поскольку получаем отрицательное число, то это означает, что на всём секторе от 0 до $\pi/3$ левая часть неравенства отрицательна. На рисунке приписываем этому сектору знак минус. Учитывая, что в каждой из найденных критических точек 0, $\pm\pi/3$ знак данного выражения будет меняться на противоположный, расставляем знаки в оставшихся секторах. Осталось, ориентируясь на знак неравенства, отобрать те секторы, в которых его левая часть неположительна, и записать ответ. *Ответ:* $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,-\frac{\pi}{3}+\pi n\right]\bigcup\left[\pi n,\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{(\sin x-1/2)(tgx-1)}{(\cos x+1/2)(ctgx+1)}\ge 0$.

Решение. Определим вначале наименьший общий период всех четырёх сомножителей дроби, стоящей в левой части неравенства, – это 2π. Теперь найдём все значения аргумента x на промежутке $[0,2\pi)$, в которых хотя бы один из этих сомножителей обращается в нуль:

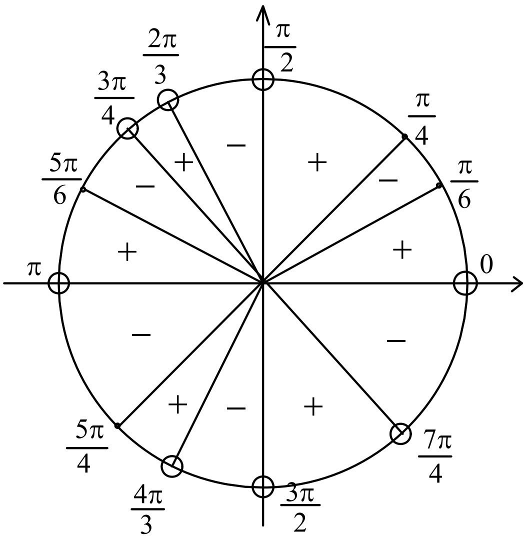
$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \qquad tgx - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \qquad (1)$$

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \qquad ctgx + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}. \qquad (2)$$

При этом точки (2), что обращают знаменатель в нуль, - на рисунке «выкалываются» как не принадлежащие ОДЗ. Далее найдём все точки из $[0,2\pi)$, в которых не определены функции tgx и $ctgx$:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \qquad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0; \pi \qquad (3)$$

(эти точки на окружности также подлежат «выкалыванию»; кроме того, в них меняют свои знаки, соответственно, сомножители $tgx - 1 = 0$ и $ctgx + 1 = 0$). Расставим найденные точки на окружности и построим секторы.



Наконец, определим знак выражения в левой части неравенства в любом из секторов. Например, в сектор $(\pi/4, \pi/2)$ попадает число $\pi/3$. Подставляя это значение вместо x в указанное выражение, определяем, что оно положительно (все четыре сомножителя положительны). Поэтому в соответствующем секторе ставим «+». Далее, учитывая, что при переходе от сектора к сектору знак будет чередоваться, расставляем знаки во всех образовавшихся секторах. Глядя на полученную схему знакоопределённости левой части неравенства и отбирая секторы с неотрицательным знаком, выписываем ответ.

Ответ: $x \in \left(2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup$

$\cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \pi + 2\pi n\right) \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Отметим, что, используя тригонометрические подстановки разного рода, к тригонометрическим часто сводятся алгебраические задачи, в которых присутствуют радикалы вида $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ и некоторые другие задачи (см. Часть 1).

Задачи к разделу 2: «Тригонометрия»

Задачи на вычисление, сравнение и упрощение тригонометрических выражений

2.2 [1984, 3] Найти $\sin\alpha$, если $\sin 2\alpha \geq 3/5$ и $tg\alpha \leq 1/3$.

2.2 [1992, устн., 1] Вычислить без таблиц и калькулятора: $\sin 20^0 + 2\sin^2 35^0$.

2.3 [1992, устн., 2] Вычислить без таблиц и калькулятора:

$$\cos 8^0 \cdot \cos 37^0 - \cos 82^0 \cdot \cos 53^0.$$

2.4 [1992, устн., 3] Вычислить без таблиц и калькулятора: $\dfrac{tg72^0 - ctg48^0}{1 + tg42^0 \cdot ctg18^0}$.

2.5 [1997, май, устн.] Вычислить: $\dfrac{1}{\sin 10^0} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$.

2.6 [1999, устн., 1] Пусть $\cos\alpha = 1/5$. Вычислить $tg\alpha$.

2.7 [1999, устн., 2] Вычислить: $tg36^0 \cdot tg72^0$.

2.8 [2000, май, устн., 1] Вычислить: $\dfrac{1}{1 - 2\cos 30^0} + \dfrac{1}{1 + 2\sin 60^0}$.

2.9 [2000, май, устн., 2] Найти $tg\alpha$, если $\dfrac{\sin\alpha - 3\cos\alpha}{2\sin\alpha - \cos\alpha} = 2$.

2.10 [2000, 2] Вычислить $tg2x$, если $tg\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{5}$.

2.11 [2000, устн.] Вычислить: $\sin 20^0 \cdot \sin 40^0 \cdot \sin 80^0$.

2.12 [2001, устн., 1] Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2}\cos x$, если $\sin x = 1/2$?

2.13 [2001, устн., 2] Какие значения может принимать сумма $\sin x + \sqrt{2}\cos x$, если $\sin x + \cos x = 1$?

2.14 [2002, устн.] Сравнить два числа: $\cos 9$ и $\cos 10$.

2.15 [2004, 2] Какие значения может принимать $\sin x$, если $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

2.16 [2004, устн., 1] Сравнить два числа: $\cos 5$ и $0{,}5$.

2.17 [2004, устн., 2] Вычислить значение $\cos 2x$,если $2tgx - 2ctgx - 3 = 0$, а $\pi/2 < x < \pi$.

2.18 [«Ломоносов-2006», устн.] Известно, что $\sin x + \cos x = -\sqrt{3}/2$. Чему равен $\sin 2x$?

2.19 [«Ломоносов-2007», 1] Вычислить $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если

$$\sin(\alpha + \beta) = 0{,}8 \text{ и } \cos(\alpha - \beta) = 0{,}3.$$

2.20 [2007, устн.] Найти значение выражения $\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значений, области определения и области значений тригонометрических функций

2.21 [1994, устн.] Найти область определения функции $y=\sqrt{\log_3(\sin 2x)}$.

2.22 [1994, май, устн.] Найти область определения функции $y=\lg(\cos x)$.

2.23 [1998, май, 7] Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\cos x+4\cos\frac{x}{2}+7\cos\frac{x}{4}+6\cos\frac{x}{8}.$$

2.24 [2003, май, устн.] Найти область значений функции

$$y=3\cos(\cos x)+\sin(\cos x).$$

2.25 [2004, устн., 1] Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y=\sin x+\cos x+\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{2}.$$

2.26 [2004, устн., 2] Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y=\cos^2 x+\frac{4}{3}\sin x \quad \text{на отрезке } \left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right].$$

2.27 [2005, устн.] Найти область изменения функции

$$y=\cos x-\sin x+\sin 2x-1.$$

2.28 [2006, устн.] Найти область изменения функции $y=\cos\left(\sin\left(x^2\right)\right)$.

Тригонометрические уравнения

2.29 [1985, 4] Решить уравнение $3\sin x+5\cos x=\sqrt{17}$.

2.30 [1986, 1] Решить уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x$.

2.31 [1987, 2] Решить уравнение $4\sin^2 x+4\cos x=1$.

2.32 [1989, 3] Найти все решения уравнения $\frac{|\sin x|}{\sin x}=1-\cos 2x$ на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$.

2.33 [1990, 3] Решить уравнение $tgx(1-2\sin x)-2\cos x=-\sqrt{3}$.

2.34 [1991, 1] Решить уравнение $\sin 7x\cdot\cos x=\sin 6x$.

2.35 [1992, 4] Решить уравнение

$$4\cos x\cdot\cos 3x-10\cos^2 x-16\sin x\cdot\sin 3x=4\sin^2 x+3.$$

2.36 [1992, устн., 1] Решить уравнение $\sqrt{2}\cdot\cos x+\frac{|\sin x-1|}{\sin x-1}\cdot\sin 2x=0$.

2.37 [1992, устн., 2] Решить уравнение $\frac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0$.

2.38 [1993, 2] Решить уравнение $\sqrt{1-\cos^2 x}+6\cos 2x=0$.

2.39 [1994, май, 4] Решить уравнение $\sin 5x=\sin 5$.

2.40 [1994, май,устн., 1] Решить уравнение $\sin x+\cos x=\sqrt{2}/2$.

2.41 [1994, 4] Решить уравнение $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$.

2.42 [1994, устн., 1] Решить уравнение $\frac{ctgx}{\sqrt{3\pi^2+4\pi x-4x^2}}=0$.

2.43 [1994, устн., 2] Решить уравнение $\cos^2 \pi x-\sqrt{x^2-5x+4}=1$.

2.44 [1995, май, 3] Решить уравнение $\sqrt{\sin x}=-\cos x$.

2.45 [1995, май, устн., 1] Решить уравнение $\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x=0$.

2.46 [1995, май, устн., 2] Решить уравнение $3\cos 2x-8\cos x+5=0$.

2.47 [1995, 5] Решить уравнение $\left(2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-tg\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot\log_2(4-x^2)=0$.

2.48 [1995, устн., 1] Решить уравнение $\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x-4\sin^2 x=0$.

2.49 [1995, устн., 2] Решить уравнение $\cos 5x\cdot\cos x=\cos 4x\cdot\cos 2x$.

2.50 [1996, 2] Решить уравнение $\cos 7x+2\cos\frac{7x}{2}=\frac{1}{2}$.

2.51 [1996, май, 7] Решить уравнение $\sin 5|x|=\sin(-3)$.

2.52 [1996, 3] Найти все решения уравнения $\frac{\cos 10x-\cos 8x}{2x^2+\pi x-\pi^2}=\frac{\cos 6x-\cos 4x}{2x^2+\pi x-\pi^2}$, принадлежащие интервалу $(0,\pi)$.

2.53 [1997, май, 3] Решить уравнение $\cos\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

2.54 [1997, 2] Решить уравнение $3\cos 8x=14(\sin 2x-\cos 2x)^2-3$.

2.55 [1998, май, 3] Найти все решения уравнения $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}=0$, лежащие на отрезке $[2\pi,3\pi]$.

2.56 [1998,май, устн., 1] Решить уравнение $ctg5x=ctgx$.

2.57 [1998,май, устн., 2] Решить уравнение $ctg\sqrt{x}=tg60^0$.

2.58 [1998,май, устн., 3] Решить уравнение $tg(x^2)=-ctg30^0$.

2.59 [1998, 3] Решить уравнение $5+\frac{1}{\sin^2(3x)}=7ctg(3x)$.

2.60 [1998, устн.] Решить уравнение $tg2x=ctg2$.

2.61 [1999, май, 1] Решить уравнение $\cos(6\sin x) = -1$.

2.62 [1999, устн., 1] Решить уравнение $\cos x = \log_{tgx} \sqrt{\dfrac{\cos x}{-|\sin x|}}$.

2.63 [1999, устн., 2] Решить уравнение $\sin(x-1) = \sin x - \sin 1$.

2.64 [1999, устн., 3] Решить уравнение $ctg\left(2\sqrt{x}\right) = ctgx$.

2.65 [2000, май, 2] Решить уравнение $5\sin\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{4}$.

2.66 [2000, устн.] Решить уравнение $\sin x(1+\cos x) = 1 + \cos x + \sin^2 x$.

2.67 [2001, май, 4] Найти все решения уравнения $\cos x - \cos 2x - \sin 2x = 1$, расположенные на отрезке $[-3\pi/2, -\pi/6]$.

2.68 [2001, 2] Найти неотрицательные решения уравнения

$$1 + \sin 7x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2.$$

2.69 [2001, устн.] Решить уравнение $2|\sin x| + \cos x = 1$.

2.70 [2002, май, устн.] Решить уравнение $tg^2 2002x = \cos 2x - 1$.

2.71 [2002, 5] Найти все решения уравнения $|\sin 2x| + \cos x = 0$, принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}, 8/3\right]$.

2.72 [2002, устн.] Решить уравнение $\sqrt{x \cdot tg^3 2x} = \sin^2 x - 1$.

2.73 [2003, май, 1] Решить уравнение $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 2\cos^2 x = 1$.

2.74 [2003, 6] Решить уравнение $\sqrt{\cos 3x} \cdot \log_4\left(tg\left(x + \left(\sqrt{3}/2\right)\right)\right) = 0$.

2.75 [2003, устн.] Найти сумму решений уравнения $3 + 6\cos x + \cos 2x = 0$, расположенных на отрезке $[-\pi; 9\pi]$.

2.76 [2004, устн., 1] Решить уравнение $|\sin x| + |\cos x| = 1$.

2.77 [2004, устн., 2] Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)$.

2.78 [2004, устн., 3] Решить уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

2.79 [2005, 4] Найти наименьший корень уравнения

$$\sqrt{\cos 2x + x - 11} = \sqrt{x - 15 - 5\cos x}.$$

2.80 [2005, устн.] Найти множество корней уравнения $\sqrt{\sin(2005x)} + \sqrt{\cos x} = 0$.

2.81 [Олимпиада «Ломоносов-2006», 3] Решить уравнение

$$\cos\left(x^2 + x\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

2.82 [2006, 6] Найти корни уравнения $\frac{\sqrt{3}\cdot(\sin 2x+\cos 3x)}{\cos 2x-\sin 3x}=1$, расположенные на интервале $(1{,}2)$.

2.83 [2006, устн.] Решить уравнение $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sqrt{2-2\cos^2 x}$.

2.84 [2007, 2] Решить уравнение $\frac{\cos 2x+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x}{2}$.

2.85 [2007, устн.] Решить уравнение $\sqrt{\sin 3x\cdot\cos x}=-\sin(x+\pi/4)$.

Тригонометрические неравенства

2.86 [1994, май, устн.] Найти область определения функции $y=\lg(\cos x)$.

2.87 [1994, 6] Решить неравенство $4\cos x-\sin 2x>0$.

2.88 [2000, 4] Решить неравенство $4\cos^2 x+tg^2 x\le 3$.

2.89 [2002, устн.] Решить неравенство $\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|}<\sin^2 x$.

2.90 [2004, устн.] Решить неравенство $\sqrt{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}\le 1$.

2.91 [Олимпиада «Ломоносов-2006», 10] Решить неравенство

$$4(1-tgx)^{2004}+(1+tgx)^{2006}\ge 2^{2006}.$$

2.92 [2007, устн.] Решить неравенство $\sqrt{\sin x}\le\sqrt{2\cos x}$.

Задачи на графический и координатный методы

2.93 [1992, устн.] Построить график функции $y=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

2.94 [1993, устн.] Построить график функции $y=2\sin 3x$.

2.95 [1994, май, устн., 1] Построить график функции

$$y=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

2.96 [1994, май, устн., 2] Построить график функции $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

2.97 [1994, май, устн., 3] Построить график функции $y=\sin(\arcsin 2x)$.

2.98 [1994, устн.] Построить график функции $y=\cos(2x+\pi)$.

2.99 [1996, устн., 1] Построить график функции $y=\sin(2-x)$.

2.100 [1996, устн., 2] Построить график функции $y=tg(1-x)$.

2.101 [1997, май, устн., 1] Построить на плоскости геометрическое место точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют условию $|y|=-\sin x$.

2.102 [1997, май, устн., 2] Построить на координатной плоскости ГМТ $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $y+\sin|x|=0$.

2.103 [1997, май, устн., 3] Построить на координатной плоскости ГМТ $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $y-|y+\cos x|=0$.

2.104 [1997, устн.] Построить график функции $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

2.105 [1998, май, устн., 1] Построить множество точек плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют уравнению $y=|y-\cos x|$.

2.106 [1998, май, устн., 2] Построить график функции $y=\sin|x+\pi|$.

2.107 [1998, май, устн., 3] Изобразить множество всех точек $(x;y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=|y|\cdot\cos x$.

2.108 [1998, устн.] Построить график функции $y=\left|\sin\left(2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\right|$.

2.109 [1999, устн., 1] Построить график функции $y=|\cos x|\cdot tgx$.

2.110 [1999, устн., 2] Построить график функции $y=(\sin|x|+\cos|x|)^2$.

2.111 [2000, устн.] Является ли функция $f(x)=\cos^2 x\cdot tg^2x+\cos^2 x$ периодической? Если да, то найти главный период. Построить график функции.

2.112 [2001, май, устн.] Построить множество точек плоскости, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют уравнению $|y|=\dfrac{\cos\left(|x|+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin x}$.

2.113 [2004, устн., 1] Построить график функции $y=0.5(tg|x|-2tgx)$.

2.114 [2004, устн., 2] Построить график функции $y=\sin x-|\sin x|$.

2.115 [2004, устн., 3] Построить график функции $y=\sin\sqrt{9\pi^2-x^2}$.

2.116 [2005, устн., 1] Построить график функции $y=\cos x-|\cos x|$.

2.117 [2005, устн., 2] Построить график функции $y=\dfrac{1-\cos 2x}{2|\sin x|}$.

Системы тригонометрических уравнений

2.118 [2002, май, 4] Решить систему уравнений $\begin{cases}2\sin(2x+y)\cdot\sin y=\cos 2x\\ \sin 2x-\sin 2y=\sqrt{2}.\end{cases}$

2.119 [2004, 7] Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos(y-x)} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sin y}{\cos(y-x)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

2.120 [2004, устн.] Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x - \arccos y = 1 \\ \cos \pi y - \arcsin x = -1. \end{cases}$

Задачи с обратными тригонометрическими функциями

2.121 [1993, устн., 1] Решить уравнение $\lg(\arcsin x) = 0$.

2.122 [1993, устн., 2] Решить уравнение $\arccos(\pi \log_3 tgx) = 0$.

2.123 [1998, устн., 1] Вычислить $ctg(\arccos(-1/7))$.

2.124 [1998, устн., 2] Вычислить $\sin(2arctg2)$.

2.125 [1998, устн., 3] Вычислить $tg(\arcsin(-1/3))$.

2.126 [1998, устн., 4] Вычислить $\cos(2arctg(-4))$.

2.127 [1999, май, 3] Найти наибольшее из значений параметра a, при которых уравнение $arctg\left|9^x + 4^x + a\sqrt{2} \cdot 6^x\right| = 0$ имеет решение.

2.128 [1999, устн.] Вычислить $\cos(2arctg(-4))$.

2.129 [2002, устн., 1] Является ли рациональным число $ctg(\arcsin 0{,}25)$?

2.130 [2002, устн., 2] Вычислить значение $\arcsin(\cos 17)$.

2.131 [2003, устн.] Вычислить $\dfrac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\dfrac{35\pi}{11}\right)$.

2.132 [2004, устн., 1] Решить уравнение $\arccos(\sqrt{3}x) + \arccos x = \pi/2$.

2.133 [2004, устн., 2] Найти наименьшее значение функции

$$y = (arctgx)^2 + (arcctgx)^2.$$

2.134 [Олимпиада «Ломоносов-2007», устн.] Вычислить $\arccos(\cos 10)$.

2.135 [2007, устн.] Вычислить $\arcsin(\cos 10)$.

Задачи с параметрами

2.136 [1986, 6] При каждом значении параметра $p \le 9$ найти все решения уравнения $3\sqrt{3}tg\left(\dfrac{\pi}{15}\sin x - \dfrac{3\pi}{5}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\sin^2 x + \dfrac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\dfrac{5\pi}{14} - \dfrac{\pi}{7}\cos 2x\right) =$

$= 6 \cdot tg^2\left(\dfrac{\pi}{15}\sin x + \dfrac{2\pi}{5}\right) - p$ на отрезке $[0{,}2\pi]$.

2.137 [1989, 6] Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a^2-6a+9\right)\left(2+2\sin x-\cos^2 x\right)+\left(12a-18-2a^2\right)\left(1+\sin x\right)+a+3=0$$

не имеет решений.

2.138 [1996, 8] Найти все значениях параметра a, при которых для любого b уравнение $\cos(b+ab+bx)+2\cos b^2x=3a^2$ имеет хотя бы одно решение.

2.139 [1999, устн.] Найти все пары чисел (a,b), для которых равенство $a(\cos x-1)+b^2=\cos\left(ax+b^2\right)-1$ выполняется при всех действительных значениях x.

2.140 [2001, 8] При каких значениях параметра $a\geq 1$ уравнение $\sin\left(\frac{4}{13}x\right)\cdot tgx=0$ имеет ровно шесть корней на отрезке $[2\pi a;\left(a^2+1\right)\pi]$? Укажите эти корни.

2.141 [2003, май, 6] При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2+4a\cdot\cos(2\pi x)-9a^3=0$$

имеет единственное решение?

2.142 [2004, май, 6] При каких значениях параметра a уравнение $1+\sin^2 ax=\cos x$ имеет единственное решение?

2.143 [Олимпиада «Ломоносов-2006», 7] Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x-2a\sin x-|2a-1|+2=0$$

имеет решения, и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

Задачи смешанного типа

2.144 [2007, устн., 1] Решить неравенство $\cos 2x\geq\sqrt{y}+\sqrt{y-x^2-1}$.

2.145 [2007, устн., 2] Найти решения неравенства $x(1+\cos x-x\sin x)\leq 0$, расположенные на отрезке $[0,\pi/4]$.

2.146 [2007, устн., 3] Решить неравенство $\log_{|\cos x|}|x|<0$.

Раздел 3.

ПЛАНИМЕТРИЯ – ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

> *«**Геометрия** (от греческого γεω – Земля, μετρεω – измеряю) – часть математики, изучающая пространственные отношения и формы реального мира».*
>
> *«**Планиметрия** (от латинского planum – плоскость и греческого μετρεω – измеряю) – часть элементарной геометрии, в которой изучаются свойства фигур, лежащих в плоскости».*
>
> *Большой энциклопедический словарь* [4]

Данный раздел книги ориентирован, в первую очередь, на тех абитуриентов, кому предстоит повторение теоретического курса элементарной геометрии при подготовке к сдаче вступительного экзамена по математике в устной форме. Отвечая на вопрос билета, относящийся к геометрии, необходимо, как известно, продемонстрировать хорошее знание основных определений геометрических понятий и фигур, умение чётко формулировать и доказывать важнейшие геометрические теоремы.

Учебный материал данного раздела излагается в следующем порядке. Так как в основу геометрии положен аксиоматический подход, то вначале рассматриваются основные из существующих на сегодняшний день систем аксиом. Далее вводятся все необходимые определения геометрических понятий (отдельно в планиметрии и в стереометрии), и уже после этого доказываются важнейшие свойства геометрических фигур. Для закрепления и лучшего запоминания геометрических свойств разбираются примеры решения задач с использованием доказанных свойств. Материал приводится в объёме, достаточном для успешного прохождения вступительных испытаний в МГУ.

Для того чтобы научиться уверенно решать геометрические задачи, необходима дополнительная практика. Полезно при этом использовать специальную литературу, ориентированную на изучение методов решения задач, например, [31] и другие пособия такого рода.

3.1. Аксиоматика евклидовой геометрии(*)

Геометрия изучает свойства плоских и пространственных фигур. Евклидовой геометрией принято называть геометрическую теорию, основанную на системе аксиом, впервые изложенной в «Началах» Евклида (III в. до н.э.). Предпринятое во 2-й половине XIX в. полное исследование аксиом евклидовой геометрии показало, что система аксиом, данная в «Началах», не полна и, кроме того, нуждается в пересмотре с учётом накопленных к тому времени знаний. Огромная роль в создании аксиоматического подхода к построению геометрии принадлежит крупнейшим немецким математикам Феликсу *Клейну* (1849–1925) и Давиду *Гильберту* (1862–1943). В 1899 г. Гильберт предложил первую достаточно строгую (полную, независимую и непротиворечивую) аксиоматику евклидовой геометрии.

Научная геометрическая теория о свойствах фигур, расположенных в евклидовом пространстве, строится логическим (дедуктивным) методом на основе системы аксиом. Суть *аксиоматического метода построения геометрии* состоит в следующем.

1. Вводятся *основные понятия* (простейшие геометрические фигуры) и формулируются *основные*, принимаемые без каких-либо доказательств, *положения* (*аксиомы*), в которых выражены *основные отношения* между основными понятиями. Сами основные понятия никак специально не определяются, их можно интерпретировать как угодно. Единственное условие – они должны удовлетворять системе аксиом.

2. Далее, используя основные понятия и основные отношения между ними, определяются новые понятия, формулируются и доказываются новые утверждения – *теоремы* – о свойствах введённых понятий. При этом доказательства теорем проводятся строго логическим путём на основе аксиом и ранее доказанных теорем. Отметим, что помимо *теорем* (имеют важное теоретическое значение) существуют другие виды доказываемых утверждений: *леммы* (имеют вспомогательное значение; обычно используются при доказательстве теорем), а также *следствия* (утверждения, сравнительно просто выводимые из других утверждений (теорем)).

Таким образом, получается геометрическая система утверждений, связанных целой сетью логических зависимостей.

Для построения логически строгой математической теории (в частности, курса евклидовой геометрии) необходимо, чтобы система аксиом, лежащая в её основе, удовлетворяла следующим требованиям. Она должна быть:

1) *непротиворечивой*, т.е. чтобы из этой системы аксиом невозможно

было логическим путём получить два взаимно исключающих друг друга утверждения;

2) *полной*, т.е. чтобы с помощью аксиом только этой системы, не добавляя новых аксиом, вводящих новые отношения между понятиями, можно было доказать (или опровергнуть) логическим путём любое утверждение о свойствах фигур данной геометрии;

3) *независимой*, т.е. чтобы ни одна из аксиом данной системы не являлась логическим следствием других её аксиом.

В современной элементарной евклидовой геометрии трёхмерного пространства в качестве *основных понятий* выступают объекты трёх родов: «точка», «прямая» и «плоскость». Они представляются интуитивно. Подчеркнём, что изначально точка, прямая и плоскость вводятся как различные и независящие одно от другого понятия. Уже потом, опираясь на аксиомы, доказывается, что прямые и плоскости состоят из бесконечного числа точек.

В качестве *основных отношений* принимаются отношения, выражаемые словами «принадлежит» («не принадлежит»), «лежит между» («не лежит между»), «наложение» («совмещается наложением») и некоторые другие. С помощью основных понятий евклидовой геометрии определяются все остальные понятия евклидовой геометрии.

Современная *система аксиом* евклидовой геометрии в основе своей является гильбертовой и состоит из пяти групп. Рассмотрим их.

Аксиомы первой группы – *аксиомы принадлежности* – устанавливают взаимоотношения принадлежности между понятиями точка, прямая и плоскость.

I. *Аксиомы принадлежности (соединения)*

I_1. Через каждые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

I_2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну (аксиома плоскости).

I_4. На каждой плоскости есть по крайней мере одна точка, и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

I_5. Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости (аксиома прямой и плоскости).

I_6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку.

Вторая группа аксиом – *аксиомы порядка* – определяет, как следует из названия, порядок расположения точек на прямой и на плоскости.

II. *Аксиомы порядка*

II$_1$. Если точка B лежит между A и C, то A, B, C – различные точки, лежащие на одной прямой, и точка B лежит также между C и A.

II$_2$. Для любой пары точек A, B на прямой существует такая точка C этой прямой, что B лежит между A и C.

II$_3$. Из трёх данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.

II$_4$. Если прямая l, лежащая в плоскости треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает ещё другую его сторону или проходит через вершину (аксиома Паша).

В [29] утверждение «Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон» рассматривается как теорема.

Третья группа аксиом – *аксиомы наложения* – устанавливает основные положения о равенстве отрезков и углов.

Ш. *Аксиомы наложения*

Ш$_1$. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Ш$_2$. От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Ш$_3$. Если при наложении совмещаются концы отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

Ш$_4$. Любой угол со сторонами в виде лучей a и b можно совместить с равным ему углом со сторонами в виде лучей a_0 и b_0 одним из двух способов:

1) луч a совмещается с лучом a_0, а луч b совмещается с лучом b_0;

2) луч a совмещается с лучом b_0, а луч b совмещается с лучом a_0.

Ш$_5$. Любая фигура F равна самой себе, т.е. F=F (аксиома рефлексивности).

Ш$_6$. Если фигура F равна фигуре G, то и фигура G равна фигуре F (аксиома симметричности).

Ш$_7$. Если фигура F равна фигуре G, а фигура G равна фигуре H, то фигура F равна фигуре H (аксиома транзитивности).

IV. Аксиомы непрерывности

IV_1 (аксиома Архимеда). Всякий отрезок AB можно перекрыть меньшим отрезком AA_1, откладывая его на AB достаточное число раз.

IV_2. (аксиома Кантора). Если дана бесконечная последовательность вложенных друг в друга отрезков $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset ... A_nB_n \supset A_{n+1}B_{n+1} \supset ...$, длина которых с ростом n стремится к нулю, то существует, и притом единственная, точка C, принадлежащая всем отрезкам A_nB_n.

V. Аксиома параллельности

Пусть a – произвольная прямая и A – точка, лежащая вне её. Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой A, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не имеющей общих точек с прямой a.

Замечание (к аксиоме V). Утверждение о том, что через точку, не лежащую на данной прямой, *можно* провести по крайней мере одну прямую, параллельную данной, доказывается как теорема (см., например, [2]). Интересно, что если в аксиоматике евклидовой геометрии заменить аксиому о параллельных противоположным утверждением (т.е. что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную), то полученная новая система аксиом (система аксиом геометрии Н.Лобачевского (1792–1856)) тоже непротиворечива, так что аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии.

В приведённой здесь системе аксиом III группа содержит аксиомы наложения. Ф.Шур в начале XX века вместо них использовал так называемые *аксиомы движения*.

III. Аксиомы движения

III_1. Движение ставит в соответствие точкам – точки, прямым – прямые, плоскостям – плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям.

III_2. Два последовательных движения дают опять движение, и для всякого движения есть обратное.

III_3. Если даны точки A, B и полуплоскости α, β, ограниченные продолженными полупрямыми a, b, которые исходят из точек A, B, то существует движение, и притом единственное, переводящее A, a, α, соответственно, в B, b, β (полупрямая и полуплоскость определяются на основе понятий сочетания и порядка).

Подробнее об аксиоматике Д.Гильберта и других подходах к созданию систем аксиом можно прочитать в *Приложении 2* к данной книге.

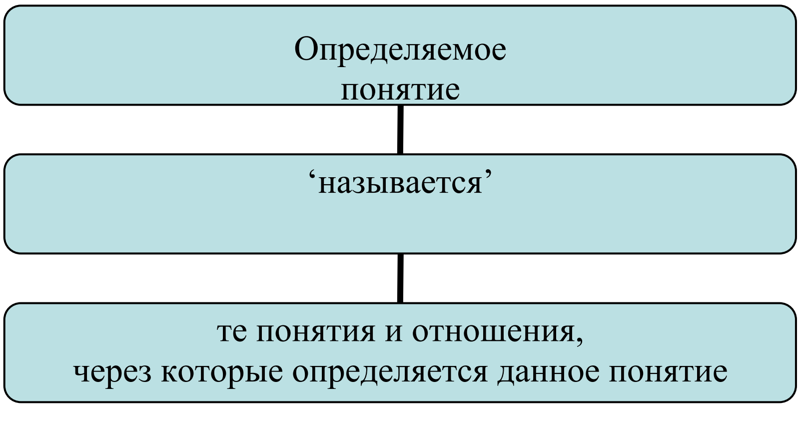
Аксиоматика геометрии продолжает развиваться и совершенствоваться. В данной книге за основу взят один из наиболее удачных, на взгляд автора, вариантов системы аксиом [4,2]. Подробнее о системах аксиом планиметрии можно прочитать, например, в [2,17,21,28] и других изданиях.

Отметим, что большой вклад в вопросы развития и изучения дедуктивного метода построения евклидовой и неевклидовой геометрий на основании различных систем аксиом в России внесли А.Д.Александров, А.П.Киселёв, Л.С.Атанасян, В.Г.Болтянский, А.Н.Колмогоров, А.В.Погорелов, З.А.Скопец, И.М.Яглом и многие другие.

3.2. Основные понятия и определения

Принимая во внимание практическую невозможность в одном разделе книги привести все необходимые определения планиметрии во всём их многообразии, ограничимся лишь основными определениями. При этом следует иметь в виду, что одно и то же понятие в зависимости от того, в какой момент оно определяется и через какие ранее определённые понятия оно выражается, можно определить по-разному. И часто одновременно существуют несколько определений одного и того же понятия, по сути, эквивалентные между собой.

Например, определить, что такое прямой угол, можно сразу после введения понятий угла и его величины (как угла с градусной мерой, равной 90^0). Но если предварительно ввести понятие развёрнутого угла и половины угла, то можно определить прямой угол как угол, являющийся половиной развёрнутого угла. С другой стороны, если до этого уже было введено понятие смежных углов, то возможно и такое определение прямого угла – как угла, равного своему смежному. Но в любом случае при выстраивании математической теории важно соблюдать общий принцип: *каждое новое определение всегда формулируется на основе ранее определённых объектов и отношений между ними*, отталкиваясь от некоторых первичных понятий. Итак, рассмотрим основные понятия планиметрии и то, как они определяются. Обратим внимание читателя на то, что любое определение имеет следующую структуру:



Геометрической фигурой на плоскости называется всякое множество точек этой плоскости, содержащее хотя бы одну точку. Если некоторый новый объект определяется как геометрическая фигура, обладающая заданным свойством, то под этим обычно понимается ГМТ (геометрическое место точек), т.е. множество тех и только тех точек, которые обладают заданным свойством. Примеры геометрических фигур: точка, прямая, отрезок, луч, треугольник, окружность, ломаная линия и т.д. Две геометрические фигуры называются *равными*, если при наложении они могут быть полностью совмещены друг с другом.

Для сравнения: в учебнике элементарной геометрии А.П.Киселёва [17] равенство двух геометрических фигур определяется так: «Две геометрические фигуры называются *равными*, если перемещением одной из них в пространстве её можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях». В книге А.В.Погорелова [22] «две фигуры называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую».

Отрезок и связанные с ним понятия

Пусть A и B - две различные точки. *Отрезком* называется геометрическая фигура, состоящая из точек A, B и всех точек, лежащих между ними [24]. При этом точки A и B называют *концами отрезка*, а все остальные точки – *внутренними точками* отрезка.

Отметим, что встречаются и другие определения отрезка. Так, авторы [2] определяют отрезок просто как пару точек A и B. При этом каждую точку прямой AB, лежащую между точками A и B, они называют *внутренней точкой* отрезка AB. И уже объединение таким образом определённого отрезка с его внутренними точками называется у них *отрезком прямой*.

Отрезок с концами A, B обозначается AB или BA. Если точки A и B совпадают ($A=B$), то отрезок называется *нулевым,* он не содержит внутренних точек.

Пусть теперь A и B - две различные точки одной прямой. *Отрезком прямой* назовём геометрическую фигуру, состоящую из точек A, B и всех точек данной прямой, лежащих между ними (в [22,21,29] последняя формулировка определяет просто *отрезок*).

У А.П.Киселёва [17] *отрезком прямой* называется часть прямой, *ограниченная с обеих сторон*. При этом предполагается, что понятие «ограниченности с обеих сторон» ясно на интуитивном уровне. Но так как это понятие не относится к первичным, то при использовании оно должно быть предварительно определено. Если это не сделано, то такое определение нельзя признать математически строгим. Аналогичное определение отрезка «как части прямой, ограниченной двумя точками» можно найти в пособии [24]. В учебнике другого известного автора А.В.Погорелова [22], в отличие от приведённого выше определения, концы отрезка не принадлежат ему: «*отрезком* называется часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными её точками…называемыми концами отрезка».

Можно доказать, что введённые выше понятия *отрезка* и *отрезка прямой* эквивалентны между собой.

Пусть точка B лежит между точками A и C, тогда отрезок AC называется *суммой отрезков* AB и BC.

Рассмотрим подробнее *сравнение отрезков* между собой [17,21]. Пусть даны два отрезка. Наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого, и один из отрезков пошёл вдоль другого (т.е. у этих отрезков помимо совпавших концов есть и другие – внутренние – общие точки). Если при этом совместятся и два других конца этих отрезков, то отрезки полностью совместятся, и значит, они *равны*. Если же два других конца не совместятся, то *меньшим* считается тот отрезок, который составит часть другого. В этом определении фактически используется понятие *подмножества* из теории множеств.

Приведём ещё одно определение. Точка отрезка, делящая его на два равных отрезка (пополам), называется *серединой* этого отрезка.

Одной из важнейших числовых характеристик любого отрезка является его длина. *Длина* – это числовая характеристика протяжённости линий. Всякая непрерывная линия (кривая) имеет длину – конечную или бесконечную. Длина отрезка в выбранной системе координат измеряется отрезком, принятым за единицу длины. *Измерить длину* отрезка означает определить, «сколько раз» в нём укладывается единичный отрезок (отношение длин измеряемого и единичного отрезков может быть произвольным действительным числом). Длина отрезка AB определяется однозначно и обозначается $|AB|$ или AB.

Формально *длину отрезка* можно определить как число, удовлетворяющее следующим требованиям (иногда их называют аксиомами длины).

1) Существует отрезок, длина которого принята за единицу.
2) Если $A \neq B$, то длина отрезка есть положительное число,
   если $A = B$, то длина отрезка равна нулю.
3) Равные отрезки имеют равные длины.
4) Длина отрезка обладает свойством аддитивности. А именно, если отрезок AC является суммой двух отрезков AB и BC (B лежит между A и C), то его длина равна сумме длин составляющих его отрезков AB и BC:

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

<u>*Замечание 1*</u>. Если точки начала и конца отрезка поменять местами, то, как следует из вышеприведённого определения, длина отрезка при этом не изменится: $|AB| = |BA|$.

<u>*Замечание 2*</u>. Для любых трёх точек A, B и C выполняется неравенство

$$|AC| \le |AB| + |BC|.$$

Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.

Отрезки можно сравнивать между собой по их длине. Два отрезка равны тогда и только тогда, когда равны их длины. *Меньшим (большим)* из двух неравных отрезков называется тот отрезок, который имеет меньшую (большую) длину. Введённое таким образом сравнение отрезков по длине полностью согласуется с тем способом сравнения (при помощи наложения), которое было введено выше.

Строго говоря, следует различать понятия отрезка и его длины. Так, запись $AB = 1$ по правилам следует читать: «*длина отрезка* AB равна единице». Часто вместо этого в учебниках и пособиях для краткости пишут: «*отрезок* AB равен единице».

Луч, полуплоскость, ломаная

Если точка O лежит между точками A и B, то точки A и B называются расположенными *по разные стороны* от точки O [29]. Если же одна из этих точек A, B лежит между другой и точкой O, то говорят, что точки A и B лежат *по одну сторону от* точки O.

Так как выше уже было введено понятие отрезка, то возможно и другое определение того факта, что две точки расположены по одну (или по разные стороны) от заданной точки. А именно, пусть O – некоторая точка прямой, A и B – две другие точки этой же прямой ($A \neq B$). Говорят, что точки A и B расположены *по разные стороны* относительно точки O, если O является внутренней точкой отрезка AB. Соответственно, точки A и B называются лежащими *по одну сторону от* точки O, если O не принадлежит отрезку AB.

Пусть O – некоторая точка прямой. *Лучом (полупрямой), исходящим из точки* O, называется геометрическая фигура, представляющая собой множество всех точек прямой, лежащих по одну сторону от точки O [22]. Сама точка O при этом называется *началом луча*. Если точка O, являющаяся началом луча, не принадлежит лучу, то такой луч называется *открытым*, в противном случае луч называется *замкнутым*. По умолчанию под лучом обычно подразумевается открытый луч.

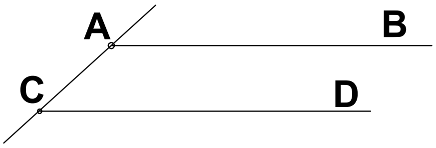
В учебнике А.П.Киселёва [17] даётся нестрогое – образное – определение луча (полупрямой) как «прямой, ограниченной только с одной стороны». Использовать такое описание луча как основное во время вступительного экзамена всё же не рекомендуется.

Из приведённого определения следует, что всякая точка O прямой делит эту прямую на два луча. При этом любые две точки одного луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O. Два различных луча, лежащие на одной прямой и имеющие общее начало, называются *дополнительными лучами* (в [29] такие лучи называются *противоположными*). В этом случае говорят, что каждый из этих лучей является *продолжением* другого луча.

Пусть на плоскости даны прямая a и две точки A и B, не принадлежащие этой прямой. Точки A и B называются *лежащими по одну сторону* от прямой a, если отрезок AB не имеет с прямой a общих точек. Точки A и B называются *лежащими по разные стороны* от прямой a, если отрезок AB пересекается с прямой a в некоторой своей внутренней точке [29].

Множество всех точек плоскости, каждая из которых не лежит на прямой a, и любые две из которых лежат по одну сторону от прямой a, называется *полуплоскостью*. Из определения следует, что любая прямая a разделяет всю плоскость, за исключением точек прямой a, на две части, каждая из которых является полуплоскостью. Прямую a в этом случае называют *границей* полуплоскости.

Различают *открытую* и *замкнутую* полуплоскости. В случае с открытой полуплоскостью граница полуплоскости ей не принадлежит. Замкнутая полуплоскость представляет собой объединение открытой полуплоскости и её границы. При изображении на рисунке прямую, являющуюся границей открытой полуплоскости, обычно обозначают пунктирной линией.

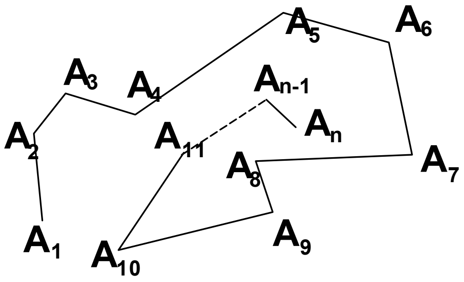


Два не лежащих на одной прямой луча AB и CD, где точки A и C – соответственно начала этих лучей, называются *сонаправленными*, если они лежат на параллельных прямых в одной полуплоскости относительно прямой AC (см. рис.). Если же указанные лучи лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через их начала, то они называются *противоположно направленными*.

В учебнике А.В.Погорелова [22] две полупрямые называются *одинаково направленными*, если они совмещаются параллельным переносом, и *противоположно направленными*, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.

Несовпадающие лучи, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если один из них целиком лежит внутри другого. В противном случае они будут *противоположно направлены*.

Ломаная линия – это геометрическая фигура, состоящая из конечного числа соединяющихся отрезков прямых A_1A_2, $A_2A_3,\ldots$, $A_{n-1}A_n$, следующих один за другим так, что конец каждого предыдущего отрезка совпадает с началом каждого последующего отрезка, при этом никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой. *Вершинами* ломаной линии называются точки $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ соединения отрезков прямых и точки начала первого (A_1) и конца последнего (A_n) отрезков. Ломаную обозначают, перечисляя



последовательно её вершины. Так, на рисунке изображена ломаная $A_1A_2...A_n$. *Звеньями* ломаной называются все отрезки, из которых она состоит. Если звенья ломаной линии не имеют других общих точек, помимо указанных выше в определении (нет точек самопересечения или касания звеньев, а также накладывания звеньев одного на другое), то такая ломаная называется *простой*. В противном случае она называется ломаной линией *с самопересечением*. *Длиной* ломаной линии называется сумма длин всех её звеньев. Доказывается, что длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы [22]. Ломаные линии делятся на *замкнутые* (конец последнего отрезка совпадает с началом первого отрезка) и *незамкнутые* в противном случае.

Угол. Измерение и сравнение углов. Виды углов

Углом в планиметрии называется геометрическая фигура, состоящая из точки и двух исходящих из неё лучей. Лучи, образующие угол, называются *сторонами* угла, а точка, из которой они выходят (их общее начало), – *вершиной* угла. Если точки A и B лежат на разных сторонах угла с вершиной O, то распространённое обозначение такого угла – $\angle AOB$ (буква, обозначающая вершину угла, должна находиться в середине). Если лучи совпадают, то один из образовавшихся углов называют *нулевым*, а другой – *полным*. Если стороны угла являются дополнительными лучами одной прямой, то угол называется *развёрнутым*.

В [22,16] *углом* называется «…фигура, которая состоит из точки и двух *различных* полупрямых, исходящих из этой точки». На наш взгляд, требование *различности* в последнем определении излишне, так как это сужает понятие угла, исключая нулевой и полный угол.

Измерение углов аналогично измерению отрезков и основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Если ввести предварительно понятие суммы углов (а значит, и части угла), как это будет сделано ниже, то мера угла может быть определена следующим образом.

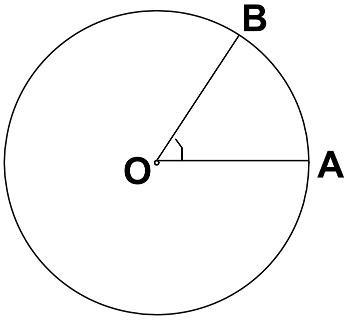
Мерой угла (его *величиной*) называют действительное число, удовлетворяющее следующим требованиям (их иногда называют аксиомами измерения углов на плоскости).

1) Существует угол, мера которого равна единице.
2) Мера ненулевого угла есть положительное число;
   мера нулевого угла равна нулю.
3) Равные углы имеют равные меры.
4) Мера суммы двух углов равна сумме мер этих углов.

Мера угла показывает, «сколько раз» единичный угол и его части укладываются в данном угле. Величина угла $\angle AOB$ часто обозначается так же, как и сам угол – $\angle AOB$; иногда для этих целей используется специальное обозначение $\hat{AOB}$. Можно доказать утверждение: если величины двух углов равны, то и сами углы равны.

Углы измеряются в градусной или в радианной мерах. При *градусном измерении углов* в качестве основной единицы измерения берётся угол в 1 *градус* (обозначается 1°). Угол в 1° – это угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Угол, равный $\frac{1}{60}$ части угла в 1°, – это угол в 1 *минуту* (обозначается 1′). Угол, равный $\frac{1}{60}$ части угла в 1 минуту, – это угол в 1 *секунду* (обозначается 1″) и т.д. Из определения градуса следует, что величина развёрнутого угла составляет 180°. Нулевой угол имеет градусную меру 0°, полный угол – 360°. Существуют углы с градусной мерой больше 360°.

В некоторых изданиях, например в [22,24], нулевой угол не определён: «Каждый угол имеет определённую градусную меру, *большую* нуля».



Наряду с градусной мерой измерения углов в геометрии и тригонометрии употребляется и другая мера измерения углов, называемая *радианной мерой*. Рассмотрим окружность (определение окружности будет приведено ниже в тексте пособия) радиуса R с центром в точке O. Проведём два радиуса OA и OB так, чтобы длина дуги AB была равна радиусу окружности. Получившийся при этом центральный угол $\angle AOB$ будет углом в 1 радиан. Угол в 1 радиан принимается за единицу измерения радианной меры. В общем случае *радианной мерой угла* называется число, равное отношению длины соответствующей дуги к радиусу окружности. При радианном измерении углов величина развёрнутого угла равна π радиан (так как длина окружности равна 2π). Поэтому градусная и радианная единицы измерения углов связаны друг с другом посредством равенства:

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45'',$$

т.е. радианная мера угла получается из градусной умножением на $180^0/\pi$.

В зависимости от *величины угла* выделяют следующие три вида углов: острые, прямые и тупые. Угол, величина которого равна 90°, называется *прямым углом*. Углы, величина которых больше 0°, но меньше 90°, называются *острыми углами*.

Для сравнения: «Угол, меньший 90°, называется острым углом» [17,22,24,29]. В этом определении необходимо уточнить «ненулевой угол», так как нулевой угол не относят к острым углам.

Углы, величина которых больше 90°, но меньше 180°, называются *тупыми углами*. Угол величины меньше 180° иногда называют *неразвёрнут*ым углом [21].

Стороны угла разделяют всю плоскость, в которой лежит угол, на две области (ни в одну из них не входят ни вершина угла, ни его стороны), называемые *внутренней и внешней областями угла*. Одна из указанных областей (для углов меньших развёрнутого её чаще называют внутренней областью угла) характеризуется тем, что в ней целиком помещаются все внутренние точки отрезка, соединяющего две любые точки, взятые на разных сторонах угла. Тогда другая область называется внешней областью угла [17].

Иначе: внешней областью угла, меньшего развёрнутого, называется та, которой целиком принадлежит хотя бы одна прямая той же плоскости.

Иначе [2;21]: пусть дан угол $\angle AOB$, меньший развёрнутого угла. Рассмотрим две полуплоскости α и β такие, что:

1) полуплоскость α содержит луч OB, причём границей полуплоскости α является прямая OA;
2) полуплоскость β содержит луч OA, причём границей полуплоскости β является прямая OB.

Тогда *внутренней областью* угла $\angle AOB$ называется общая часть (пересечение) полуплоскостей α и β.

В общем случае понимание того, какую из двух областей считать внутренней, следует из контекста задачи. Отметим в дополнение, что нулевой угол не имеет внутренней области, а его внешней областью является вся плоскость, его содержащая, но без луча, образованного совпавшими сторонами угла, и его вершины. Полный угол, наоборот, не имеет внешней области, а его внутренней областью является плоскость, содержащая этот угол, с вырезанными лучом, образованным сторонами угла, и его вершиной.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

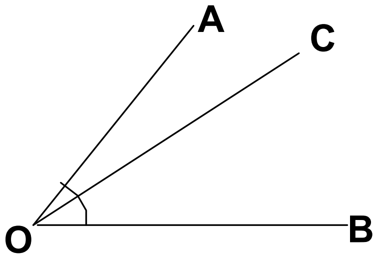
Для сравнения [24,29]: «*Углом* называется фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости». Не вполне ясно в этом определении, какая из двух существующих дополнительных частей плоскости имеется в виду.

А вот как определяется понятие угла и его внутренних точек у автора [27]. Тот факт, что из трёх различных лучей, лежащих в одной полуплоскости и имеющих общее начало, один и только один луч лежит между двумя другими, в этой книге принимается за аксиому. Тогда множество, состоящее из точек лучей a_1 и a_2 (не являющихся дополнительными), а также точек всех лучей, лежащих между лучами a_1 и a_2, называется *углом, меньшим развёрнутого угла*. А множество, состоящее из точек лучей a_1 и a_2 (не являющихся дополнительными), а также точек всех лучей, не лежащих между лучами a_1 и a_2, называется *углом, большим развёрнутого угла*. Точки, принадлежащие углу, но не лежащие на его сторонах, называются *внутренними точками* угла».

Иногда для обозначения этой фигуры используют специальный термин *плоский угол* [2,22].

В [22] плоский угол описывается так. Угол разбивает плоскость на две части. Каждая из частей называется *плоским углом*.

Плоские углы с общими сторонами (обычно дополняющие друг друга до полного угла – *авт.*) называются *дополнительными* [22].



Введём понятие *суммы углов*. Пусть дан ненулевой угол $\angle AOB$ с вершиной в точке O и луч OC, принадлежащий внутренней области этого угла. Рассмотрим два образовавшихся при этом угла $\angle AOC$ и $\angle COB$.

В этой ситуации говорят, что угол $\angle AOB$ есть *сумма углов* $\angle AOC$ и $\angle COB$. При этом градусная (радианная) мера суммы углов равна сумме градусных (радианных) мер каждого из них:

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B\,.$$

Пусть теперь надо сложить два угла $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$. Построив угол $\angle AOB$, пристраиваем к нему угол $\angle A_1O_1B_1$ так, чтобы совпали их вершины O и O_1, и сторона O_1A_1 второго угла пошла по стороне OB первого угла, причём внутренние области складываемых углов должны быть расположены по разные стороны от общей стороны. Тогда угол $\angle AOB_1$ также называется *суммой* углов $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$. Может случиться, что, строя сумму углов, мы не только заполним всю плоскость вокруг их общей вершины, но даже будем вынуждены налагать углы один на другой, покрывая плоскость вокруг общей вершины во второй раз, в третий раз и т.д. Такая сумма углов равна одному полному углу, сложенному с некоторым углом, или равна двум полным углам, сложенным с некоторым углом, и т.д.

Рассмотрим *сравнение углов* между собой (при помощи наложения) [17]. Пусть даны два угла. Наложим один угол на другой так, чтобы совместились их вершины и сторона одного угла совместилась со стороной другого, а также чтобы внутренние области обоих углов были расположены по одну сторону от совмещённых сторон. Если при этом две другие стороны также совместятся, то и углы полностью совместятся, и значит, они *равны*.

В [22] не используется понятие наложения, и поэтому равенство геометрических фигур определяется в каждом случае по-своему. Например, два отрезка называются равными, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются равными, если они имеют одинаковую угловую меру в градусах. Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны.

Если же две другие стороны не совместятся, то *меньшим* считается тот угол, который составит часть другого. Другой угол в этой ситуации будет называться, соответственно, *большим* (при этом вторая сторона меньшего угла окажется во внутренней области большего угла). Развёрнутый угол больше любого тупого угла. Любые два развёрнутых угла, очевидно, равны.

В [16] сравнение углов вводится так: «Если два угла имеют общие вершину и одну сторону, а вторая сторона одного из углов лежит между сторонами другого угла, то говорят, что первый из этих двух углов *меньше* второго (второй угол *больше* первого)». При этом, во-первых, необходимо определить, что значит, что сторона одного из углов *лежит (проходит) между сторонами* другого. Обычно говорят, что луч *проходит между сторонами* данного угла, если он исходит из его вершины и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла [22,24]. Однако, во-вторых, существенным здесь опять является то, что этот луч должен принадлежать внутренней области угла, а иначе это определение неверно.

С учётом приведённой операции сравнения углов можно иначе сформулировать определение острого и тупого углов [16]. А именно, *острым углом* назовём (ненулевой – *авт.*) угол, меньший прямого угла. Соответственно, угол, больший прямого угла, но меньший развёрнутого, называют *тупым углом*.

Строго говоря, всегда следует разничать понятия угла и его величины (даже в тех случаях, когда они обозначаются одинаково). Например, запись $\angle ABC = 50^0$ должна читаться так: «Величина угла ABC равна пятидесяти градусам». Отметим, что довольно часто, когда речь идёт о величинах углов, для краткости говорят или пишут вместо этого, что «угол ABC равен пятидесяти градусам».

Луч, лежащий в плоскости угла, исходящий из вершины угла и принадлежащий его внутренней области, называется *биссектрисой* этого угла, если он делит данный плоский угол на два равных угла.

Иначе [22,24,29]: *Биссектрисой угла* называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам (см. выше замечание относительно того, что значит, что луч проходит *между сторонами* данного угла). Термин «*биссектриса*» происходит от латинского слова «bissectrix» – делящая пополам [27].

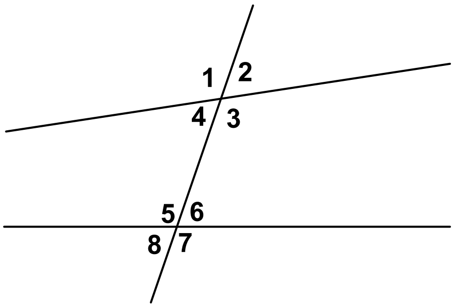
Теперь, когда введено понятие суммы углов (а значит, и половины угла), можно определить *прямой угол* ещё как угол, равный половине развёрнутого угла. Добавим к сказанному, что, аналогично биссектрисе, луч, исходящий из вершины угла и делящий его на три равных угла, называется *триссектрисой* угла.

Смежные углы – это углы, у которых вершина и одна сторона общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами одной прямой. Используя это понятие, можно так определить прямой угол: *прямым* называется угол, равный своему смежному. Нулевой и развёрнутый углы по определению считаются смежными. Углы, лежащие в одной плоскости, имеющие общую вершину и общую сторону, называются *прилежащими*. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного из них являются дополнительными полупрямыми другого [2,22,24]. Так, при пересечении двух прямых всегда образуются две пары вертикальных углов.

Приведённое определение вертикальных углов следует признать математически более точным, нежели иногда встречающееся и обладающее несомненным достоинством – образностью – следующее определение [16,17]: два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются продолжениями за вершину сторон другого угла. Здесь используется основанное на интуитивной наглядности понятие «продолжения за вершину», которое тогда также требуется определить. А вот пример того, как не следует определять вертикальные углы (объясните, почему): «Углы, образованные противоположными лучами, называются *вертикальными*» [29].

Рассмотрим углы, образованные при пересечении двух (не обязательно параллельных) прямых третьей – секущей.

Углы называются:



$\begin{cases}\angle 1 \;\; \text{и} \;\; \angle 5\\ \angle 2 \;\; \text{и} \;\; \angle 6\\ \angle 3 \;\; \text{и} \;\; \angle 7\\ \angle 4 \;\; \text{и} \;\; \angle 8\end{cases}$ – соответственные углы,

$\begin{cases}\angle 3 \;\; \text{и} \;\; \angle 5\\ \angle 4 \;\; \text{и} \;\; \angle 6\end{cases}$ – внутренние накрест лежащие углы,

$\begin{cases}\angle 1 \;\; \text{и} \;\; \angle 7\\ \angle 2 \;\; \text{и} \;\; \angle 8\end{cases}$ – внешние накрест лежащие углы,

$\begin{cases}\angle 4 \;\; \text{и} \;\; \angle 5\\ \angle 3 \;\; \text{и} \;\; \angle 6\end{cases}$ – внутренние односторонние углы,

$\begin{cases}\angle 1 \;\; \text{и} \;\; \angle 8\\ \angle 2 \;\; \text{и} \;\; \angle 7\end{cases}$ – внешние односторонние углы,

$\begin{cases}\angle 1 \;\; \text{и} \;\; \angle 3\\ \angle 2 \;\; \text{и} \;\; \angle 4\end{cases}$ – вертикальные углы, $\begin{cases}\angle 1 \;\; \text{и} \;\; \angle 2\\ \angle 2 \;\; \text{и} \;\; \angle 3\end{cases}$ – смежные углы.

Взаимное расположение прямых на плоскости. Перпендикуляр и наклонная

Две различные прямые a и b, лежащие в одной плоскости, называются *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки. Для параллельных прямых используют обозначение $a \parallel b$. В противном случае, если прямые непараллельны, пишут $a \nparallel b$.

Термин «*параллельная*» происходит от греческого слова «$\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\xi$», т.е. «идущая рядом» или «проведённая рядом». В обобщённом смысле иногда считают две прямые, лежащие в одной плоскости, *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки или совпадают [2]. В этом смысле любая прямая считается параллельной самой себе.

Две различные прямые называются *пересекающимися*, если они имеют только одну общую точку, называемую *точкой пересечения*.

Иногда определение параллельных прямых формулируют в виде: «две прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются» [17,21,22]. При этом, во избежание разночтений, необходимо уточнять, что понимается под термином «пересекаются», поскольку под пересечением (в теории множеств, например) понимают наличие общих точек, количество которых может быть любым. И в этом – расширенном – смысле случай совпадения прямых также подпадает под понятие «пересекающиеся прямые». Замечание относительно того, что прямые лежат в одной плоскости, тоже существенно (если специально не оговорено, что речь идёт о планиметрии), так как в стреометрии существует понятие скрещивающихся прямых, которые также не пересекаются.

Две пересекающиеся прямые a и b, образующие в точке пересечения, как при вершине, прямой угол, называются *перпендикулярными*.

Иначе: две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом [22]. Теорема: через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и притом только одну.

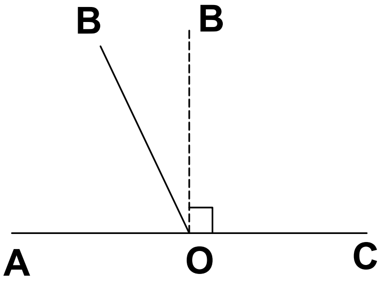
Под *углом между двумя прямыми* (если они не совпадают, не параллельны и не перпендикулярны друг другу) обычно понимается наименьший из углов, образованных лучами, полученными при пересечении этих прямых (т.е. острый угол).

Перпендикулярные прямые обозначаются $a \perp b$. Отрезки называются *перпендикулярными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Аналогично можно определить перпендикулярные лучи, луч и отрезок, отрезок и прямую.

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней. Отрезок, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a*, если прямые AH и a перпендикулярны. При этом точка H называется *основанием перпендикуляра* (или *проекцией* точки A на прямую a). Существует теорема о том, что из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один [17,21,22]. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой*. *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой [21,22]. Можно доказать теорему о том, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой [2,21]. *Серединным перпендикуляром к отрезку* называется прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину.

Общая сторона (OB) двух смежных углов ($\angle AOB$ и $\angle BOC$) называется *наклонной к прямой* (AC), на которой лежат две другие стороны, в том случае, когда смежные углы не равны между собой (см. рис.); в том же случае, когда смежные углы равны и, следовательно, каждый из них – прямой, общая сторона называется *перпендикуляром к прямой*, на которой лежат две другие стороны [17]. Общая вершина (O) в первом случае называется *основанием наклонной*, во втором случае – *основанием перпендикуляра*.

Чаще встречается другое определение наклонной [22]: пусть BO – отрезок перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC (O – основание перпендикуляра), и O_1 – любая точка этой прямой, отличная от O. Тогда отрезок BO_1 называется *наклонной,* проведённой из точки B к прямой AC. Точка O_1 при этом называется *основанием* наклонной, а отрезок O_1O – *проекцией* наклонной (т.е. *проекция наклонной* – это отрезок, соединяющий основания отрезков перпендикуляра и наклонной, проведённых из одной и той же точки).



В [2,29] *наклонной к* данной прямой a называется прямая l, не являющаяся ни перпендикулярной, ни параллельной прямой a.

Во всех трёх приведённых определениях формулируется, по сути, одно понятие – наклонной, но в первом случае – в виде луча, во втором – отрезка, а в третьем – прямой. Доказывается (см., например, [2,27]), что если из точки вне прямой к этой прямой проведены два отрезка наклонных, то: 1) эти наклонные равны тогда и только тогда, когда равны их проекции; 2) одна из наклонных больше (меньше) другой наклонной тогда и только тогда, когда её проекция больше (меньше) проекции другой.

Окружность, круг и связанные с ними понятия

Окружностью в планиметрии называется геометрическое место точек плоскости, расположенных на заданном (положительном) расстоянии от данной точки этой плоскости. Эта точка называется *центром* окружности. Любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром (а также его длина), называется *радиусом* окружности.

Или: *окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки этой же плоскости. Расстояние от точек окружности до её центра называется *радиусом* окружности [16,22]. Отметим, что в этом определении необходимо добавить, что радиус окружности не может быть равен нулю, т.к. в этом случае окружность вырождается в точку, а точка окружностью, строго говоря, уже не является.

Две окружности называются *равными*, если они совпадают при наложении. Можно доказать, что две окружности равны тогда и только тогда, когда равны их радиусы. Можно доказать, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну [17].

Прямая, проходящая через какие-либо две точки окружности, называется *секущей* к окружности (упомянутые точки при этом называются точками пересечения). *Касательной* к окружности называется такая прямая, которая лежит в плоскости окружности и имеет с окружностью только одну общую точку, называемую *точкой касания*.

В пособиях [22,27] определение касательной к окружности формулируется иначе: «Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной*». А то, что касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания, доказывается как теорема.

Секущей к окружности называется прямая, имеющая с окружностью две различные общие точки. Отрезок прямой, соединяющий две различные точки окружности, называется *хордой*. Всякая хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

Центральным углом в окружности называется угол, лежащий в плоскости окружности и имеющий вершину в её центре. Или: *центральным углом* называется угол с вершиной в центре окружности и сторонами, проходящими через точки окружности [2].

Эти определения более точные, чем, например, следующее [17]: «угол, образованный двумя радиусами окружности и имеющий вершину в её центре, называется *центральным углом*». В последнем определении подлежит дополнительному уточнению термин «образованный»: имеется в виду, что стороны центрального угла *содержат радиусы* окружности. *Для сравнения* [24]: «*Центральным углом* в окружности называется плоский угол с вершиной в его центре».

Вписанный в окружность угол – это угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность [1,2,21,22]. Точки пересечения сторон угла с окружностью образуют дугу, про которую говорят, что *на неё опирается* данный вписанный угол (дуга также называется *соответствующей* данному углу).

В [16] вписанный угол определяется не вполне строго как «угол, образованный двумя хордами окружности, исходящими из одной точки». А в [29] определение вписанного угла сформулировано не вполне корректно: «*вписанный угол* – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются хордами» (найдите ошибку).

Любая окружность делит плоскость, в которой она лежит, на две области: *внутреннюю* и *внешнюю*. *Внутреннюю область* окружности образуют все те точки указанной плоскости, что расположены от её центра на расстоянии, меньшем радиуса (включая сам центр). Другая часть, состоящая из точек, расположенных от центра на расстоянии большем радиуса, называется, соответственно, *внешней областью* окружности. Окружность, касающаяся сторон угла, внутренняя область которой лежит во внутренней области угла, называется *вписанной в* этот *угол*. Заметим, что вписать окружность можно только в угол меньше развёрнутого.

Пересечение окружности и её плоского центрального угла (т.е. угол рассматривается вместе со своей внутренней областью) называют *дугой окружности*, *соответствующей этому центральному углу* [24].

В [22]: «*Центральным углом* в окружности называется плоский угол с вершиной в её центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой окружности, соответствующей этому центральному углу*».

При этом точки пересечения сторон угла с окружностью называются *концами дуги*. Остальные точки дуги называются *внутренними точками* дуги (они образуют *внутреннюю область* дуги).

Можно дать и иное определение дуги [2]. Пусть на окружности взяты две точки A и B. Проведём через них прямую AB, она разделит плоскость окружности на две полуплоскости с общей границей в виде этой прямой. Тогда *дугой окружности* называется пересечение (общие точки) любой из этих полуплоскостей с окружностью. Точки A и B при этом считаются *концами* каждой из двух полученных дуг (называемых *взаимно дополните*льными по отношению друг к другу). Если прямая пересекает окружность в двух диаметрально противоположных точках, то каждая из двух образовавшихся при этом дуг называется *полуокружностью*. Можно было определить *полуокружность* иначе, а именно как дугу, равную своей дополнительной дуге.

Для сравнения приведём весьма наглядное, но математически менее чёткое определение дуги окружности, данное в [16,21]: «*дуга окружности* – это любая из двух частей окружности, на которые её делят две лежащие на ней точки». Здесь используются такие понятия как «часть окружности», «делят», требующие отдельных комментариев и пояснений. Или: «*дуга окружности* – часть окружности, заключённая между двумя её точками» [29]. И, конечно, нельзя признать безукоризненным следующее описание дуги: «Какая-нибудь (? – *авт.*) часть окружности называется дугой» [17] (приведите примеры, когда это не так).

Сравнение между собой двух дуг одной окружности или равных окружностей (т.е. определение, какая из дуг *меньше*, а какая *больше*) путём наложения можно выполнить аналогично сравнению отрезков [17]. Для этого их надо наложить одну на другую таким образом, чтобы совпали два конца этих дуг, и при этом одна дуга пошла по другой так, чтобы их внутренние области имели пересечение. Если при этом дуги полностью совместятся, то, по определению, они *равны*. Если же дуги не совместятся, то *меньшей* из них считается та, которая составит часть другой. Вторая дуга в этой ситуации будет называться, соответственно, *большей* [29].

В [2] *сравнение* дуг проводится следующим образом. Пусть дана дуга $\cup AB$ некоторой окружности, и пусть C – внутренняя точка этой дуги. Тогда дуга $\cup AB$ считается *больше* каждой из дуг $\cup AC$ и $\cup CB$ (а они, соответственно, *меньше* дуги $\cup AB$). То есть, как и при выше рассмотренном способе сравнения, если одна дуга составляет часть другой дуги, то она меньше её.

Как отмечалось выше, две различные точки A и B окружности разделяют её на две дуги. Если дуги не равны, то меньшая из них обозначается $\cup AB$. Для обозначения большей дуги (чтобы различить её с меньшей) на ней обычно указывают дополнительно произвольную промежуточную точку K, и тогда эту дугу обозначают как $\cup AKB$. Если точки A и B на окружности совпадают, то одну из образовавшихся при этом дуг называют *полной*, а другую – *нулевой*. Любой хорде AB на окружности соответствует дуга $\cup AB$ (иначе говорят, что дуга $\cup AB$ *стягивает* хорду AB). Как утверждение доказывается тот факт, что две дуги одной окружности (или равных окружностей) равны тогда и только тогда, когда равны стягиваемые ими хорды [2].

Для дуг окружностей, так же как и для углов, вводится *угловая мера измерения* (градусная либо радианная). Пусть на окружности с центром в точке O дана дуга $\cup AB$. Соответствующий ей центральный угол $\angle AOB$ называют *опирающимся на дугу* $\cup AB$ (или *отвечающим* этой *дуге*). *Угловой величиной дуги* $\cup AB$ данной окружности называется величина отвечающего ей центрального угла (обозначается $\breve{AB}$): $\breve{AB} = A\hat{O}B$. Можно показать, что для заданной окружности большему (меньшему) центральному углу отвечает большая (меньшая) дуга окружности [2] и наоборот.

Следует различать понятия дуги и её угловой величины. Правильнее говорить не «дуга равна 90^0», а «(угловая) величина дуги равна 90^0». Заметим, что, по определению, угловая величина нулевой дуги составляет 0^0, а полной дуги – 360^0.

Выберем на дуге $\cup AB$ точку C, отличную от концов дуги. Образовавшиеся при этом дуги $\cup AC$ и $\cup CB$ называются *смежными*, а дуга $\cup AB$ называется *суммой дуг* $\cup AC$ и $\cup CB$. Так, например, сумма двух взаимно дополнительных дуг равна полной дуге. При этом угловая величина суммы дуг равна сумме угловых величин дуг, её составляющих: $\breve{AB} = \breve{AC} + \breve{CB}$. Можно доказать, что две дуги одной окружности (или равных окружностей) равны тогда и только тогда, когда их угловые величины равны.

Также для измерения другой характеристики дуги (её «протяжённости») вводится линейная мера – так называемая *длина дуги*. Полная длина окружности может быть определена как предел периметров правильных n-угольников, вписанных в окружность (или описанных около неё), при $n \to +\infty$. Доказывается, что длина окружности равна $2\pi R$, где R – радиус окружности. Длина дуги, отвечающей центральному углу α (выраженному в радианах), вычисляется пропорционально величине этого угла и составляет $R\alpha$ единиц длины. Обозначается длина дуги $\cup AB$ обычно символом $|\cup AB|$. Как и угловая величина, длина дуги обладает *свойством аддитивности*, т.е. если дуга $\cup AB$ является суммой дуг $\cup AC$ и $\cup CB$, то $|\cup AB| = |\cup AC| + |\cup CB|$. Если две дуги равны, то и их длины равны. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (например, это могут быть равные по длине дуги окружностей разных радиусов).

Рассмотрим теперь *взаимное расположение двух окружностей* на одной плоскости и понятия, с этим связанные. Прямая, проходящая через центры двух окружностей, лежащих в одной плоскости, называется *линией центров* этих окружностей. Две окружности одной плоскости называются *касающимися*, если они имеют единственную общую точку (*точку касания*). При этом говорят, что окружности *касаются внутренним (внешним) образом*, если их внутренние области имеют (не имеют) общих точек. Можно доказать, что если в общей точке касания окружностей провести к каждой из окружностей касательную прямую, то эти касательные совпадут.

В книге [22] касание окружностей определяется так: «…две окружности, имеющие общую точку, *касаются* в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную». Касание окружностей называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной и *внешним* – если по разные стороны. Иначе: две лежащие в одной плоскости окружности называются касающимися *внутренним (внешним) образом*, если обе они лежат в одной полуплоскости (в разных полуплоскостях) относительно их общей касательной.

К двум окружностям, касающимся внешним образом, можно провести три общих касательных. К двум пересекающимся окружностям можно провести лишь две общие касательные. Две окружности, касающиеся внутренним образом, имеют одну общую касательную, перпендикулярную их линии центров.

Говорят, что две окружности *пересекаются*, если они имеют две общие точки. Если две окружности имеют более двух общих точек, то они совпадают (будет доказано ниже). Две окружности (разных радиусов), лежащие в одной плоскости и имеющие общий центр, называются *концентрическими*.

Пусть на плоскости даны две окружности радиусов R_1, R_2 и расстоянием между центрами, равным d. В зависимости от соотношений между R_1, R_2 и d возможны следующие случаи взаимного расположения окружностей (см., например, [17,2]):

1) $d > R_1 + R_2$ – окружности не имеют общих точек (их внутренние области не пересекаются);

2) $d = R_1 + R_2$ – окружности касаются внешним образом;

3) $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$ – окружности пересекаются в двух точках;

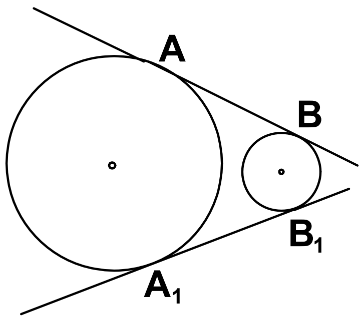
4) $d = |R_1 - R_2|$ – окружности касаются внутренним образом;

5) $d < |R_1 - R_2|$ – окружности не имеют общих точек (одна целиком лежит внутри другой);

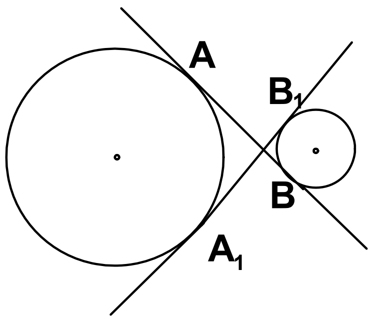
6) $d = 0$ – окружности концентрические (при $R_1 = R_2$ – совпадают).

Доказательство того, что две неравные окружности не могут иметь более двух общих точек, рассмотрено в [21,17].

Две непересекающиеся окружности также могут иметь общие касательные. Если при этом обе окружности лежат в одной полуплоскости относительно их общей касательной, то она (касательная) называется *внешней общей касательной*, а если по разные стороны – то *внутренней*. Внешних общих касательных, как и внутренних, две (см. рис. ниже).



Внешние касательные



Внутренние касательные

Круг (замкнутый) – это геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до некоторой точки, называемой центром круга, не больше заданного (отличного от нуля).

В [22] *кругом* называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. В этом определении не исключён случай расстояния, равного нулю (не существует круг нулевого радиуса).

Круг (открытый) – это геометрическое множество точек плоскости, расположенных от некоторой точки (центр круга) на расстоянии, меньше заданного. Таким образом, окружность можно рассматривать как *границу* соответствующего ей круга. При изображении открытого круга на чертеже его граница обозначается пунктирной линией.

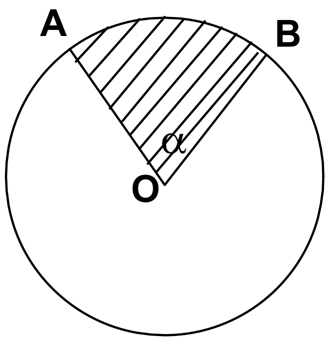
Дадим более сторогое определение границы геометрической фигуры. *Граничными точками* фигуры называются такие точки (не обязательно принадлежащие фигуре), которые обладают следующим свойством: в любом круге с центром в этой точке есть точки как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Точки фигуры, не являющиеся её граничными точками, называются *внутренними точками* фигуры. Множество всех граничных точек образует *границу* фигуры.

Иногда круг определяют как часть плоскости, ограниченную окружностью [17,21,29]. Это возможно, однако в этом случае, вообще говоря, необходимо дать дополнительное определение термину «*ограниченный* окружностью», что интуитивно кажется понятным, но может оказаться затруднительным при попытке строгого определения.

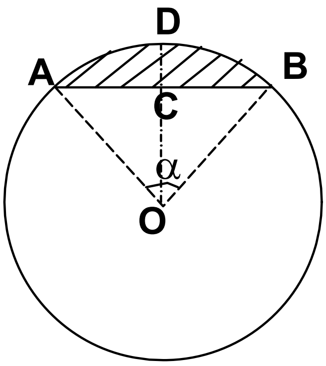
Назовём геометрическую фигуру *ограниченной*, если её можно поместить внутри некоторого круга, и *неограниченной*, если такой круг не существует. Например, квадрат есть ограниченная фигура, так как существует хотя бы один (на самом деле – бесконечно много) круг, содержащий внутри себя квадрат (например, описанный круг). Полуплоскость, наоборот, относится к неограниченным фигурам. Расстояние между наиболее удалёнными друг от друга точками фигуры (если такие точки существуют) называется *диаметром* фигуры. Отрезок, соединяющий наиболее удалённые друг от друга точки фигуры, тоже называют её *диаметром*.

Круговым сектором, соответствующим центральному углу $\angle AOB$, называют часть круга, лежащую внутри (во внутренней области) этого центрального угла [2,22,24]. При этом оба радиуса OA и OB на сторонах центрального угла и дуга $\cup AB$ окружности, заключённая внутри его, образуют *границу* сектора.

Круговым сегментом, соответствующим дуге ADB, называют общую часть круга и полуплоскости, содержащей дугу ADB и такой, что граница этой полуплоскости проходит через хорду AB этого круга. При этом дуга ADB окружности вместе с хордой AB образуют *границу* сегмента, остальные точки сегмента относят к *внутренним*. Если через середину хорды AB (точку C) провести радиус OD, то отрезок CD этого радиуса между точками его пересечения с хордой (C) и окружностью (D), называется *высотой* сегмента. Как следует из определения, любая хорда делит круг на два сегмента. В случае если в качестве такой хорды выступает диаметр, то образовавшиеся сегменты называют *полукругами*.



Сектор



Сегмент

Можно доказать (см., например, [2]), что два круговых сектора или два круговых сегмента равны тогда и только тогда, когда равны ограничивающие их дуги или равны соответствующие им центральные углы при условии равенства радиусов окружностей.

Иногда в учебной литературе можно встретить следующие определения сегмента и сектора [17,27,29]. *Круговым сектором* называется часть круга, заключённая между дугой окружности и двумя её радиусами. Соответственно, *круговым сегментом* называется часть круга, ограниченная дугой окружности и стягивающей её хордой. Или: сегмент – часть, отсекаемая от круга какой-либо секущей. Приведённые определения требуют дополнительных комментариев к терминам «ограниченный» (дугой окружности, хордой), «отсекаемая» (часть круга) и словосочетанию «заключённый между» (дугой окружности и радиусами). Эти понятия уже не являются первичными, поэтому, строго говоря, несмотря на их интуитивную ясность и образность, при использовании этих понятий их следует предварительно определить, что само по себе может оказаться не такой простой задачей.

Многоугольники (общие сведения)

Фигура, образованная на плоскости простой замкнутой ломаной линией называется (простым) *многоугольником*. (Или: многоугольником называется простая замкнутая ломаная [2,21]). Звенья ломаной при этом называются *сторонами* многоугольника, а вершины ломаной – *вершинами* многоугольника. Многоугольник, имеющий n сторон (и, соответственно, n углов), называется n*-угольником*. Многоугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны. *Правильный многоугольник* – это многоугольник, имеющий равные стороны и равные углы. То есть правильный многоугольник является одновременно и равносторонним, и равноугольным. Существует теорема (*признаки правильного многоугольника*): 1) равносторонний многоугольник, вписанный в окружность – правильный; 2) равноугольный многоугольник, описанный около окружности, – правильный [21]. Например, правильный четырёхугольник – это квадрат. *Центром* правильного n-угольника называется точка, равноудалённая от всех его вершин и от всех его сторон. Она совпадает с центром вписанной в него (описанной около него) окружности. *Апофемой* правильного n-угольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из центра n-угольника на любую из его сторон (или, что то же самое, радиус вписанной окружности).

Можно доказать, что сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного многоугольника до его сторон не зависит от выбора точки, а также что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин правильного многоугольника, вписанного в окружность, есть величина постоянная, не зависящая от выбора точки [27].

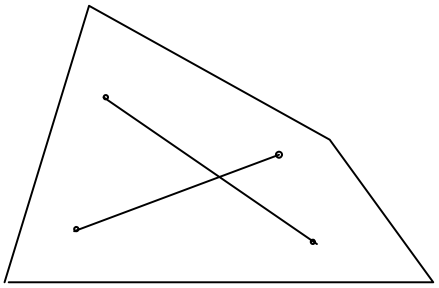
Сумма длин всех сторон многоугольника называется его *периметром*. Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются *соседними*. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется *диагональю* многоугольника.

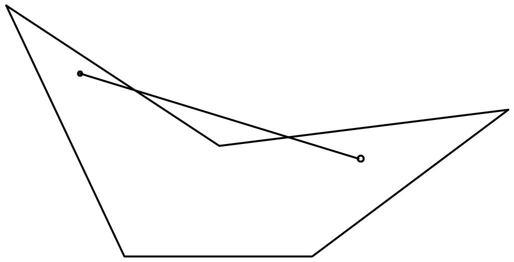
Для сравнения: в [17] *диагональю* многоугольника называется «всякая прямая (на самом деле, конечно, отрезок – *авт.*), которая соединяет вершины двух углов многоугольника, не прилежащих к одной стороне».

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит целиком в одной (замкнутой) полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону, и *невыпуклым* в противном случае. Например, треугольник всегда является выпуклым, а вот четырёхугольник – уже не всегда.

Вместе с тем в геометрии есть общее понятие *выпуклой фигуры*. Фигура называется *выпуклой*, если она вместе с любыми двумя своими точками содержит также соединяющий их отрезок. При этом по определению считают выпуклыми фигуру, состоящую из единственной точки и пустую фигуру (не имеющую точек). Примерами выпуклых фигур в указанном смысле являются круг, плоскость, полуплоскость, прямая, луч, отрезок.

На рисунке внизу приведены примеры двух многоугольников, один из которых (слева) – выпуклый, согласно последнему определению, а другой (справа) – невыпуклый. Интересно, что пересечение любых двух выпуклых фигур также является выпуклой фигурой [23].





Выпуклый многоугольник является выпуклой фигурой. Верно и обратное: выпуклая фигура, которая является многоугольником, будет выпуклым многоугольником.

Выпуклые четырёхугольники обладают определённым свойством, которое выделяет их среди всех четырёхугольников, отличает от других (невыпуклых) четырёхугольников. Такие свойства геометрических фигур, которые одновременно являются и признаками, называют *характеристическими свойствами*. Сформулируем характеристическое свойство выпуклых четырёхугольников: *четырёхугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда его диагонали пересекаются* (доказательство можно найти, например, в [2,21]). Можно доказать, что четырёхугольник, две стороны которого параллельны, всегда является выпуклым.

Общая часть полуплоскостей, фигурирующих в определении выпуклого многоугольника (исключая стороны выпуклого многоугольника) называется его *внутренней областью*, а остальная часть плоскости (также без его сторон) – *внешней областью* [2]. Объединение выпуклого многоугольника и его внутренней области называется *плоским (выпуклым) многоугольником*. При этом сама ломаная, образующая плоский многоугольник, называется его *границей* (или контуром).

Отметим разницу между приведённым выше определением плоского многоугольника и его определением, сформулированным в учебнике А.П.Киселёва [17]: «*Многоугольником* называется фигура, образованная замкнутой ломаной линией (простой – *авт.*) вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией». Аналогичное определение приводится и в [23]. Обратим внимание, что в этих определениях используется понятие «части плоскости, *ограниченной линией*». Но тогда оно также предварительно должно быть определено (поскольку к первичным не относится). По сути, это и будет эквивалент внутренней области многоугольника, что уже учтено в первом определении.

А, например, в [17] внутренняя область угла многоугольника описывается следующим образом: «*внутренней областью угла* многоугольника считается та, к которой принадлежит непосредственно примыкающая к вершине внутренняя область самого многоугольника». В учебнике [22] *плоским многоугольником* или *многоугольной областью* называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником. В книге [24] просто говорится, что «…ломаная разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две части. Их называют *внутренней и внешней* областями относительно этой ломаной». При этом отсутствует указание, как их различать между собой.

Внутренним углом выпуклого многоугольника при заданной вершине называется угол, образованный сторонами, выходящими из этой вершины (точнее, лучами, содержащими эти стороны). При этом *внутренней областью* этого *угла* считается та часть плоскости, которая содержит внутреннюю область многоугольника.

Для сравнения: в [22] «*углом* (внутренним – *авт.*) выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине». В этом определении отсутствует указание на то, какой именно из двух дополнительных углов при вершине имеется в виду. В [24] это указание уже присутствует: «Рассмотрим вершину A многоугольника $ABC...D$ и два луча AB и AD, выходящие из вершины A и содержащие стороны AB и AD. Лучи задают два угла. Тот из углов, которому принадлежит сам многоугольник $ABC...D$, называют его *внутренним углом*». Заметим, что в этом определении должно присутствовать указание на то, что многоугольник является выпуклым.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине. Внешних углов у выпуклого многоугольника в два раза больше, чем внутренних углов (например, у треугольника имеется шесть внешних углов – по два при каждой вершине, попарно равных между собой). В курсе элементарной планиметрии, изучаемом в средней школе, в основном исследуются свойства именно выпуклых многоугольников. Доказывается, например в [23], что градусная мера любого внутреннего угла выпуклого многоугольника меньше 180^0, а также что отрезок, соединяющий любые две точки плоского выпуклого многоугольника, целиком содержится в этом многоугольнике.

Вписанная в многоугольник *окружность* – это окружность, размещённая в плоскости многоугольника так, что она касается всех его сторон. Сам многоугольник называется при этом *описанным около окружности*. В частности, во всякий правильный многоугольник можно вписать окружность.

Описанная вокруг многоугольника *окружность* – это окружность, которая проходит через все вершины многоугольника, который в этом случае называется *вписанным в окружность*. В частности, около всякого правильного многоугольника можно описать окружность.

Не в каждый многоугольник можно вписать окружность или описать её около него. Нет таких окружностей у любого невыпуклого многоугольника. Можно доказать, что если равносторонний многоугольник вписан в окружность, то он – правильный, а также, что если равноугольный многоугольник описан около окружности, то он – правильный [21].

Ясно, что около многоугольника можно описать окружность, если найдётся точка, равноудалённая от всех его вершин. Следовательно, около многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры ко всем его сторонам имеют общую точку. С другой стороны, в многоугольник можно вписать окружность, если найдётся точка, равноудалённая от всех его сторон. Следовательно, в многоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда биссектрисы всех углов многоугольника имеют общую точку.

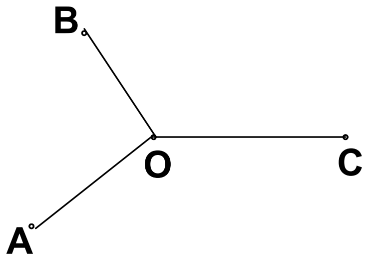
Около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда существует общая точка у всех серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам четырёхугольника. Если все эти серединные перпендикуляры различны, то они пересекаются в одной точке. Однако некоторые из них могут лежать на одной прямой, например, в случае прямоугольника или равнобедренной трапеции.

Треугольники

Треугольник – это простейший случай многоугольника. По определению, многоугольник, имеющий три стороны, называется *треугольником*. В большинстве пособий по евклидовой геометрии, например в [4,16,22], даётся иное, но эквивалентное приведённому выше, определение *треугольника* как фигуры, состоящей из трёх различных точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Некоторые авторы сразу определяют треугольник в смысле *плоского треугольника*, например в [24,29]: «*Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки, а также части плоскости, ограниченной этими отрезками. Часть плоскости, ограниченную сторонами треугольника, называют внутренней областью треугольника». Насчёт наглядности в ущерб строгости математического определения в отношении фразы о «части плоскости, ограниченной этими отрезками» выше уже было сделано соответствующее замечание.

Автор книги [24] вначале вводит понятие (плоского) угла, его внутренних точек и затем посредством углов так определяет треугольник: «Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой. Множество, состоящее из точек, принадлежащих одновременно углам BAC, ABC, ACB, называется *треугольником*. Точки треугольника, не лежащие на его сторонах, называются *внутренними точками* треугольника».



А вот сказать, что *треугольником* называется фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх ненулевых отрезков, концами которых являются эти точки, было бы не всегда верным. Например, фигура, изображённая на рисунке, удовлетворяет данному определению, но треугольником при этом не является. Для того чтобы убрать эту неоднозначность, достаточно в последнем определении добавить «…концами которых являются эти *и только эти* точки» [2].

Указанные три точки называют при этом *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами* треугольника. Если по каким-либо соображениям выделяется одна из сторон треугольника, то она называется *основанием*, а две другие – *боковыми сторонами* треугольника. Вместо слова «треугольник» часто употребляют знак Δ (или ⊿ – для прямоугольных треугольников).

На треугольник как на частный случай многоугольника распространяются приведённые выше определения внутренней области многоугольника, его внутренних и внешних углов.

В [16,22] углом (внутренним – *авт.*) треугольника ABC при вершине A называется просто «угол, образованный полупрямыми AB и AC», однако в действительности две полупрямые образуют на плоскости *два* угла, и без уточнения относительно внутренней области такого угла не вполне понятно, о каком из них идёт речь. В [24] эта проблема решается так: «…вершина A и лучи AB и AC задают два угла. Тот из углов, которому принадлежит сам треугольник ABC, называют его внутренним углом».

Треугольники разделяются по *сравнительной длине их сторон* или по *величине их углов*. В зависимости от соотношения длин сторон они подразделяются на:

– *разносторонние* (если все стороны различной длины),

– *равнобедренные* (если две стороны равны; эти стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона – *основанием* треугольника),

– *равносторонние*, или *правильные* (если все стороны равны).

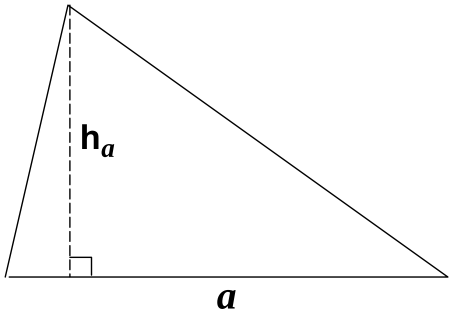
Относительно величины углов треугольники делят на:

– *остроугольные* (если все углы острые),

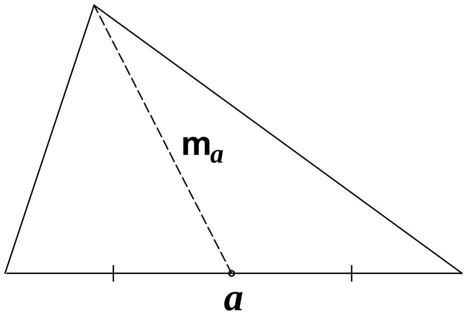
– *прямоугольные* (если в числе углов есть прямой; сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, а остальные стороны – *катетами*),

– *тупоугольные* (если среди углов есть тупой).

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

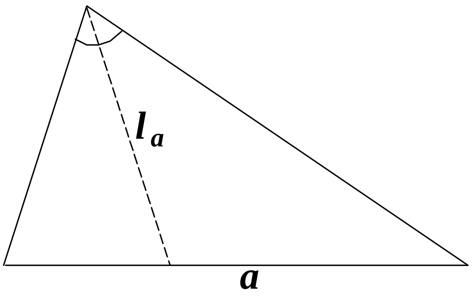


Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону. Высоту, опущенную на сторону a, (а также длину этого отрезка) обычно обозначают h_a.



Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (а также его длину). Стандартное обозначение медианы, проведённой к стороне a, есть m_a. Слово «медиана» происходит от латинского слова «medius» – средний.

Биссектрисой (внутренней) треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника от вершины угла до противолежащей стороны (а также его длина). Обычно биссектрису, проведенную к стороне a, обозначают l_a.



Каждый треугольник имеет три высоты h_a, h_b, h_c, три медианы m_a, m_b, m_c и три биссектрисы l_a, l_b, l_c. Стороны треугольника, его углы, высоты, медианы и биссектрисы относят к основным *элементам* треугольника.

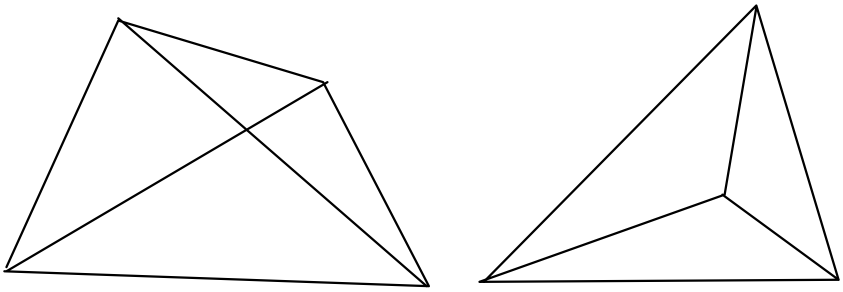
Внешняя биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы внешнего угла треугольника от вершины угла до продолжения противолежащей стороны. Заметим, что при вершине равнобедренного треугольника, противоположной его основанию, внешней биссектрисы треугольника не существует, поскольку биссектрисы двух внешних углов треугольника при его вершине параллельны продолжению основания. Поэтому и равносторонний треугольник также не имеет внешних биссектрис. Если же треугольник не является равнобедренным, то при каждой его вершине имеется одна внешняя биссектриса треугольника.

Если стороне (углу) одного треугольника по некоторому признаку ставится в соответствие сторона (угол) другого треугольника, то такие стороны (углы) называются *соответствующими*. Если речь идёт о соответствующих сторонах и углах треугольников, то считается, что соответствующие углы треугольников лежат против соответствующих сторон треугольников и наоборот.

Четырёхугольники

Четырёхугольником называется многоугольник с четырьмя сторонами.

В [22] *четырёхугольником* называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.



Для сравнения: рассмотрим четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой, и соединим их попарно отрезками (см. рис. вверху). Полученная фигура, состоящая из шести отрезков, называется *четырёхвершинником*.

Стороны четырёхугольника, имеющие общую вершину (исходящие из одной вершины), называются *соседними*, или *смежными*. Стороны, не имеющие общей вершины, называются *противолежащими* (*противоположными*) сторонами. Вершины четырёхугольника можно назвать *противолежащими (противоположными)*, если они не являются концами какой-нибудь одной его стороны. Углы четырёхугольника называются *противолежащими* (*противоположными*), если их вершины являются противоположными вершинами четырёхугольника. Таким образом, для четырёхугольника можно сформулировать ещё одно, отличное от общего, определение диагонали: *диагональю* четырёхугольника называется отрезок с концами в противоположных вершинах четырёхугольника. Отрезок, соединяющий середины противолежащих сторон, называется *средней линией* четырёхугольника.

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (т.е. лежат на параллельных прямых). *Высотой* параллелограмма называется отрезок общего перпендикуляра к двум противоположным сторонам, концы которого лежат на этих сторонах или их продолжениях (а также длина этого отрезка). У параллелограмма две пары противоположных сторон, следовательно, две высоты.

Теорема Вариньона (1654–1722): середины сторон произвольного выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма [21].

Частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб и квадрат. Так, параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником* [1,17,27].

В этом определении слово «параллелограмм» без ущерба для точности определения можно заменить словами «выпуклый четырёхугольник», или даже просто «четырёхугольник» [21,29]. Однако в этом случае то, что прямоугольник является параллелограммом, придётся доказывать. Ещё одно аналогичное определение: прямоугольник – это четырёхугольник, все углы которого равны.

Отметим, что если один из углов параллелограмма прямой, то, как следует из свойств параллелограмма, три остальных его угла также прямые. Поэтому определение прямоугольника можно было бы сформулировать, привлекая лишь минимальные требования: параллелограмм, у которого один из (внутренних) углов прямой, называется *прямоугольником* [2,21].

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Но у прямоугольника есть ещё свои особые свойства (см. подробнее в пункте «Свойства прямоугольника, ромба и квадрата»).

В качестве одного из *характеристических свойств* прямоугольника можно привести, например, следующее: параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны [2].

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом* [1,17]. Заметим, что, как следует из свойств параллелограмма, если какие-либо две его смежные стороны равны, то и все стороны этого параллелограмма равны. Поэтому определение ромба можно было сформулировать и так: параллелограмм, у которого какие-либо две смежные стороны равны, называется *ромбом* [2,21]. Являясь параллелограммом, ромб тем самым обладает всеми свойствами, присущими этой геометрической фигуре.

Приведём примеры двух характеристических свойств ромба. Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух условий: 1) его диагонали взаимно перпендикулярны; 2) его диагональ делит пополам углы при вершинах, которые она соединяет [2,21].

Квадратом называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые [1,17]. Или: *квадратом* называется параллелограмм, у которого хотя бы один внутренний угол прямой и хотя бы две смежные стороны равны [2]. Можно также сказать, что квадрат – это ромб, у которого углы прямые. Иначе: *квадратом* называется прямоугольник, у которого стороны равны. Поэтому квадрату принадлежат все свойства прямоугольника и ромба. Квадрат является правильным четырёхугольником.

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны [16,17,21–24,27,29].

Некоторые авторы, например [2,29], считают требование непараллельности боковых сторон трапеции избыточным, трактуя, таким образом, определение трапеции в более широком смысле и допуская в этом случае, что параллелограмм является частным случаем трапеции. Заметим, что в этом случае корректировке подлежит, например, понятие равнобедренной трапеции, иначе для трапеции-параллелограмма, очевидно, будет нарушаться известное свойство вписанных трапеций: «трапеция вписана в окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной».

Параллельные стороны трапеции называются её *основаниями*, а две другие стороны – *боковыми сторонами*. Если одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, то трапеция называется *прямоугольной*. Если боковые стороны трапеции равны, то трапеция называется *равнобедренной*, или *равнобочной*. *Средней линией* трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

Для сравнения [17]: *прямая* (в действительности, отрезок – *авт.*), соединяющая середины боковых сторон трапеции, называется её средней линией.

Высотой трапеции называется отрезок общего перпендикуляра к основаниям трапеции с концами, лежащими на этих основаниях или их продолжениях (а также длина этого отрезка).

Параллелограмм и трапеция – примеры *выпуклых* четырёхугольников (доказательство этого факта можно найти, например, в [2]).

Сделаем небольшое замечание относительно происхождения названий отдельных видов четырёхугольников. Слово «*параллелограмм*» в переводе с греческого означает «параллельно-линейный». Название *квадрата* происходит от латинского «quadratus» – «четырёхугольный». Термин «трапеция» восходит к греческому «маленький стол». Это слово и русское «трапеза» имеют общий корень.

Рассмотрим некоторые из наиболее важных свойств основных геометрических фигур, которые следует знать с доказательствами.

3.3. Свойства углов и треугольников

Свойства смежных и вертикальных углов

Теорема 1 (свойство смежных углов). Сумма величин смежных углов равна 180°.

Доказательство. Справедливость данного утверждения непосредственно следует из определения смежных углов, согласно которому их сумма составляет развёрнутый угол с величиной, равной 180°.

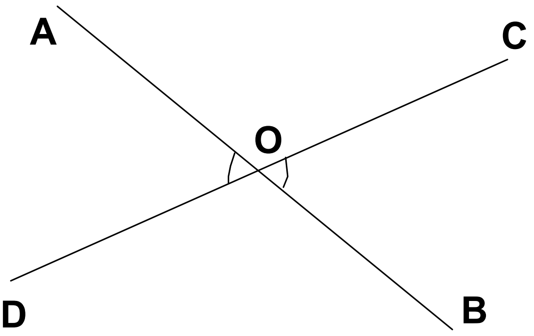
Следствие 1. Если два угла равны, то и смежные им углы равны.

Действительно, это следует из того, что смежные углы дополняют данные равные углы до развёрнутых углов, а все развёрнутые углы равны между собой.

Следствие 2. Если два смежных угла, каждый из которых ненулевой, не равны друг другу, то один из них острый, а другой - тупой [2].

Действительно, это следует из доказанной теоремы и определений острого, тупого и смежных углов.

Теорема 2 (свойство вертикальных углов). Вертикальные углы равны.



Доказательство. Каждый из вертикальных углов (например, углы $\angle AOD$ и $\angle BOC$) является смежным с одним и тем же углом (с $\angle DOB$ и $\angle AOC$). Такие углы, согласно следствию теоремы 1, равны между собой. То есть $\angle AOD$ - смежный с $\angle DOB$, $\angle BOC$ - смежный с $\angle DOB$, следовательно, $\angle AOD = \angle BOC$.

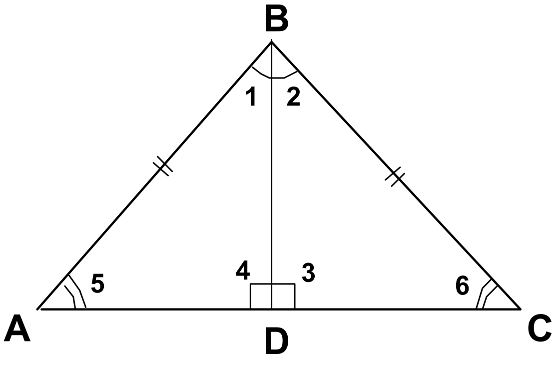
Свойства равнобедренного треугольника

Теорема (свойства равнобедренного треугольника). В равнобедренном треугольнике:

1) Биссектриса угла при вершине есть одновременно и медиана, и высота;

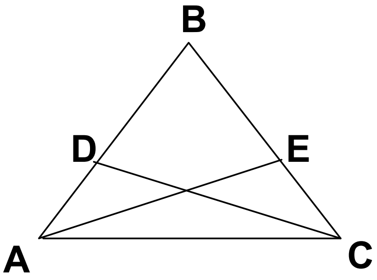
2) углы при основании равны;

3) медианы (высоты или биссектрисы), проведённые к боковым сторонам, равны.



Доказательство. Пусть $\Delta\ ABC$ - равнобедренный, и прямая BD является биссектрисой, т.е. делит пополам угол $\angle B$ при его вершине. Требуется доказать, что эта биссектриса BD есть также медиана и высота, а углы $\angle 5$ и $\angle 6$ при основании равны. Представим себе, что угол $\angle ABD$ повернули вокруг стороны BD так, чтобы он совместился с углом $\angle CBD$. При этом, вследствие равенства углов $\angle 1$ и $\angle 2$, луч BA совместится с лучом BC, и тогда из-за равенства сторон AB и BC точка A совпадёт с точкой C. Поэтому отрезок DA совместится с отрезком DC, угол $\angle 4$ совместится с углом $\angle 3$, а угол $\angle 5$ с углом $\angle 6$. Это означает, что $DA = DC$, $\angle 4 = \angle 3$, $\angle 5 = \angle 6$. Из того, что $DA = DC$ следует, что BD есть медиана. Из того, что углы $\angle 3$ и $\angle 4$ равны и в сумме образуют развёрнутый угол, вытекает, что эти углы прямые, и, следовательно, BD есть высота треугольника. Наконец, как получено выше, углы $\angle 5$ и $\angle 6$ при основании треугольника равны.

Для доказательства последнего свойства рассмотрим в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC отрезки AE и CD, являющиеся либо медианами, либо высотами, либо биссектрисами. Справедливость свойства вытекает из равенства треугольников ADC и AEC. В случае медиан эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников (см. о признаках равенства треугольников в следующем пункте), а в случаях высот и биссектрис – по второму признаку равенства треугольников.



Замечание. Как следует из доказанной теоремы, в равнобедренном треугольнике ABC один и тот же отрезок BD обладает четырьмя свойствами: он является одновременно и *биссектрисой* угла при вершине, и *медианой*, проведенной к основанию, и *высотой*, опущенной на основание, и *перпендикуляром* к основанию, восстановленным из его середины. Так как каждое из этих четырёх свойств однозначно определяет положение отрезка BD в равнобедренном треугольнике, то выполнение одного из них влечёт за собой справедливость всех остальных.

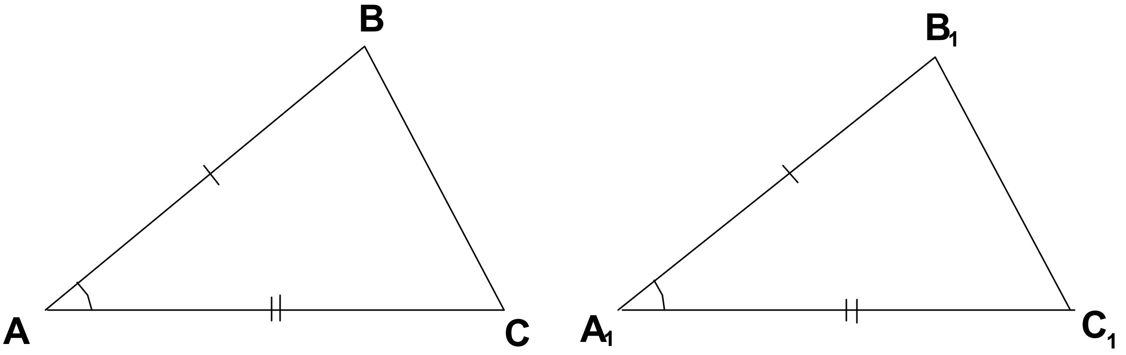
Приведём в заключение этого пункта один из основных *признаков* равнобедренного треугольника (доказательство можно найти, например, в [22]): если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Признаки равенства треугольников

Напомним, что два треугольника называются *равными*, если они могут быть совмещены при наложении. В совмещающихся треугольниках, конечно, должны быть соответственно равны все их элементы, т.е. стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы. Однако для того, чтобы утверждать, что два треугольника равны, нет необходимости устанавливать равенство всех этих элементов, достаточно убедиться в равенстве только некоторых из них.

<u>Теорема</u> *(1-й признак равенства треугольников*: по двум сторонам и углу между ними*). Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, A_1B_1C_1$ - два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Требуется доказать, что эти треугольники равны. Для доказательства совместим наложением треугольник ABC с треугольником $A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с точкой A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1. Заметим при этом, что иногда при наложении треугольников приходится накладываемый треугольник переворачивать «другой стороной» (понятие наложения допускает эту процедуру).



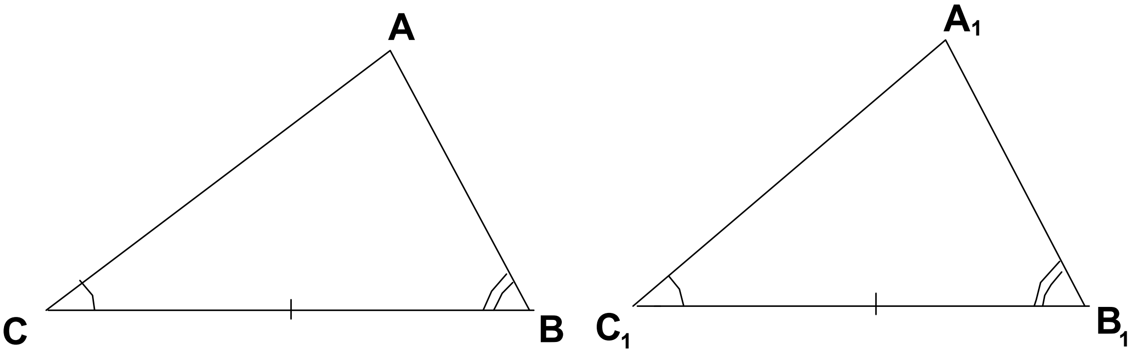
Так как $AC = A_1C_1$, то точка C обязательно совместится с точкой C_1. Вследствие равенства углов $\angle A$ и $\angle A_1$, сторона AB пойдёт по A_1B_1, а так как $AB = A_1B_1$, то точка B совпадёт с точкой B_1. Поэтому третья сторона BC также совместится с B_1C_1 и, следовательно, треугольники совпадут. Значит, по определению, они равны.

<u>Теорема</u> *(2-й признак равенства треугольников*: по стороне и прилежащим к ней углам*). Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, A_1B_1C_1$ - два треугольника, у которых $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $BC = B_1C_1$. Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Для доказательства совместим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы точка C совпала с точкой C_1 и сторона CB пошла по стороне C_1B_1. Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка B совпадёт с точкой B_1.

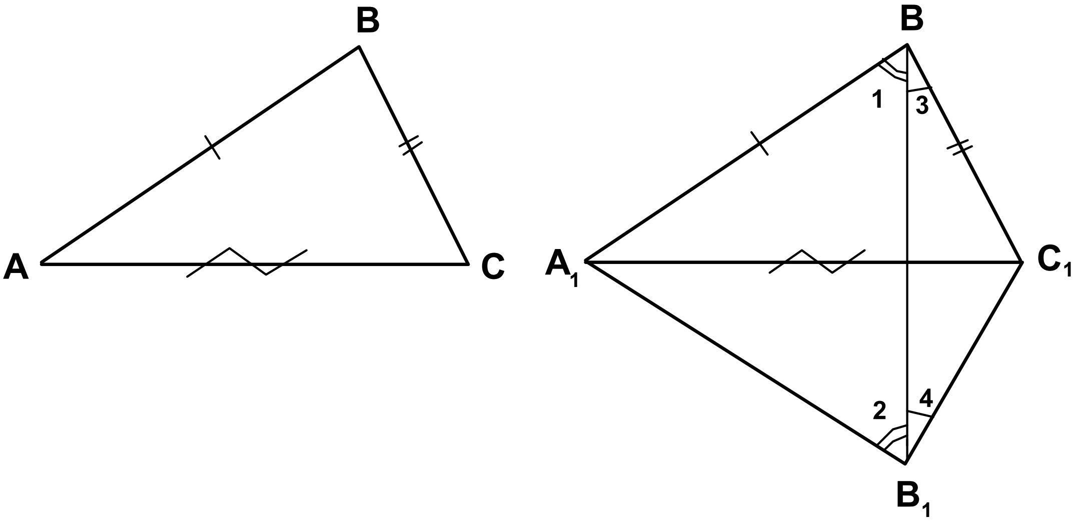
Далее, так как $\angle B = \angle B_1$, то при этом сторона BA пойдёт по B_1A_1, а, в силу равенства углов $\angle C = \angle C_1$, сторона CA пойдёт по C_1A_1.



Так как две различные (непараллельные) прямые могут пересечься только в одной точке, то вершина A должна совпасть с вершиной A_1. Таким образом, треугольники совместятся, а это значит, что они равны.

<u>Теорема</u> *(3-й признак равенства треугольников*: по трём сторонам*). Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство. Пусть $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, A_1B_1C_1$ - два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Требуется доказать, что эти треугольники равны.



Для доказательства приложим ABC к $A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные стороны AC и A_1C_1, и их вершины B и B_1 лежали бы по разные стороны от основания A_1C_1 (так, как это изображено на рисунке). Соединим отрезком прямой точки B и B_1, тогда получим два равнобедренных треугольника BC_1B_1 и BA_1B_1 с общим основанием BB_1.

Чтобы отрезок BB_1 проходил всегда внутри фигуры $A_1BC_1B_1$, надо прикладывать треугольники друг к другу так, чтобы их общая сторона была наибольшей из сторон.

Так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, то

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а поэтому $\angle A_1BC_1 = \angle A_1B_1C_1$. Но в таком случае данные треугольники должны быть равны по 1-му признаку (по двум сторонам $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и углу между ними $\angle A_1BC_1 = \angle A_1B_1C_1$).

Замечание. В равных треугольниках напротив равных сторон лежат равные углы, и обратно, напротив равных углов лежат равные стороны.

Опираясь на доказанные три основных признака равенства треугольников, можно сформулировать и доказать многие другие признаки равенства, например, следующие [21]:

1) если сторона, прилежащий к ней угол и биссектриса, проведённая из вершины этого угла, одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе, проведённой из вершины этого угла, другого треугольника, то такие треугольники равны;

2) если сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

Пример [ВМК-1998,устн.] *Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?*

Решение. На этот вопрос, если не вдумываться, хочется сразу ответить положительно, сославшись, например, на 1-й признак равенства треугольников. Однако обратимся к следующему примеру. Зафиксируем некоторое действительное число p $(0 < p \neq 1)$ и рассмотрим два треугольника, один – со сторонами 1, p, p^2, другой – со сторонами p, p^2, p^3. Для того чтобы такие треугольники существовали, потребуем выполнения трёх неравенств треугольника:

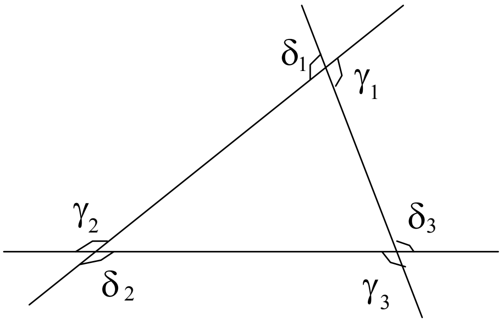
$$\begin{cases} 1 < p + p^2 \\ p < 1 + p^2 \\ p^2 < 1 + p \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} < p < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Итак, во-первых, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия, равным p (т.е. имеют по три равных угла), а, во-вторых, имеют по две равные стороны с длинами p и p^2, но при этом не являются равными! Причина кажущегося парадокса состоит в том, что в этих треугольниках равны *не соответствующие стороны*. *Ответ:* вообще говоря, не равны.

Внешний угол треугольника и его свойство

Угол, смежный с каким-либо внутренним углом треугольника, называется *внешним углом* этого треугольника.

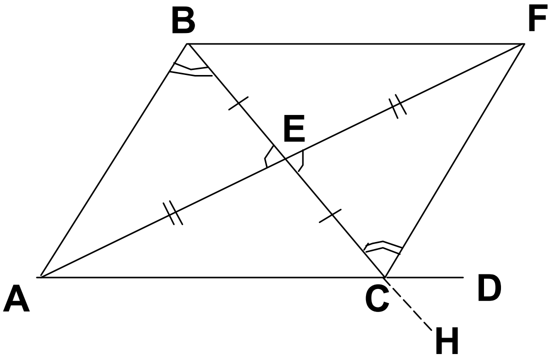
При каждом внутреннем угле треугольника можно построить по два равных между собой внешних угла, продолжив одну или другую сторону угла. Например, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – внешние углы (см. рис. ниже), причём они попарно равны $\delta_1 = \gamma_1$, $\delta_2 = \gamma_2$, $\delta_3 = \gamma_3$ как вертикальные.



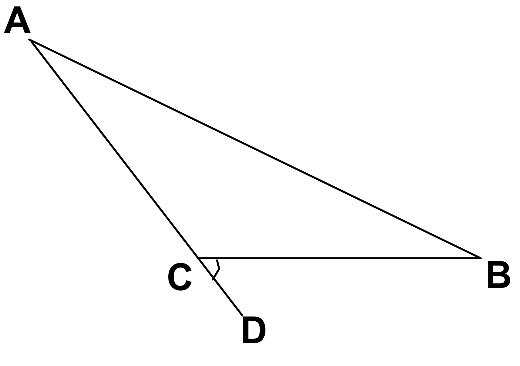
<u>Теорема 1</u>. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего его угла, не смежного с ним.

Доказательство. Докажем, например, что внешний угол $\angle BCD$ в треугольнике ABC больше каждого из внутренних углов $\angle A$ и $\angle B$, не смежных с ним.

Для доказательства проведём через середину E стороны BC медиану AE и на её продолжении отложим отрезок $EF = AE$. Тогда $\Delta ABE = \Delta FCE$ (по 1-му признаку равенства треугольников, так как при общей вершине E они имеют по равному вертикальному углу, заключённому между равных сторон). Из равенства этих треугольников следует, в частности, равенство углов $\angle ABE = \angle ECF$, лежащих напротив равных сторон AE и EF. Но угол $\angle ECF$ составляет лишь часть внешнего угла $\angle BCD$ и поэтому меньше его. Следовательно, и равный ему угол $\angle B < \angle BCD$. Аналогично доказывается, что угол $\angle A$ меньше $\angle ACH$, равного (как вертикальный) углу $\angle BCD$.



<u>Следствие</u>. Если в треугольнике один угол прямой или тупой, то два других угла – острые.

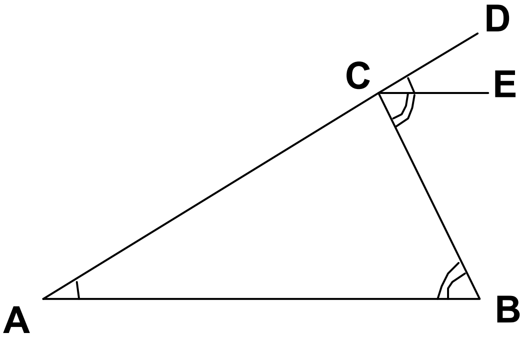


Доказательство. Допустим, что угол $\angle C$ в ΔABC является тупым (или прямым). Требуется доказать, что тогда углы $\angle A$ и $\angle B$ будут острыми.

Действительно, поскольку угол $\angle C$ - тупой (или прямой), то смежный с ним внешний угол $\angle BCD$ должен быть острым (или прямым). Следовательно, углы $\angle A$ и $\angle B$, которые, по доказанной теореме, меньше этого внешнего угла, должны быть оба острыми.

Следующая теорема уточняет свойство внешнего угла треугольника. Однако её доказательство использует теоремы о параллельных прямых, которые будут доказаны позже. Поэтому к этой теореме имеет смысл вернуться после того, как будут доказаны теоремы о параллельных прямых.

<u>Теорема 2</u>. *Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов этого треугольника, не смежных с ним.*



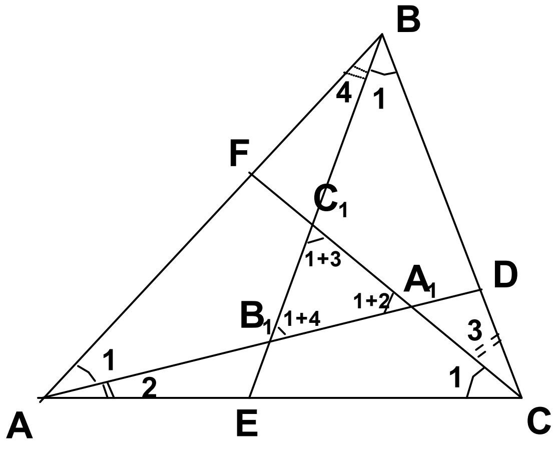
Доказательство. Пусть ABC - произвольный треугольник. Требуется доказать, что $\angle BCD = \angle A + \angle B$. Для доказательства проведём прямую $CE \parallel AB$. Тогда $\angle A = \angle DCE$ (как соответственные углы при параллельных прямых AB и CE) и $\angle B = \angle BCE$ (как внутренние накрест лежащие углы). Отсюда

$$\angle A + \angle B = \angle DCE + \angle BCE = \angle BCD.$$

<u>Следствие</u>. *В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°.*

<u>Пример</u>. *Внутри треугольника ABC проведены прямые AD, BE и CF так, что $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF$. Доказать, что если прямые не пересекаются в одной точке, то, пересекаясь, они образуют треугольник, углы которого равны углам треугольника ABC.*

Доказательство. Обозначим $\angle BAD = \angle CBE = \angle ACF = \angle 1$, $\angle CAD = \angle 2$, $\angle BCF = \angle 3$, $\angle ABE = \angle 4$.



1) По свойству внешнего угла в ΔAA_1C: $\angle B_1A_1C_1 = \angle 1 + \angle 2$. Но $\angle CAB$ также равен $\angle 1 + \angle 2$, следовательно, $\angle B_1A_1C_1 = \angle CAB$.

2) Аналогично, по свойству внешнего угла в ΔCC_1B: $\angle A_1C_1B_1 = \angle 1 + \angle 3$. С другой стороны, $\angle ACB$ также равен $\angle 1 + \angle 3$. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$.

3) Наконец, по свойству внешнего угла в ΔBB_1A: $\angle A_1B_1C_1 = \angle 1 + \angle 4$. С другой стороны, $\angle ABC$ тоже равен $\angle 1 + \angle 4$. Значит, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

<u>Теорема 1</u>. *Прямоугольные треугольники равны:*

1) если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника;

2) если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.

Эти два признака не требуют отдельного доказательства, так как являются частными случаями доказанных выше признаков равенства произвольных треугольников. А именно, признак 1) есть частный случай признака равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними (1-го признака равенства треугольников). Признак 2) есть частный случай признака равенства по стороне и прилежащим к ней углам (2-го признака равенства треугольников).

Докажем ещё два признака, относящихся только к прямоугольным треугольникам.

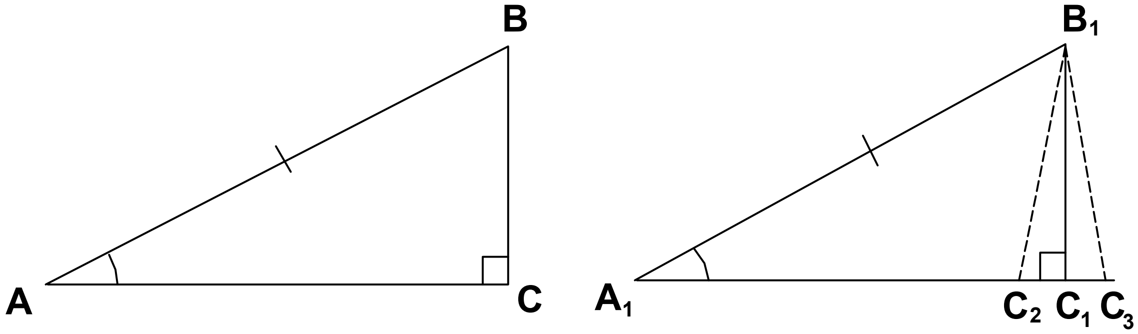
Теорема 2. Прямоугольные треугольники равны:

1) если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника;

2) если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника.

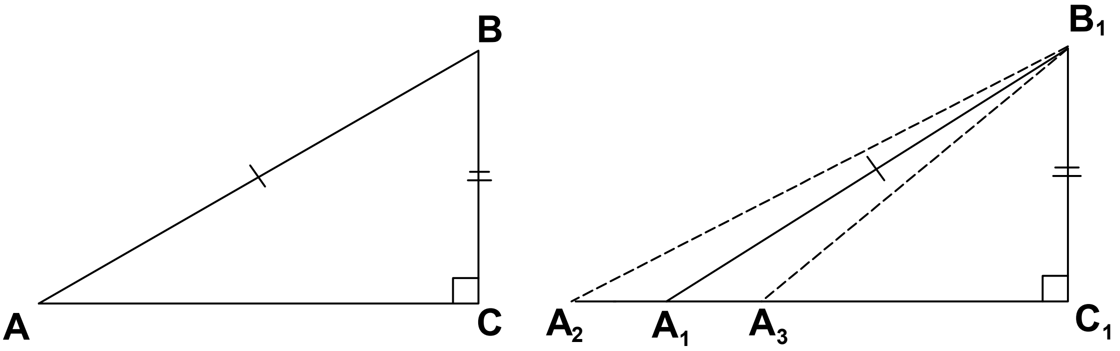
Доказательство.

1) Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ - два прямоугольных треугольника, у которых $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$. Требуется доказать, что эти треугольники равны. Для доказательства совместим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совпали равные гипотенузы.



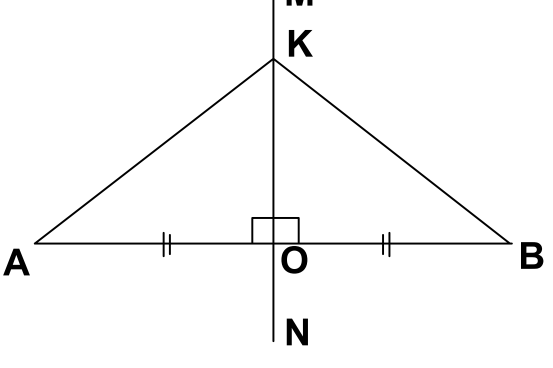
Тогда в силу равенства углов $\angle A$ и $\angle A_1$ катет AC пойдёт по A_1C_1. При этом точка C должна совпасть с точкой C_1. Иначе, если она не совпадёт с точкой C_1, катет BC займёт положение B_1C_2 или B_1C_3, что невозможно, так как из одной точки B_1 нельзя на прямую A_1C_1 опустить два различных перпендикуляра B_1C_1 и B_1C_2 (или B_1C_1 и B_1C_3). (Доказательство теоремы о существовании и единственности перпендикуляра, опущенного из точки, лежащей вне прямой, на эту прямую, можно найти, например, в [2,27]). Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадут, следовательно, они равны.

2) Пусть дано, что в прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны гипотенузы $AB = A_1B_1$ и катеты $BC = B_1C_1$. Требуется доказать, что эти треугольники равны. Для доказательства совместим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда, в силу равенства прямых углов $\angle C$ и $\angle C_1$, луч CA пойдёт по лучу C_1A_1. При этом гипотенуза AB не может не совместиться с гипотенузой A_1B_1. В противном случае, если бы она заняла положение A_2B_1 или A_3B_1, то имелись бы две равные по длине наклонные A_1B_1 и A_2B_1 (или A_1B_1 и A_3B_1), которые неодинаково удалены от основания перпендикуляра, что невозможно (см., например, [17]). Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадут, а значит, они равны.



Замечание. Можно было завершить доказательство иначе. Если предположить, что точка A совместится не с A_1, а с некоторой другой точкой A_2 луча C_1A_1, то будем иметь равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (так как $\angle B_1A_1C_1$ - острый, то $\angle B_1A_1A_2$ - тупой как смежный с ним, а угол $\angle B_1A_2A_1$ - острый). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся. Следовательно, полностью совместятся $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, и, значит, они равны.

Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство точек, равноудалённых от концов отрезка



Теорема 1. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

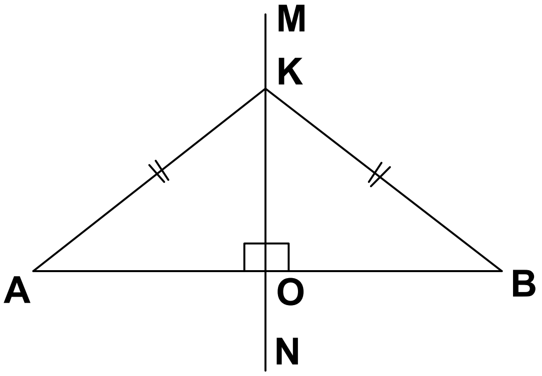
Доказательство. Пусть прямая MN серединный перпендикуляр к отрезку AB, т.е. $MN \perp AB$ и $AO = OB$.

Требуется доказать, что $AK = KB$, где K - произвольная точка на MN.

Рассмотрим прямоугольные треугольники AKO и BKO. У них катет KO - общий, а катеты AO и OB равны, поэтому эти треугольники равны (по двум катетам). Следовательно, равны и их гипотенузы $AK = KB$.

Справедлива также *обратная теорема*, отражающая свойство точек, равноудалённых от концов отрезка.

Теорема 2. Каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре.



Доказательство. Пусть некоторая точка K равноудалена от концов отрезка AB, т.е. $AK = KB$. Требуется доказать, что K лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Проведём через точку K прямую MN, перпендикулярно AB.

Пусть прямая MN пересекает AB в точке O. Тогда получаются два прямоугольных треугольника AKO и BKO, которые, имея общий катет KO и равные гипотенузы $AK = KB$, равны. Следовательно, вторые их катеты тоже равны, т.е. $AO = OB$. Значит, прямая MN, проведённая через K перпендикулярно к AB, делит отрезок AB пополам, т.е. является серединным перпендикуляром отрезка AB.

Замечание. Из доказанных выше двух теорем следует, что можно дать следующее определение серединного перпендикуляра к отрезку. *Серединный перпендикуляр к отрезку* – это геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от концов этого отрезка.

Следствие. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит её пополам, и наоборот, диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен к этой хорде.

Свойство биссектрисы угла

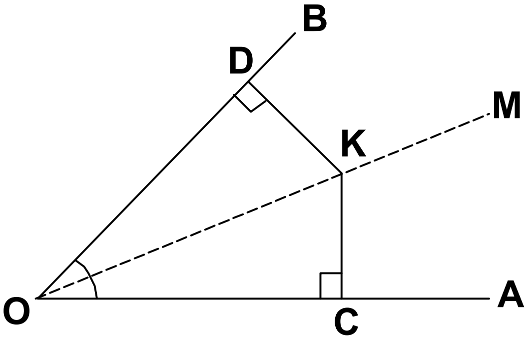
Обратимся вначале к одному из важнейших свойств биссектрисы *угла* (свойства биссектрисы *треугольника* будут рассмотрены в дальнейшем).

Теорема. Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от прямых, содержащих его стороны.

Иначе: каждая точка биссектрисы угла, меньшего (большего) развёрнутого, равноудалена от его сторон (продолжений его сторон за вершину). *Для сравнения* [23]: «Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон» (проанализируйте разницу).

Доказательство. Доказательство проведём для углов, меньших развёрнутого угла. Для углов, больших развёрнутого угла, доказательство того, что каждая точка биссектрисы такого угла равноудалена от продолжений его сторон, проведите по аналогии самостоятельно.

Пусть луч OM – биссектриса угла $\angle AOB$, т.е. делит этот угол пополам. Опустим из произвольной точки K, лежащей на луче OM, перпендикуляры KC и KD на стороны $\angle AOB$. Требуется доказать, что точка K равноудалена от сторон угла $\angle AOB$, т.е. $KC = KD$.



Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники OCK и ODK. Эти треугольники равны, так как они имеют общую гипотенузу OK и равные острые углы при вершине O. Следовательно, равны и противолежащие этим углам катеты KC и KD.

Справедлива и *обратная теорема*.

Теорема. Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла (если угол меньше развёрнутого) или их продолжений (если угол больше развёрнутого), лежит на его биссектрисе.

Ограничимся *доказательством* для случая углов, меньших развёрнутого. Пусть точка K лежит внутри угла $\angle AOB$ и равноудалена от его сторон. Это значит, что, если опустить из K перпендикуляры KC и KD на стороны угла $\angle AOB$, то $KC = KD$. Через точки O и K проведём луч OM. Требуется доказать, что луч OM – биссектриса угла $\angle AOB$. Действительно, прямоугольные треугольники $\triangle OCK$ и $\triangle ODK$ равны, так как имеют общую гипотенузу OK и равные катеты KC и KD. Поэтому будут равны и острые углы при вершине O. Значит, луч OM, проведённый через точку K, является биссектрисой угла $\angle AOB$. Теорема доказана.

Замечание 1. В силу доказанных двух теорем, можно сформулировать следующее определение биссектрисы угла. *Биссектриса угла* – это геометрическое место точек плоскости (в которой лежит угол), равноудалённых от сторон этого угла (если угол меньше развёрнутого) или от продолжений сторон (если угол больше развёрнутого).

Другие свойства *биссектрисы угла* сформулированы в следующих замечаниях (докажите эти свойства самостоятельно).

Замечание 2. Биссектриса неразвёрнутого угла является множеством центров всех окружностей, вписанных в этот угол.

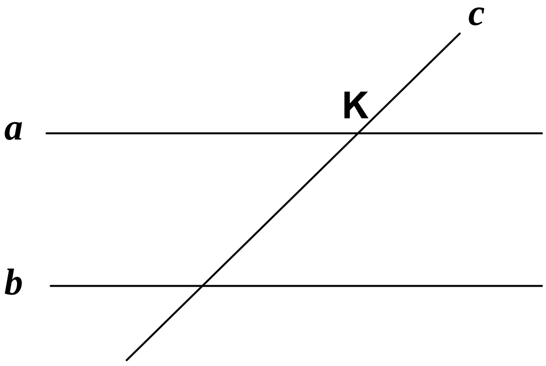
Замечание 3. Прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла.

Замечание 4. Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

Теоремы о параллельных прямых на плоскости

Вспомним *аксиому параллельных прямых*. Пусть a – произвольная прямая и A – точка, лежащая вне её. Тогда в плоскости, определяемой прямой a и точкой A, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не имеющей общих точек с прямой a. Напомним также, что утверждение о том, что через точку, не лежащую на данной прямой, *можно* провести по крайней мере одну прямую, параллельную данной, доказывается как теорема (см., например, [2]). Объединяя эти результаты, получаем утверждение: *через точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельной данной.*

Прежде чем перейти к рассмотрению теорем о параллельных прямых на плоскости, докажем два следствия из сформулированного утверждения.

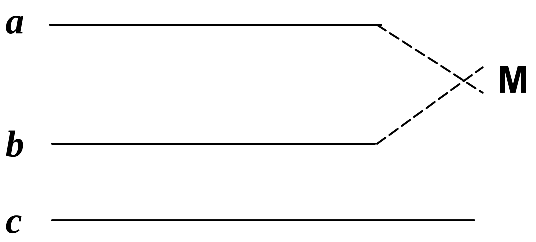


Следствие 1. *Если две прямые параллельны и какая-нибудь третья прямая пересекается с одной из этих двух параллельных прямых, то она пересекается и с другой.*

Доказательство. Пусть $a \parallel b$ и $c \cap a = K$. Требуется показать, что $c \cap b$.

В самом деле, если предположить противное, т.е. что $c \parallel b$, то через одну и ту же точку K проходили бы две различные прямые a и c, параллельные b, что, в силу аксиомы параллельных, невозможно.

Следствие 2. *Если каждая из двух прямых параллельна одной и той же третьей прямой, то они параллельны между собой.*



Доказательство. Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Требуется доказать, что $a \parallel b$.

Предположим противное, т.е. что $a \cap b = M$. Но тогда через эту точку M проходят две различные прямые, параллельные c, что противоречит аксиоме параллельных. Следствие доказано.

Пусть теперь две прямые a и b пересекаются третьей прямой (секущей) c.

Теорема 1 *(признаки параллельности двух прямых).*

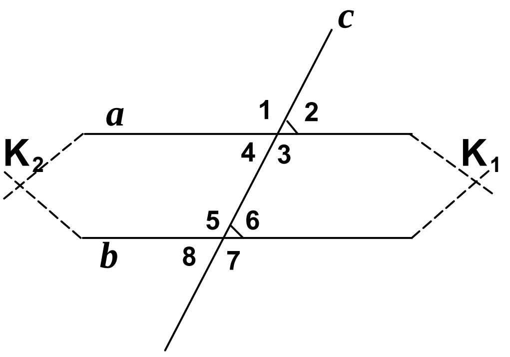
Если при пересечении двух прямых a *и* b *третьей прямой* c *окажется,* *что: 1) какие-либо соответственные углы равны, или*

2) какие-либо накрест лежащие углы равны, или

3) сумма величин каких-либо двух внутренних или каких-либо двух внешних односторонних углов равна 180°,

то эти прямые параллельны.

Доказательство. 1) Пусть, например, соответственные углы $\angle 2$ и $\angle 6$ равны. Требуется доказать, что тогда прямые a и b параллельны. Предположим противное, т.е. что прямые a и b не параллельны. Тогда эти прямые пересекутся либо в некоторой точке K_1, лежащей справа от прямой c, либо в точке K_2, лежащей слева от прямой c.



Если пересечение будет в K_1, то образуется треугольник, в котором $\angle 2$ будет внешним, а $\angle 6$ - внутренним, не смежным с внешним углом $\angle 2$. Следовательно, по свойству внешнего угла, угол $\angle 2$ должен быть больше угла $\angle 6$, что противоречит условию. Значит, пересечься в какой-нибудь точке K_1, лежащей справа от c, прямые a и b не могут. Если же предположить, что пересечение будет в точке K_2, то тогда образуется треугольник, у которого угол $\angle 4$, равный $\angle 2$ (как вертикальный), будет внутренним, а угол $\angle 6$ - внешним, не смежным с внутренним углом $\angle 4$. Тогда $\angle 6$ должен быть больше угла $\angle 4$ и, следовательно, больше угла $\angle 2$, что противоречит условию. Значит, прямые a и b не могут пересечься и в точке, лежащей налево от c.

Следовательно, эти прямые нигде не пересекаются, то есть они параллельны. Аналогично доказывается, что прямые a и b параллельны, если $\angle 1 = \angle 5$, или $\angle 4 = \angle 8$, или $\angle 3 = \angle 7$.

2) Случай равенства накрест лежащих углов сводится к предыдущему признаку. Действительно, пусть накрест лежащие углы $\angle 3$ и $\angle 5$ равны. Так как $\angle 3 = \angle 1$ (как вертикальные), то $\angle 1 = \angle 5$. А это соответственные углы, и раз они равны, то, по первому признаку, прямые a и b параллельны.

3) Пусть теперь сумма двух внутренних односторонних углов $\angle 4 + \angle 5 =$ =180°. Так как сумма $\angle 5 + \angle 6$ тоже равна 180° (как смежных углов), то отсюда следует, что $\angle 4 = \angle 6$. Но это накрест лежащие углы, и так как они равны, то, по второму признаку параллельности прямых, прямые a и b параллельны.

Следствие. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

Справедлива и *обратная теорема*.

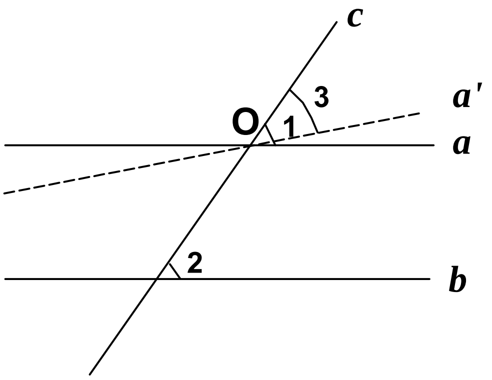
<u>Теорема 2</u>. Если две параллельные прямые a и b пересечены какой-либо третьей прямой c, то:

1) соответственные углы равны;

2) накрест лежащие углы равны;

3) сумма величин внутренних односторонних углов равна 180°
и сумма величин внешних односторонних углов равна 180°.

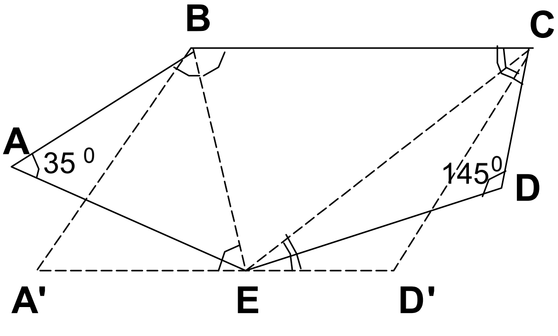
Доказательство. Пусть $a \parallel b$, c - секущая. Докажем, что соответственные углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны. Предположим противное, т.е. что эти углы не равны, например, $\angle 1 > \angle 2$. Тогда отложим от прямой c угол $\angle 3$, равный $\angle 2$, и получим прямую a', не совпадающую с a, но при этом параллельную b (в силу 1-го признака параллельности прямых). Следовательно, имеются две различные прямые a и a', проходящие через точку O и параллельные одной и той же прямой b. Это противоречит аксиоме параллельных прямых. То есть предположение о неравенстве углов $\angle 1$ и $\angle 2$ было неверным, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично можно доказать оставшиеся утверждения 2) и 3) данной теоремы.



<u>Следствие</u>. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

<u>*Пример*</u> [Мехмат-1998,май]. *В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали BE и CE являются биссектрисами углов при вершинах B и C соответственно, $\angle A = 35^0$, $\angle D = 145^0$, а площадь треугольника BCE равна 11. Найти площадь пятиугольника $ABCDE$.*

Решение. Отразим треугольник ABE симметрично относительно серединного перпендикуляра к отрезку BE. Тогда вершина A перейдёт в некоторую точку A', причём так как $\angle A'EB = \angle ABE = \angle CBE$, то, согласно признаку параллельности прямых $A'E$ и BC при пересечении их секущей BE (равны накрест лежащие углы) имеем $A'E \parallel BC$.



Аналогично отразим треугольник CDE относительно серединного перпендикуляра к CE. Точка D перейдёт в D', причём так как $\angle D'EC = \angle ECD = \angle ECB$, то имеем параллельные отрезки $ED' \parallel BC$. Следовательно, точки A', E, D' лежат на одной прямой и $A'BCD'$ - четырёхугольник, у которого противоположные стороны $A'D'$ и BC параллельны. При этом площадь исходного пятиугольника $ABCDE$ численно равна площади этого четырёхугольника. Более того, так как $\angle A' + \angle D' = \angle A + \angle D = 35^0 + 145^0 = 180^0$, то, в силу признака параллельности прямых $A'B$ и $D'C$ при пересечении их секущей $A'D'$ (соответственные углы равны), имеем $A'B \| D'C$, и $A'BCD'$ - параллелограмм. Тогда $S_{ABCDE} = = S_{A'BCD'} = 2 \cdot S_{BCE} = 22$ $(кв.ед)$.

Признаки непараллельности прямых

Из двух последних теорем, прямой и обратной, следует, что противоположные теоремы также верны.

<u>Теорема 1.1</u> (противоположная Теореме 1).

Если при пересечении двух прямых третьей окажется, что:

1) какие-либо соответственные углы не равны, или

2) какие-либо накрест лежащие углы не равны, или

3) сумма величин каких-либо двух внутренних или каких-либо двух внешних односторонних углов не равна 180°,

то эти две прямые не параллельны.

<u>Теорема 2.1</u> (противоположная Теореме 2).

Если две прямые не параллельны, то при пересечении их третьей прямой:

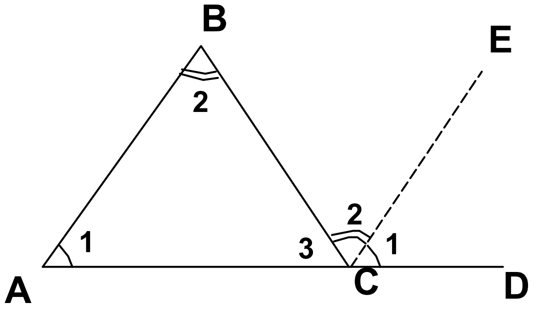
1) соответственные углы не равны;

2) накрест лежащие углы не равны;

3) сумма величин любых двух внутренних (двух внешних) односторонних углов не равна 180°.

Теорема о сумме внутренних углов треугольника

<u>Теорема</u>. Сумма внутренних углов треугольника равна развёрнутому углу. (Другая формулировка: «Сумма градусных мер внутренних углов треугольника равна 180°»).



Доказательство. Пусть ΔABC - произвольный треугольник. Требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C$ =180°.

Для доказательства продолжим сторону AC за точку C и получим луч CD. Проведём также луч CE параллельно AB. Имеем две параллельные прямые AB и CE, а также секущие к ним AC и BC. Тогда $\angle A = \angle ECD$ (как соответственные углы при параллельных прямых), $\angle B = \angle BCE$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых). Следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 180°$, что и т.д.

Следствие 1. Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Следствие 2. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.

Следствие 3. В прямоугольном треугольнике сумма величин двух острых углов равна $90°$.

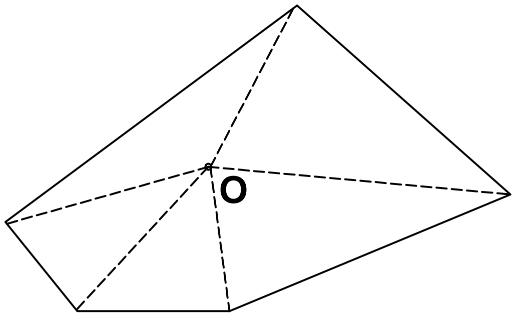
Следствие 4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике величина каждого острого угла равна $45°$.

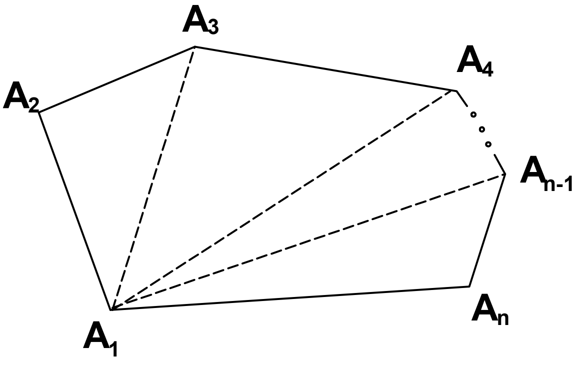
Следствие 5. В равностороннем треугольнике величина каждого угла составляет $60°$.

Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника

Теорема. Сумма величин внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^0 \cdot (n-2)$.

Доказательство. 1-й способ.





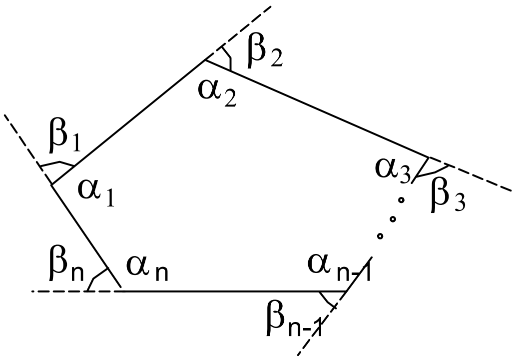
Возьмём внутри выпуклого n-угольника произвольную точку O и соединим её со всеми вершинами n-угольника. Тогда многоугольник разобьётся на n треугольников. Сумма внутренних углов каждого треугольника равна 180^0, следовательно, сумма углов всех n треугольников равна $180^0 n$. В эту сумму входит искомая сумма внутренних углов многоугольника, а также сумма всех углов, расположенных вокруг точки O. Так как последняя сумма равна 360^0, то, следовательно, сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна равна 360^0, то, следовательно, сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна

$$180^0 n - 360^0 = 180^0 \cdot (n-2).$$

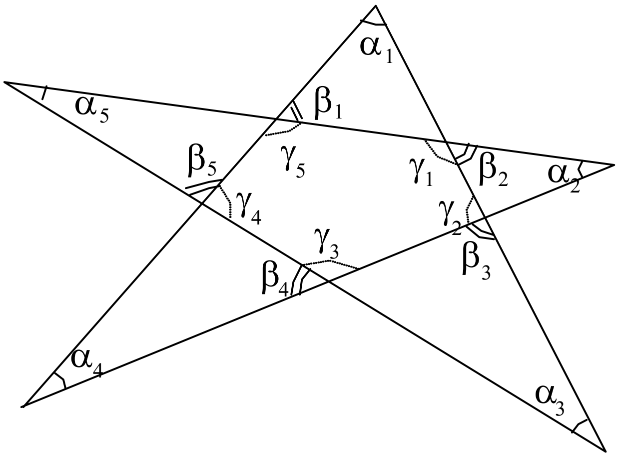
<u>2-й способ</u>. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1A_2...A_n$ (см. рис. выше). Проведём диагонали A_1A_3, A_1A_4, … , A_1A_{n-1}. Получили n–2 треугольника $\Delta\ A_1A_2A_3$, $\Delta\ A_1A_3A_4$, … , $\Delta\ A_1A_{n-1}A_n$. Сумма всех углов этих треугольников равна $180^0 \cdot (n-2)$. Эта сумма, очевидно, равна сумме внутренних углов данного n-угольника.

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине. Рассмотрим выпуклый n-угольник с внутренними углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$. Построим его внешние углы $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1}, \beta_n$.

<u>Следствие</u>. *Сумма внешних углов выпуклого* n*-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна* 360^0*. В частности, в правильном* n*-угольнике любой его внешний угол равен* $\frac{360^0}{n}$.



Доказательство. Каждый из внешних углов многоугольника составляет дополнение до 180^0 к смежному с ним внутреннему углу. Следовательно, если к сумме всех внутренних углов многоугольника $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ прибавить сумму всех его внешних углов $\sum_{i=1}^{n} \beta_i$, то получим $180^0 n$. Но сумма внутренних углов, в силу доказанной теоремы, равна $180^0 \cdot (n-2)$. Следовательно, сумма внешних углов равна разности $180^0 n - 180^0 \cdot (n-2) = 360^0$.



<u>Пример</u>. *Найти сумму острых углов произвольной пятиконечной звезды.*

Решение. Рассмотрим произвольную пятиконечную звезду и введём обозначения углов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, где $i = 1,2,...,5$ (см. рис.)

По свойству внешнего угла треугольника имеем: $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i$,

$i = 1,2,...,5$. Складывая все пять равенств, получим: $\sum_{i=1}^{5}\gamma_i = \sum_{i=1}^{5}\alpha_i + \sum_{i=1}^{5}\beta_i$.

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{5}\alpha_i = \sum_{i=1}^{5}\gamma_i - \sum_{i=1}^{5}\beta_i . \qquad (1)$$

Но сумма внутренних углов выпуклого пятиугольника $\sum_{i=1}^{5}\gamma_i = = 180^0(5-2) = 3\cdot 180^0$, а сумма внешних углов этого пятиугольника $\sum_{i=1}^{5}\beta_i = 360^0$.

Подставляя в (1), получаем:

$$\sum_{i=1}^{5}\alpha_i = 3\cdot 180^0 - 2\cdot 180^0 = 180^0 .$$

Ответ: сумма величин острых углов пятиконечной звезды равна 180^0.

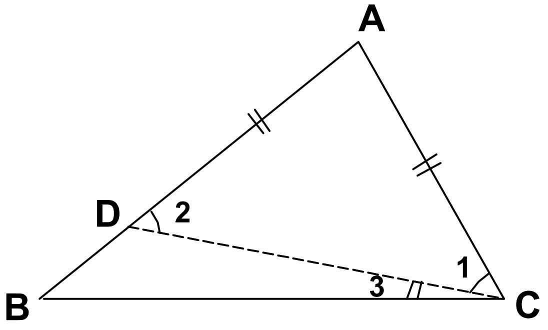
Приведём в заключение ещё одну теорему (докажите её самостоятельно или см. доказательство, например, в [16]).

Теорема. Выпуклый n - угольник имеет ровно $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

Сравнение сторон и углов треугольника. Неравенства треугольника

Теорема 1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. 1) Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB > AC$. Отложим на стороне AB отрезок AD, равный AC. Требуется доказать, что $\angle ACB > \angle B$. Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B, и поэтому луч CD лежит внутри угла $\angle ACB$.



Очевидно, что треугольник ADC-равнобедренный, значит, $\angle 1 = \angle 2$. Однако $\angle 1$ - часть угла $\angle ACB$. Значит, и равный ему угол $\angle 2$ меньше $\angle ACB$. Значит, и равный ему угол $\angle 2$ меньше $\angle ACB$. Но угол $\angle 2$ является внешним для ΔBDC. По свойству внешнего угла треугольника $\angle 2 = \angle 3 + \angle B$, т.е. $\angle 2 > \angle B$. Следовательно, $\angle ACB > \angle B$.

2) Докажем обратное утверждение. Пусть теперь в треугольнике ABC известно, что $\angle ACB > \angle B$. Требуется доказать, что $AB > AC$.

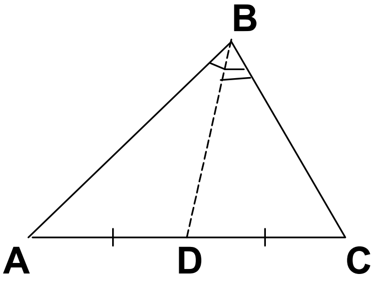
Докажем это *методом от противного*. Допустим, что $\angle ACB > \angle B$, но $AB \leq AC$. Если $AB = AC$, то ΔABC - равнобедренный и $\angle B = \angle ACB$ (что противоречит допущению). Если же $AB < AC$, то из доказанного выше следует, что $\angle ACB < \angle B$. Опять получили противоречие с условием, что $\angle ACB > \angle B$. Значит, наше допущение о том, что $AB \leq AC$, ложно. Следовательно, из неравенства $\angle ACB > \angle B$ вытекает неравенство $AB > AC$.

<u>Следствие 1</u>. Если стороны треугольника a,b,c упорядочены по длине $a \geq b \geq c$, то противолежащие углы α,β,γ упорядочены аналогичным образом $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Обратное утверждение тоже верно.

<u>Следствие 2</u>. В тупоугольном треугольнике против тупого угла лежит наибольшая сторона.

<u>Следствие 3.</u> Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

<u>Пример</u>. Доказать, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если противолежащая ему сторона соответственно меньше, равна или больше соответствующей удвоенной медианы.



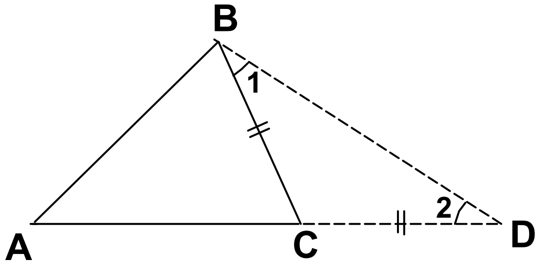
Доказательство. Пусть BD- медиана треугольника ABC. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то, предположив, что $AC < 2BD$, т.е. что $AD < BD$, $DC < BD$, приходим к выводу, что $\angle ABD < \angle BAD$ и $\angle DBC < \angle BCD$, откуда следует, что

$\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC < \angle BAD + \angle BCD =$

$=180^0 - \angle ABC$, или $2\angle ABC < 180^0$, т.е. $\angle ABC < 90^0$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $AC = 2BD$ и $AC > 2BD$.

<u>Теорема 2</u> (неравенства треугольника). Во всяком треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.



Доказательство. Достаточно доказать, что $AB < AC + BC$. Для доказательства отложим на продолжении стороны AC в ΔABC отрезок CD, равный CB. Тогда ΔBCD - равнобедренный и $\angle 1 = \angle 2$, значит $\angle 2 < \angle ABD$. По теореме 1 для ΔABD имеем $AB < AD = AC + CD = AC + BC$, т.е. $AB < AC + BC$. Теорема доказана.

Следующие следствия из этой теоремы предлагается доказать самостоятельно.

<u>Следствие 1</u>. Для любых точек A,B,C, не лежащих на одной прямой, имеют место неравенства:
$AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$ *(называемые неравенствами треугольника).*

<u>Следствие 2</u>. Во всяком многоугольнике каждая сторона меньше суммы всех других сторон.

<u>Следствие 3</u>. Если для трёх точек A,B,C выполняется равенство $AC = AB + BC$, то эти точки лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C.

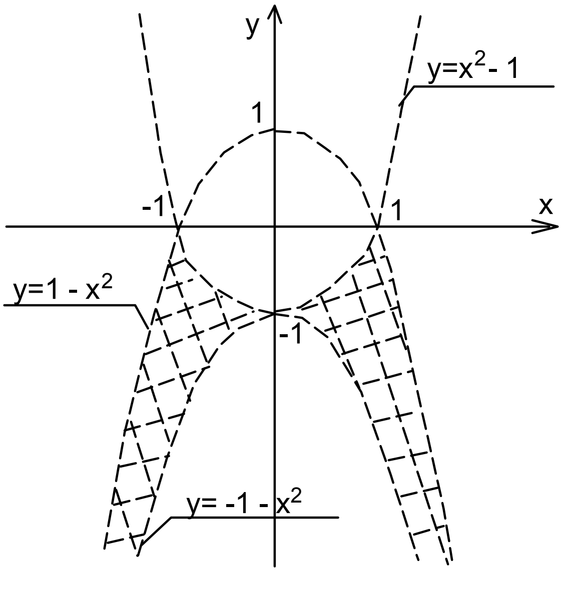
<u>Следствие 4</u> (критерий существования треугольника со сторонами a,b,c). Пусть даны три положительных действительных числа a,b,c. Треугольник со сторонами, длины которых равны a,b,c, существует тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три неравенства $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

<u>Пример</u> [Географ.-1997]. *На координатной плоскости построить множество точек с координатами $(x; y)$, для каждой из которых существует остроугольный треугольник со сторонами $1, |x|, \sqrt{-y}$. Найти уравнения кривых, ограничивающих это множество.*

Решение. ОДЗ: $y \le 0$. Как будет доказано ниже, угол α, лежащий напротив стороны a в треугольнике, является острым тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $a^2 < b^2 + c^2$ (b,c - две другие стороны треугольника). Поэтому условие остроугольности треугольника можно записать в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ b^2 < a^2 + c^2 \\ c^2 < a^2 + b^2. \end{cases}$$

Так как из справедливости неравенства $a^2 < b^2 + c^2$ следует справедливость неравенства $a < b + c$ ($a^2 < b^2 + c^2 < (b + c)^2$), то все три неравенства треугольника, обеспечивающие существование треугольника в данной задаче, непосредственно следуют из условия его остроугольности. Поэтому искомое геометрическое место точек задаётся системой неравенств



$\begin{cases} 1 < x^2 - y \\ x^2 < 1 - y \\ -y < 1 + x^2 \end{cases}$. Приведём систему к виду $\begin{cases} y < x^2 - 1 \\ y < 1 - x^2 \\ y > -1 - x^2 \end{cases}$ и построим искомую фигуру. *Ответ:* уравнения кривых $y = -x^2 - 1, \quad y = \pm(x^2 - 1)$.

3.4. Свойства и признаки параллелограмма. Теорема Фалеса. Свойства средних линий треугольника и трапеции

Свойства и признаки параллелограмма

Теорема (свойства параллелограмма). В параллелограмме:

1) диагональ делит его на два равных треугольника;

2) противоположные стороны равны;

3) противоположные углы равны;

4) сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°;

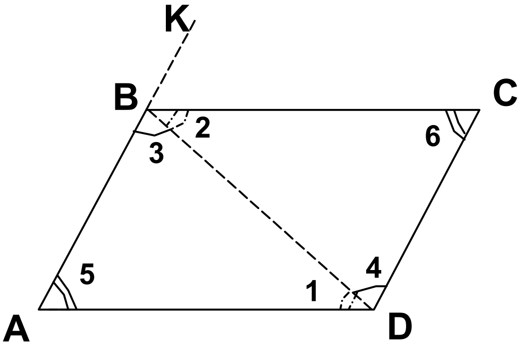
5) диагонали точкой пересечения делятся пополам;

6) точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма;

7^*) сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон;

8^*) биссектрисы углов, прилежащих к одной стороне, пересекаются под прямым углом.

Доказательство. 1) Пусть $ABCD$ - параллелограмм, т.е. $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Рассмотрим треугольники ABD и BCD. Докажем, что они равны. Действительно, у них сторона BD - общая, $\angle 1 = \angle 2$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BD). Аналогично, $\angle 3 = \angle 4$.



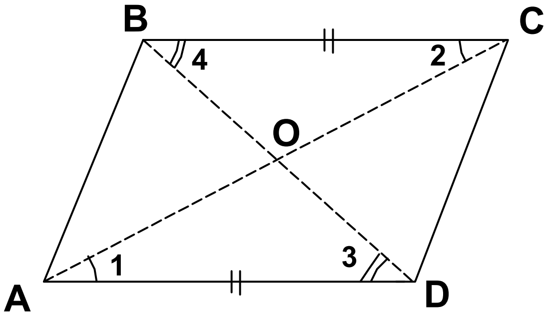
Поэтому эти треугольники равны по 2-му признаку, т.е. по стороне и двум прилежащим к ней углам.

2) противоположные стороны параллелограмма равны ($AD = BC$, $AB = CD$), так как это соответствующие стороны в равных треугольниках ABD и BCD.

3) Так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$. Кроме того, $\angle 5 = \angle 6$ (как соответствующие углы в равных треугольниках). Таким образом доказано, что противоположные углы в параллелограмме равны.

4) Докажем, что сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°. Продлим для доказательства сторону AB за точку B и обозначим этот луч BK. Так как $AD \parallel BC$, то $\angle BAD = \angle KBC$ (как соответственные углы). Но угол $\angle ABK$ - развёрнутый, и при этом равен сумме $\angle 3 + \angle 2 + \angle 5$. Таким образом, сумма углов, прилежащих к стороне AB, равна 180°. Аналогично доказывается это свойство и для трёх остальных сторон параллелограмма.

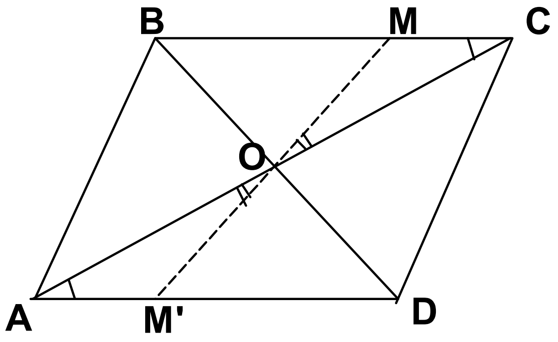
5) Докажем, что диагонали параллелограмма $ABCD$ точкой пересечения O делятся пополам. Для этого рассмотрим ΔAOD и ΔBOC. Стороны AD и BC этих треугольников равны в силу доказанного выше свойства 2 (противоположные стороны параллелограмма равны.



Далее, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Следовательно, треугольники равны по 2-му признаку равенства (по стороне и прилежащим к ней углам). Отсюда получаем, что $AO = OC$, $BO = OD$.

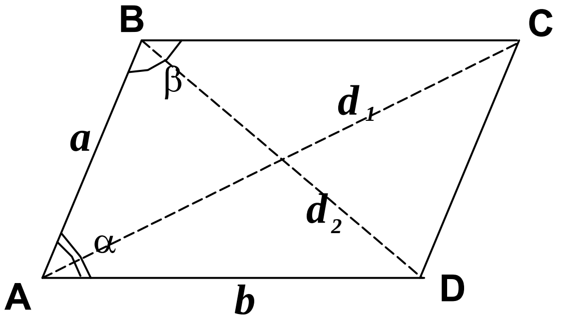
6) Покажем, что точка O пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

Напомним, что две точки M и M' называются *симметричными относительно точки* O, если точка O – середина отрезка MM'. Фигура F называется *симметричной относительно точки* O (центр симметрии), если для каждой точки M фигуры F симметричная ей точка M' также принадлежит этой фигуре.



Пусть M – произвольная точка, лежащая на стороне параллелограмма (например, на BC), а M' – точка пересечения прямой MO с отрезком AD. Поскольку $\angle M'AO = \angle MCO$, $\angle AOM' = \angle COM$, а $AO = OC$, то треугольники $M'AO$ и MCO равны, а значит, $OM = OM'$, что, по определению преобразования симметрии, и доказывает требуемое.

7*) Докажем еще одно известное свойство параллелограмма, опираясь на теорему косинусов для треугольников, которая будет доказана несколько позже. Итак, покажем, что



$$d_1^2 + d_2^2 = 2\cdot\left(a^2 + b^2\right).$$

По теореме косинусов для треугольников ABC и ABD имеем:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta\,,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\,.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta = 180^0$ и поэтому $\cos\beta = -\cos\alpha$, после почленного сложения указанных выше равенств, получим искомое равенство.

Обратное утверждение также верно: если сумма квадратов диагоналей четырёхугольника равна сумме квадратов его сторон, то этот четырёхугольник – параллелограмм. Поэтому данное свойства параллелограмма является *характеристическим* [21].

8*) Пусть O точка пересечения биссектрис в параллелограмме $ABCD$. Докажем, что угол $\angle AOB$ - прямой. Так как сумма величин углов $\angle ABC$ и $\angle BAD$, прилежащих к стороне AB, равна 180° ($\alpha + \beta = 180^0$), и, кроме того, $\angle ABO = \dfrac{\beta}{2}$, $\angle BAO = \dfrac{\alpha}{2}$, то $\angle AOB = 180^0 - \angle ABO - \angle BAO = 180^0 - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 90^0$.

Признаки параллелограмма отвечают на вопрос: что надо знать о четырёхугольнике, чтобы утверждать, что он является параллелограммом.

<u>*Теорема*</u> *(признаки параллелограмма). Если в выпуклом четырёхугольнике:* *1) две стороны параллельны и равны;* или

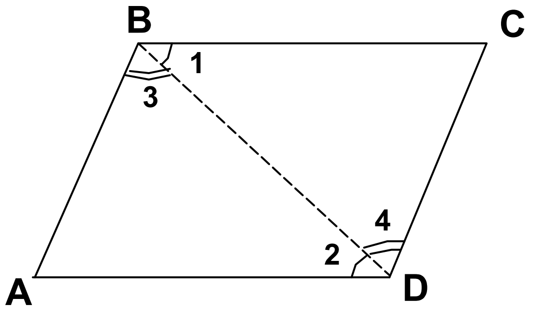
2) противолежащие стороны попарно равны; или

3) диагонали точкой пересечения делятся пополам; или

4) противоположные углы попарно равны,

то этот четырёхугольник – параллелограмм.

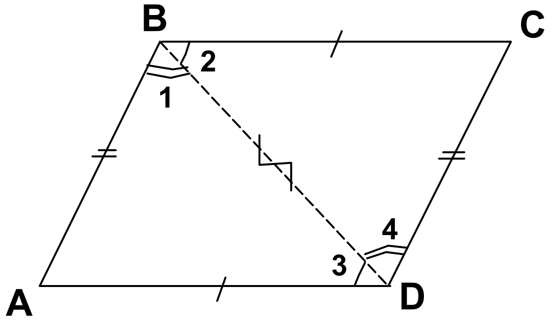
Доказательство.



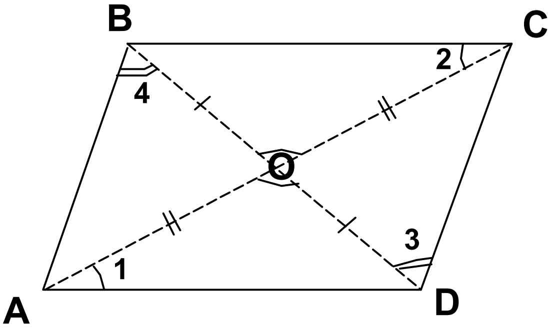
1) Пусть $AD \parallel BC, AD = BC$. Требуется доказать, что $ABCD$ - параллелограмм, т.е. $AB \parallel CD$. Проведём диагональ BD и рассмотрим ΔABD и ΔCDB. У них $\angle 1 = \angle 2$ (как внутренние накрест лежащие), $AD = BC$ (по условию), BD- общая сторона. Следовательно, треугольники равны по 1-му признаку (по двум сторонам и углу между ними). Но в равных треугольниках напротив равных сторон лежат рав-

ные углы. Поэтому, так как $AD = BC$, то $\angle 3 = \angle 4$. А так как $\angle 3$ и $\angle 4$ - внутренние накрест лежащие углы, то из их равенства в силу признака параллельности прямых вытекает, что $AB \parallel CD$, т.е. $ABCD$ - параллелограмм.

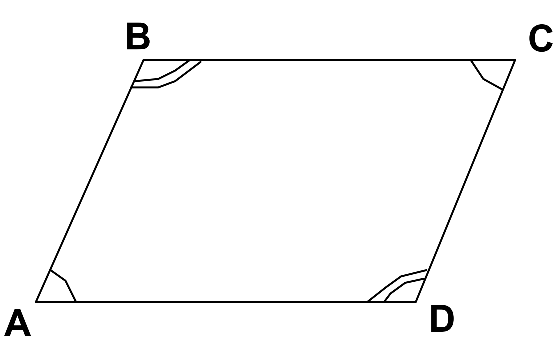
2) Пусть у четырёхугольника $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$. Достаточно доказать, что $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$. Проведём диагональ BD и рассмотрим треугольники ABD и CDB. У них сторона BD - общая, $AB = CD$, $AD = BC$. Следовательно, эти треугольники равны по 3-му признаку (по трём сторонам). Так как в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, то $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$. Поскольку $\angle 1$ и $\angle 4$ - внутренние накрест лежащие (так же как $\angle 2$ и $\angle 3$), то из их равенства в силу признака параллельности прямых получаем $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.



3) Пусть у четырёхугольника $ABCD$ AC и BD - диагонали, $AC \cap BD = O$, причём $AO = OC$, $BO = OD$. Покажем, что в этом случае $ABCD$ - параллелограмм. Рассмотрим треугольники AOD и BOC, в них $\angle AOD = \angle BOC$ (как вертикальные). По условию, $AO = OC$ и $BO = OD$, значит, эти треугольники равны (по 1-му признаку, т.е. по двум сторонам и углу между ними). Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, и поэтому, в силу признака параллельности прямых, получаем, что $AD \parallel BC$. Аналогично, из равенства треугольников AOB и COD имеем $\angle 3 = \angle 4$, и, следовательно, $AB \parallel CD$. Итак, $ABCD$ - параллелограмм.



4) Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные углы равны, т.е. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Покажем, что в этом случае $ABCD$ - параллелограмм. Сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна:



$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0.$$

С другой стороны, из равенства углов $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ следует, что

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

Отсюда $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ =180°.

Так как сумма двух внутренних односторонних углов равна 180°, то, в силу 3-го признака параллельности прямых заключаем, что $AD \parallel BC$. Аналогично, так как $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C$ =180°, то получаем, что $AB \parallel CD$.

Свойства прямоугольника, ромба и квадрата

Важными частными случаями параллелограмма являются такие хорошо известные фигуры, как прямоугольник, ромб и квадрат.

Напомним, что *прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы (хотя бы один из внутренних углов) прямые. В силу определения прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма и, кроме того, у него имеются свои характерные свойства. Приведём эти дополнительные свойства (доказать их можно самостоятельно или, например, см. в [16]).

1) Диагонали прямоугольника равны.

2) Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником. При этом точка пересечения диагоналей прямоугольника является центром описанной около него окружности.

3) Прямая, соединяющая середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

4) Середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, однако имеет также и свои собственные, характерные свойства (докажите их самостоятельно или см. доказательство в [16]).

1) Диагонали ромба делят его на четыре равных прямоугольных треугольника.

2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

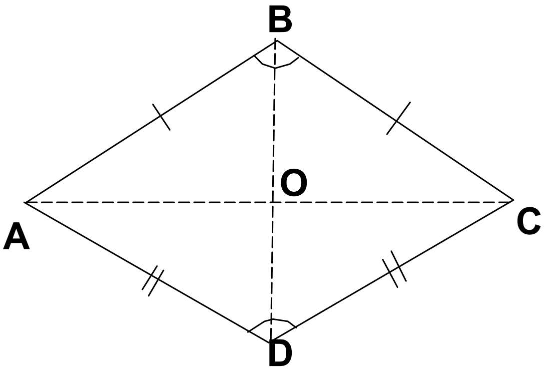
3) Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

4) Точка пересечения диагоналей ромба является центром вписанной в этот ромб окружности.

5) Середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Можно доказать, например, такой признак ромба: если в четырёхугольнике диагонали лежат на биссектрисах его углов, то этот четырёхугольник – ромб. Или: параллелограмм, в который можно вписать окружность, является ромбом. Ниже в примере отражён ещё один из признаков ромба.

<u>Пример</u>. Определить вид выпуклого четырёхугольника, если известно, что точка пересечения его диагоналей является центром вписанной в него окружности.



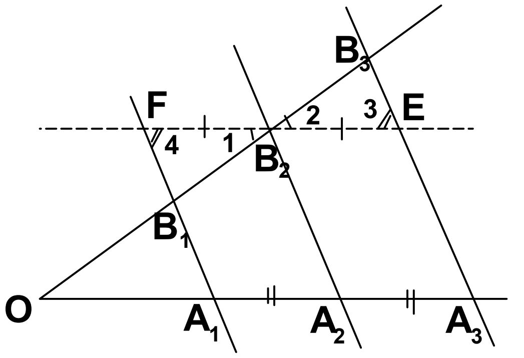
Решение. Так как центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов, то $\angle ABD = \angle DBC$ и $\angle ADB = \angle CDB$. Тогда треугольники ABD и CBD равны (по стороне BD и двум прилежащим к ней углам). Следовательно, $AB = BC$, $AD = CD$. Аналогично можно доказать равенство треугольников ABC и ADC, а следовательно, и равенство сторон $AB = AD$, $BC = CD$. Таким образом, получаем, что в данном четырёхугольнике все стороны равны. Значит, это – ромб.

Ромб, у которого все углы прямые, называется *квадратом*. Иначе квадрат можно определить как прямоугольник, у которого все стороны равны. Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Так, например, квадрат имеет четыре оси симметрии. Справедлив следующий признак квадрата: параллелограмм, в который можно вписать окружность и около которого можно описать окружность, является квадратом.

Теорема Фалеса

Фалес Милетский (ок.625–547гг. до н.э.) – древнегреческий математик и астроном. Предсказал солнечное затмение. Доказал, что круг делится диаметром пополам. Фалесу приписывают также способ определения высот разных предметов, в частности пирамид, по тени, когда солнце поднимается над горизонтом на 45°.

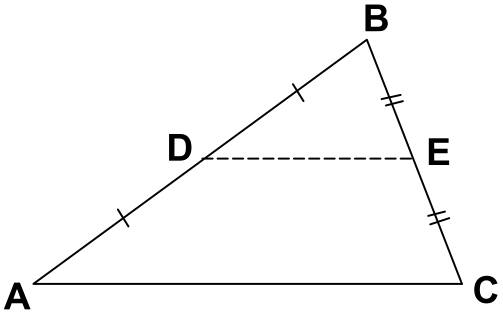
<u>Теорема</u> (Фалеса). Если на одной стороне угла отложены равные между собой отрезки, и через их концы проведены параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то на этой (другой) стороне угла также отложатся равные между собой отрезки.



Доказательство.

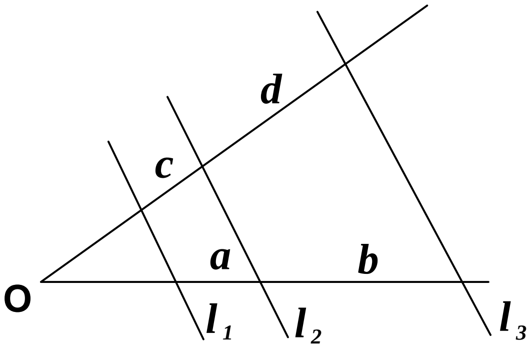
Пусть дан угол с вершиной O. На одной стороне угла отложены равные отрезки $A_1A_2 = A_2A_3$. По условию, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Требуется доказать, что $B_1B_2 = B_2B_3$. Проведём через точку B_2 прямую FE, параллельную A_1A_3 ($F \in A_1B_1$, $E \in A_3B_3$). Тогда $FB_2 = A_1A_2$ и $B_2E = A_2A_3$ (по свойствам параллелограммов $A_1FB_2A_2$ и $A_2B_2EA_3$). Кроме того, $\angle 1 = \angle 2$ (как вертикальные), а также $\angle 3 = \angle 4$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей FE). В силу 2-го признака равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим к ней углам), $\Delta B_1FB_2 = \Delta B_3EB_2$. Отсюда $B_1B_2 = B_2B_3$ (как соответствующие стороны в равных треугольниках).

Следствие. *Прямая, проведённая через середину стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону пополам.*



Доказательство. В самом деле, пусть $AD = BD$ и через точку D проведена прямая $DE \parallel AC$. В силу теоремы Фалеса, на другой стороне угла B также отложатся равные отрезки $BE = EC$.

Рассмотрим *обобщение теоремы Фалеса*. Иногда эту теорему называют теоремой о пропорциональных отрезках, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла. Пусть стороны угла O пересекают три параллельные прямые l_1, l_2, l_3, отсекающие на одной стороне угла отрезки длины a и b. Обозначим длины соответствующих отрезков, отсекаемых этими прямыми на другой стороне угла, через c и d.



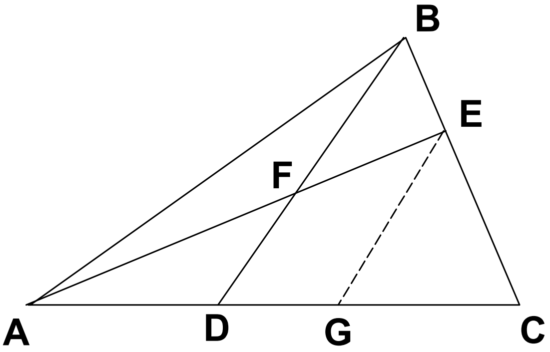
Теорема *(Фалеса, общий случай). Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки, т.е.*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(доказательство см., например, в [2,16,21,22]).

Пример. *Внутри треугольника ABC взята точка F. Прямые AF и BF пересекают стороны треугольника в точках E и D соответственно. Известно, что $AD : DC = m$, $EC : BE = n$. Найти отношение $AF : FE$.*

Решение. Проведём отрезок $EG \parallel BD$. Тогда, используя теорему Фалеса и простейшие алгебраические преобразования, получим:



$$\frac{AF}{FE}=\frac{AD}{DG}=\frac{AD}{DC}\cdot\frac{DC}{DG}=m\cdot\frac{DG+GC}{DG}=$$

$$m\cdot\left(1+\frac{EC}{BE}\right)=m(1+n).$$

Ответ: $AF:FE=m(1+n)$.

Ещё более обобщает теорему Фалеса следующая теорема (доказать самостоятельно, непосредственно раскрывая пропорции).

<u>Теорема</u> (о производных пропорциях). Если дана пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то справедливы следующие пропорции (их называют производными пропорции):* $\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$, $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *и др. Эти и множество других производных пропорций могут быть объединены в двух основных формах:*

$$\frac{ma+nb}{ka+lb}=\frac{mc+nd}{kc+ld}, \tag{1}$$

$$\frac{ma+nc}{ka+lc}=\frac{mb+nd}{kb+ld}, \tag{2}$$

где m,n,k,l *– любые действительные числа.*

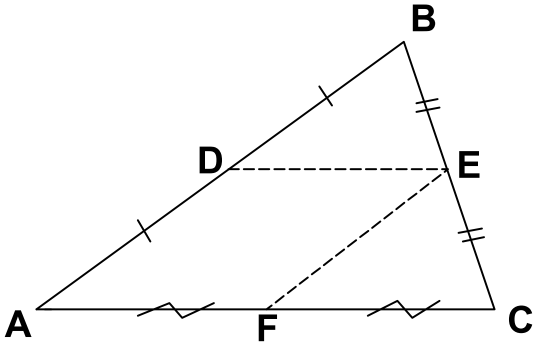
Данная теорема сформулирована в алгебраической форме, однако имеет и геометрический смысл. Чтобы понять его, достаточно придать исходной пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ смысл отношения длин соответствующих отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на сторонах угла.

Свойства средней линии треугольника

Напомним, что *средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. В треугольнике три средних линии.

<u>Теорема</u>. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и её длина равна половине длины этой стороны.

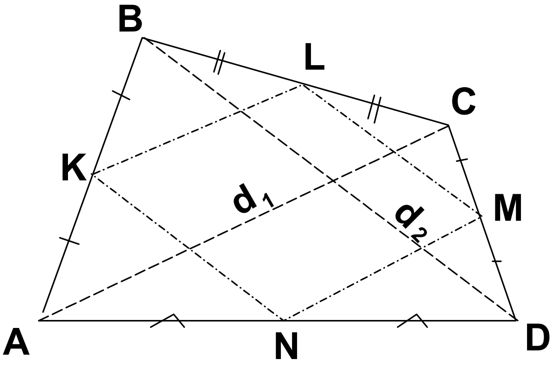
Доказательство. Пусть DE - средняя линия треугольника ABC, т.е. $AD=BD$ и $CE=BE$. Требуется доказать, что $DE \parallel AC$ и $DE=\frac{AC}{2}$.



Проведём через середину D стороны AB прямую, параллельную стороне AC. По теореме Фалеса эта прямая разделит сторону BC пополам и, следовательно, совпадет с прямой DE, соединяющей середины сторон AB и BC (так как через две точки можно провести единственную прямую). Таким образом, $DE \parallel AC$. Далее, проведём дополнительно прямую EF параллельно прямой AB. Тогда по теореме Фалеса получим, что сторона AC также разделится пополам в точке F, поэтому отрезки AF и FC равны. Так как образовавшийся четырёхугольник $ADEF$ - параллелограмм (противоположные стороны попарно параллельны), то $DE = AF$. Следовательно, $DE = AC/2$.

Замечание. Средняя линия треугольника отсекает от треугольника подобный треугольник. Площадь отсекаемого треугольника относится к площади основного треугольника как $1:4$ (о преобразовании подобия см. ниже в п.3.7, о площадях – в п.3.12).

Пример. *Доказать, что если в выпуклом четырёхугольнике соединить середины сторон, то получится параллелограмм с периметром, равным $d_1 + d_2$ (d_1 и d_2 - диагонали четырёхугольника).*

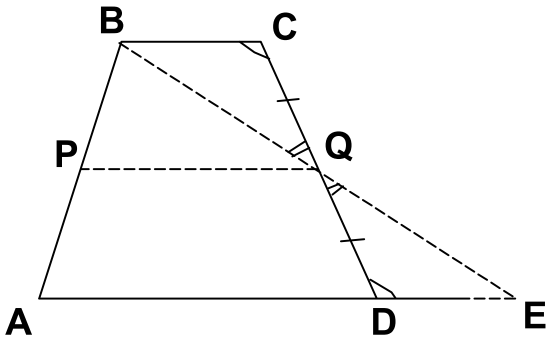


Этот параллелограмм носит название *параллелограмма Вариньона* [29].

Доказательство. Пусть $ABCD$ - произвольный выпуклый четырёхугольник, точки K, L, M, N - середины его сторон. Докажем, что $KLMN$ - параллелограмм. В треугольнике ABC отрезок KL является средней линией, и поэтому он параллелен AC, а его длина равна половине длины AC. Аналогично, в треугольнике ACD отрезок MN является средней линией, и поэтому он параллелен AC и его длина также равна половине длины AC. Итак, $KL \parallel MN$ и $KL = MN$. Согласно одному из признаков параллелограмма, четырёхугольник $KLMN$ является параллелограммом. Кроме того, доказали, что $KL + MN = d_1$. Аналогично доказывается, что $KN + LM = d_2$.

Свойства средней линии трапеции

Теорема. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям, и её длина равна полусумме длин оснований.*



Доказательство. Пусть $ABCD$ - трапеция с основаниями AD и BC, PQ- средняя линия, т.е. $AP = BP$, $CQ = DQ$. Требуется доказать, что $PQ \parallel AD$ и $PQ = \frac{AD + BC}{2}$.

Для доказательства проведём через вершину B и середину Q боковой стороны CD прямую. Обозначим через E точку пересечения этой прямой с прямой AD. Тогда получим два треугольника BCQ и EDQ. Эти треугольники равны по 2-му признаку, так как у них $CQ = DQ$ (по условию), $\angle BQC = \angle EQD$ (как вертикальные), $\angle BCQ = \angle EDQ$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и DE). Из равенства треугольников следует, что $BQ = QE$ и $BC = DE$.

Обратимся теперь к треугольнику ABE. В нём прямая PQ соединяет середины двух сторон, следовательно, по свойству средней линии треугольника, $PQ \parallel AE$ и $PQ = \frac{AD + DE}{2} = \frac{AD + BC}{2}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Средняя линия трапеции делит её высоту пополам. Можно доказать также, что отрезок средней линии трапеции, расположенный между её диагоналями, равен полуразности диагоналей (см. следующий пункт).

Четыре замечательных отрезка в трапеции

Произвольная трапеция обладает и другими, менее известными свойствами, например, следующими (их доказательство можно найти, например, в [16]). Во всякой трапеции:

1) середины боковых сторон и середины диагоналей лежат на одной прямой;
2) середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой;
3) отрезок, соединяющий середины диагоналей, параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности;
4) сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенного произведения оснований трапеции.

Рассмотрим в этом пункте теорему, отражающую связь четырёх специальных отрезков в трапеции с длинами её оснований посредством известных в алгебре средних величин (см. также, например, 27).

<u>Теорема</u> (четыре замечательных отрезка в трапеции). Пусть $ABCD$ *- трапеция с основаниями* $AD = a$ *и* $BC = b$*. Рассмотрим следующие четыре отрезка, параллельных основаниям трапеции:*

1) PQ *- отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей;*

2) FE *- отрезок, делящий трапецию на две подобные трапеции;*

3) MN *- средняя линия;*

4) XY *- отрезок, делящий площадь трапеции пополам.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

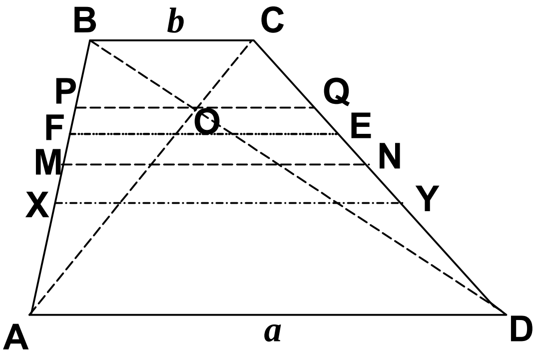
1) $PQ = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \dfrac{2ab}{a+b}$ *(среднее гармоническое оснований);*

2) $FE = \sqrt{ab}$ *(среднее геометрическое оснований);*

3) $MN = \dfrac{a+b}{2}$ *(среднее арифметическое оснований);*

4) $XY = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ *(среднее квадратичное оснований).*

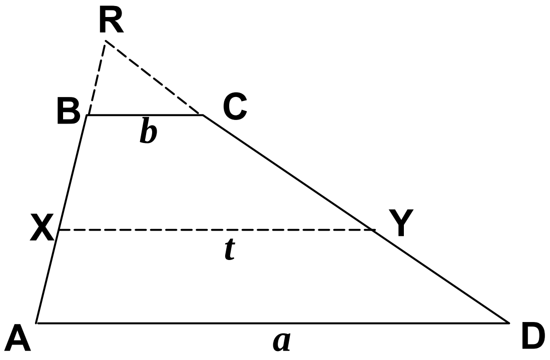
Доказательство. 1) Пусть O - точка пересечения диагоналей трапеции. Так как треугольники AOD и COB подобны, то справедлива пропорция $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{CB} = \dfrac{a}{b}$. Следовательно, по свойству производных пропорций, $\dfrac{OD+OB}{OB} = \dfrac{a+b}{b} \Leftrightarrow \dfrac{BD}{OB} = \dfrac{a+b}{b}$. Аналогично доказывается, что $\dfrac{AC}{OC} = \dfrac{a+b}{b}$. Далее, $\Delta PBO \sim \Delta ABD$, следовательно $\dfrac{BO}{BD} = \dfrac{PO}{AD}$, откуда $PO = \dfrac{BO}{BD} \cdot a = \dfrac{ab}{a+b}$.



Аналогично, $\Delta OCQ \sim \Delta ACD$, поэтому $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{OQ}{AD}$, откуда получаем $OQ = \dfrac{OC}{AC} \cdot a = \dfrac{ab}{a+b}$. Окончательно, $PQ = PO + OQ = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2}{(1/a)+(1/b)}$.

2) По условию, трапеции $FBCE$ и $AFED$ подобны, поэтому должно выполняться соотношение $\dfrac{AD}{FE} = \dfrac{FE}{BC} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dfrac{a}{FE} = \dfrac{FE}{b} \Leftrightarrow FE = \sqrt{ab}$.

3) Утверждение доказано в теореме о свойстве средней линии трапеции.



4) Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке R. Обозначим $XY = t$. Из подобия треугольников BRC, XRY, ARD следует, что их площади относятся как $b^2 : t^2 : a^2$, т.е. $\exists m :$ $S_{BRC} = mb^2$, $S_{XRY} = mt^2$, $S_{ARD} = ma^2$. Очевидно, что

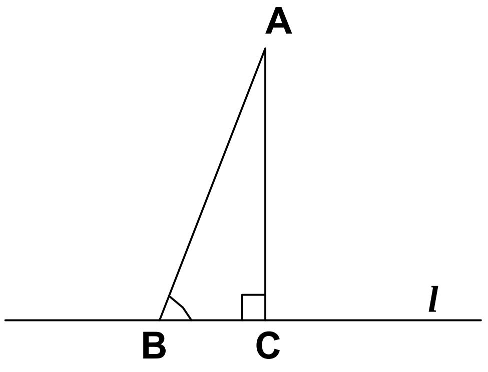
$$S_{XBCY} = S_{XRY} - S_{BRC} = m \cdot \left(t^2 - b^2\right),$$

$S_{AXYD} = S_{ARD} - S_{XRY} = \ m \cdot \left(a^2 - t^2\right)$. Приравнивая площади этих трапеций, получаем $\cancel{m} \cdot \left(t^2 - b^2\right) = \cancel{m} \cdot \left(a^2 - t^2\right)$. Отсюда находим $XY = t = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$, что и требовалось доказать.

3.5. Окружность и некоторые свойства, связанные с окружностью

Свойства касательной к окружности

Прежде чем перейти к свойствам касательной к окружности, докажем вначале две вспомогательные леммы.



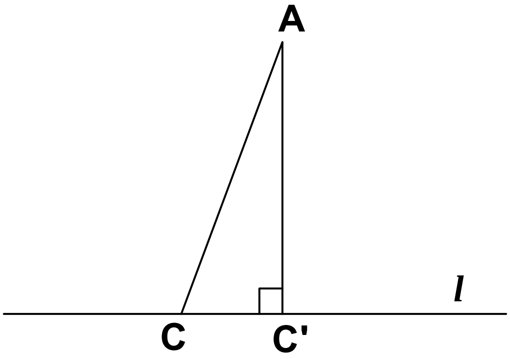
<u>Лемма 1</u>. Длина наклонной больше длины перпендикуляра.

Доказательство. Пусть дана прямая l и точка A вне её. Опустим из точки A отрезок перпендикуляра AC на прямую l. Пусть B – любая точка прямой l, отличная от C. Требуется доказать, что $AB > AC$.

Для доказательства рассмотрим прямоугольный $\triangle ABC$. Так как $\angle C > \angle B$, то сторона AB напротив $\angle C$ больше стороны AC напротив $\angle B$, т.е. $AB > AC$.

<u>Следствие</u>. *Кратчайшее расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.*

<u>Лемма 2</u>. Дана прямая l и точка A вне её. Пусть точка $C \in l$ такова, что для любой другой точки $B \in l$ $AC < AB$. Тогда C - основание перпендикуляра, опущенного из точки A на l (т.е. AC - перпендикуляр).

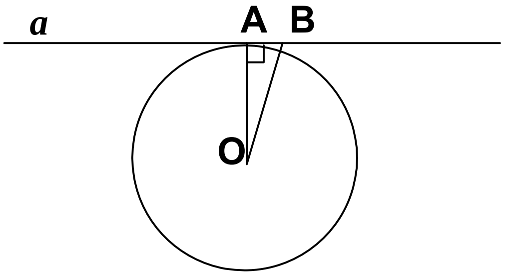


Доказательство (от противного). Предположим, что $AC \not\perp l$. Тогда AC - наклонная, и, следовательно, на прямой l найдётся такая точка C', что $AC' \perp l$. Тогда, в силу леммы 1, $AC' < AC$. Полученное противоречие с условием говорит о том, что предположение $AC \not\perp l$ было неверно. Следовательно, $AC \perp l$.

Лемма доказана.

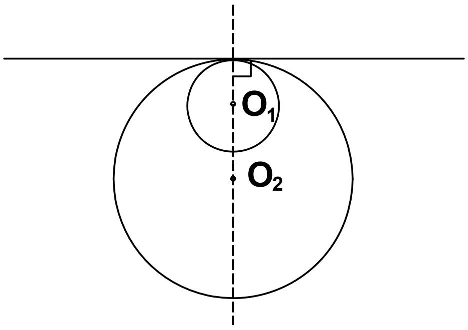
При доказательстве следующей теоремы нам понадобится одно из утверждений о взаимном расположении на плоскости прямой и окружности (примем их без доказательства; желающие могут ознакомиться с доказательством в пособии [2]):

1) прямая и окружность имеют две общие точки тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше её радиуса;
2) прямая и окружность имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой равно её радиусу;
3) прямая и окружность не имеют общих точек тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой больше её радиуса.



<u>*Теорема 1*</u> *(свойство касательной к окружности). Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.*

Доказательство. Пусть прямая a касается окружности в точке A, O - центр окружности, B - произвольная точка прямой a, отличная от A. Тогда точка B должна лежать вне окружности, и поэтому расстояние OB будет больше B должна лежать вне окружности, и поэтому расстояние OB будет больше радиуса OA. Значит, этот отрезок OA есть наименьший из отрезков, соединяющих точку O с любой точкой прямой a. Значит, в силу леммы 2, радиус OA перпендикулярен прямой a, что и требовалось доказать.

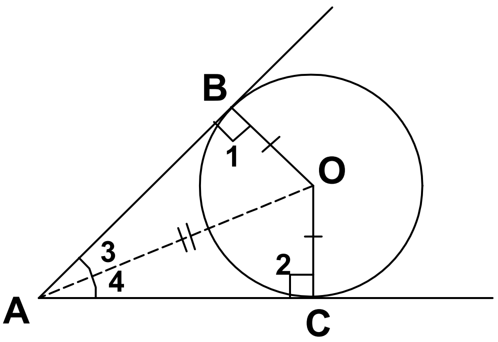


<u>*Следствие*</u>. *Если две окружности касаются внутренним образом, то их центры, а также точка касания лежат на одном перпендикуляре, проведённом через точку касания к общей касательной.*

Рассмотрим теперь две касательные к окружности с центром в точке O, проходящие через точку A, лежащую вне окружности. Пусть B и C - точки касания. Отрезки AB и AC назовем *отрезками касательных*, проведёнными из точки A. Из доказанной теоремы 1 вытекает следующее свойство.

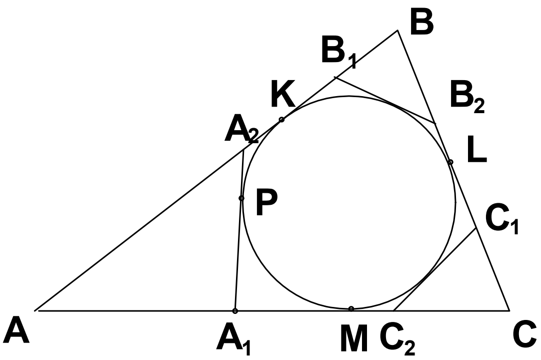
Теорема 2 (свойство отрезков касательных к окружности). Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Доказательство. Пусть AB и AC - отрезки касательных к окружности, проведёные из точки A (см. рис.). Требуется доказать, что $AB=AC$ и $\angle 3=\angle 4$. По теореме 1 (о свойстве касательной к окружности) углы $\angle 1$ и $\angle 2$ - прямые, поэтому треугольники ABO и ACO - прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Из равенства треугольников следует, что $AB=AC$ и $\angle 3=\angle 4$.



Пример 1. В треугольник вписана окружность, точками касания она делится на три дуги. В произвольной точке каждой из дуг проведено по касательной, которые отсекают от данного треугольника три треугольника. Доказать, что сумма периметров этих треугольников равна периметру данного.

Доказательство. Пусть ABC - исходный треугольник, K, L, M - точки касания вписанной окружности с его сторонами. Достаточно доказать, что периметр треугольника AA_1A_2 равен сумме длин отрезков AK и AM (для двух других треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 доказательство аналогично). Действительно, по свойству отрезков касательных, проведённых из точек A_1 и A_2 к окружности, имеем $A_1M=A_1P$, $A_2P=A_2K$. Тогда для периметра ΔAA_1A_2 получаем:



$$P_{AA_1A_2}=AA_1+AA_2+A_1A_2=AA_1+AA_2+(A_1P+A_2P)=AA_1+AA_2+(A_1M+A_2K)=$$

$$=(AA_1+A_1M)+(AA_2+A_2K)=AM+AK.$$

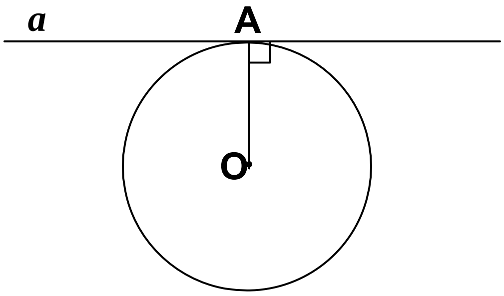
Аналогично, $P_{BB_1B_2}=BK+BL$ и $P_{CC_1C_2}=CL+CM$. Складывая эти равенства, окончательно получаем, что

$$P_{AA_1A_2}+P_{BB_1B_2}+P_{CC_1C_2}=(AK+AM)+(BK+BL)+(CL+CM)=$$
$$=(AK+BK)+(BL+CL)+(AM+CM)=AB+BC+AC,$$

т.е. равна периметру исходного треугольника, что и требовалось доказать.

Теорема 3 *(признак касательной). Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной к данной окружности.*

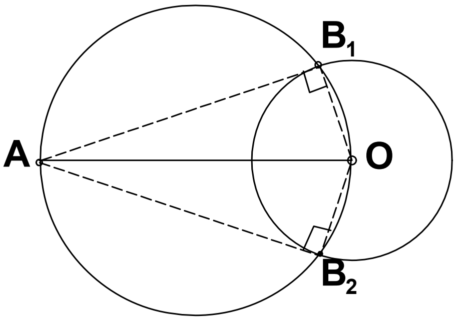
Доказательство. Точка A, как конец радиуса, принадлежит окружности, в то же время эта точка принадлежит и прямой a. Значит, точка A является *общей* у окружности и прямой. Далее, поскольку, по условию, радиус OA является перпендикуляром, проведённым из центра окружности к прямой a, то по лемме 1 все остальные точки прямой a отстоят от центра O дальше, чем на радиус (так как длина наклонной больше длины перпендикуляра). Таким образом, у прямой a и окружности есть только одна общая точка A. Следовательно, прямая a и есть касательная (по определению касательной).



Пример 2. *Из точки, лежащей вне окружности (в плоскости окружности) с помощью циркуля и линейки провести касательную к окружности.*

Решение. Пусть на плоскости даны окружность и точка A вне её. Выполним следующую последовательность действий.

1) Найдём центр O окружности (например, как точку пересечения серединных перпендикуляров к двум произвольным - непараллельным хордам).



2) Соединив точки A и O, построим на отрезке AO как на диаметре новую окружность. Обозначим B_1, B_2 - точки её пересечения с исходной окружностью.

3) Проведём прямые AB_1 и AB_2, это и есть искомые касательные к окружности. Действительно, углы $\angle AB_1O$ и $\angle AB_2O$ - прямые (как вписанные, опирающиеся на диаметр AO). Получили, что прямые AB_1, AB_2 проходят соответственно через концы радиусов OB_1, OB_2 и перпендикулярны им, следовательно, согласно признаку касательной, являются касательными к данной окружности. Задача решена.

Подробнее о задачах на *геометрические построения*, встречающихся периодически на устных экзаменах по математике, можно ознакомиться, например, в [16,20,21,29].

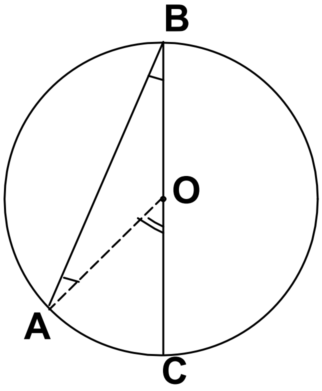
Теорема о вписанном угле

Теорема 1 (свойство вписанного угла). Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Поскольку градусная мера дуги окружности считается равной градусной мере центрального угла, опирающегося на эту дугу, то можно сформулировать условие теоремы и иначе: *«Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается».*

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ - вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу $\cup AC$. Требуется доказать, что $\angle ABC = \frac{\cup AC}{2}$.

Рассмотрим *три возможных случая* расположения луча BO относительно угла $\angle ABC$.



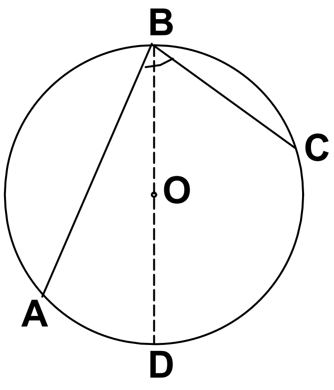
1) Луч BO совпадает с одной из сторон $\angle ABC$, например, со стороной BC. Для доказательства проведём радиус OA и получим равнобедренный треугольник AOB (так как $OA = OB$ как радиусы).

Поскольку углы при основании равнобедренного треугольника равны, то $\angle ABO = \angle BAO$. По отношению к этому треугольнику $\angle AOC$ является внешним, поэтому он равен сумме внутренних углов, не смежных с ним:

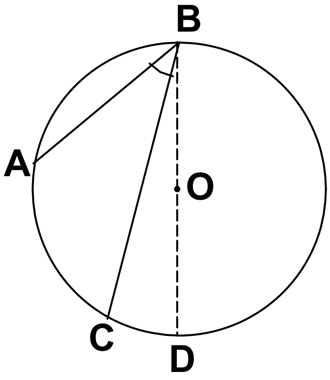
$$\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle ABO.$$

Отсюда $\angle ABO = \angle AOC/2$, т.е. половине центрального угла. Поэтому вписанный угол $\angle ABC = \angle ABO = \cup AC/2$.

2) Луч BO, проходя во внутренней области угла $\angle ABC$, делит его на два угла. Для доказательства проведём диаметр BD, он разделит $\angle ABC$ на два угла, один из которых, по доказанному, измеряется половиной дуги $\cup AD$, а другой – половиной дуги $\cup DC$, т.е. $\angle ABD = \cup AD/2$ и $\angle DBC = \cup DC/2$. Складывая эти равенства почленно, получаем:



$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{\cup AD + \cup DC}{2} = \frac{\cup AC}{2}.$$



3) Луч BO не лежит во внутренней области угла $\angle ABC$ и не содержит ни одну из его сторон. Для доказательства опять проведём диаметр BD. Тогда $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$.

Но $\angle ABD = \dfrac{\cup AD}{2}$ и $\angle CBD = \dfrac{\cup CD}{2}$.

Поэтому $\angle ABC = \dfrac{\cup AD - \cup CD}{2} = \dfrac{\cup AC}{2}$.

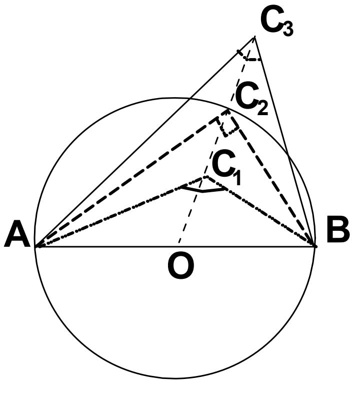
Следствие 1. Все вписаные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.

Следствие 3. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.

Следствие 4 (признак окружности). Если имеются два прямоугольных треугольника ABC_1 и ABC_2, опирающиеся на общую гипотенузу AB, то точки A, B, C_1, C_2 лежат на одной окружности с диаметром AB.

Замечание. Пусть AB - диаметр окружности с центром в точке O. Проведём луч из центра окружности и выберем на нём три точки C_1, C_2, C_3 так, что точка C_1 лежит внутри окружности, точка C_2 расположена в точности на окружности, а точка C_3 - вне окружности. Тогда угол $\angle AC_2B$, по доказанному выше, будет прямым, при этом угол $\angle AC_1B$ будет тупым, а угол $\angle AC_3B$ - острым (это можно доказать, например, с помощью теоремы косинусов или теорем об измерении углов между пересекающимися хордами и секущими – см. следующий пункт).



При этом говорят, что отрезок AB *виден из точек* C_1, C_2, C_3 соответственно *под углами* $\angle AC_1B$, $\angle AC_2B$, $\angle AC_3B$. На этом понятии основано известное характеристическое свойство окружности, лежащее в основе следующего определения: «окружность с диаметром AB - это фигура, состоящая из точек A, B и всех точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом».

Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между секущими к окружности

Прежде чем перейти к доказательству теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами, приведём несколько наиболее известных и часто используемых свойств хорд в окружности. Их можно доказать самостоятельно или найти доказательство, например, в [16,17].

1) Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.

2) Равные хорды окружности находятся на равном расстоянии от её центра. Из двух не равных хорд большая хорда расположена ближе к центру окружности.

3) Равные дуги окружности стягиваются равными хордами.

4) Равным хордам окружности соответствуют равные центральные углы (или: равные хорды видны из центра окружности под равными углами).

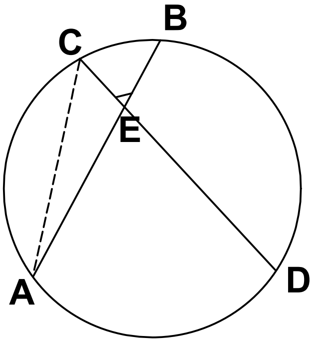
5) Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны между собой.

6) Диаметр окружности есть наибольшая из хорд.

7) Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

8) Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к прямой, проходящей через их центры (линии центров) и делится ею пополам.

Теорема 1 (угол между двумя пересекающимися хордами). Угол между двумя пересекающимися хордами равен полусумме дуг, на которые опирается этот угол и угол, вертикальный к нему.



Доказательство. Пусть AB и CD две пересекающиеся хорды окружности, E - точка их пересечения. Докажем, что угол $\angle AED = \dfrac{\cup BC + \cup AD}{2}$.

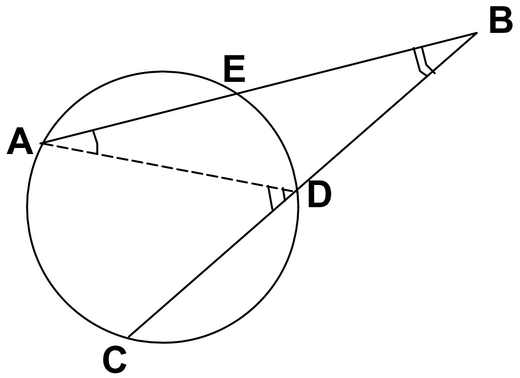
Для доказательства проведём хорду AC. В образовавшемся треугольнике AEC угол $\angle AED$ является внешним. Поэтому, применяя свойство внешнего угла и учитывая, что углы $\angle ACD$ и $\angle CAB$ - вписанные, получим:

$$\angle AED = \angle ACE + \angle CAE = \angle ACD + \angle CAB = \frac{\cup AD}{2} + \frac{\cup BC}{2} = \frac{\cup AD + \cup BC}{2}.$$

Теорема 2 (угол между секущими к окружности). Угол между двумя секущими к окружности равен полуразности дуг, высекаемых этими прямыми на окружности и заключённых между ними.

Доказательство. Пусть BA и BC - две секущие к окружности. Обозначим E и D - вторые точки пересечения этих секущих с окружностью. Требуется доказать, что

$$\angle ABC = \frac{\cup AC - \cup DE}{2}.$$



Для доказательства проведём хорду AD и получим ΔABD, в котором $\angle ABC$ является внутренним, а $\angle ADC$ - внешним. Поэтому $\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD$, откуда с учётом того, что $\angle ADC$ и $\angle EAD$ - вписанные углы, получаем:

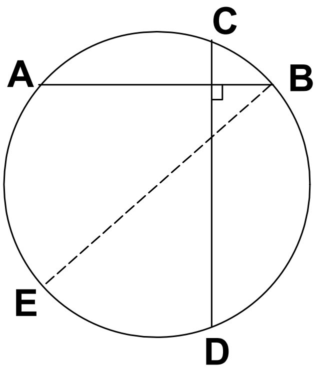
$$\angle ABC = \angle ADC - \angle BAD = \angle ADC - \angle EAD = \frac{\cup AC}{2} - \frac{\cup DE}{2} = \frac{\cup AC - \cup DE}{2}.$$

<u>Следствие</u>. *Угол между двумя касательными равен полуразности большей и меньшей дуг, образованных точками касания.*

<u>Пример 1</u> [ВМК-1999,устн.]. *В окружности радиуса R проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Найти $AC^2 + BD^2$.*

Решение. Проведём вспомогательное построение: отложим от точки D дугу $\cup DE$, равную дуге $\cup AC$. Так как $AB \perp CD$, то, по свойству угла между пересекающимися хордами, имеем:

$$\frac{\cup AC + \cup BD}{2} = 90^0 \Rightarrow \cup AC + \cup BD = 180^0.$$

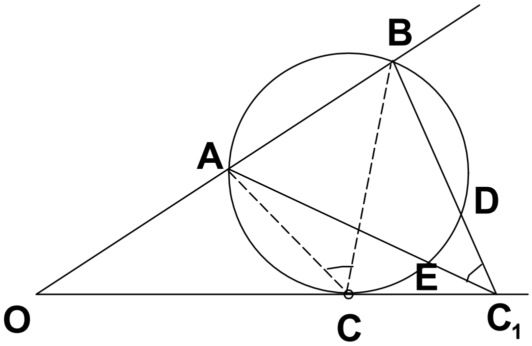


Но дуга $\cup BDE = \cup BD + \cup DE = \cup BD + \cup AC$ и поэтому тоже равна по величине 180^0. Отсюда делаем вывод, что BE - диаметр окружности и, значит, треугольник BDE - прямоугольный. По теореме Пифагора получаем:

$$AC^2 + BD^2 = DE^2 + BD^2 = BE^2 = (2R)^2 = 4R^2.$$

<u>Пример 2</u> [ВМК-1999,устн.] *На одной из сторон острого угла с вершиной O заданы две точки A и B такие, что $OA = 1$, $OB = 2$. Где на другой стороне этого угла надо поместить точку C, чтобы угол ACB был наибольшим?*

Решение. Проведём через точки A и B окружность, касающуюся второй стороны угла (C - точка касания). Докажем, что эта точка и будет искомой. Действительно, для любой другой точки C_1 имеем:



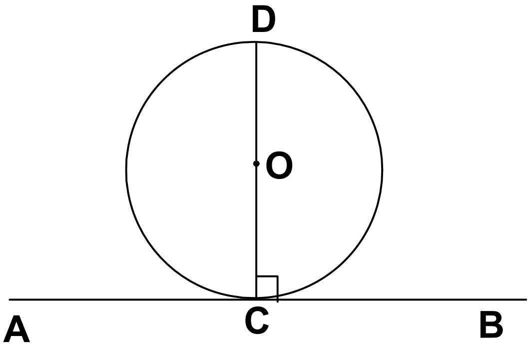
$$\angle AC_1B = \frac{\cup AB - \cup DE}{2} < \frac{\cup AB}{2} = \angle ACB\,.$$

Ответ: точку C следует разместить в точке касания окружности с другой стороной угла.

Теорема об угле, образованном касательной и хордой

<u>Теорема</u> (угол между касательной и хордой). Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной заключённой внутри него дуги.

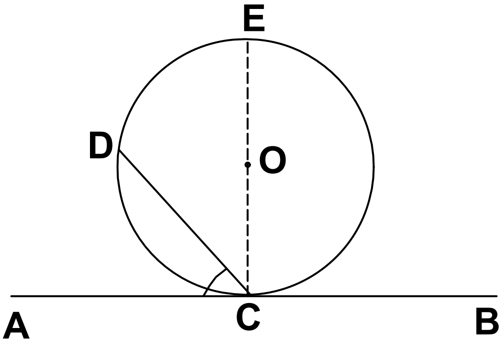
Доказательство. Пусть $\angle ACD$ образован касательной AB и хордой CD. Рассмотрим три возможных случая.



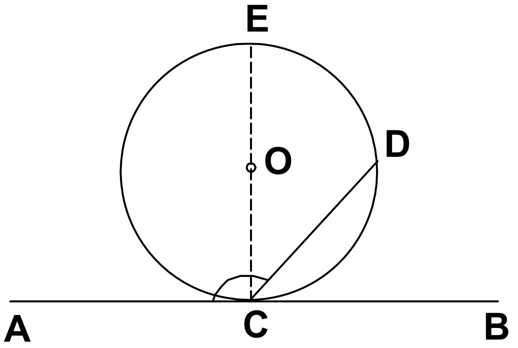
1) Пусть хорда CD проходит через центр O окружности. В этом случае хорда CD есть диаметр окружности и $\angle ACD$=90°. С другой стороны, половина дуги $\cup CD$ также равна 90° (так как дуга $\cup CD$, составляя полуокружность, содержит 180°). Следовательно, в рассматриваемом случае теорема верна.

2) Пусть теперь хорда CD не проходит через центр O окружности и угол $\angle ACD$ - острый. Проведём диаметр CE, и тогда

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE = \frac{\cup CDE}{2} - \frac{\cup DE}{2} = \frac{\cup CD}{2}\,.$$



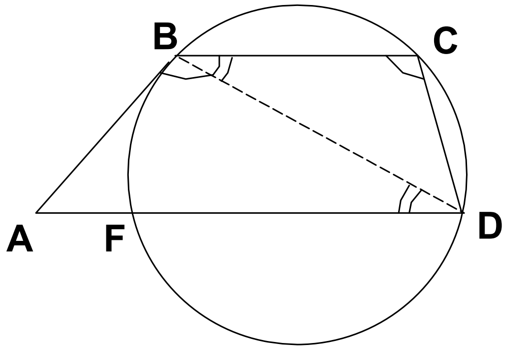
3) Пусть, наконец, угол $\angle ACD$, образованный касательной AB и хордой CD - тупой.



Тогда $\angle ACD = \angle ACE + \angle DCE =$ $= \frac{\cup CE}{2} + \frac{\cup DE}{2} = \frac{\cup CED}{2}$.

Теорема доказана.

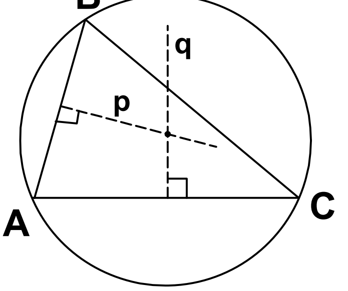
Пример. Окружность проходит через вершины B, C и D трапеции $ABCD$ и касается стороны AB в точке B. Найти длину диагонали BD, если длины оснований трапеции $AD = a$ и $BC = b$.



Решение. По свойству угла между касательной BA и хордой BD: $\angle ABD = \frac{\cup BFD}{2}$. С другой стороны, по свойству вписанного угла: $\angle BCD = \frac{\cup BFD}{2}$. Таким образом, $\angle ABD = \angle BCD$. Далее, так как $BC \parallel AD$, то $\angle CBD = \angle ADB$. Следовательно, треугольники ABD и DCB подобны, а поэтому имеет место пропорция $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{a}{BD} = \frac{BD}{b}$, откуда окончательно находим $BD = \sqrt{ab}$.

Теорема об окружности, описанной около треугольника

Теорема. Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну. При этом центр окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



Доказательство. Вершины A, B и C всякого треугольника образуют три точки, не лежащие на одной прямой. Чтобы через них можно было провести окружность, достаточно доказать, что существует, и притом единственная, такая четвёртая точка O, которая одинаково удалена от точек A, B и C. Тогда эта точка будет центром окружности, а отрезки OA, OB и OC - её радиусами. Проведём к сторонам AB и AC серединные перпендикуляры, обозначив их соответственно p и q. По свойству серединного перпендикуляра к отрезку, всякая точка, лежащая на нём, одинаково удалена от концов отрезка и наоборот. Точка O, с одной стороны, должна лежать на серединном перпендикуляре к AB, т.е. на p, а с другой стороны, она должна лежать на серединном перпендикуляре к AC, т.е. на q. Чтобы точка O была равноудалена от всех трёх точек сразу, необходимо и достаточно, чтобы она лежала на обоих перпендикулярах одновременно, т.е. совпадала с точкой пересечения p и q (прямые p и q обязательно пересекутся, так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и AC). Итак, найдена точка O, равноудалённая от A, B и C, которая является центром окружности, описанной около треугольника (существование такой точки доказано).

Единственность точки O следует из того, что две непараллельные несовпадающие прямые могут пересечься только в одной точке. Таким образом, как центр, так и радиус окружности определены однозначно, следовательно, искомая окружность – единственная.

Следствие. Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Это верно, так как точка O, находясь на одинаковом расстоянии от точек A и C, должна лежать на серединном перпендикуляре r, проведённом к стороне AC.

Замечание 1. Если бы три точки A, B и C лежали на одной прямой, то перпендикуляры p и q были бы параллельны и, следовательно, не могли бы пересечься. Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность.

Замечание 2. Рассмотрим три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Соединив эти точки отрезками, получим треугольник, около которого, согласно доказанной теореме, можно описать окружность, и притом только одну. Таким образом, приходим к следующему выводу: *через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит окружность, и притом только одна*.

Замечание 3. Если треугольник остроугольный, то центр описанной окружности лежит строго внутри треугольника. Если треугольник тупоугольный, то центр лежит вне его, а если он прямоугольный, то на середине гипотенузы (доказательство можно найти, например, в [2]).

Замечание 4. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы, причём центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы.

Пример [ВМК-1999,устн.] *Найти круг наименьшего радиуса, содержащий три данные точки плоскости.*

Решение. Эта задача относится к таким задачам, где возможны несколько вариантов решения. Пусть на плоскости даны три точки A, B и C. Рассмотрим все случаи различного взаимного расположения точек между собой (подумайте, как обосновать приведённые решения).

1) *Все три точки совпадают:* $A = B = C$. В этом случае круга наименьшего радиуса, содержащего данную «тройную точку», не существует, так как не существует наименьшего положительного радиуса (действительного числа).

2) *Две точки совпадают (* $A = B$ *), а третья* C *отлична от них*. Искомым кругом в данном случае будет круг, построенный на отрезке AC как на диаметре.

3) *Три точки различны и лежат на одной прямой*. Тогда искомый круг – это круг, построенный на максимальном из отрезков AB, AC, BC как на диаметре.

4) *все три точки различны и образуют (если их рассматривать как вершины) остроугольный или прямоугольный треугольник*. В этом случае искомым является круг, описанный возле этого треугольника.

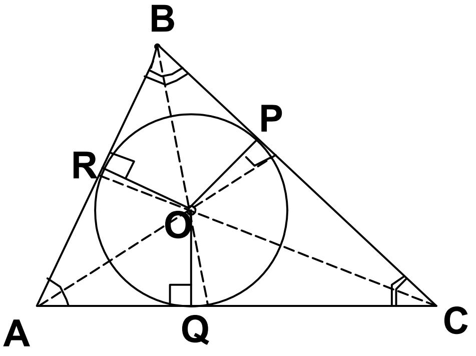
5) *все три точки различны и образуют тупоугольный треугольник*. В этом случае искомым является круг, построенный на максимальной стороне треугольника как на диаметре.

Теорема об окружности, вписанной в треугольник

Если все стороны треугольника касаются окружности, то говорят, что этот треугольник *описан около окружности*, или что *окружность вписана в него*.

Теорема. *Во всякий треугольник можно вписать, и притом единственную, окружность, при этом центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника.*

Доказательство. Для доказательства *существования* вписанной в треугольник ABC окружности достаточно, по определению, доказать, что существует окружность, касающаяся всех сторон треугольника. А это означает, что её центр (точка O) должен быть равноудалён от всех сторон треугольника.



Для доказательства проведём биссектрису угла $\angle A$ в ΔABC. Точки, лежащие на ней, равноудалены от двух сторон AB и AC. Аналогично, проведём биссектрису угла $\angle B$ в ΔABC. Точки, лежащие на ней, равноудалены от сторон AB и BC. Следовательно, для того чтобы точка была одинаково удалена от всех трёх сторон треугольника сразу, необходимо и достаточно, чтобы она лежала одновременно на обеих биссектрисах, т.е. совпадала с точкой их пересечения (доказательство того, что две биссектрисы произвольного треугольника пересекаются, приведено в [2]). Таким образом, нашли точку O, являющуюся центром вписанной окружности. Радиусом окружности будет в данном случае каждый из отрезков OR, OP и OQ перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны треугольника, а точки R, P и Q будут тремя точками касания окружности сторон треугольника (стороны перпендикулярны радиусам в точках касания).

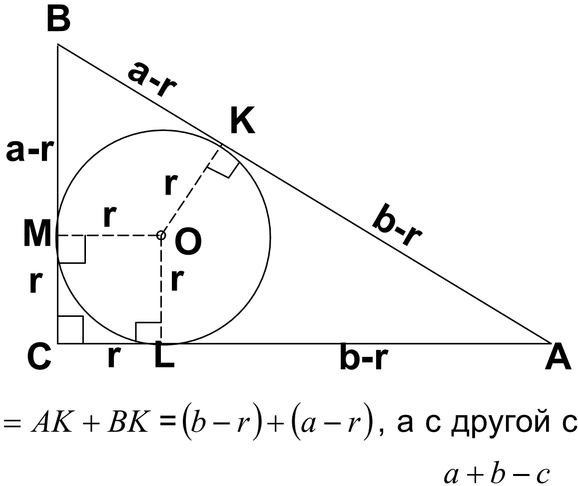
Единственность такой окружности следует из того, что две биссектрисы пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.

Следствие. *Биссектрисы трёх углов треугольника пересекаются в одной точке*. Это действительно так, поскольку точка O, находясь на одинаковом расстоянии от сторон AC и BC, должна лежать и на биссектрисе угла $\angle C$.

Пример. *Доказать, что в прямоугольном треугольнике с катетами a,b и гипотенузой c справедливы следующие свойства:*

1) радиус вписанной окружности вычисляется по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$;

2) сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей $a+b=2(r+R)$.



Доказательство. 1) Опустим из центра O вписанной в треугольник ABC окружности перпендикуляры на стороны треугольника. Это будут три точки касания M,K,L. В квадрате $OLCM$ имеем: $CM = CL = r$, следовательно, $BM = BK = a-r$ и $AL = AK = b-r$. Получили, что, с одной стороны, гипотенуза $AB = AK + BK = (b-r)+(a-r)$, а с другой стороны, она равна c. Приравнивая эти выражения, находим, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

2) Заменяя в доказанной выше формуле c на $2R$, после простейших преобразований получаем, что $a+b=2(r+R)$.

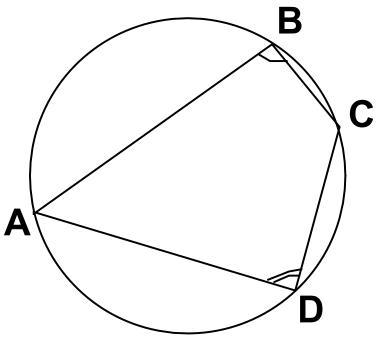
Приведём ещё одну теорему, касающуюся свойств окружностей, вписанной и описанной вокруг произвольного треугольника (её доказательство можно найти, например, в [21,27]).

Теорема. Расстояние между центрами окружностей, вписанной и описанной вокруг треугольника, зависит только от радиусов этих окружностей и определяется по формуле $d=\sqrt{R\cdot(R-2r)}$ *(Эйлера), где* R *и* r *- соответственно радиусы описанной и вписанной в треугольник окружностей,* d *- искомое расстояние между их центрами.*

Замечание. Помимо вписанной и описанной окружностей в планиметрии существует понятие *вневписанной окружности*, т.е. окружности, которая касается одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон (см., например, [17]). У произвольного треугольника, таким образом, существует три вневписанных окружности. *Центр* вневписанной окружности треугольника – это точка пересечения проходящих через вершины треугольника трёх прямых, на двух из которых лежат биссектрисы внешних углов, а на третьей – биссектриса внутреннего угла треугольника.

Свойства четырёхугольника, вписанного в окружность

Теорема 1. В выпуклом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма величин противоположных углов равна 180°.



Доказательство. Пусть вокруг выпуклого четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Требуется доказать, что

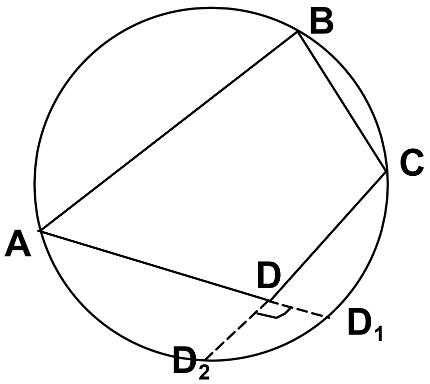
$$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°.$$

Так как сумма величин всех внутренних углов любого выпуклого четырёхугольника равна 360°, то достаточно доказать только одно из этих равенств. Докажем, например, что $\angle B+\angle D=180°$. Поскольку $\angle B=\frac{\cup ADC}{2}$, $\angle D=\frac{\cup ABC}{2}$ (как вписанные углы), то их сумма $\angle B+\angle D=\frac{\cup ADC}{2}+\frac{\cup ABC}{2}=\frac{360^0}{2}=180^0$. Верна также обратная теорема.

Теорема 2. Если в выпуклом четырёхугольнике сумма величин противоположных углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

Доказательство. Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ сумма величин противоположных углов $\angle B+\angle D$ равна 180° (следовательно, и $\angle A+\angle C=180°$). Докажем, что около такого четырёхугольника можно описать окружность.

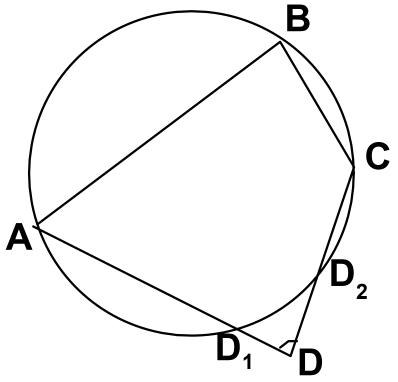
Для доказательства через какие-либо три его вершины, например, через A, B и C, проведём окружность. Покажем, что тогда и четвёртая вершина D должна находиться на этой окружности.



Действительно, от противного, пусть вершина угла D лежит *внутри* окружности. Продлим отрезки AD и CD за точку D до образования двух пересекающихся хорд AD_1 и CD_2. По соответствующей теореме величина угла $\angle ADC$ между этими хордами измеряется полусуммой угловых величин дуг $\cup ABC$ и $\cup D_1DD_2$, что, очевидно, больше половины меры дуги $\cup ABC$:

$$\angle ADC = \frac{\cup ABC + \cup D_1DD_2}{2} > \frac{\cup ABC}{2} = \angle AD_1C .$$

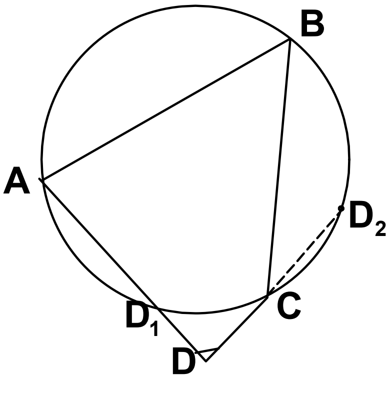
Но тогда $\angle ABC + \angle ADC > \angle ABC + \angle AD_1C = 180°$, что противоречит условию теоремы.



Пусть теперь вершина угла D лежит вне окружности. Тогда по теореме об угле между секущими AD и CD величина угла $\angle ADC$ между этими секущими измеряется полуразностью угловых величин дуг $\cup ABC$ и $\cup D_1DD_2$, что меньше половины меры дуги $\cup ABC$:

$$\angle ADC = \frac{\cup ABC - \cup D_1DD_2}{2} <$$

$$< \frac{\cup ABC}{2} = \angle AD_1C .$$ Но тогда $\angle ABC + \angle ADC < \angle ABC + \angle AD_1C = 180°$, что также противоречит условию теоремы.



Заметим, что возможны и другие случаи расположения точек на окружности (см. рис.), но доказательство в них полностью аналогично рассмотренному.

Значит, четвёртая вершина D лежит на окружности, проходящей через точки A, B и C, и около четырёхугольника можно описать окружность, что и требовалось доказать.

<u>Следствие 1</u>. Около любого прямоугольника можно описать окружность.

Следствие 2. Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда параллелограмм является прямоугольником.

Следствие 3. Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она является равнобедренной.

Объединяя результаты этих теорем, можно сформулировать необходимое и достаточное условие того, что около четырёхугольника можно описать окружность.

Теорема. Вокруг выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы величин его противоположных углов равны 180°.

Замечание 1. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что около выпуклого четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда существует общая точка у всех серединных перпендикуляров, проведённых к сторонам четырёхугольника. Если все эти серединные перпендикуляры различны, то они пересекаются в одной точке. Однако некоторые из них могут лежать на одной прямой, например, в случае прямоугольника или равнобедренной трапеции.

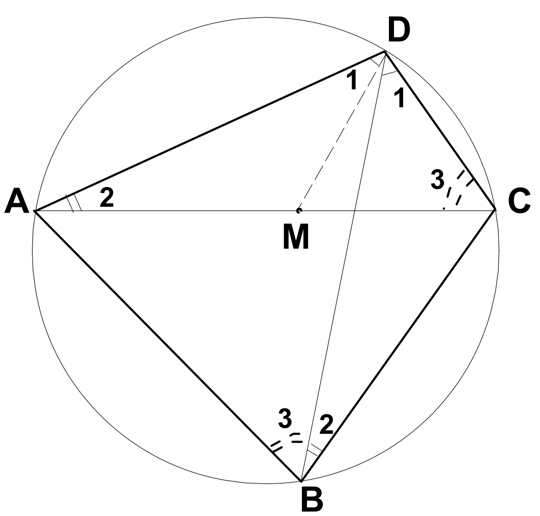
Замечание 2. Площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c, d, вписанного в окружность, вычисляется по формуле

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ - полупериметр четырёхугольника (доказательство приводится ниже в пункте, посвящённом вычислению площади произвольного выпуклого четырёхугольника).

Существуют и другие *признаки* того, что выпуклый четырёхугольник можно *вписать в окружность*, например, такой: если в четырёхугольнике $ABCD$ равны углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$, то такой четырёхугольник можно вписать в окружность [16].

Приведём, наконец, ещё одну весьма полезную в геометрии теорему, касающуюся свойств вписанных четырёхугольников, но выходящую, вообще говоря, за рамки стандартной школьной программы.



Теорема (Птолемея). Произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.

Доказательство. Пусть выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Требуется доказать, что

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$

Для доказательства проведём отрезок DM так, чтобы $\angle ADM$ оказался равен $\angle CDB$. Кроме того, $\angle DAC = \angle DBC$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу $\cup DC$). Поэтому имеем пару подобных (по двум углам $\angle 1$ и $\angle 2$) треугольников $ADM \backsim BDC$.

Отсюда справедлива пропорция $\dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$, следовательно,

$$AM \cdot BD = AD \cdot BC. \qquad (1)$$

Аналогично, так как $\angle MDC = \angle ADB$ (каждый из них включает угол $\angle 1$ и общий угол $\angle MDB$) и $\angle MCD = \angle ABD$, то по двум углам будут подобны треугольники $\Delta MDC \backsim \Delta ADB$, и поэтому справедлива пропорция $\dfrac{MC}{AB} = \dfrac{DC}{DB} \Rightarrow$

$$MC \cdot BD = AB \cdot DC. \qquad (2)$$

Складывая почленно равенства (1) и (2), получаем

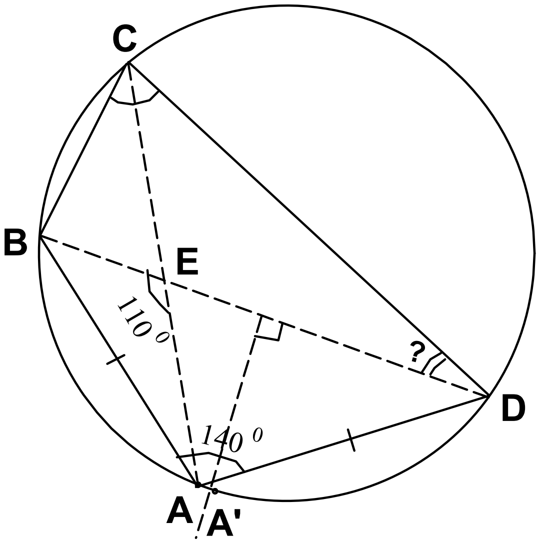
$$BD \cdot (AM + MC) = AD \cdot BC + AB \cdot CD \text{, или } AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

На самом деле утверждение последней теоремы можно усилить (см. доказательство, например, в [21]): около четырёхугольника можно описать окружность *тогда и только тогда*, когда произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Замечание 3. В произвольном выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ справедливо *неравенство Птолемея* $AC \cdot BD \le AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (без доказательства).

Пример [Мехмат-1999,март]. *Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA - биссектриса угла C, $\angle BAD = 140^0$, $\angle BEA = 110^0$. Найти $\angle CDB$.*

Решение. 1) Проведём окружность через точки B, C и D. Середина дуги BD - точка A' - лежит на биссектрисе угла C и на серединном перпендикуляре к хорде BD. С другой стороны, точка A, по условию, тоже лежит на биссектрисе CA угла C и на серединном перпендикуляре к хорде BD. Следовательно, $A = A'$, т.е. четырёхугольник $ABCD$ *вписан в окружность*.



2) Заметим, что $\angle CED = \angle BEA = 110^0$, а

$$\angle ECD = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}\left(180^0 - \angle BAD\right) = = 20^0.$$

Тогда из треугольника CED определяем:

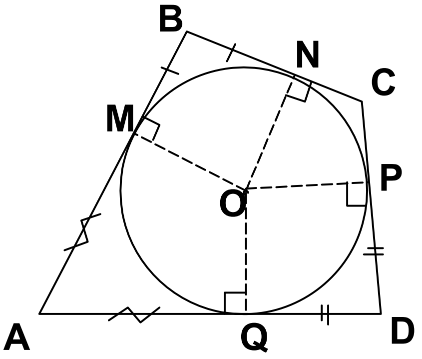
$$\angle CDB = 180^0 - \angle CED - \angle ECD =$$
$$= 180^0 - 110^0 - 20^0 = 50^0.$$

Ответ: $\angle CDB = 50^0$.

Свойство четырёхугольника, описанного около окружности

<u>Теорема 1</u>. В любом описанном четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны.

Доказательство. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около некоторой окружности, т.е. его стороны касаются этой окружности. Требуется доказать, что $AB+CD=BC+AD$.



Обозначим точки касания через M,N,P и Q. Так как отрезки касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны, то равны между собой отрезки $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$ и $DP=DQ$. Следовательно,

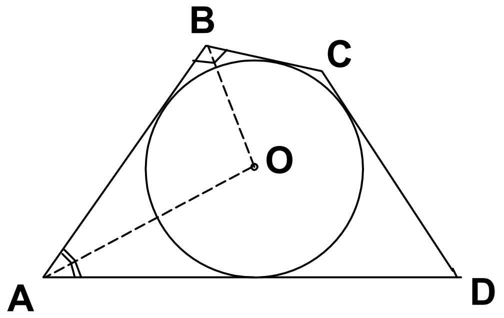
$$AM+MB+CP+PD=$$
$$=AQ+QD+BN+NC,$$

т.е. $AB+CD=BC+AD$.

Теорема доказана. Верна и обратная теорема.

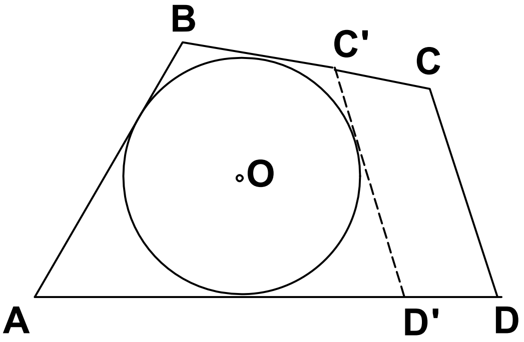
<u>Теорема 2</u>. Если суммы длин противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть $ABCD$ - такой выпуклый четырёхугольник, в котором $AB+CD=BC+AD$. Пусть O - точка пересечения биссектрис углов $\angle A$ и $\angle B$. По свойству биссектрис она равноудалена от сторон AB, AD и BC, и, следовательно, можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трёх сторон. Докажем, что эта окружность касается также четвёртой стороны CD и, значит, является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.



Проведём доказательство методом «от противного». Допустим, это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является её секущей.

1) Рассмотрим первый случай, когда прямая CD не имеет общих точек с окружностью. Проведём касательную $C'D'$, параллельную стороне CD. Тогда $ABC'D'$ - описанный четырёхугольник и по теоре-



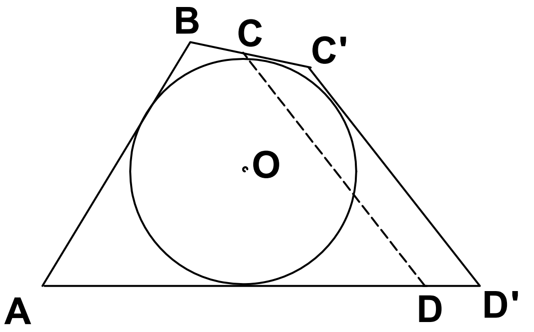
ме 1 $AB + C'D' = \, = BC' + AD'$. Из этого равенства, учитывая, что $BC' = BC - C'C$ и $AD' = AD - D'D$, получим $AB + C'D' = (BC - C'C) + (AD - D'D)$, или $C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB$.

Правая часть этого равенства по условию равна CD. Таким образом, приходим к равенству $C'D' + C'C + D'D = CD$, означающему, что в четырёхугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон. Этого не может быть. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение об отсутствии общих точек неверно.

2) Рассмотрим второй возможный случай, когда прямая CD является секущей к окружности. Проведём $C'D' \parallel CD$ и $C'D'$ - касательная к окружности. Тогда, по доказанному в теореме 1, $AB + C'D' = BC' + AD'$. Из этого равенства, учитывая, что $BC' = BC + CC'$ и $AD' = AD + DD'$, получим

$$AB + C'D' = (BC + CC') + (AD + DD'),$$

или $C'D' = (BC + AD - AB) + CC' + DD'$. Так как $BC + AD - AB = CD$, то $C'D' = CD + CC' + DD'$, т.е. в четырёхугольнике $CDD'C'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон, что невозможно. Полученные противоречия говорят о том, что окружность может только касаться четвёртой стороны CD, т.е. окружность вписана в четырёхугольник $ABCD$.



<u>Следствие 1</u>. Параллелограмм, в который можно вписать окружность, является ромбом.

<u>Следствие 2</u>. Параллелограмм, в который можно вписать окружность и около которого можно описать окружность, является квадратом.

Объединяя результаты этих теорем, можно сформулировать необходимое и достаточное условие того, что в четырёхугольник можно вписать окружность.

<u>Теорема</u>. Для того чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон у этого четырёхугольника были равны.

<u>Замечание 1</u>. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что в выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда существует общая точка биссектрис всех внутренних углов четырёхугольника.

Если все прямые, содержащие биссектрисы этих углов, различны, то биссектрисы пересекаются в одной точке. Однако возможны ситуации, когда какая-либо из диагоналей четырёхугольника делит на два равных угла каждый из его внутренних углов, вершины которых она соединяет. Тогда биссектрисы этих углов совпадают (пример – квадрат).

Замечание 2. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что если выпуклый четырёхугольник имеет ось симметрии, то либо около него можно описать окружность, либо в него можно вписать окружность.

Замечание 3. Площадь четырёхугольника со сторонами a,b,c,d, описанного около окружности, вычисляется по формуле

$$S = pr,$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ - полупериметр четырёхугольника. Заметим, что аналогичная формула площади верна для любого выпуклого n-угольника, в который можно вписать окружность (тогда p - полупериметр этого n-угольника).

Замечание 4. Площадь четырёхугольника со сторонами a,b,c,d, вписанного в окружность, и около которого можно описать окружность, вычисляется по формуле

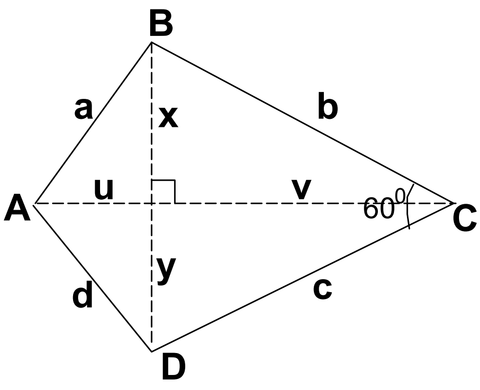
$$S = \sqrt{abcd}$$

(доказательство приводится ниже в пункте, посвящённом вычислению площади произвольного выпуклого четырёхугольника).

Замечание 5. Можно показать (см. [27] или докажите самостоятельно), что в равнобедренную трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда боковая сторона равна средней линии трапеции.

Пример [ВМК-2004,устн.] *Диагонали описанного около окружности четырёхугольника равны единице и взаимно перпендикулярны. Один из углов четырёхугольника равен* 60^0. *Найти стороны четырёхугольника.*

Решение. Пусть O - точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Обозначим отрезки $AO = u$, $CO = v$, $BO = x$, $DO = y$ и стороны $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. По теореме Пифагора получаем:



$a^2 = x^2 + u^2$, $b^2 = x^2 + v^2$, откуда, вычитая, находим $a^2 - b^2 = u^2 - v^2$. (1)

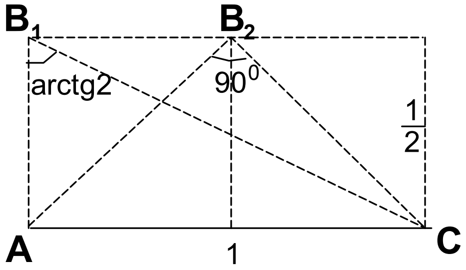
Аналогично, так как $d^2 = u^2 + y^2$, $c^2 = v^2 + y^2$, то, вычитая эти равенства, находим $d^2 - c^2 = u^2 - v^2$. (2)

Из (1) и (2) получаем, что $a^2 - b^2 = d^2 - c^2$, или $(a+b)(a-b) = (d+c)(d-c)$. (3)

Поскольку четырёхугольник описан около окружности, то $a + c = b + d$, т.е.

$$a - b = d - c. \quad (4)$$

Заметим, что если $a-b\neq 0$ (случай $a=b$ рассмотрите самостоятельно), то из (3) тогда получаем, что $a+b=d+c$. Складывая последнее равенство с (4), отсюда находим, что $a=d$, а, следовательно, $b=c$ (такой четырёхугольник называется *дельтоид*). Отсюда следует, что $x=y=1/2$.



Покажем, что только угол $\angle BCD$ (или $\angle BAD$ – симметричный случай) может в такой ситуации быть равен 60^0. Для этого оценим диапазон возможных значений угла $\angle ABC$. При фиксированных положениях вершин A и C данного четырёхугольника вершина B (см. рис.) может занимать какое-либо положение в пределах от B_1 до B_2. Если бы вершина B находилась в положении B_1 (крайнее положение – четырёхугольник превращается в треугольник), то угол $\angle ABC$ принимал бы своё наименьшее значение, равное $arctg2$; если B – в положении B_2, то угол $\angle ABC$ максимален и равен 90^0. В силу оценок $60^0 < arctg2 < \angle ABC \leq 90^0$ заключаем, что $\angle ABC$ (и равный ему угол $\angle ADC$) не может быть равен 60^0. Итак, $\angle BCD = 60^0$, и тогда из треугольника OCD находим $c=\frac{y}{\sin 30^0}=1=b \;\Rightarrow\; OC=\sqrt{c^2-y^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, из прямоугольного треугольника AOB получаем:

$$a^2=x^2+u^2=(1/2)^2+\left(1-\sqrt{3}/2\right)^2=2-\sqrt{3},$$

откуда определяем $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}=d$. *Ответ:* $b=c=1$, $a=d=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

3.6. Четыре замечательные точки треугольника. Теоремы о пересечении медиан и высот треугольника

У всякого треугольника существуют так называемые *четыре замечательные точки*:

- центр вписанной окружности (точка пересечения биссектрис, инцентр),

- центр описанной окружности (точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам),

- центроид (точка пересечения медиан),

- ортоцентр (точка пересечения прямых, содержащих высоты).

Центроид имеет физический смысл как центр тяжести (масс) треугольника, при этом безразлично, распределена ли вся масса треугольника поровну в его вершинах или она распределена равномерно по всей плоской треугольной пластине. Центроид треугольника является точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника принимает наименьшее значение. Ортоцентр треугольника обычно обозначают буквой H, инцентр – буквой I, центр масс – буквой M (или G – от англ. gravty – сила тяжести), центр описанной окружности – буквой O. Подробнее об этих точках можно почитать, например, в [27].

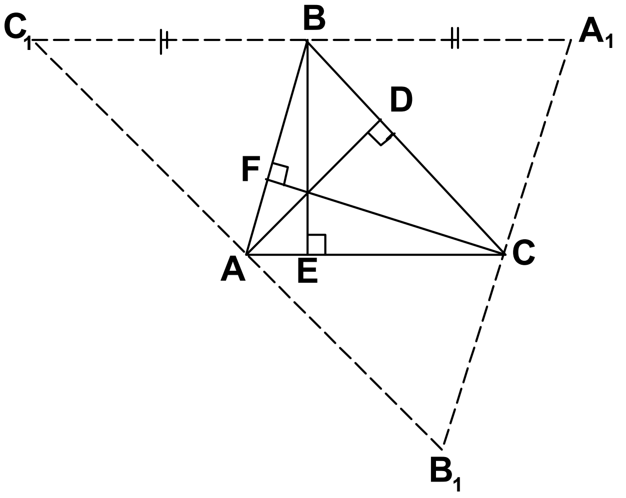
В равностороннем треугольнике роль каждой из четырёх замечательных точек играет одна и та же точка. Эта точка *называется центром равностороннего треугольника*.

Выше уже было доказано, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке (центр вписанной окружности); а также, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (центр описанной окружности).

Докажем ещё две важные теоремы, касающиеся точки пересечения высот треугольника и точки пересечения медиан треугольника.

<u>Теорема 1</u> (теорема о высотах). Высоты треугольника (или содержащие их прямые) пересекаются в одной точке.

Доказательство. Проведём через все три вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам (до образования вспомогательного треугольника $A_1B_1C_1$). При этом высоты ΔABC перпендикулярны сторонам $\Delta A_1B_1C_1$ (так как если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой). Кроме того, так как $C_1B = AC = BA_1$ (как противоположные стороны параллелограммов AC_1BC и ABA_1C), то B - середина стороны A_1C_1. Аналогично убеждаемся в том, что A и C - соответственно середины B_1C_1 и A_1B_1.



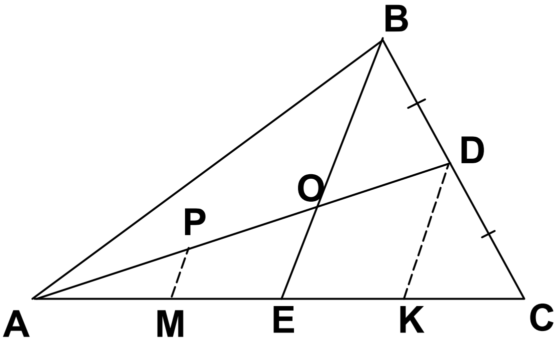
Поэтому высоты AD, BE и CF в ΔABC одновременно являются серединными перпендикулярами к сторонам $\Delta A_1B_1C_1$ и, следовательно, пересекаются в одной точке.

<u>Замечание 1</u>. В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника, в прямоугольном – совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника.

<u>Замечание 2</u>. Треугольник FDE с вершинами в основаниях высот треугольника ABC носит название *ортоцентрического* треугольника. Некоторые из важных свойств таких треугольников можно найти, например, в [27].

Теорема 2 (теорема о медианах). Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пересечения на отрезки, длины которых относятся как 2:1, считая от вершины.

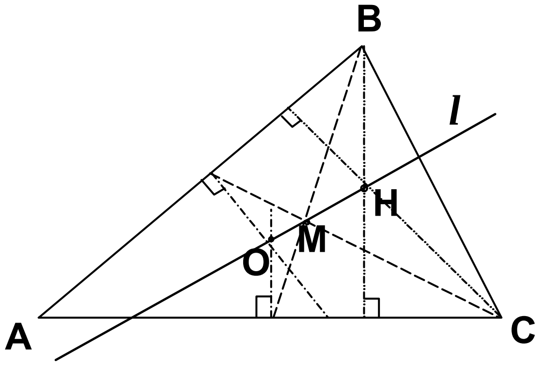
Доказательство. Рассмотрим в ΔABC какие-либо две медианы, например, AD и BE. Пусть O - точка их пересечения, P - середина AO (доказательство того, что любые две медианы треугольника пересекаются, можно найти в [2]). Через точки D и P проведём прямые, параллельные медиане BE. Обозначим через K и M точки пересечения этих прямых с прямой AC. Тогда по теореме Фалеса получим, что $EK = KC$ (поскольку $BD = DC$) и $AM = ME$ (поскольку $AP = PO$) и, так как $AE = EC$, то $AM = ME = EK = KC$. Следовательно, в силу теоремы Фалеса, $AP = PO = OD$, т.е. $AO : OD = 2 : 1$.



Аналогично доказывается, что точка O делит и вторую медиану BE в отношении 2:1, считая от вершины B. Третья медиана не может пересечь две другие в точках, отличных от O, так как тогда на каждой медиане имелись бы две различные точки, делящие её в отношении 2:1, считая от вершины, что невозможно.

Приведём без доказательства теорему, имеющую непосредственное отношение к замечательным точкам треугольника.

Теорема 3 (прямая Эйлера). В произвольном (но не равностороннем) треугольнике точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, причём $HM : OM = 2 : 1$.



На рисунке обозначены:

O - центр описанной окружности, M - центроид, H - ортоцентр, l - прямая Эйлера.

Леонард Эйлер (1707-1783) – математик, физик, механик и астроном. Уроженец Швейцарии. В 1727 г. Прибыл в Россию; работал сначала в качестве адъюнкта (научного сотрудника) Петербургской Академии наук, затем (с 1733 г.) в качестве академика. С 1741 по 1766 г. Эйлер работал в Германии в качестве члена Прусской Академии наук. Затем снова вернулся в Петербург, где и оставался до конца жизни. Эйлер написал свыше 800 работ; во всех областях математики и механики, физики и астрономии он сделал важнейшие открытия. Внёс весомый вклад в математический анализ, вариационное исчисление, ввёл понятие комплексной переменной. Много занимался и прикладными вопросами (в области картографии, навигации, кораблестроения и др.). Деятельность Эйлера во многом содействовала развитию русской науки.

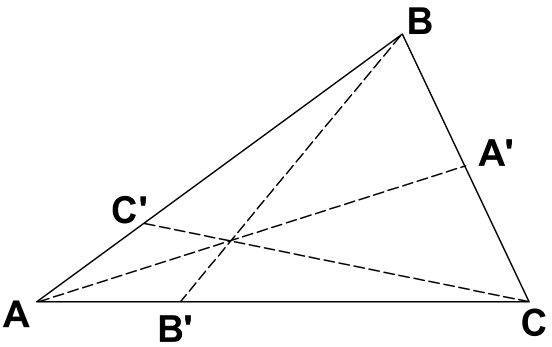
Общие свойства пересечения высот, биссектрис и медиан в одной точке суть следствия следующих теорем. Эти теоремы могут оказаться полезными при решении отдельных видов задач, однако, так как они не входят в программу для поступающих в вузы, то в случае, если вы используете их на вступительном экзамене, их следует предварительно доказать.

Пусть A', B', C' - три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC.

Теорема 4 (Чевы). Если прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке, то выполняется условие

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

(такие прямые называются *прямыми Чевы*, или *чевианами*).



Доказательство. Пусть прямые AA', BB', CC' пересекаются в точке O. Тогда справедливы равенства $\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{AC'O}}{S_{BC'O}}=\frac{S_{AC'C}}{S_{BC'C}}$, или (по свойству производной пропорции) $\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{AC'C}-S_{AC'O}}{S_{BC'C}-S_{BC'O}}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$. Аналогично находим, что $\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$, а $\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$.

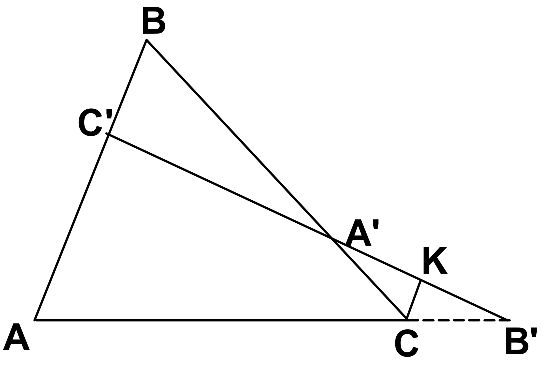
Поэтому $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}\cdot\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=1$, что и требовалось доказать.

Теорема 5 (обратная теорема Чевы). Пусть на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC отмечены соответственно точки A', B', C'. Тогда, если $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$, то прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке (доказательство можно найти, например, в [21]*).*

Джованни ***Чева*** (1648–1734) – итальянский инженер и математик.

Теорема 6 (Менелая). Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отмечены соответственно точки A', C', B', лежащие на одной прямой, то выполняется условие

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$



Менелай *Александрийский* (I в.н.э.) – древнегреческий математик и астроном, автор работ по сферической тригонометрии.

Доказательство. Проведём через точку C прямую, параллельную прямой AB, и обозначим через K точку пересечения этой прямой с прямой $B'C'$ (см. рис.). По-сколько треугольники $AC'B'$ и CKB' подобны, то $\frac{AC'}{CK}=\frac{B'A}{B'C}$ и, значит, $CK=\frac{AC'\cdot B'C}{B'A}$. С другой стороны, так как подобными являются и треугольники $BC'A'$ и CKA', то $\frac{C'B}{CK}=\frac{BA'}{A'C}$ и, следовательно, $CK=\frac{C'B\cdot A'C}{BA'}$. Но в таком случае $\frac{AC'\cdot B'C}{B'A}=\frac{C'B\cdot A'C}{BA'}$, или $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$, что и требовалось доказать.

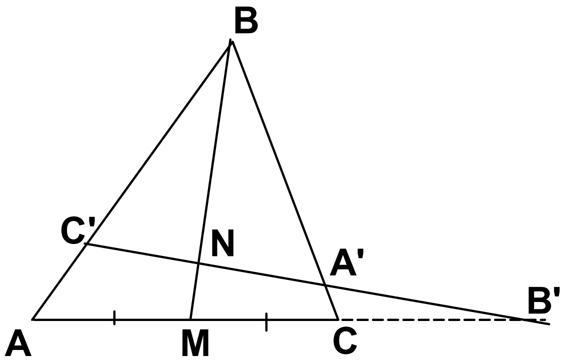
<u>Теорема 7</u> (обратная теорема Менелая). Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C отмечены соответственно точки A', C', B' и при этом выполняется условие

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1,$$

то точки A', C', B' лежат на одной прямой (доказательство см., например, в [21]*).*

Отметим, что в треугольнике существуют и другие, отличные от перечисленных, замечательные точки. Например, *точкой Ферма* (Торричелли, Брокара) называется такая точка треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной [29].

<u>Пример</u>. Пусть точки C' и A' на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно выбраны так, что $AC' : C'B = 2 : 5$ и $BA' : A'C = 6 : 1$. Отрезок $C'A'$ пересекает медиану BM треугольника в точке N. Найти отношение $BN : NM$.



Решение. Заметим, что так как $\frac{AC'}{C'B}\neq\frac{CA'}{A'B}$, то прямая $C'A'$ не параллельна прямой AC. Обозначим тогда точку пересечения прямой $C'A'$ с продолжением стороны AC за точку C через B'. Тогда по теореме Менелая имеем $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$, или $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{1}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$, откуда $\frac{CB'}{B'A}=\frac{5}{12}$, или $\frac{CB'}{2MC+CB'}=\frac{5}{12}$. Отсюда находим, что $CB'=\frac{10}{7}MC$. Но в таком случае $B'M=CB'+MC=\frac{17}{7}MC$, $B'A=CB'+2MC=\frac{24}{7}MC$. Применяя теперь теорему Менелая к треугольнику ABM и прямой $C'B'$, имеем равенство: $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BN}{NM}\cdot\frac{MB'}{B'A}=1$, или $\frac{2}{5}\cdot\frac{BN}{NM}\cdot\frac{\frac{17}{7}MC}{\frac{24}{7}MC}=1$, откуда следует, что $\frac{BN}{NM}=\frac{60}{17}$.

Ответ: $BN : NM = 60 : 17$.

3.7. Преобразования фигур. Свойства преобразования подобия. Признаки подобия треугольников

Множество, элементами которого являются числа, называется *числовым множеством*. Аналогично, множество, элементами которого являются точки, называется *точечным множеством*. Примерами точечных множеств являются точка, отрезок, прямая, треугольник, куб, шар, плоскость, всё пространство.

Пусть F и F' – различные точечные множества (фигуры). Говорят, что между множествами F и F' установлено *соответствие* f, если каждой точке A множества F сопоставляется некоторая точка A' множества F'. При этом пишут $A'=f(A)$. Точка A' называется *образом* точки A, а точка A называется *прообразом* точки A'.

Соответствие f между множествами F и F', при котором каждая точка множества F имеет единственный образ в F' и каждая точка множества F' имеет единственный прообраз в F, называется *взаимно однозначным* (или *биективным*) отображением множества F на множество F' [28]. Взаимно однозначное отображение множества на себя называется *преобразованием* этого множества. В дальнейшем вместо термина «множество» будем использовать термин «фигура».

Будем понимать в данном пункте под *преобразованием фигуры* F в фигуру F' взаимно однозначное отображение фигуры F на фигуру F'. Рассмотрим *основные виды преобразований* на плоскости геометрических фигур [1,16,21,27,28]. К ним относятся: движение, гомотетия, подобие.

Движение и его виды

Преобразование f одной геометрической фигуры F в другую фигуру F' называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, т.е. для любых двух точек A и B первой фигуры

$$AB=A'B',$$

где $A'=f(A)$, $B'=f(B)$. При движении всякая фигура переходит в равную ей фигуру.

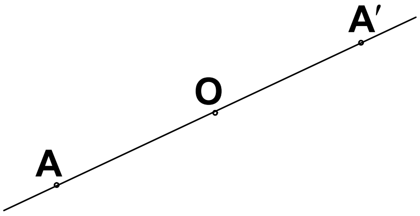
В [29] «*движение плоскости* – взаимно однозначное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками. Две фигуры называются *равными* (или *конгруэнтными*), если существует движение плоскости, переводящее одну из них в другую».

Примерами движений являются также симметрии относительно точки или прямой, параллельный перенос, поворот (на заданный угол в заданном направлении вокруг заданной точки).

Есть и другие виды движений, например, *скользящая симметрия* – это композиция (последовательное применение) симметрии относительно прямой и параллельного переноса в направлении, параллельном этой прямой [27].

В своё время вопрос о существовании различных видов движений плоскости был решён французским математиком и механиком Мишелем *Шалем* (1793–1880). Он доказал, что любое движение плоскости, сохраняющее ориентацию треугольника (*движение 1-го рода*), есть либо параллельный перенос, либо поворот, либо их композиция. Любое движение плоскости, изменяющее ориентацию треугольника (*движение 2-го рода*), является осевой или скользящей симметрией, или их композицией [28]. Доказывается (например, в [27]), что всякое движение можно представить в виде композиции двух или трёх осевых симметрий.

А) Симметрия относительно точки.

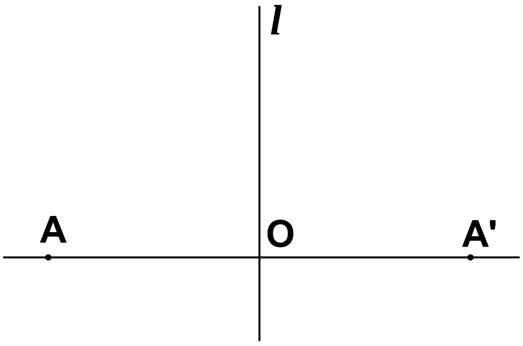


Пусть O - фиксированная точка и A - произвольная точка плоскости. Отложим на продолжении отрезка OA за точку O отрезок OA', равный OA. Точка A' называется *симметричной* точке A *относительно точки* O. Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Очевидно, что точка, симметричная точке A', есть точка A.

Преобразование плоскости называется *центральной симметрией* с центром в данной точке, если каждой точке A плоскости ставится в соответствие точка A', симметричная ей относительно данного центра. Две фигуры F и F' называются *симметричными относительно точки* O, если одну из них можно перевести в другую с помощью симметрии относительно этой точки.

Если симметрия относительно точки O переводит фигуру F в себя, то фигура называется *центрально-симметричной*, а точка O называется *центром симметрии*.

Б) Симметрия относительно прямой. Пусть l - некоторая фиксированная прямая. Возьмём произвольную точку A и проведём из неё перпендикуляр AO к прямой l. На продолжении перпендикуляра за точку O отложим отрезок OA', равный отрезку AO.

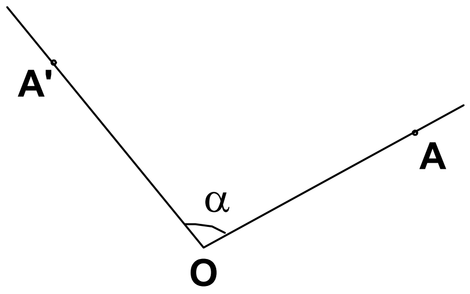


Точка A' называется *симметричной* точке A *относительно прямой* l. Если точка A лежит на прямой l, то симметричная ей точка есть сама точка A. Очевидно, что точка, симметричная точке A', есть точка A.

Преобразование плоскости называется *осевой симметрией* с данной осью l, если каждой точке A плоскости ставится в соответствие точка A', симметричная ей относительно данной оси. Две фигуры F и F' называются *симметричными относительно прямой* (оси) l, если одну из них можно перевести в другую с помощью симметрии относительно этой прямой.

Если образом фигуры F при симметрии относительно прямой l является сама фигура F, то говорят, что фигура F *симметрична сама себе относительно* l, а прямую l называют *осью симметрии* фигуры.

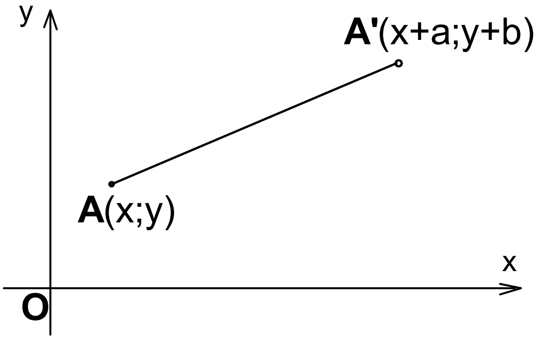
В) Поворот. Отметим на плоскости точку O, которую назовём *центром поворота*, и зададим угол величины α - *угол поворота*.



Поворотом плоскости вокруг точки O *на угол* α называется такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка A отображается в такую точку A', что расстояния до центра поворота OA и OA' равны, и величина $\angle AOA'$ равна α. При повороте вокруг центра O сама точка O остаётся на месте, т.е. отображается сама на себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении на один и тот же угол. Если поворот совершается против часовой стрелки, то величина угла поворота является *положительной*, а если по часовой стрелке – *отрицательной*. Заметим, что центральная симметрия относительно точки O является поворотом плоскости вокруг этой точки на угол величины 180^0.

Г) Параллельный перенос. Пусть $\vec{a}$ – некоторый вектор плоскости. *Параллельным переносом на вектор* $\vec{a}$ называется такое отображение плоскости на себя, при котором каждая точка A отображается в такую точку A', что выполняется векторное равенство $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$. При этом вектор $\vec{a}$ называется *вектором переноса*. Перенос на нулевой вектор $\vec{0}$ является тождественным преобразованием.

Рассмотрим параллельный перенос в прямоугольных координатах.



Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат Oxy. Пусть вектор переноса $\vec{a}$ имеет координаты $\{a;b\}$. Тогда для произвольной точки A с координатами $(x;y)$ её образом при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ будет точка A' с координатами

$(x+a; y+b)$. Параллельный перенос задаётся формулами $x' = x + a$ и $y' = y + b$. Эти формулы выражают координаты $(x'; y')$ точки A'. Отметим, что композиция двух параллельных переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть параллельный перенос на вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

Можно доказать, что параллельный перенос на плоскости отображает:

– прямую на параллельную ей прямую (или на себя);

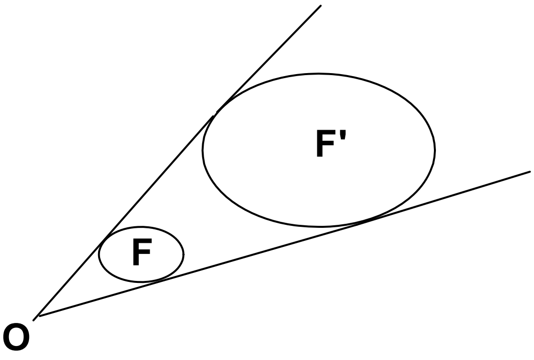
– луч на сонаправленный с ним луч (или на себя);

– вектор на равный ему вектор (на себя).

Гомотетия, преобразование подобия и его свойства

Пусть на плоскости заданы некоторая точка O и отличное от нуля действительное число k. *Гомотетия* (или *преобразование центрального подобия*) *относительно центра* O *с коэффициентом* k – это такое преобразование f плоскости на себя, которое ставит в соответствие каждой точке A данной плоскости точку $A' = f(A)$ по правилу: во-первых, образ A' лежит на прямой OA, а во-вторых, длины отрезков OA и OA' связаны соотношением

$$OA' = |k| \cdot OA.$$



Если $k > 0$, то точки A и A' лежат по одну сторону от точки O и $OA' = k \cdot OA$. Если же $k < 0$, то точки A и A' лежат по разные стороны от точки O, причём $OA' = |k| \cdot OA$. Точка O в этой ситуации называется *центром гомотетии*, число k - *коэффициентом гомотетии*.

Две фигуры F и F' называются *гомотетичными* относительно заданного центра, если существует гомотетия, переводящая одну фигуру в другую. При $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием, а при $k = -1$ – центральной симметрией с центром в центре гомотетии. Преобразование, обратное гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k, есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом, равным $1/k$. Композицией двух гомотетий с общим центром O и коэффициентами k_1 и k_2, есть гомотетия с тем же центром и коэффициентом, равным $k_1 \cdot k_2$.

Рассмотрим свойства гомотетии на плоскости. При гомотетии:

1) расстояние между точками изменяется в $|k|$ раз;

2) прямая отображается на параллельную ей или совпадающую с ней прямую;

4) плоский угол переходит в равный ему плоский угол;

5) отношение площадей гомотетичных фигур равно квадрату коэффициента гомотетии;

6) гомотетия с положительным коэффициентом не меняет ориентации треугольника (плоскости), а с отрицательным коэффициентом – меняет.

Отображение фигуры F на фигуру F' называется *подобием,* если при этом отображении расстояния между любыми точками A и B фигуры F изменяются в одно и то же число k раз (k - некоторое фиксированное положительное действительное число), т.е.

$$A'B' = k \cdot AB,$$

где $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Фигуры F и F' называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия. Это обозначается так:

$$F \backsim F'.$$

Число k называется *коэффициентом подобия*. При k=1 отображение подобия, очевидно, является тождественным преобразованием. В общем случае подобие с коэффициентом k есть *композиция* гомотетии с коэффициентом k и некоторого движения (доказательство можно найти в [28]).

Отношение подобия фигур обладает тремя *основными свойствами*.

1. Любая фигура подобна самой себе: $F \backsim F$ (рефлексивность).

2. Если $F_1 \backsim F_2$, то $F_2 \backsim F_1$ (симметричность).

3. Если $F_1 \backsim F_2$ и $F_2 \backsim F_3$, то $F_1 \backsim F_3$ (транзитивность).

Справедливы также следующие *свойства преобразования подобия*.

1) Преобразование подобия переводит отрезок в отрезок, луч в луч, прямую в прямую.

2) Подобие сохраняет величину угла.

3) Подобие переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.

4) Подобие переводит окружность в окружность.

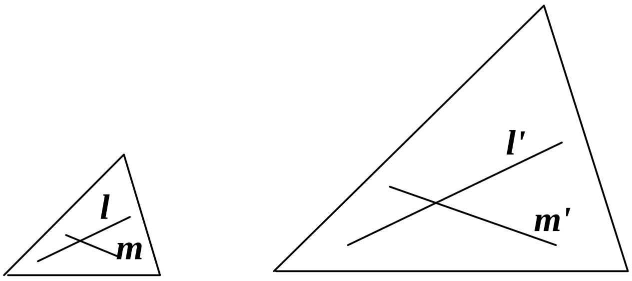
5) В результате подобия с коэффициентом k площадь фигуры изменяется в k^2 раз.

6) Подобие обратимо, т.е. отображение, обратное подобию с коэффициентом k, является, в свою очередь, подобием с коэффициентом $1/k$.

7) Композиция подобий с коэффициентами k_1 и k_2 есть подобие с коэффициентом, равным $k_1 \cdot k_2$.

8) В случае k=1 подобные фигуры тождественно равны (т.е. любая фигура подобна самой себе).

9) Отношение длин любых *соответствующих линий* в подобных фигурах есть величина постоянная, равная коэффициенту подобия.



Так, если через l и l', m и m' обозначить длины соответствующих линий в подобных фигурах, то

$$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\ldots=k.$$

Например, у подобных с коэффициентом k треугольников $\Delta\,ABC$ и $\Delta\,A_1B_1C_1$ (обозначение $\Delta\,ABC \backsim \Delta\,A_1B_1C_1$) соответствующие стороны всегда пропорциональны

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k,$$

а соответствующие углы равны: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. При этом в записи подобия треугольников $\Delta\,ABC \backsim \Delta\,A_1B_1C_1$ обычно предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

В подобных треугольниках отношение периметров, высот, медиан, биссектрис, радиусов вписанных и описанных окружностей также равно отношению соответственных сторон.

Опираясь на определение подобных фигур, сформулируем понятие подобных многоугольников. *Многоугольники* $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называют *подобными*, если пропорциональны их стороны

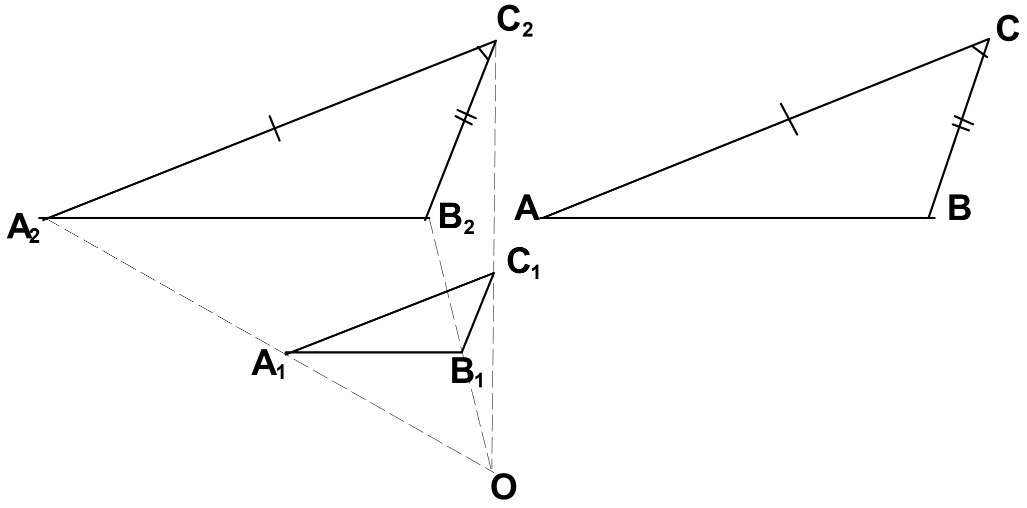
$$A_1A_2 : A_2A_3 : ... : A_nA_1 = B_1B_2 : B_2B_3 : ... : B_nB_1,$$

и углы при вершинах $A_1, A_2, ..., A_n$ равны соответственно углам при вершинах $B_1, B_2, ..., B_n$.

Признаки подобия треугольников

Сформулируем и докажем три основных признака подобия треугольников (в учебнике [17] приводятся иные доказательства, не использующие, в частности, понятия гомотетии).

Теорема 1 (1-й признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними). Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы $\angle C = \angle C_1$ и стороны, образующие эти углы, пропорциональны с коэффициентом k, т.е. $AC = k \cdot A_1C_1$, $BC = k \cdot B_1C_1$. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Для доказательства применим к $\Delta\ A_1B_1C_1$ какое-либо преобразование подобия с коэффициентом подобия k (например, гомотетию с центром в точке O). В результате получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$. Докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC. Действительно, так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle C_1 = \angle C_2$. А значит, у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ углы $\angle C$ и $\angle C_2$ равны. Далее,

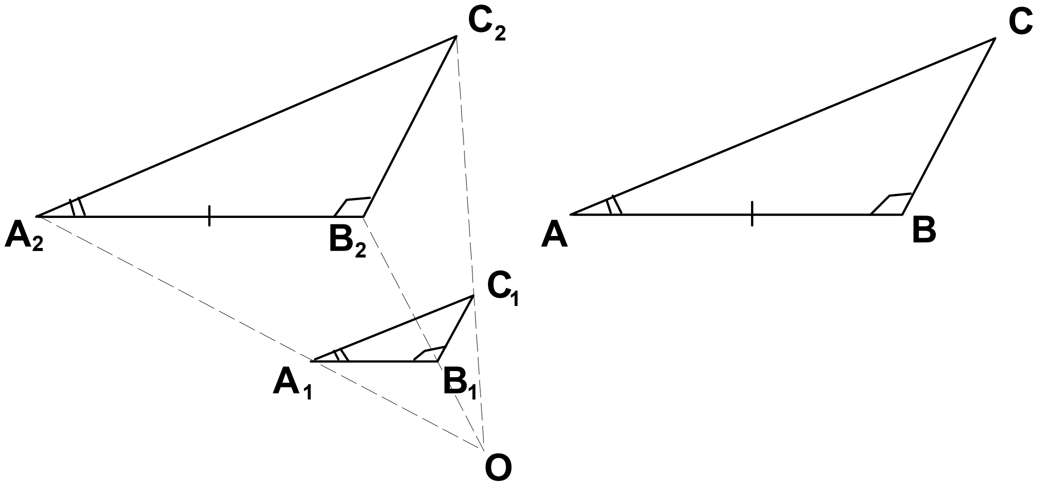
$$A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 = AC \text{ и } B_2C_2 = k \cdot B_1C_1 = BC.$$

Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по 1-му признаку (по двум сторонам и углу между ними).

Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по построению гомотетичны, а значит, подобны, и треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны. Это означает, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

<u>Теорема 2</u> (2-й признак подобия треугольников: по двум углам). Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ A_1B_1C_1$ - два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\Delta\ ABC \backsim \Delta\ A_1B_1C_1$. Обозначим через k отношение $k = \dfrac{AB}{A_1B_1}$. Применим теперь к треугольнику $A_1B_1C_1$ какое-либо преобразование подобия с коэффициентом подобия k (например, гомотетию с центром в некоторой точке O).



В результате $\Delta\, A_1B_1C_1$ перейдёт в треугольник $A_2B_2C_2$. Докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC.

Действительно, поскольку преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle A_2 = \angle A_1$ и $\angle B_2 = \angle B_1$. Кроме того,

$$A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 = AB\,.$$

Это означает, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по 2-му признаку (по стороне и прилежащим к ней углам).

Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, значит, подобны, треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, а композиция двух преобразований подобия есть преобразование подобия, то отсюда заключаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC будут подобны.

<u>Теорема 3</u> (3-й признак подобия треугольников: по трём сторонам). Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

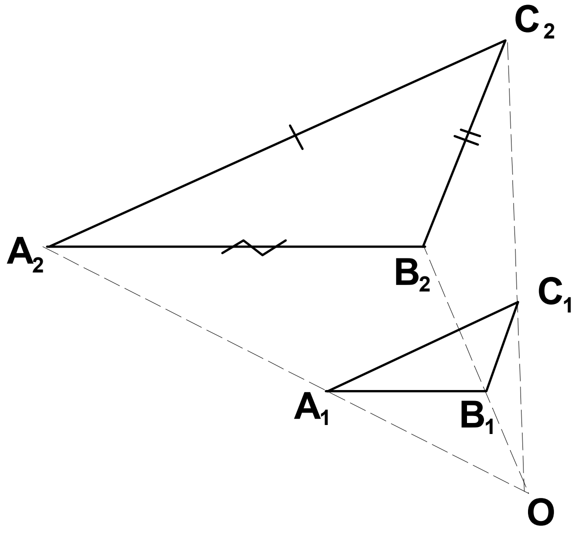
Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ все стороны пропорциональны, т.е.

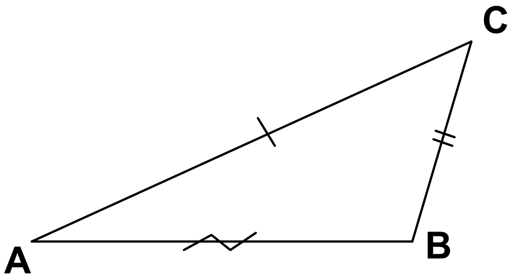
$$AB = k \cdot A_1B_1\,, \quad AC = k \cdot A_1C_1\,, \quad BC = k \cdot B_1C_1\,.$$

Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Для этого подвергнем треугольник $A_1B_1C_1$ какому-либо преобразованию подобия с коэффициентом подобия k, например, гомотетии относительно некоторой точки O. При этом треугольник $A_1B_1C_1$ перейдёт в некоторый треугольник $A_2B_2C_2$. Докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ равен треугольнику ABC.

В самом деле, у этих треугольников соответствующие стороны равны:

$$A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 = AB\,, \qquad A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 = AC\,, \qquad B_2C_2 = k \cdot B_1C_1 = BC\,.$$

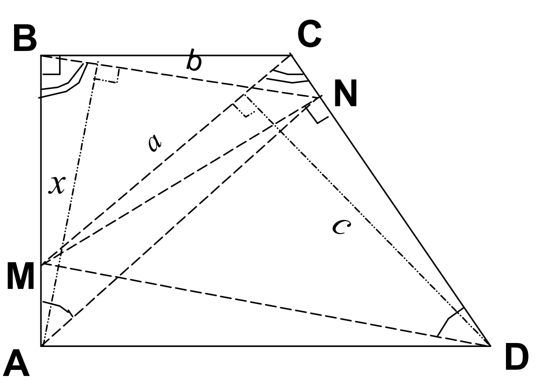




Следовательно, треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по третьему признаку (по трём сторонам). Таким образом, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по построению гомотетичны и, следовательно, подобны; треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны. Это означает, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Отметим, что тремя доказанными признаками не ограничивается множество признаков, позволяющих установить, подобны ли два данных треугольника. Приведём в качестве примера такой признак [21]: «если две стороны и биссектриса, проведённая из общей вершины этих сторон, одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам и биссектрисе, проведённой из общей вершины этих сторон, другого треугольника, то такие треугольники подобны».

Пример [Физфак-1997]. *В трапеции* $ABCD$ $BC \parallel AD, \angle ABC = 90^0$. *Прямая, перпендикулярная стороне* CD, *пересекает сторону* AB *в точке* M, *а сторону* CD *- в точке* N. *Известно, что* $MC = a, BN = b$, *а расстояние от точки* D *до прямой* MC *равно* c. *Найти расстояние от точки* A *до прямой* BN.



Решение. Пусть x - искомое расстояние от A до BN. Соединим A с N, D с M. Около четырёхугольников $MBCN$ и $AMND$ можно описать окружности (в каждом из них есть пара прямых противоположных углов).

Отмеченные одинаково на рисунке углы равны (как вписанные в эти окружности и опирающиеся на дуги с хордой MN). Следовательно, треугольники ANB и DMC подобны (по двум углам). Высоты x и c в этих треугольниках, опущенные из соответствующих вершин A и D, относятся как соответственные стороны b и a: $\frac{x}{c}=\frac{b}{a}$. Из этой пропорции и находим искомое расстояние от A до BN: $x=bc/a$.

Подобие прямоугольных треугольников

Следующие три признака можно рассматривать как следствия рассмотренных выше признаков подобия треугольников.

Теорема 1 (1-й признак подобия прямоугольных треугольников: по двум катетам). Прямоугольные треугольники подобны, если два катета одного треугольника пропорциональны двум катетам другого.

Доказательство. У прямоугольных треугольников углы, образованные катетами, равны, потому что это прямые углы. Поэтому если у треугольников пропорциональны катеты, то они подобны в силу признака подобия по двум сторонам и углу между ними.

Теорема 2 (2-й признак подобия прямоугольных треугольников: по острому углу). Прямоугольные треугольники подобны, если острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника.

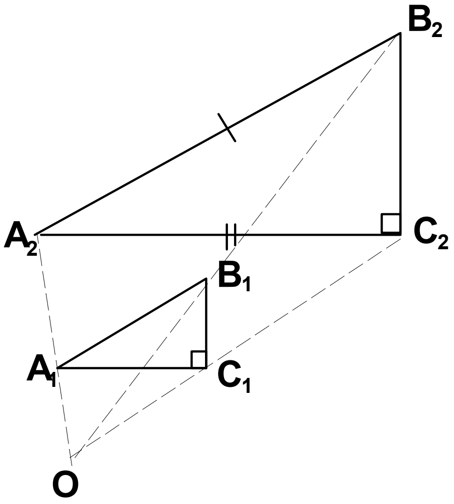
Доказательство. У прямоугольных треугольников один угол прямой. Поэтому если у них имеется по равному острому углу, то прямоугольные треугольники подобны в силу признака подобия по двум углам.

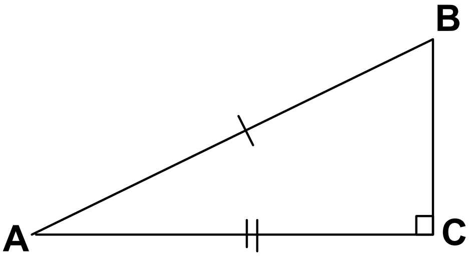
Теорема 3 (3-й признак подобия прямоугольных треугольников: по гипотенузе и катету). Прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника.

Доказательство (в учебнике А.П.Киселёва [17] приводится другое доказательство). Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle C=\angle C_1=90^0$, $AB=k\cdot A_1B_1$, $AC=k\cdot A_1C_1$. Докажем, что $\Delta\, ABC \backsim \Delta\, A_1B_1C_1$.

В самом деле, применим к $\Delta\, A_1B_1C_1$ какое-либо преобразование подобия с коэффициентом подобия k (например, гомотетию относительно некоторой точки O). При этом получим некоторый треугольник $A_2B_2C_2$, равный $\Delta\, ABC$. Докажем это.

Так как преобразование подобия сохраняет углы, то $\angle C_2=\angle C_1=90^0$. Поэтому у треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ углы $\angle C$ и $\angle C_2$ равны и составляют по 90°. Далее, у этих треугольников равны гипотенуза и катет, так как верны равенства $A_2B_2=k\cdot A_1B_1=AB$ и $A_2C_2=k\cdot A_1C_1=AC$.





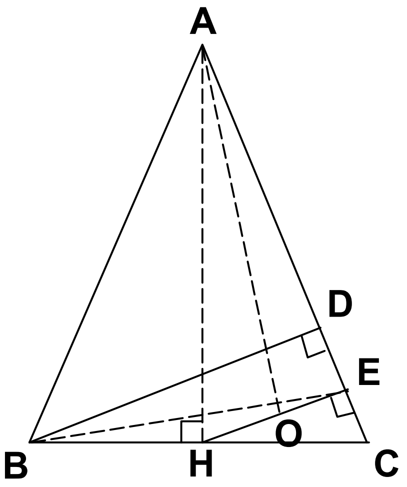
Следовательно, прямоугольные треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны по гипотенузе и катету. Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны и, следовательно, подобны, а треугольники $A_2B_2C_2$ и ABC равны и поэтому тоже подобны, то прямоугольные треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Замечание 1. Помимо рассмотренных выше трёх основных признаков подобия, существуют и другие признаки подобия, сводимые к рассмотренным. Например, *два треугольника подобны, если стороны одного из них перпендикулярны соответствующим сторонам другого треугольника*.

Замечание 2. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника, каждый из которых подобен исходному.

Пример [ВМК-2002,устн.]. *В равнобедренном треугольнике ABC из середины H основания BC проведён перпендикуляр HE на боковую сторону AC. Точка O делит пополам отрезок HE. Найти угол между прямыми AO и BE.*

Решение. Опустим из точки B перпендикуляр BD на AC. Тогда следующие прямоугольные треугольники будут подобны:



$$\triangle CBD \sim \triangle CHE \sim \triangle AHE$$

(по острому углу). Точки E и O - середины соответственных сторон в треугольниках CBD и AHE, поэтому BE и AO - соответственные медианы в этих треугольниках. Так как гипотенуза AH в $\triangle AHE$ перпендикулярна соответствующей гипотенузе BC в $\triangle CBD$, то и $AO \perp BE$.

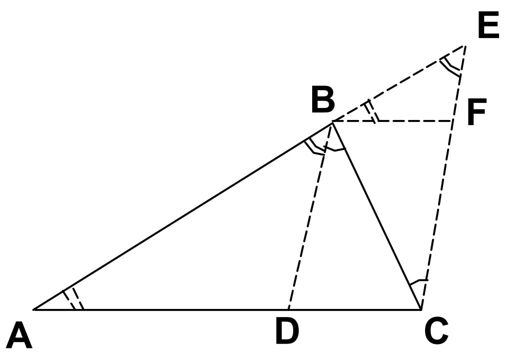
Ответ: угол между прямыми AO и BE равен 90^0.

3.8. Теоремы о биссектрисе треугольника. Произведение отрезков пересекающихся хорд. Теорема о касательной и секущей

Свойства биссектрисы угла треугольника

Теорема 1 *(теорема о биссектрисе). Биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.*

Доказательство. Пусть BD - биссектриса угла $\angle B$ треугольника ABC.



Необходимо доказать, что

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

Для доказательства проведём прямую CE параллельно биссектрисе BD до пересечения в точке E с продолжением стороны AB. Кроме того, проведём прямую BF параллельно прямой AC до пересечения в точке F с прямой CE. Заметим, что в треугольниках ABD и BEF углы $\angle BAD$ и $\angle EBF$ равны как соответственные при параллельных прямых AD и BF, и углы $\angle ABD$ и $\angle BEF$ также равны как соответственные при параллельных прямых BD и CE. Поэтому $\Delta ABD \backsim \Delta BEF$ (по двум углам) и, следовательно, их стороны пропорциональны

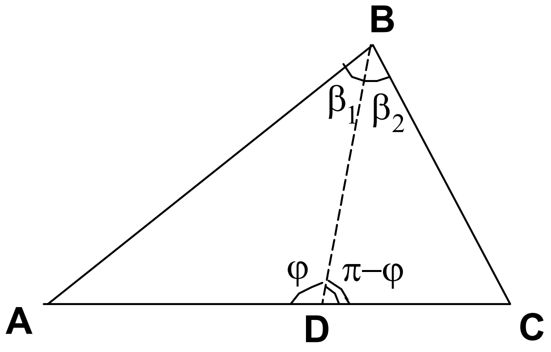
$$\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{BF}. \qquad (1)$$

Далее, поскольку $BF \parallel DC$ и $BD \parallel FC$, то фигура $BFCD$ является параллелограммом и, следовательно, её противоположные стороны равны $BF = DC$.

Теперь докажем, что ΔBCE - равнобедренный, т.е. что в этом треугольнике стороны BE и BC равны. Действительно, $\angle BEC = \angle ABD$ (как соответственные углы при параллельных прямых BD и EF), а также $\angle BCE = \angle DBC$ (как накрест лежащие углы при тех же параллельных прямых). Но $\angle ABD = \angle DBC$ (по условию, так как BD - биссектриса), значит, $\angle BEC = \angle BCE$, а потому стороны BE и BC, лежащие в ΔBCE против равных углов, также будут равны. Наконец, заменив в пропорции (1) BE на BC, BF на DC, получим требуемую пропорцию $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Справедлива и *обратная теорема*.

Теорема 2 (обратная к Теореме 1). Отрезок, проведённый из вершины угла треугольника к противолежащей стороне и делящий эту сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам, является биссектрисой этого угла.



Доказательство. Пусть из вершины B треугольника ABC к стороне AC проведён отрезок BD, делящий эту сторону на отрезки, длины которых пропорциональны двум другим сторонам, т.е. $AB : AD = BC : CD$. Необходимо доказать, что тогда отрезок BD является биссектрисой данного треугольника, т.е. делит угол при вершине B пополам.

Обозначим через β_1 и β_2 соответственно углы $\angle ABD$ и $\angle CBD$, на которые отрезок BD делит угол $\angle B$, а через φ - угол $\angle ADB$. Тогда угол $\angle BDC$ равен $\pi - \varphi$ (как дополняющий угол $\angle ADB$ до развёрнутого). Воспользуемся теоремой синусов (будет доказана позже) для треугольников ABD и CBD:

$$\frac{AB}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin\beta_1} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_1 = \frac{AD}{AB}\cdot\sin\varphi \qquad (1)$$

и

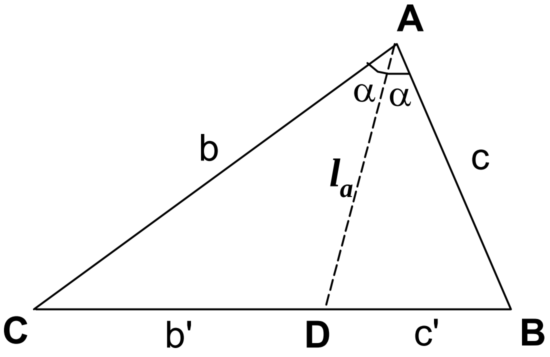
$$\frac{BC}{\sin(\pi-\varphi)} = \frac{CD}{\sin\beta_2} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_2 = \frac{CD}{BC}\cdot\sin(\pi-\varphi). \qquad (2)$$

Учитывая, что $\sin(\pi-\varphi) = \sin\varphi$, и поделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{AD}{CD}\cdot\frac{BC}{AB} = 1$, т.е. $\sin\beta_1 = \sin\beta_2$. Из курса тригонометрии известно, что это равносильно тому, что

$$\left[\begin{array}{l} \beta_1 = \beta_2 + 2\pi n \\ \beta_1 = \pi - \beta_2 + 2\pi k \end{array}\right., \quad n,k \in Z. \qquad (3)$$

Учитывая естественное ограничение на величину внутреннего угла треугольника, имеем дополнительно условия $\beta_1 + \beta_2 \in (0,\pi)$ и $\beta_1, \beta_2 \in (0,\pi)$, т.е. $\beta_1 - \beta_2 \in (-\pi,\pi)$. Из последних ограничений следует, что второе равенство в совокупности (3) не может выпоняться, а первое верно только при $n = 0$, что и означает равенство углов β_1 и β_2. Таким образом, доказано, что BD является биссектрисой данного треугольника.

Теорема 3 (1-е свойство биссектрисы). Квадрат биссектрисы угла треугольника равен произведению прилежащих сторон минус произведение длин отрезков, на которые биссектриса делит противолежащую сторону.



Доказательство. Пусть AD - биссектриса угла $\angle A$ в треугольнике ABC. Обозначим $\angle A$ через 2α, длину биссектрисы AD через l_a, буквами b,c - соответственно стороны треугольника AC,AB, а буквами b',c' - соответственно отрезки CD и BD. Тогда требуется доказать справедливость равенства: $l_a^2 = bc - b'c'$.

Для доказательства воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ACD и ABD (будет доказана позже): $b'^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\alpha$, $c'^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\alpha$. Чтобы исключить неизвестный угол α, умножим первое равенство на c, второе равенство на b:

$$cb'^2 = cb^2 + cl_a^2 - 2bcl_a \cos\alpha,$$

$$bc'^2 = bc^2 + bl_a^2 - 2bcl_a \cos\alpha$$

и вычтем почленно одно из другого. Получим

$$cb'^2 - bc'^2 = bc(b-c) - l_a^2(b-c). \qquad (4)$$

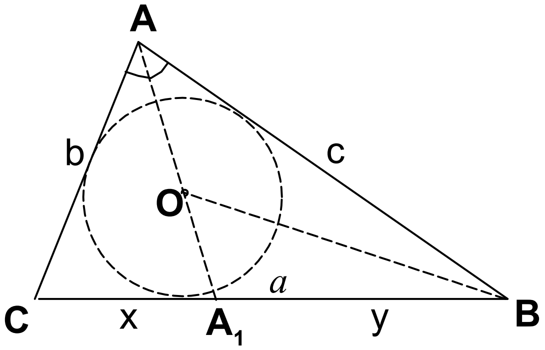
Далее, так как по теореме о биссектрисе справедливо равенство $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$, т.е. $b'c = bc'$, то $cb'^2 = (cb')b' = (bc')b' = b'c'b$, $bc'^2 = (bc')c' = (b'c)c' = b'c'c$ и, следовательно, из (4) получаем

$$b'c'(b-c) = bc(b-c) - l_a^2(b-c),$$

откуда, после сокращения на $(b-c) \neq 0$ (случай, когда $b = c$, т.е. треугольник является равнобедренным, рассмотрите самостоятельно), имеем окончательно искомое равенство

$$l_a^2 = bc - b'c'.$$

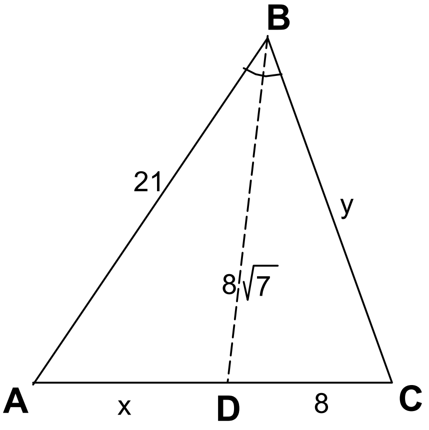
Приведём в заключение этого пункта ещё одну теорему, отражающую взаимосвязь биссектрисы треугольника и центра вписанной в треугольник окружности.



<u>Теорема 4</u> *(2-е свойство биссектрисы). Центр вписанной в треугольник (со сторонами a,b,c) окружности делит биссектрису угла $\angle A$ (напротив a) в отношении $(b+c):a$, считая от вершины угла.*

Доказательство. Рассмотрим ΔABC со сторонами a,b,c. Пусть AA_1 биссектриса угла $\angle A$, делящая сторону BC на отрезки $x = A_1C$ и $y = A_1B$, O - центр вписанной окружности. По теореме 1 (основное свойство биссектрисы) имеем $\frac{y}{x}=\frac{c}{b}$. Кроме того, очевидно, $x+y=a$. Из этой системы двух уравнений получаем $y=\frac{ac}{b+c}$. Далее, в треугольнике ABA_1 отрезок BO является биссектрисой, и поэтому по теореме о биссектрисе: $\frac{AO}{A_1O}=\frac{c}{y}=\frac{c}{ac/(b+c)}=\frac{b+c}{a}$.

<u>Пример</u> [ВМК-1994]. *В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Определить периметр треугольника ABC.*



Решение. Обозначим $x = AD, y = BC$. Тогда, применяя доказанные свойства биссектрисы, приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\frac{x}{8}=\frac{21}{y}\\ \left(8\sqrt{7}\right)^2=21y-8x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{21\cdot 8}{x}\\ x^2+56x-441=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=24\\ x=7.\end{cases}$$

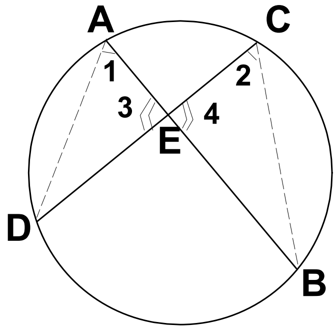
Поэтому

$$P_{ABC}=AB+BC+AC=21+y+(x+8)=60.$$

Ответ: периметр треугольника равен 60.

Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Теорема о касательной и секущей

<u>*Теорема 1*</u> *(произведение отрезков пересекающихся хорд). Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин образовавшихся при пересечении отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.*

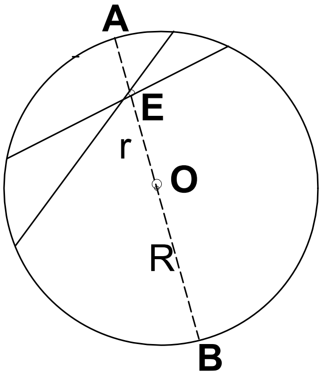


Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E. Докажем, что произведение длин отрезков этих хорд равны, т.е. $AE\cdot BE=CE\cdot DE$.

Рассмотрим треугольники ADE и CBE, они подобны по первому признаку подобия треугольников. Действительно, у них углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны, поскольку это вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $\cup BD$, а углы $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как вертикальные.

Отсюда следует, что стороны этих треугольников пропорциональны $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$. Из этой пропорции вытекает доказываемое равенство.

Следствие 1. Если в одной точке E пересекаются несколько хорд, то для каждой из них произведение длин образовавшихся отрезков будет равно одному и тому же числу (обозначим это число q).



Следствие 2. Произведение q длин отрезков хорд зависит только от радиуса окружности R и расстояния r от точки E до центра окружности и равно $q = R^2 - r^2$.

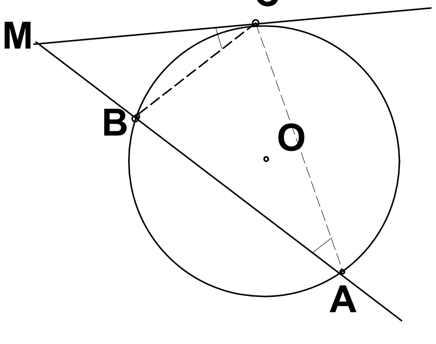
Доказательство. Среди хорд, проходящих через точку E, выберем такую хорду AB, которая проходит через центр окружности O. Эта хорда будет являться диаметром окружности. Точка E делит диаметр на отрезки $AE = R - r$ и $BE = R + r$. Их произведение равно числу q и, очевидно, равно $AE \cdot BE = (R - r) \cdot (R + r) = R^2 - r^2$.

Справедливо также следующее утверждение: если E – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ACBD$ и $AE \cdot BE = CE \cdot DE$, то около такого четырёхугольника можно описать окружность (см. доказательство, например, в [16,2]).

Пусть M – произвольная точка, расположенная вне данной окружности. Рассмотрим секущую, проходящую через точку M. *Длиной секущей* в следующей теореме будем называть длину отрезка от точки M до более дальней точки пересечения прямой с окружностью.

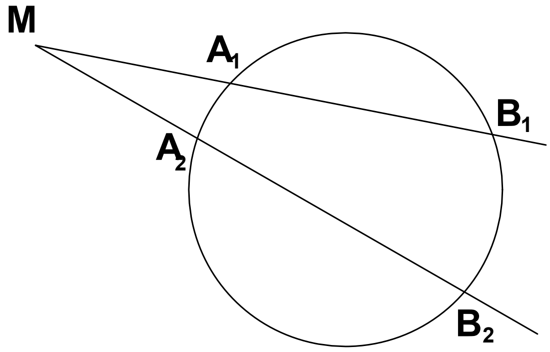
Теорема 2 (теорема о касательной и секущей). Если из точки M, взятой вне окружности, проведены к окружности секущая MA и касательная MC, то произведение длины секущей на длину её внешней части MB равно квадрату касательной:

$$MA \cdot MB = MC^2 .$$



Доказательство. Проведём две вспомогательные хорды AC и BC. Тогда получим два треугольника MAC и MCB, у которых угол при вершине M общий, и углы $\angle MCB$ и $\angle MAC$ равны (так как каждый из них измеряется половиной дуги $\cup BC$).

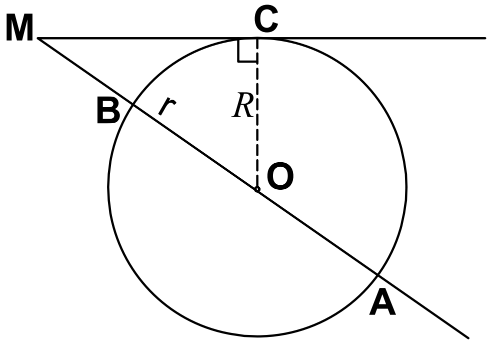
Поэтому эти треугольники подобны: $\Delta MAC \backsim \Delta MCB$ (по двум углам) и, следовательно, справедлива пропорция $\frac{MA}{MC}=\frac{MC}{MB}$, откуда уже легко получить искомое равенство. Теорема доказана.



Следствие 1 (свойство секущих) Если из одной точки M к окружности проведены несколько секущих, то для каждой из них произведение длины секущей на её внешнюю часть будет равно одному и тому же числу:

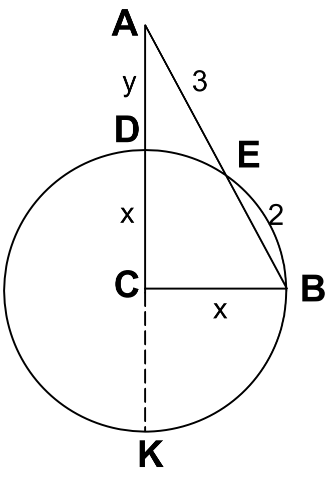
$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 .$$

<u>Следствие 2</u> (уточнение свойства секущих). Произведение длин секущих на их внешнюю часть зависит только от радиуса окружности R и расстояния r от точки M до центра окружности и равно r^2-R^2.



Доказательство. Среди секущих, проходящих через точку M, выберем такую секущую MA, которая проходит через центр окружности O. Тогда AB будет являться диаметром окружности. Из прямоугольного треугольника MCO по теореме Пифагора имеем: $MC^2=MO^2-CO^2=r^2-R^2$.

<u>Пример</u> [ВМК-1998,устн.]. *Дуга, описанная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника радиусом, равным меньшему катету, делит гипотенузу на отрезки длиной 2 и 3 (начиная от меньшего катета). Определить длины катетов.*



Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Обозначим точки пересечения дуги окружности с катетом AC и гипотенузой AB соответственно через D и E, $BC=x$, $AD=y$.

Продлим катет AC до его второго пересечения с окружностью в точке K. Согласно свойству секущих, имеем: $AE \cdot AB = AD \cdot AK$, или $3 \cdot 5 = y \cdot (y + 2x)$. Далее, по теореме Пифагора для треугольника ABC:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ или } (x + y)^2 + x^2 = 5^2.$$

Решая полученную систему уравнений $\begin{cases} y \cdot (y + 2x) = 15 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 25, \end{cases}$ находим $x = y = \sqrt{5}$. *Ответ:* длины катетов равны $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$.

3.9. Основные соотношения в прямоугольных треугольниках

Теорема о пропорциональных отрезках в прямоугольных треугольниках

Отрезок длины x называется *средним пропорциональным* (или *средним геометрическим*) отрезков с длинами a и b, если выполняется пропорция

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \text{ т.е. } x = \sqrt{a \cdot b}.$$

<u>Теорема</u> (теорема о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике).

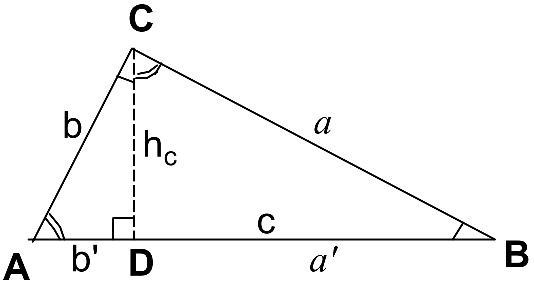
1) Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

2) Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $c = AB$ и катетами $a = BC$, $b = AC$. Обозначим высоту CD, опущенную на гипотенузу, через h_c, а отрезки, на которые она делит гипотенузу, а также их длины, через $a' = BD$, $b' = AD$ (обоснование того, что D – внутренняя точка гипотенузы AB, можно найти в [2]). Требуется доказать, что

1) $h_c = \sqrt{a' \cdot b'}$;

2) $a = \sqrt{a' \cdot c}$ и $b = \sqrt{b' \cdot c}$.



Первое равенство докажем из подобия треугольников ACD и CBD. Эти два треугольника подобны по двум углам, так как в них углы с вершиной в точке D прямые и углы $\angle A$

и $\angle BCD$ равны, так как каждый из них дополняет угол $\angle B$ до прямого угла. Из подобия треугольников ACD и CBD следует, что их стороны пропорциональны $\frac{CD}{BD}=\frac{AD}{CD}$, откуда получаем требуемое соотношение

$$CD=\sqrt{BD\cdot AD}\text{ , или } h_c=\sqrt{a'\cdot b'}\text{ .}$$

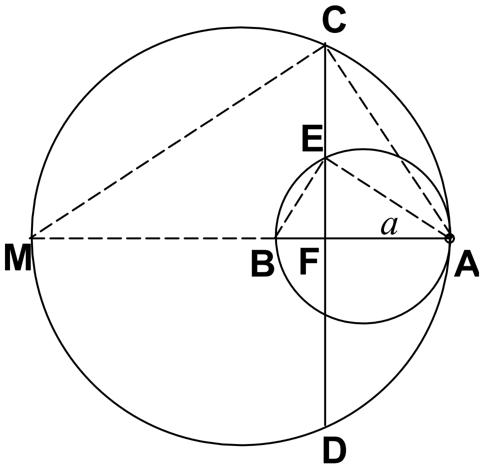
Для доказательства второго равенства рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и CBD. Покажем, что они подобны. Заметим, что в этих треугольниках угол $\angle B$ - общий. Следовательно, $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$ (по острому углу). Из подобия этих треугольников следует пропорциональность их катетов $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}$. Отсюда, раскрывая пропорцию и извлекая квадратный корень, получаем искомое соотношение

$$BC=\sqrt{BD\cdot AB}\text{ , или } a=\sqrt{a'\cdot c}\text{ .}$$

Докажем, наконец, аналогичное равенство для второго катета. Для этого рассмотрим пару прямоугольных треугольников ABC и ACD. В этих треугольниках угол $\angle A$ - общий, поэтому треугольники подобны (по острому углу). Из подобия треугольников следует пропорциональность их катетов $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$. Отсюда, раскрывая пропорцию и извлекая квадратный корень, получаем соотношение

$$AC=\sqrt{AD\cdot AB}\text{ , т.е. } b=\sqrt{b'\cdot c}\text{ .}$$

Пример. Окружности радиусов R и r $(R>r)$ касаются внутренним образом в точке A. Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности, E - одна из точек пересечения CD с меньшей окружностью, ближайшая к C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника AEC.



Решение. Пусть F - точка пересечения CD с AB, $AF=a$, R' - искомый радиус окружности. Продлим диаметр AB до пересечения в точке M с большей окружностью (MA - диаметр большей окружности). Согласно теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольных треугольниках ABE и AMC имеем:

$$AE=\sqrt{AB\cdot AF}=\sqrt{2ra}\text{ ,}$$

$$AC=\sqrt{AM\cdot AF}=\sqrt{2Ra}\text{ .}$$

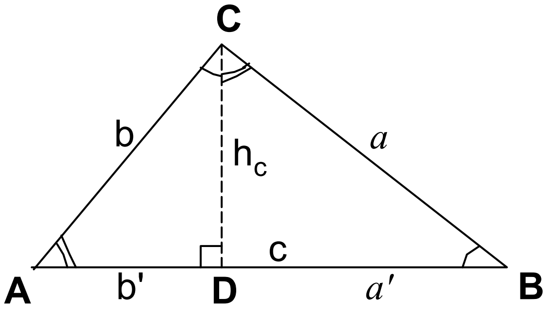
Заметим, что $\sin\angle AEC = \sin\angle AEF = \frac{AF}{AE} = \frac{a}{\sqrt{2ra}} = \sqrt{\frac{a}{2r}}$. По теореме синусов для треугольника AEC имеем: $\frac{AC}{\sin\angle AEC} = 2R'$, откуда $R' = \frac{AC}{2\sin\angle AEC} = = \frac{\sqrt{2Ra}}{2\sqrt{\frac{a}{2r}}} = \sqrt{Rr}$. *Ответ:* радиус окружности равен $\sqrt{Rr}$.

Теорема Пифагора.
Обратная теорема к теореме Пифагора.
Обобщённая теорема Пифагора

Пифагор Самосский (ок.570–ок.500гг. до н.э.) – древнегреческий математик и философ, основатель пифагореизма. Скудные сведения о жизни и учении Пифагора трудно отделить от легенд, представляющих его как полубога, совершенного мудреца, наследника всей античной и ближневосточной науки, чудотворца и мага. В области математики Пифагору приписываются введение доказательств в геометрию, построение планиметрии прямолинейных фигур, создание учения о подобии, доказательство теоремы Пифагора, построение некоторых правильных многогранников и многоугольников. С именем Пифагора связывают также учение о чётных и нечётных, простых и со ставных, о фигурных и совершенных числах, об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних.

Теорема (Пифагора). В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Доказательство.



Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$ (со всеми обозначениями, введёнными в предыдущей теореме). Требуется доказать, что $a^2 + b^2 = c^2$. В силу доказанной выше теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, можно утверждать, что каждый катет является средним геометрическим между его проекцией на гипотенузу и самой гипотенузой. Возводя эти равенства в квадрат, получим

$$a^2 = a' \cdot c, \quad b^2 = b' \cdot c.$$

Сложим почленно эти равенства

$$a^2 + b^2 = c \cdot (a' + b').$$

Учитывая, что сумма длин проекций катетов $a' + b'$ равна длине гипотенузы c, приходим к искомому равенству $a^2 + b^2 = c^2$.

Замечание. Теорема Пифагора имеет богатую историю. Оказывается, она задолго до Пифагора была известна египтянам, вавилонянам, китайцам и индийцам. За 8 веков до нашей эры теорема Пифагора была хорошо известна индийцам под названием «правила верёвки» и использовалась ими при построении алтарей. Доказательство самого Пифагора до нас не дошло. В настоящее время имеется свыше 100 различных доказательств теоремы Пифагора, и рассмотренное выше доказательство – лишь одно из них. Другие доказательства этой теоремы можно найти, например, в [22,23]. Более ранние формулировки этой теоремы звучали не так, как сейчас: «Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах».

Тройки целых положительных чисел a, b, c, являющихся решением уравнения $a^2+b^2=c^2$, называют *пифагоровыми числами*, а прямоугольный треугольник, длины сторон которого целочисленны, называют *пифагоровым*. Известно, что пифагоровых чисел бесконечно много. Наиболее известна тройка 3, 4, 5, о которой знали в Египте задолго до Пифагора (с тех пор треугольник со сторонами 3, 4, 5 называют *египетским треугольником*). Позже удалось установить, что все пифагоровы числа можно описать формулами:

$$a=u\cdot v,\ b=\frac{u^2-v^2}{2},\ c=\frac{u^2+v^2}{2},$$

где u, v – взаимно простые числа, $u>v$ (здесь речь идёт о так называемых *простых* тройках пифагоровых чисел, т.е. таких, у которых числа a, b, c, взятые попарно, являются взаимно простыми).

Справедлива также *обратная теорема*.

Теорема (обратная к теореме Пифагора). Если в треугольнике сумма квадратов длин двух сторон равна квадрату длины третьей стороны, то треугольник - прямоугольный.

Доказательство. Пусть в некотором треугольнике ABC для его сторон выполняется равенство $AB^2=AC^2+BC^2$. Необходимо доказать, что угол $\angle C$, лежащий напротив стороны AB, - прямой. Для доказательства рассмотрим прямоугольный треугольник $A'B'C'$, у которого $A'C'=AC$, $B'C'=BC$ и $\angle C'$ =90°. По теореме Пифагора для треугольника $A'B'C'$ имеем

$$A'B'^2=A'C'^2+B'C'^2=AC^2+BC^2=AB^2,$$

откуда приходим к равенству $A'B'=AB$. Получили, что имеются два треугольника ABC и $A'B'C'$, у которых все три стороны равны. Следовательно, эти треугольники равны (по трём сторонам). Но один из них ($\triangle A'B'C'$) по построению прямоугольный, а значит, и второй ($\triangle ABC$) также является прямоугольным. При этом, поскольку напротив равных сторон $A'B'=AB$ лежат равные углы $\angle C'=\angle C$, то $\angle C$ =90° и сторона AB является гипотенузой $\triangle ABC$.

Наконец, приведём интересную и весьма немаловажную теорему, хотя и не столь известную, как предыдущие, но имеющую большую ценность в практических приложениях. Она существенно *обобщает* теорему Пифагора, отражая свойства подобных фигур.

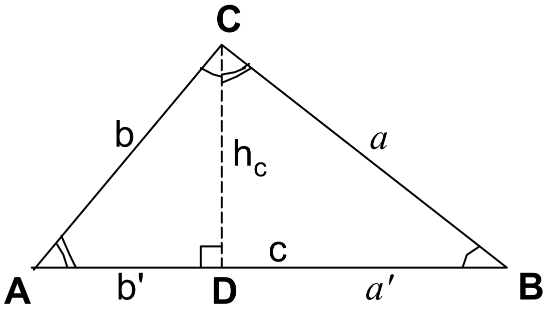
Пусть задан произвольный прямоугольный треугольник ABC, в котором к гипотенузе

AB проведена высота CD. Эта высота делит треугольник на два (подобных между собой и подобных исходному треугольнику) треугольника CBD и ACD. Обозначим через d_a, d_b и d_c - любые сходственные (т.е. соответствующие в подобных фигурах) линейные элементы в треугольниках CBD, ACD и ABC. Под линейными элементами в данном случае будем понимать любые объекты на плоскости, имеющие длину. Например, в качестве d_a, d_b и d_c могут выступать соответствующие стороны, или соответствующие медианы, а также биссектрисы, высоты, периметры, радиусы вписанных и описанных окружностей и прочие линии в подобных прямоугольных треугольниках с гипотенузами a, b и c.

<u>Теорема</u> (обобщённая теорема Пифагора). Если в прямоугольном треугольнике к гипотенузе c проведена высота, разбивающая треугольник на два прямоугольных треугольника с гипотенузами a и b, то длины любых сходственных линий d_a, d_b и d_c в образовавшихся треугольниках удовлетворяют соотношению

$$d_a^2 + d_b^2 = d_c^2 .$$

Доказательство. Поскольку все три прямоугольных треугольника ABC, CBD и ACD подобны между собой, то длины любых сходственных линейных элементов d_a, d_b и d_c в этих треугольниках *пропорциональны*, в частности, их гипотенузам, т.е.



$$d_a : d_b : d_c = a : b : c .$$

Условие пропорциональности означает, что найдётся такое положительное действительное число k, что будут одновременно выполняться три равенства $\begin{cases} d_a = k \cdot a, \\ d_b = k \cdot b, \\ d_c = k \cdot c. \end{cases}$

С другой стороны, по теореме Пифагора для исходного треугольника ABC имеем $a^2 + b^2 = c^2$. Умножим теперь это равенство на число k^2 и запишем его в эквивалентном виде

$$(k \cdot a)^2 + (k \cdot b)^2 = (k \cdot c)^2 ,$$

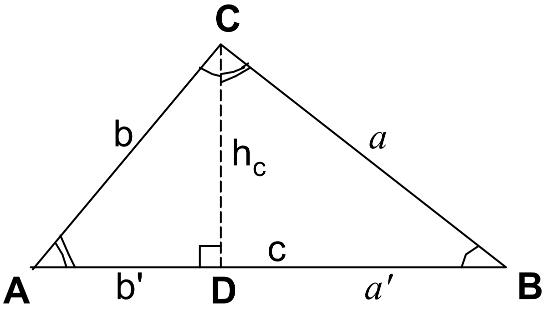
что сразу приводит к доказываемому равенству $d_a^2 + d_b^2 = d_c^2$.

<u>Замечание</u>. Если в качестве тройки сходственных элементов d_a, d_b и d_c выбрать непосредственно длины гипотенуз a, b и c, то, как частный случай, из обобщённой теоремы получим обыкновенную теорему Пифагора.

Соотношение между высотой, опущенной на гипотенузу, и сторонами прямоугольного треугольника

Рассмотрим ещё одно широко известное в планиметрии и часто используемое при решении задач свойство.

Теорема (соотношение между высотой, опущенной на гипотенузу, и сторонами прямоугольного треугольника). В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна произведению длин катетов, делённому на длину гипотенузы.



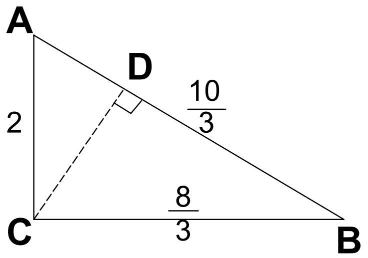
Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник ABC. Требуется доказать: $h_c = \frac{ab}{c}$.

1-й способ (с помощью теоремы о пропорциональных отрезках): $c^2 \cdot h_c^2 = c^2 \cdot (a' \cdot b') = (a' \cdot c) \cdot (b' \cdot c) = a^2 \cdot b^2$ Отсюда получаем искомое соотношение.

2-й способ (через подобие треугольников ABC и CBD). Прямоугольные треугольники ABC и CBD подобны по острому углу, поскольку имеют общий угол $\angle B$. Это позволяет составить пропорцию $\frac{AB}{CB} = \frac{AC}{CD}$, т.е., в принятых обозначениях, $\frac{c}{a} = \frac{b}{h_c}$, что также приводит к результату.

Пример [Геолог.-2000,устн.]. *Найти расстояние между основаниями высот треугольника, если его стороны равны* $8/3$*,* $10/3$ *и 2.*

Решение. Заметим, что стороны данного треугольника удовлетворяют соотношению: $(8/3)^2 + 2^2 = (10/3)^2$. По обратной теореме Пифагора, это означает, что треугольник – прямоугольный, и, следовательно, надо найти длину отрезка CD перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Воспользовавшись формулой $h_c = \frac{ab}{c}$, находим $CD = \frac{8/3 \cdot 2}{10/3} = \frac{8}{5}$.



Ответ: искомое расстояние равно $8/5$.

3.10.

Элементы аналитической геометрии на плоскости. Векторы

> *«**Аналитическая геометрия** – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат».*
>
> *«**Векторное исчисление** – раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами. Подразделяется на векторную алгебру и векторный анализ. В векторной алгебре изучают линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное и др.). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями от скалярных аргументов».*
>
> *Большой энциклопедический словарь*

Возникновение *метода координат* связано с развитием астрономии, механики и техники в XVII веке. Отчётливое и исчерпывающее изложение этого метода и основ аналитической геометрии было сделано знаменитым французским математиком и философом *Рене Декартом* (1596-1650) в его «Геометрии». Опубликование этого труда (1637) как одного из приложений к философскому трактату «Рассуждение о методе» считается (условно) датой рождения аналитической геометрии. Основные идеи метода координат были известны также его современнику, французскому учёному *Пьеру Ферма* (1629). Дальнейшая разработка аналитической геометрии связана с трудами немецкого математика и физика *Готфрида Лейбница* и великого английского учёного *Исаака Ньютона*, и особенно *Леонарда Эйлера* (1707-1783) – учёного с мировой известностью, внёсшего в своё время огромный вклад в российскую науку.

Основным *инструментом* аналитической геометрии является *координатный метод*. Но если Декарт и Ферма применяли этот метод почти исключительно к планиметрическим задачам, то систематическое использование координатного метода в стереометрии было впервые осуществлено Л.Эйлером на сто с лишним лет позднее.

В основу координатного метода положено понятие *координат* точки на плоскости или в пространстве. *Координаты точки* – это такие величины, которые определяют положение точки (в пространстве, на плоской или кривой поверхности, на прямой или кривой линии). Известно, что в простейшем случае, для того чтобы охарактеризовать положение точки на прямой, следует выбрать на этой прямой точку отсчета (*начало координат*), установить величину единичного отрезка (ввести *масштабную единицу*) и выбрать из двух возможных на прямой линии направлений то, которое будет считаться *положительным*. Такая прямая может рассматриваться как *координатная ось*, и положение любой точки, лежащей на ней, будет однозначно определяться единственной координатой – числом, показывающим, на сколько масштабных единиц и в какую сторону удалена от начала координат данная точка.

На плоскости положение произвольной точки однозначно задаётся уже *двумя координатами*. Чтобы точке можно было присвоить координаты, первоначально вводят систему координат. Это может быть прямоугольная (Декартова) или полярная системы координат. В первом случае на плоскости рассматривают две перпендикулярные друг другу прямые, каждая из которых является координатной осью с введённым на ней положительным (и, соответственно, отрицательным) направлением и единичным масштабным отрезком. В большинстве случаев единичные отрезки по обеим осям выбираются равной длины. В качестве начала координат на плоскости берётся общая точка пересечения двух координатных осей. Одной из осей присваивается название *оси абсцисс*, а другой – *оси ординат*. Тогда координатами произвольной точки плоскости будут служить величины отрезков, образующихся на осях абсцисс и ординат при построении ортогональных проекций данной точки на эти оси. В *полярной системе* координат положение каждой точки, за исключением точки начала координат, также определяется двумя величинами, но это будут уже *расстояние* от точки до начала координат и *угол отклонения* радиус-вектора точки от единственной координатной оси в положительном направлении (против часовой стрелки). Некоторые аспекты, относящиеся к особенностям прямоугольной и полярной координатных систем и связи между ними, частично уже освещались в разделе, посвящённом свойствам функций и построению их графиков.

Рассмотрим теперь, что является *предметом* изучения в курсе аналитической геометрии. Пусть на плоскости с данной прямоугольной системой координат Oxy задана некоторая *линия* L. В аналитической геометрии водится понятие *уравнения линии* L относительно системы Oxy как соотношения вида

$$F(x,y)=0,$$

которому удовлетворяют координаты x и y любой точки M, расположенной на L, и не удовлетворяют координаты каждой точки, не лежащей на L. Если, например, линия L является окружностью радиуса R с центром в начале координат O, то, как будет показано ниже, уравнением данной линии будет

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

Основная идея метода координат на плоскости и одновременно главный *предмет* исследования в курсе аналитической геометрии состоят в том, что геометрические свойства линии L (другое название – плоской кривой L) выясняются путём изучения аналитическими и алгебраическими средствами свойств уравнения $F(x,y)=0$ этой линии.

В пространстве в прямоугольной системе координат $Oxyz$ *поверхности* обычно задаются (неявно) уравнением $F(x,y,z)=0$, или, если удаётся выразить z через x и y, – явным образом уравнением вида $z = f(x, y)$. Например, сфера задаётся уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – центр сферы, R – её радиус. Выражая z через x и y, получим уравнения двух поверхностей:

верхнюю полусферу $z = z_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$

и

нижнюю полусферу $z = z_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$.

Вообще, введение системы координат даёт возможность изучать геометрические фигуры (как на плоскости, так и в пространстве) и их свойства с помощью уравнений и неравенств, и тем самым использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур и называется *методом координат*.

В аналитической геометрии на плоскости в первую очередь исследуются так называемые *алгебраические линии первого и второго порядков*. Эти линии в прямоугольных координатах определяются соответственно алгебраическими уравнениями 1-й и 2-й степеней с двумя неизвестными x и y. Так, *линии первого порядка* – это прямые линии, задаваемые алгебраическим уравнением 1-й степени $ax + by + c = 0$, где коэффициенты a и b не обращаются одновременно в нуль.

В общем случае *линии (или кривые)* n-го *порядка* ($n \in N$) на плоскости определяются как геометрические места точек плоскости, координаты которых (x, y) удовлетворяют алгебраическому уравнению n-ой степени. Например, уравнение $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ задаёт на плоскости кривую 3-го порядка, имеющую название «декартов лист».

В аналитической геометрии в пространстве наряду с линиями вводят понятие *поверхности* n-го *порядка* ($n \in N$). Так, поверхностью 1-го порядка, задаваемой алгебраическим уравнением 1-й степени с тремя переменными x, y, z

$$ax + by + cz + d = 0$$

(коэффициенты a, b и c не обращаются одновременно в нуль), является плоскость. Поверхностью второго порядка называют геометрическое место точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

где предполагается, что хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} – ненулевой. Например, уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяет эллипсоид с центром в начале координат, а уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – конус.

Отметим особо, что в аналитической геометрии эффективно используется такой мощный и удобный математический аппарат как *векторная алгебра*.

Понятия направленного отрезка и вектора. Проекции вектора на координатные оси. Координаты вектора

Рассмотрим определение вектора. Для получения дополнительной информации о векторах и их свойствах можно обратиться, например, к работам [18,23,29].

Пусть на плоскости даны две произвольные точки A и B. Если они не совпадают, то задают некоторый ненулевой отрезок. Возьмём теперь одну из точек, например A, в качестве начала, а другую, B, - в качестве конца отрезка. Такой отрезок уже называется *направленным отрезком*. В случае, когда A и B совпадают, образованный этими точками направленный отрезок называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать символом $\overrightarrow{AB}$.

Под *длиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ понимается длина одноимённого ненаправленного отрезка AB при выбранной единице масштаба. Длину $\overrightarrow{AB}$ обычно обозначают $|\overrightarrow{AB}|$ и называют *модулем* этого направленного отрезка.

Два ненулевых отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если лучи AB и CD сонаправлены (противоположно направлены) [21,22,29].

В [21] приводится также другое определение сонаправленных векторов, эквивалентное данному: ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на параллельных прямых, называются *сонаправленными*, если фигура $ABDC$ – трапеция или параллелограмм. Ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если один из лучей AB и CD целиком содержит другой луч.

Про сонаправленные отрезки говорят, что они имеют *одинаковое направление*. Нулевой отрезок считается сонаправленным любому направленному отрезку. Величины, которые характеризуются не только численным значением (как, например, длина отрезка), но и направлением, относят к *векторным величинам*. В противоположность им *скалярной величиной*, или *скаляром*, называется такая величина, которая не обладает направлением.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, или *эквивалентными*, если они сонаправлены и имеют одну и ту же длину [21]. Все нулевые направленные отрезки считаются равными.

В [29] два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если обычные отрезки AD и CB имеют общую середину (сделайте иллюстрирующий рисунок самостоятельно). В учебнике А.В.Погорелова [22] два вектора называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ называются *противоположными*.

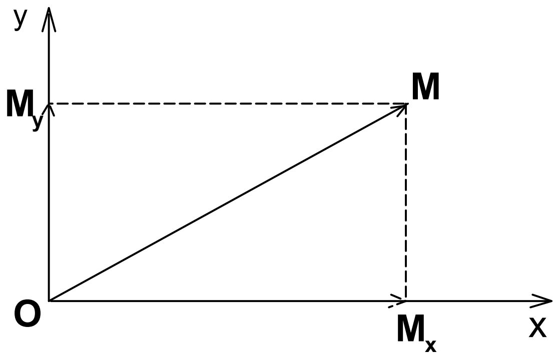
Вектор плоскости (или пространства) – это множество *всех равных между собой* направленных отрезков. Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ порождает вектор $\vec{a}$, то пишут $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Часто вектор и порождающий его направленный отрезок обозначаются одинаково: $\overrightarrow{AB}$. Построение направленного отрезка $\overrightarrow{CD}$ такого, что $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$, называется *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки C*. Можно доказать, что от любой точки плоскости или пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один [23].

Отметим, что зачастую в учебных пособиях для школьников [22,27] *вектором* для краткости называют сам направленный отрезок (равные направленные отрезки отождествляют и считают одним направленным отрезком). Так, вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным вектором*, или *ортом* (сокращение от слова «ориентация»). Правильнее было бы сказать, что *ортом* называется вектор, у которого длина порождающего его направленного отрезка равна единице.

В прямоугольной системе координат на плоскости единичные векторы осей OX, OY принято обозначать $\vec{i}, \vec{j}$. *Ортом ненулевого вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется единичный вектор в направлении $\overrightarrow{AB}$: $\vec{e}_{\overrightarrow{AB}} = \overrightarrow{AB}\Big/\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Введённое определение вектора определяет так называемый *свободный вектор*. У него есть начало и конец, но они не прявязаны к конкретным точкам плоскости (пространства). Кроме свободных векторов, т.е. векторов, начальная точка которых может быть выбрана свободно, в механике и физике часто рассматриваются векторы, которые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки – точки приложения. Такие векторы называются *связанными* и считаются равными, если они имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения. В основу векторного исчисления положено понятие свободного вектора [4].

По отношению к вектору вводятся понятия его *геометрической и алгебраической проекций* на координатные оси. Так, *геометрической проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$, где точки A' и B' являются соответственно проекциями точек A и B на данную ось. Геометрическая проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX обозначается $Пр_{OX}\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. *Алгебраической проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось OX (*величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$) называется длина вектора $\overrightarrow{A'B'}$, взятая со знаком плюс или минус, в зависимости от того, совпадает ли направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ с положительным направлением оси OX или противоположно ему. Аналогично вводятся понятия геометрической и алгебраической проекций вектора на ось OY.



Пусть $M(x_M;y_M)$ - произвольная точка плоскости. Тогда направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в выбранной системе координат. Геометрическими проекциями вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатные оси OX и OY будут соответственно векторы $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$. Заметим, что координаты x_M и y_M точки M , по сути, являются алгебраическими величинами этих проекций. Их называют прямоугольными *координатами вектора* $\overrightarrow{OM}$ и обозначают: $\overrightarrow{OM}\ \{x_M;y_M\}$. Итак, если начало вектора совпадает с началом координат, то координаты этого вектора соответственно равны координатам его конечной точки.

В общем случае *координаты вектора* в прямоугольной системе координат определяются следующим образом [21,22]. Пусть некоторый вектор имеет началом точку $A(x_1;y_1)$, а концом – точку $B(x_2;y_2)$. Тогда *координатами* этого вектора $\overrightarrow{AB}$ будем называть числа x_2-x_1 и y_2-y_1. То есть координаты вектора суть его *алгебраические проекции* на оси Ox и Oy соответственно. Координаты нулевого вектора равны нулю. Как теорема доказывается утверждение [21]: два вектора равны тогда и только тогда, когда их координаты соответственно равны.

Забегая вперёд, скажем, что каждый вектор представим единственным образом в виде суммы его геометрических проекций на координатные оси (понятия суммы векторов и разложения по базису вводятся ниже), например:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_x}+\overrightarrow{OM_y}\ ,$$

или, в координатах,

$$\overrightarrow{OM}=x_M\cdot\vec{i}+y_M\cdot\vec{j}\ ,$$

причём такое разложение единственно.

Отметим, что понятие вектора и связанные с ним определения обобщаются на случай пространства.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ находится по формуле расстояния на плоскости между двумя точками (будет доказана ниже) [16]:

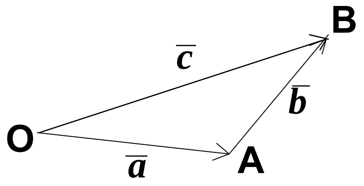
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

(В пространстве длина вектора $\overrightarrow{AB}$ с концами в точках $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ находится по аналогичной формуле

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .)$$

Арифметические операции над векторами и их свойства

Над векторами, как и над числами, вводятся такие *арифметические операции* как сложение, вычитание и умножение на число.



Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, получаемый следующим построением: из произвольной точки O строим вектор $\overrightarrow{OA}$, равный $\vec{a}$; из точки A, как из начала, строим вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OB}$ есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Это построение – см. рис. – называют *правилом треугольника*. Правило треугольника можно сформулировать и таким образом: для любых трёх точек A, B и C имеет место векторное равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Существует и другое известное правило для сложения неколлинеарных вектров: *правило параллелограмма* [18,21,22,29].

Вычитание векторов есть действие, обратное сложению. *Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Обозначение: $\vec{c}=\ \vec{a}-\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a}$-$\vec{b}$ можно так: приведём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу O, т.е. построим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Тогда разностью $\vec{a}$-$\vec{b}$ будет вектор $\overrightarrow{BA}=\vec{c}$. Вектор, равный $\vec{0}-\vec{a}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $(-\vec{a})$.

Умножить ненулевой вектор $\vec{a}$ (множимое) *на действительное число* $k \neq 0$ (множитель) значит построить такой вектор $\vec{c}$ (произведение), длина которого равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $k>0$, и противоположно ему, если $k<0$. Если же k=0, то произведение есть нуль-вектор. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Разделить вектор $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ значит найти такой вектор, который, будучи умножен на число k, даст в произведении вектор $\vec{a}$. Обозначение: $\dfrac{\vec{a}}{k}$.

В учебнике А.В.Погорелова [22] *суммой* (*разностью*) векторов $\vec{a}\ \{a_1;a_2\}$ и $\vec{b}\ \{b_1;b_2\}$ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $\{c_1;c_2\}=\{a_1+b_1;a_2+b_2\}$ ($\{c_1;c_2\}=\{a_1-b_1;a_2-b_2\}$). *Произведением* ненулевого вектора $\vec{a}\ \{a_1;a_2\}$ *на действительное число* k называется вектор $\vec{c}$ с координатами $\{ka_1;ka_2\}$.

Введённые выше операции над векторами обладают следующими *свойствами* (доказательство можно найти, например, в [21]). Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - векторы, k,m - произвольные действительные числа.

1. Свойства *нулевого вектора*: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.
2. *Перестановочное* свойство: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $k\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot k$.
3. Свойства *сочетательности*: $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
4. Свойство *распределительности* по отношению к числовому множителю:

$$(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$$

5. Свойство *распределительности* по отношению к векторному множителю:

$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}.$$

На практике часто при работе с векторами геометрические операции сложения (вычитания) векторов, их умножения на число и другие действия над ними заменяются арифметическими действиями над координатами этих векторов.

Коллинеарные векторы. Условие коллинеарности. Разложение по базису

Ненулевые векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной и той же прямой, называются *коллинеарными* [21,22]. Обозначение: $\vec{a}\parallel\vec{b}$. Таким образом, коллинеарные векторы могут иметь либо одинаковое направление (*сонаправленные* векторы: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) или противоположные (*противоположно направленные* векторы: $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$). Так как нуль-вектор $\overrightarrow{AA}$ лежит на любой прямой, проходящей через точку A, то его принято считать коллинеарным с любым вектором.

В пространстве векторы называются *компланарными*, если они лежат на параллельных или совпадающих плоскостях (т.е. если они параллельны одной плоскости [29]).

Доказывается [22], что если вектор $\vec{a}$ - ненулевой, то всякий вектор $\vec{b}$, *коллинеарный* с ним, можно представить единственным образом в виде произведения вектора $\vec{a}$ на некоторое число k:

$$\vec{b}=k\cdot\vec{a}$$

(*условие коллинеарности*).

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ на плоскости может быть записано в виде условия пропорциональности их соответствующих координат:

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}(=k).$$

При этом следует иметь в виду, что одноимённые координаты (x_2 и x_1, или y_2 и y_1) этих векторов могут одновременно обращаться в нуль, и тогда указанную выше пропорцию надо понимать в условном смысле, а именно как иносказательную запись системы $\begin{cases}x_2=k\cdot x_1\\ y_2=k\cdot y_1.\end{cases}$ Например, векторы $\vec{a}\{1;0\}$ и $\vec{b}\{2;0\}$ - коллинеарны.

<u>Теорема</u>. Точка C принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны (без доказательства).

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ называется векторное выражение вида

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+...+k_n\vec{a}_n,$$

где коэффициенты $k_1,k_2,...,k_n$ - произвольные действительные числа.

Пара любых двух неколлинеарных векторов плоскости называется *базисом векторов плоскости*.

Тройка некомпланарных векторов пространства называется *базисом векторов пространства.*

<u>Теорема</u> (о разложении по базису на плоскости). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащие в одной плоскости, неколлинеарны, то для любого вектора $\vec{c}$ той же плоскости существуют действительные числа k_1 и k_2 такие, что

$$\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b},$$

причём эти числа определяются единственным образом (доказательство можно найти, например, в [22]).

То есть любой вектор $\vec{c}$ плоскости можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ этой же плоскости. Такое представление называют также *разложением вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$*. При этом числа k_1 и k_2 называются *координатами* вектора $\vec{c}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и пишут $\vec{c}=\{k_1;k_2\}$.

Теперь, когда определено разложение вектора по базису, уточним необходимое и достаточное условие равенства векторов. Два вектора являются равными тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе. Обычно в качестве базиса выбираются орты координатных осей.

<u>Теорема</u> (о разложении по базису в пространстве). Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарные векторы пространства, то для любого вектора $\vec{l}$ пространства существуют действительные числа k_1, k_2, k_3 такие, что

$$\vec{l} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c},$$

причём эти числа определяются единственным образом.

Доказывается [21,16], что каждая координата суммы (разности) двух векторов равна сумме (разности) соответствующих координат этих векторов, а также каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число:

$$\{a_1; a_2\} + \{b_1; b_2\} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2\},$$
$$\{a_1; a_2\} - \{b_1; b_2\} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2\},$$
$$k \cdot \{a_1; a_2\} = \{ka_1; ka_2\}.$$

Два ненулевых вектора называются *перпендикулярными,* или *ортогональными,* если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор можно считать ортогональным любому вектору.

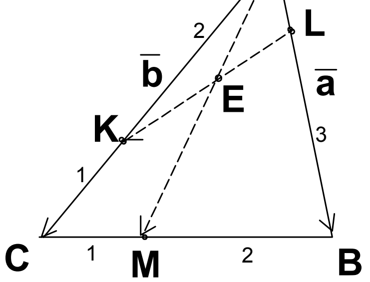
В [16] векторы называются *перпендикулярными*, если угол между ними (величина угла – *авт.*) составляет 90^0.

Доказывается (например, в [21] это сделано без использования понятия скалярного произведения; а ниже в пункте «Угол между прямыми на плоскости» и в [16] – с использованием), что ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ на плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Аналогично, в пространстве ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Многие планиметрические и стереометрические задачи курса элементарной геометрии могут быть решены с привлечением свойств векторов. В этом случае говорят, что при решении задачи применяются *методы векторной алгебры.* Часто такого рода способы решения оказываются короче и эффективнее других способов. Рассмотрим в качестве примеров несколько задач, решив их *векторным* способом.

<u>Пример 1</u>. На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что $BM = 2 \cdot CM$. Точки K и L выбраны на сторонах AC и AB соответственно так, что $AK = 2 \cdot CK$, $BL = 3 \cdot AL$. В каком отношении прямая KL делит отрезок AM ?



Решение. Введём в рассмотрение два вектора: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Также введём две числовые неизвестные x и y такие, что выполняются векторные равенства $\overrightarrow{AE} = x \cdot \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{LE} = y \cdot \overrightarrow{LK}$. По условию задачи, требуется найти отношение $\frac{AE}{EM}$. Разложим вектор $\overrightarrow{AE}$ двумя способами по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С одной стороны,

$$\overrightarrow{AE} = x \cdot \overrightarrow{AM} = x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) = x\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) = x\left(\vec{a} + \frac{2}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)\right) = \frac{x}{3}\vec{a} + \frac{2x}{3}\vec{b}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LE} = \frac{1}{4}\vec{a} + y \cdot \overrightarrow{LK} = \frac{1}{4}\vec{a} + y\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}\right) = \frac{1-y}{4}\vec{a} + \frac{2y}{3}\vec{b}.$$

В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{AE}$ по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{1-y}{4} \\ \frac{2x}{3} = \frac{2y}{3} \end{cases}$, откуда определяем $x = y = \frac{3}{7}$. Итак, $\frac{AE}{AM} = x = \frac{3}{7}$, поэтому искомое отношение $\frac{AE}{EM} = \frac{3}{4}$.

Ответ: в отношении $3:4$.

<u>*Пример 2*</u> [МГАХМ-1997]. *Даны вершины треугольника* $A(4;5;0)$, $B(3;3;-2)$, $C(2;2;6)$. *Найти координаты точки пересечения стороны* BC *с биссектрисой угла* A.

Решение. 1) Найдём длины сторон AB и AC:

$$AB = \sqrt{(3-4)^2 + (3-5)^2 + (-2-0)^2} = 3,\ AC = \sqrt{(2-4)^2 + (2-5)^2 + (6-0)^2} = 7.$$

Пусть D - искомая точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC. Тогда, по теореме о биссектрисе AD имеем: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$. Так как $\overrightarrow{BD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ и $BD = \frac{3}{10}BC$, то $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{10}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{10}\{-1;-1;8\} = \left\{-\frac{3}{10};-\frac{3}{10};\frac{12}{5}\right\}$.

2) Для того чтобы найти координаты точки D, достаточно сложить координаты вектора $\overrightarrow{BD}$ с координатами точки B (поскольку если, например, O - начало координат, то $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$):

$$\overrightarrow{OD} = \{3;3;-2\} + \left\{-\frac{3}{10};-\frac{3}{10};\frac{12}{5}\right\} = \{2,7;2,7;0,4\}.$$

Ответ: точка пересечения имеет координаты $\{2,7;2,7;0,4\}$.

Пример 3 [Географ.-1996; ГАУ-1997]. *Даны два вектора*

$$\vec{u} = \{b(a-2);1-2b;-b(a-2)\} \text{ и } \vec{v}\{a-2;b-2;2-a\}.$$

1) Найти все значения параметров a *и* b*, при которых эти векторы будут коллинеарны, но не равны. 2) В случае* $b=a$ *найти все значения параметра* a*, при которых эти векторы взаимно перпендикулярны.*

Решение.

1) Пусть $a=2$. Тогда векторы имеют вид: $\vec{u}\{0;1-2b;0\}$ и $\vec{v}\{0;b-2;0\}$.

Так как нулевой вектор по определению коллинеарен любому ненулевому вектору, то рассмотрим случай, когда один из векторов – нулевой, а другой – нет: если $\vec{u}=\vec{0}$, т.е. $b=\frac{1}{2}$, то $\vec{v}\left\{0;-\frac{3}{2};0\right\}$ - векторы коллинеарны, но не равны;

если $\vec{v}=\vec{0}$, т.е. $b=2$, то $\vec{u}\{0;-3;0\}$ - векторы коллинеарны, но не равны.

Пусть теперь оба вектора – ненулевые, тогда они будут коллинеарны, и осталось исключить случай их равенства. Таким образом, имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-2b \neq b-2 \\ 1-2b \neq 0 \\ b-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b \notin \left\{\frac{1}{2};1;2\right\}.$$

Пусть теперь $a \neq 2$. Тогда оба вектора – ненулевые. Запишем условие коллинеарности в виде пропорциональности их координат:

$$\frac{b(a-2)}{a-2} = \frac{1-2b}{b-2} = \frac{-b(a-2)}{2-a},$$

или, после сокращения на $a-2 \neq 0$, $b=\frac{1-2b}{b-2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1. \end{array}\right.$

В случае $b=1$ векторы равны, а случай $b=-1$ удовлетворяет условиям задачи.

2) Если $a=b$, то векторы приобретают следующий вид:

$$\vec{u}\{a(a-2);1-2a;-a(a-2)\} \text{ и } \vec{v}\{a-2;a-2;2-a\}.$$

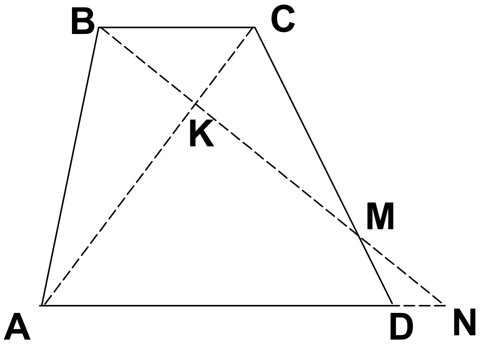
Согласно условию перпендикулярности, получаем уравнение:

$$a(a-2)^2+(1-2a)(a-2)+a(a-2)^2=0 \Leftrightarrow (a-2)(2a^2-6a+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=\left(3\pm\sqrt{7}\right)/2. \end{array}\right.$$

Значение $a=2$ не подходит, поскольку один из векторов, а именно $\vec{v}$, оказывается нулевым. При оставшихся двух значениях $a=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$ оба вектора ненулевые. *Ответ:* 1) векторы коллинеарны, но не равны, если $\begin{cases} a=2 \\ b \neq 1 \end{cases}$ или

$\begin{cases} a \neq 2 \\ b = -1; \end{cases}$ 2) если $a = b$, то векторы перпендикулярны при $a = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Пример 4 [ВМК-1992,устн.]. *В трапеции $ABCD$ точка M принадлежит боковой стороне CD, $\overrightarrow{CM} = 3 \cdot \overrightarrow{MD}$, K - точка пересечения диагонали AC и отрезка BM, $\overrightarrow{AK} = 3 \cdot \overrightarrow{KC}$. Найти такие числа α и β, чтобы имело место векторное равенство:*



$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + \beta \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Решение. Продлим отрезок BM за точку M до его пересечения в точке N с прямой AD. Воспользуемся свойством подобия образовавшихся при этом треугольников. Так как $\Delta BCK \backsim \Delta NAK$ и $\overrightarrow{AK} = 3 \cdot \overrightarrow{KC}$, то $\overrightarrow{AN} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$. Так как $\Delta BCM \backsim \Delta NDM$ и $\overrightarrow{CM} = 3 \cdot \overrightarrow{MD}$, то $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Следовательно, $\overrightarrow{AD} = \frac{8}{3}\overrightarrow{BC}$. Из равенства $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ получаем, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} =$ $= \overrightarrow{AC} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}$, откуда $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3/8. \end{cases}$ *Ответ*: $\alpha = 1$, $\beta = -3/8$.

Скалярное произведение двух векторов и его свойства

Углом между двумя ненулевыми *направленными отрезками* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ с общим началом A называется угол $\angle BAC$. *Углом между* любыми двумя ненулевыми *векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между порождающими их направленными отрезками с общим началом.

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется действительное число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла величины φ между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

($0 \le \varphi \le 180^0$). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены (в частности, если один из них или оба – нулевые), то будем считать, что угол между ними нулевой. Если векторы противоположно направлены, то величина угла между ними равна 180^0.

Для скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используется также обозначение $(\vec{a},\vec{b})$. В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ выражается формулой: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

В учебнике А.В.Погорелова [22] *скалярным произведением* векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ называется число $x_1x_2+y_1y_2$. Следует отметить, что, в отличие от данного опредеделения, сформулированное выше общее определение скалярного произведения является общепринятым в современной математике.

В пространстве в прямоугольной системе координат $Oxyz$ скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ выражается аналогичной формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Из приведённого определения следует, что скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$ положительно, если (и только если) угол φ - острый; отрицательно, если (и только если) угол φ - тупой; два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Переписав данное равенство в виде $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, получаем формулу для определения величины угла между двумя векторами.

Свойства скалярного произведения

1. *Перемеситительное свойство*: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. *Распределительное свойство*: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
3. *Сочетательное свойство* относительно скалярного множителя:

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

5. Косинус угла (величины φ) между векторами $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ вычисляется по формуле: $\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

В пространстве соответственно имеем: $\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

6. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то их скалярное произведение равно произведению их длин (если векторы сонаправлены) или отличается от него знаком (если векторы противоположно направлены).

7. Условие перпендикулярности (ортогональности) ненулевых векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

В пространстве соответственно имеем: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Доказательство приведённых свойств можно найти, например, в [18,16].

Рассмотрим в качестве примера задачу на доказательство алгебраического неравенства, но решим её не алгебраическим, а векторным способом.

Пример 1. *Пусть* $x+y+z=1$. *Доказать, что* $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$.

Доказательство. Данное неравенство является следствием известного свойства скалярного произведения двух векторов: $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \leq |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|$ (которое вытекает непосредственно из определения скалярного произведения). Для доказательства достаточно выбрать в качестве векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в последнем неравенстве $\vec{a}\{x;y;z\}$ и $\vec{b}\{1;1;1\}$:

$$|x\cdot 1+y\cdot 1+z\cdot 1| \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2} \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{3}.$$

Пример 2 [МИСиС-1997]. *Вычислить площадь четырёхугольника с вершинами* $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(8;4)$ *и* $D(4;8)$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой для вычисления площади выпуклого четырёхугольника $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\varphi$, где φ - величина угла между диагоналями AC и BD, найдём предварительно φ и длины диагоналей. Применим векторный подход. Определим координаты векторов $\overrightarrow{AC}\{7;2\}$ и $\overrightarrow{BD}\{1;7\}$. Тогда $|AC|=\sqrt{7^2+2^2}=\sqrt{53}$, $|BD|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$, $\cos\varphi=\frac{21}{\sqrt{53}\sqrt{50}}$ и, следовательно, $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{47}{\sqrt{53}\sqrt{50}}$. Подставляя, окончательно находим, что $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\sqrt{50}\cdot\frac{21}{\sqrt{53}\sqrt{50}}=\frac{47}{2}$ (*кв.ед.*).

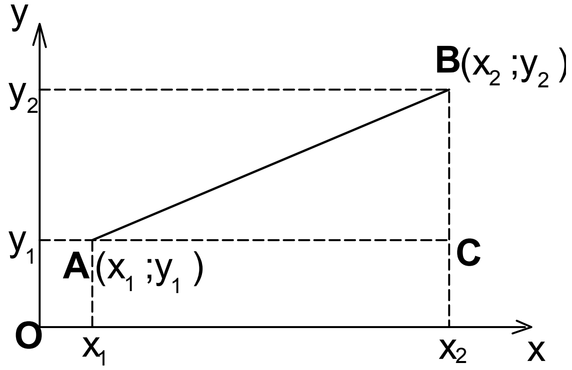
Формула расстояния на координатной плоскости. Уравнение окружности. Неравенство круга

Пусть на координатной плоскости Oxy даны две точки: точка A с координатами (x_1,y_1) и точка B с координатами (x_2,y_2). С помощью теоремы Пифагора выведем формулу, позволяющую выразить расстояние между точками A и B (длину отрезка AB) через известные координаты этих точек.

Теорема (формула расстояния между двумя точками в прямоугольной системе координат). В прямоугольной системе координат расстояние d *между двумя точками* $A\,(x_1,y_1)$ *и* $B\,(x_2,y_2)$ *вычисляется по формуле*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим вначале общий случай, когда точки A и B имеют различные абсциссы ($x_1 \neq x_2$) и ординаты ($y_1 \neq y_2$). Проведём через точки A и B прямые, параллельные осям координат, и рассмотрим образовавшийся при этом треугольник ABC. Очевидно, он является прямоугольным, причём длины его катетов равны $AC = |x_2 - x_1|$ и $BC = |y_2 - y_1|$, а длина его гипотенузы AB равна искомому расстоянию между точками A и B.



Применим к треугольнику ABC теорему Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Следовательно, искомое расстояние d между двумя точками A и B находится по следующей формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,, \qquad (1)$$

что и требовалось доказать.

Убедимся теперь в том, что эта формула остаётся верной и во всех других случаях взаимного расположения точек A и B. Пусть, например, абсциссы точек различны ($x_1 \neq x_2$), а ординаты совпадают ($y_1 = y_2$). Тогда треугольник ABC вырождается в отрезок, параллельный оси абсцисс, и расстояние между точками A и B равно $d = |x_2 - x_1|$. Тот же результат получим и по формуле (1), подставив в неё координаты точек A и B. Аналогично рассматривается случай, когда абсциссы точек равны ($x_1 = x_2$), а ординаты различны ($y_1 \neq y_2$).

Наконец, если у точек A и B равны как абсциссы, так и ординаты ($x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$), то в этом случае точки просто совпадают и, следовательно, расстояние между ними становится равным нулю. Тот же результат даёт в этом случае и формула (1).

Таким образом, доказана справедливость формулы во всех возможных случаях взаимного расположения точек A и B на плоскости.

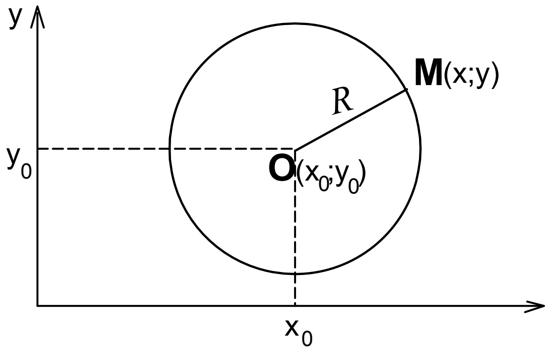
Напомним, что *уравнением* плоской геометрической *фигуры* в декартовых координатах называется такое уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры (и только они).

Выведем теперь уравнение окружности радиуса R с центром в точке O в заданной прямоугольной системе координат.

Теорема (уравнение окружности в прямоугольной системе координат). В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса R с *центром в точке* O *с координатами* $(x_0;y_0)$ *имеет вид*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Доказательство. Рассмотрим на плоскости в прямоугольной (декартовой) системе координат Oxy окружность радиуса R с центром в точке $O(x_0;y_0)$. Требуется найти уравнение, которому удовлетворяли бы координаты любой точки этой окружности. Обозначим $M(x;y)$ - произвольная точка, принадлежащая окружности.



Так как, по определению, окружность – это множество всех точек плоскости, удалённых на заданное (положительное) расстояние R от данной точки $O(x_0;y_0)$, то, применяя формулу расстояния между точками на плоскости, получим $MO=R$, т.е., переходя к координатам,

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R.$$

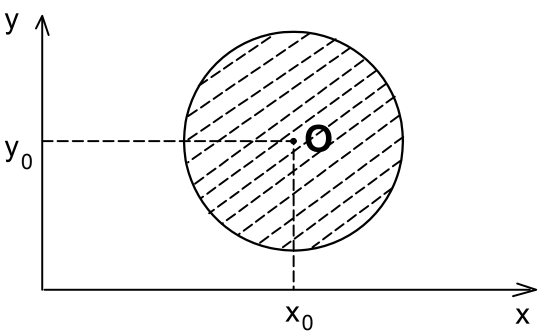
Возводя это равенство в квадрат, приходим к искомой формуле уравнения окружности *в стандартном виде:* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Замечание 1. При решении задач, связанных с окружностями, часто уравнение окружности первоначально бывает задано *не в стандартном*, а в произвольном виде, например,

$$x^2-2(x_0+y_0)xy+y^2+(x_0^2+y_0^2-R^2)=0.$$

В этом случае для определения положения центра и величины радиуса следует преобразовать уравнение окружности (или неравенство круга) к стандартному виду выделением полных квадратов по переменным x и y.

Замечание 2.



Неравенство $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2$ задаёт на плоскости *круг радиуса* R *с центром в точке* $(x_0;y_0)$. На рисунке круг показывается штриховкой.

Строгое неравенство

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2,$$

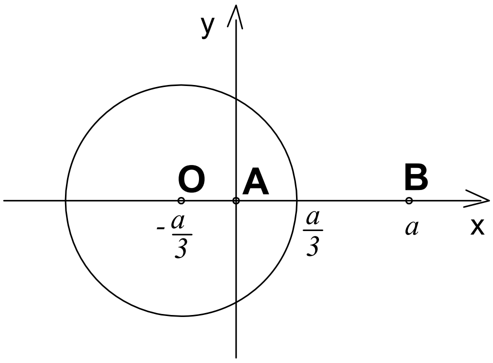
в отличие от нестрогого, определяет на плоскости так называемый *открытый круг*, граница которого (окружность радиуса R с центром в точке $(x_0;y_0)$) не принадлежит ему и на рисунке изображается пунктиром. Соответственно, неравенство $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>R^2$ задаёт на плоскости внешнюю часть круга.

Замечание 3. Если в уравнении окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ справа находится нуль, т.е. R=0, то данное уравнение будет определять одну точку $O\,(x_0;y_0)$. При этом говорят, что окружность *вырождается в точку*.

Если же после приведения уравнения к стандартному виду в правой части оказалось отрицательное число, то данное уравнение не представляет никакого геометрического образа (задаёт на плоскости пустое множество точек).

Пример 1. *На плоскости даны две точки. Найти множество всех точек плоскости, расстояние от каждой из которых до заданных двух относятся как* $1:2$.

Решение. Будем решать задачу методом координат. Пусть длина отрезка, соединяющего данные точки A и B, равна a. Введём систему координат так, чтобы первая точка имела координаты $A(0;0)$, а вторая - $B(a;0)$.



Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомому ГМТ, тогда эта точка удовлетворяет условиям задачи тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2}$, т.е. $2\cdot MA=MB$. Переходя к координатам, получаем уравнение

$$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}\ .$$

После преобразований приходим к уравнению $\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2a}{3}\right)^2$, что задаёт окружность, изображённую на рисунке. *Ответ:* искомое ГМТ представляет собой окружность, центр которой лежит на прямой, содержащей точки A и B, на расстоянии, равном трети длины отрезка AB, от точки A в сторону от точки B, а радиус окружности равен двум третям расстояния AB.

Пример 2 [ВШБ МГУ-2003,апр.]. *Найти координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами* $K(-5;-1)$, $L(-2;0)$, $M(2;-2)$.

Решение. Пусть R - радиус окружности, а $(x;y)$ - её центр. Согласно условиям задачи, имеем систему трёх алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y+1)^2=R^2\\(x+2)^2+y^2=R^2\\(x-2)^2+(y+2)^2=R^2.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем уравнение-следствие $6x+2y+22=0$. Вычитая из третьего уравнения системы второе, получаем ещё одно следствие $-8x+4y+4=0$. Из двух последних уравнений находим координаты центра $\begin{cases}x=-2\\y=-5,\end{cases}$ и тогда $R=5$.

Способы задания прямой на плоскости

Как известно, прямая линия – одно из основных понятий геометрии. При систематическом изложении геометрии прямая линия обычно принимается за одно из исходных понятий, которое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии.

Выше отмечалось, что в аналитической геометрии прямая линия – это алгебраическая линия первого порядка, задаваемая в декартовой (прямоугольной) системе координат уравнением первой степени. Рассмотрим основные способы задания прямой на плоскости в прямоугольной системе координат с помощью уравнения.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}\{a;b\}$

Теорема. Пусть точка $M_0(x_0;y_0)$ лежит на прямой m, перпендикулярной к ненулевому вектору $\vec{n}\{a;b\}$. Точка $M(x;y)$ лежит на прямой m тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \tag{1}$$

Доказательство. 1) *Необходимость*. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка прямой m. Покажем, что тогда координаты этой точки удовлетворяют равенству (1). Действительно, в этом случае векторы $\vec{n}\{a;b\}$ и $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ перпендикулярны, а значит, их скалярное произведение равно нулю. Выражая скалярное произведение этих векторов через их координаты, получим выполнение равенства (1).

2) *Достаточность*. Пусть для некоторой точки $M(x;y)$ выполняется равенство (1). Покажем, что тогда эта точка лежит на прямой m. В самом деле, левую часть равенства можно представить как скалярное произведение вектора $\vec{n}\{a;b\}$ на вектор $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$. Поскольку, в силу (1), это скалярное

произведение равно нулю, то это означает перпендикулярность указанных векторов. То есть прямая M_0M, проходя через точку M_0, перпендикулярна прямой, на которой лежит вектор $\vec{n}$. В силу единственности перпендикуляра, проведённого через заданную точку (M_0) к заданной прямой (той, что содержит вектор $\vec{n}$), прямая M_0M совпадёт с прямой m. Таким образом, точка $M(x;y)$ лежит на прямой m. Теорема доказана.

Замечание. Равенство (1) называется *уравнением* прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}\{a;b\}$. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной прямой, называется *нормальным вектором* прямой.

Общее уравнение прямой

Перепишем уравнение (1) в следующем виде: $ax+by-(ax_0+by_0)=0$ и обозначим число $-(ax_0+by_0)$ через c. Тогда получим уравнение

$$ax+by+c=0\,, \qquad (2)$$

которое называют *общим уравнением* прямой на плоскости. В этом уравнении предполагается, что $a^2+b^2\neq 0$ (поскольку вектор $\vec{n}$ – ненулевой). Если один из коэффициентов a или b обращается в нуль, то уравнение называется *неполным*. Если $a=0$, то прямая параллельна оси абсцисс, если же $b=0$, то прямая параллельна оси ординат. Если $c=0$, то такая прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$ параллельно вектору $\vec{l}\{m;n\}$

Пусть $\vec{l}\{m;n\}$ – вектор, имеющий ненулевые координаты, а точка $M_0(x_0;y_0)$ лежит на прямой, параллельной этому вектору. Если точка $M(x;y)$ также лежит на этой прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ и $\vec{l}\{m;n\}$ коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны, и справедливо равенство:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (3)$$

(равенство (3) понимается в смысле $(x-x_0)n=(y-y_0)m$; при этом m или n могут обращаться в нуль).

Уравнение (3) называют *каноническим уравнением* прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ параллельно вектору $\vec{l}\{m;n\}$. Вообще, любой ненулевой вектор, коллинеарный (параллельный) прямой, называется *направляю-*

щим вектором прямой. Нормальный и направляющий векторы прямой определяются неоднозначно, с точностью до коллинеарности.

Параметрические уравнения прямой.
Уравнение прямой в векторной форме

Обозначим в равенстве (3) равные отношения через t: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=t$.

Будем называть t – *параметром*. Если параметр t принимает последовательно все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то точка с координатами, задаваемыми системой двух уравнений $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$, будет перемещаться по прямой. Уравнения

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}, \text{ где } t\in R, \tag{4}$$

называются *параметрическими уравнениями* прямой.

Если обозначить через $\vec{r}\{x;y\}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой, $\vec{r}_0\{x_0;y_0\}$ – радиус-вектор данной точки $M_0(x_0;y_0)$ прямой, $\vec{l}\{m;n\}$ – направляющий вектор прямой, то уравнения (4) можно записать в векторной форме

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{l}\text{, где } t\in R,$$

(уравнение прямой *в векторной форме*)

Уравнение прямой, разрешённое относительно ординаты («с угловым коэффициентом»)

Пусть в уравнении $ax+by+c=0$ коэффициент $b\neq 0$, т.е. эта прямая непараллельна оси OY. Поделив на b, приведём уравнение к виду

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Обозначим $k=-\dfrac{a}{b}$, $p=-\dfrac{c}{b}$. Тогда получим уравнение

$$y=kx+p. \tag{5}$$

Число k называется *угловым коэффициентом* прямой (4), p – *свободным членом*. Доказывается, что в уравнении (5) число k – это тангенс угла величины α $(0\leq\alpha<\pi,\alpha\neq\pi/2)$, образованного этой прямой с положительным направлением оси OX, p – ордината точки пересечения этой прямой с осью OY [2,27].

Если этот угол острый ($0<\alpha<\pi/2$), то тангенс такого угла, а, следовательно, и угловой коэффициент k, будут положительны. Если угол – тупой ($\pi/2 < \alpha < \pi$), то угловой коэффициент k отрицателен. При $\alpha = 0$ ($k = 0$) получаем горизонтально расположенную прямую $y = p$, а при $p = 0$ имеем прямую, проходящую через начало координат. Если устремить значение k к бесконечности ($\alpha \to \pi/2$ слева или справа), то соответствующая прямая будет стремиться занять вертикальное положение, не достигая его, впрочем, ни при каком конечном значении k. Таким образом, в форме с угловым коэффициентом можно представить уравнение всякой прямой, кроме вертикальной (параллельной оси ординат).

Выведем *уравнение прямой с угловым коэффициентом* k*, проходящей через заданную точку* $M_0(x_0; y_0)$. Пусть прямая задаётся уравнением (5). Поскольку она проходит через точку M_0, то её координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_0 = kx_0 + p\,. \tag{6}$$

Вычитая из уравнения (5) равенство (6), получим искомое уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,. \tag{7}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

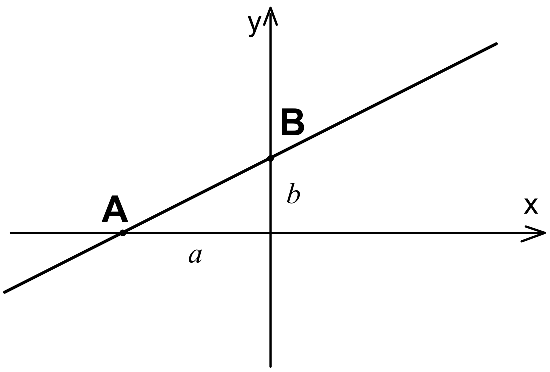
Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат Oxy, и заданы две точки: точка A с координатами $(x_1; y_1)$ и точка B с координатами $(x_2; y_2)$, причём $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Составим уравнение прямой, проходящей на плоскости через эти точки. Воспользуемся для этого уравнением (3). Действительно, искомую прямую можно рассматривать как прямую, проходящую через точку $A\ (x_1; y_1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \tag{8}$$

Если у точек A и B совпадают абсциссы ($x_1 = x_2$), а ординаты различны ($y_1 \neq y_2$), то прямая AB будет параллельна оси ординат и иметь уравнение вида $x = x_1$. Если же совпадают ординаты точек A и B ($y_1 = y_2$) при различных абсциссах ($x_1 \neq x_2$), то прямая AB будет параллельна оси абсцисс и, соответственно, иметь уравнение $y = y_1$.

Уравнение прямой в отрезках на координатных осях

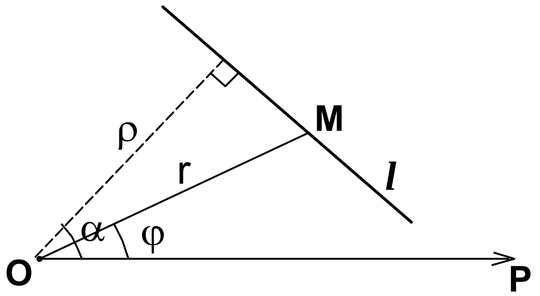
Пусть $A(a;0)$ и $B(0;b)$ – точки на осях координат, не совпадающие с началом координат, т.е. $a \neq 0, b \neq 0$. Составим уравнение прямой AB, ис-



пользуя уравнение (8). Получим: $\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}$, откуда $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. (9)

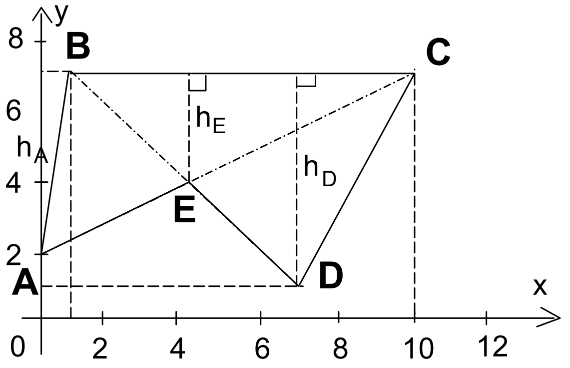
Уравнение (8) называется уравнением прямой в отрезках на координатных осях. Преимущество данного вида записи уравнения прямой заключается в том, что по виду уравнения легко определить положение прямой на плоскости по отношению к координатным осям.

Замечание. В *полярной системе координат* уравнение прямой имеет вид $r=\frac{\rho}{\sqrt{\cos(\alpha-\varphi)}}$, где ρ - расстояние от полюса до прямой, α - величина угла между полярной осью и перпендикуляром из полюса на прямую. Здесь $M(r,\varphi)$ - текущая точка на прямой l (без доказательства).



Пример [Эконом.-2001]. *На координатной плоскости заданы точки* $A(0;2)$, $B(1;7)$, $C(10;7)$, $D(7;1)$. *Найти площадь пятиугольника* $ABCDE$, *где* E *- точка пересечения прямых* AC *и* BD.

Решение. Найдём координаты точки E. Для этого составим уравнения прямых AC и BD. Будем искать уравнение прямой AC в виде $y=ax+b$.



Подставляя в это уравнение координаты точек A и C, приходим к системе двух линейных уравнений: $\begin{cases}2=a\cdot 0+b\\ 7=a\cdot 10+b,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}a=1/2\\ b=2,\end{cases}$ и уравнение прямой AC имеет вид $y=\frac{1}{2}x+2$. Аналогично находим уравнение прямой BD: $y=-x+8$. Теперь несложно найти координаты точки пересечения этих прямых: $\frac{1}{2}x+2=-x+8$ $\Leftrightarrow$ $x=4$ $\Rightarrow$ $y=4$. Итак, $E(4;4)$. Опустим теперь из точек A,E,D на прямую BC перпендикуляры соответственно h_A,h_E,h_D. Их длины легко вычисляются по известным координатам этих точек: $h_A=7-2=5$, $h_E=7-4=3$, $h_D=7-1=6$. Итак, $S_{ABCDE}=S_{ABC}+S_{BCD}-S_{BEC}=\frac{1}{2}(h_A+h_D-h_E)\cdot BC=\frac{1}{2}(5+6-3)\cdot 9=36$ $(кв.ед.)$.

Ответ: площадь пятиугольника равна 36$(кв.ед.)$.

Угол между прямыми на плоскости. Условия параллельности, совпадения, пересечения и перпендикулярности двух прямых

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости. Прямые могут совпадать, пересекаться в одной точке (под некоторым углом) или не пересекаться (быть параллельными в строгом смысле слова). Если прямые совпадают или параллельны, то угол между ними считается нулевым. Если прямые пересекаются, то под углом между ними будем понимать наименьший из двух углов, образующихся в пересечении. Таким образом, величина угла α между любыми двумя прямыми варьируется в пределах $0 \le \alpha \le 90^0$. Максимальный угол (величины, равной 90^0), достигается в случае пары перпендикулярных прямых.

Выведем формулу для нахождения величины угла между прямыми на координатной плоскости. Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$$l_1:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad l_2:\ a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Тогда $\vec{n}_1\{a_1;b_1\}$ и $\vec{n}_2\{a_2;b_2\}$ – нормальные вектора этих прямых. Воспользуемся тем, что величина α угла между прямыми равна величине угла между их нормальными векторами. Поскольку $0 \le \alpha \le 90^0$, то во всех случаях $\cos\alpha \ge 0$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \left|\cos\angle(\vec{n}_1;\vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}. \qquad (1)$$

Заметим, что величину α угла между прямыми можно было вычислить как величину угла между направляющими векторами $\vec{l}_1\{m_1;n_1\}$ и $\vec{l}_2\{m_2;n_2\}$ этих прямых. Поэтому имеем ещё одну формулу:

$$\cos\alpha = \left|\cos\angle(\vec{l}_1;\vec{l}_2)\right| = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Из (1), в частности следует, что прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0. \qquad (2)$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$l_1 :\ y = k_1x + p_1, \qquad l_2:\ y = k_2x + p_2,$$

то эти уравнения можно преобразовать к общему виду

$$l_1:\ k_1x - y + p_1 = 0, \quad l_2:\ k_2x - y + p_2 = 0,$$

и тогда, например, условие перпендикулярности (2) принимает вид:

$$k_1k_2 + 1 = 0.$$

Параллельность прямых l_1 и l_2 означает, что у этих прямых углы α_1 и α_2, образованные ими с положительным направлением оси абсцисс, одинаковы. Поэтому прямые параллельны тогда и только тогда, когда $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, т.е.

$$k_1 = k_2.$$

Величина α угла между двумя неперпендикулярными прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами k_1 и k_2, находится при помощи формулы

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|, \text{ т.е. } \alpha = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|$$

(докажите самостоятельно).

Для случая, когда обе прямые заданы общими уравнениями, из последней формулы, подставляя $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$, легко получить её аналог:

$$tg\alpha = \left|\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}\right|.$$

Итак, выпишем условия параллельности, совпадения, пересечения и перпендикулярности двух прямых на плоскости в виде сводной таблицы.

1) Прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами

$$l_1 : \; y = k_1 x + p_1, \qquad l_2 : \; y = k_2 x + p_2.$$

Условие параллельности прямых: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ p_1 \neq p_2. \end{cases}$

Условие совпадения прямых: $l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ p_1 = p_2. \end{cases}$

Условие пересечения прямых в одной точке: $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow k_1 \neq k_2$,

причём координаты точки пересечения являются решением системы

$$\begin{cases} y = k_1 x + p_1 \\ y = k_2 x + p_2. \end{cases}$$

Условие перпендикулярности прямых: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

2) Прямые заданы общими уравнениями

$$l_1 : \; a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \qquad l_2 : \; a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Условие совпадения прямых: $l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Условие пересечения прямых в одной точке: $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Замечание. В условиях параллельности и совпадения прямых, заданных на плоскости общими уравнениями, допускается обращение некоторых из коэффициентов a_2, b_2 или c_2, стоящих в знаменателях дробей, в нуль, при условии, что соответствующие коэффициенты a_1, b_1 или c_1 в числителях также равны нулю.

Пример. При каких α и β прямые $2y-(\alpha+1)x+\beta=0$ и $5x+3y-1=0$:

а) параллельны; б) перпендикулярны;

в) пересекаются в одной точке; г) совпадают?

Решение. а) Условие параллельности прямых: $-\dfrac{\alpha+1}{5} = \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{\beta}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -13/3 \\ \beta \neq -2/3. \end{cases}$

б) Условие перпендикулярности прямых: $-5(\alpha+1)+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \beta \in R. \end{cases}$

в) Условие пересечения в одной точке: $-\dfrac{\alpha+1}{5} \neq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq -13/3 \\ \beta \in R. \end{cases}$

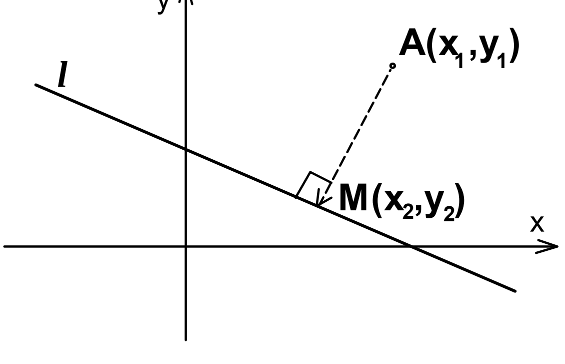
г) Условие совпадения прямых: $-\dfrac{\alpha+1}{5} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{\beta}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -13/3 \\ \beta = -2/3. \end{cases}$

Расстояние от точки до прямой$^{(*)}$

Пусть $A(x_1; y_1)$ – данная точка и l – прямая, уравнение которой имеет вид: $ax+by+c=0$. Обозначим через d расстояние от точки A до этой прямой.

Теорема. Расстояние от точки $A(x_1; y_1)$ до прямой $ax+by+c=0$ вычисляется по формуле: $d = \dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Доказательство. Пусть точка A не принадлежит прямой l. Проведём перпендикуляр AM на прямую l. Пусть $(x_2; y_2)$ – координаты точки M. Тогда ненулевой вектор $\overrightarrow{AM}\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$ коллинеарен нормальному вектору $\vec{n}\{a;b\}$ прямой l.



Значит, согласно условию коллинеарности векторов, существует такое число λ, что $x_2 - x_1 = \lambda a$ и

$y_2 - y_1 = \lambda b$. Тогда $x_2 = x_1 + \lambda a$, $y_2 = y_1 + \lambda b$.

Так как точка M лежит на прямой l, то её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой: $a(x_1 + \lambda a) + b(y_1 + \lambda b) + c = 0$, откуда $\lambda = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$.

Так как $\overrightarrow{AM}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\} = \{a\lambda; b\lambda\}$, то

$$d = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(a\lambda)^2 + (b\lambda)^2} = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

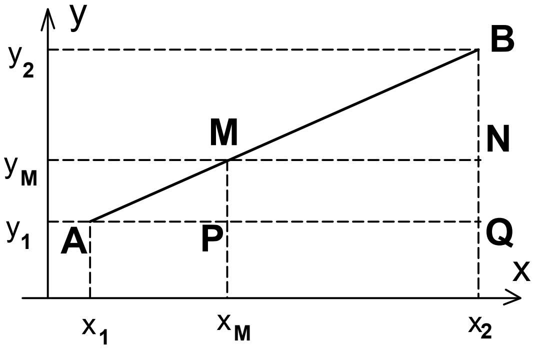
В случае, когда точка $A\,(x_1; y_1)$ лежит на прямой l, расстояние d считается равным нулю. Формула в этом случае также даёт правильный результат.

Докажите самостоятельно, что расстояние между параллельными прямыми, заданными уравнениями l_1 ($ax + by = c_1$), l_2 ($ax + by = c_2$), вычисляется по формуле $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим известную *задачу о точке, делящей отрезок на координатной плоскости в заданном отношении*. Пусть на плоскости даны две произвольные несовпадающие точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, и пусть $M(x_M; y_M)$ – точка отрезка AB, делящая его в заданном отношении λ, т.е. известно, что

$$\frac{MA}{MB} = \lambda \quad (\lambda \geq 0).$$



Покажем, что координаты точки M могут быть найдены по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Приведём векторное доказательство.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AM}\{x_M - x_1; y_M - y_1\}$ и $\overrightarrow{MB}\{x_2 - x_M; y_2 - y_M\}$. По условию, $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$, или в координатах: $\begin{cases} x_M - x_1 = \lambda(x_2 - x_M) \\ y_M - y_1 = \lambda(y_2 - y_M) \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y_M = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases}$.

В частности, середина отрезка AB ($\lambda = 1$) имеет координаты

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример [ВШБ МГУ-2003]. *Найти стороны параллелограмма $ABCD$, если известны координаты двух его противоположных вершин $A(-3;-6)$, $C(5;12)$ и точки $M(1;9)$, являющейся серединой стороны BC.*

Решение. Пусть точка B имеет координаты $(x;y)$. Так как M является серединой отрезка BC, то её координаты должны иметь вид $\left(\frac{x+5}{2};\frac{y+12}{2}\right)$. Приравнивая выражения $\frac{1}{2}(x+5)$ и $\frac{1}{2}(y+12)$ соответственно к известным координатам точки M, получаем систему уравнений $\begin{cases}(x+5)/2=1\\(y+12)/2=9\end{cases}$, откуда и находим координаты x и y точки $B(-3;6)$. Тогда по формуле расстояния между двумя точками определяем длины сторон параллелограмма:

$$AB=\sqrt{(-3-(-3))^2+(6-(-6))^2}=12\,,\ BC=\sqrt{(5-(-3))^2+(12-6)^2}=10\,.$$

Ответ: стороны параллелограмма: $AB=12$, $BC=10$.

3.11. Теоремы синусов, косинусов, тангенсов (котангенсов) для треугольника

Для всякого треугольника ABC со сторонами $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ и $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$ имеют место следующие теоремы.

Теорема *(синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е.*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

Расширенная теорема синусов. *Отношение любой стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно удвоенному радиусу описанной около треугольника окружности, т.е.*

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R\,.$$

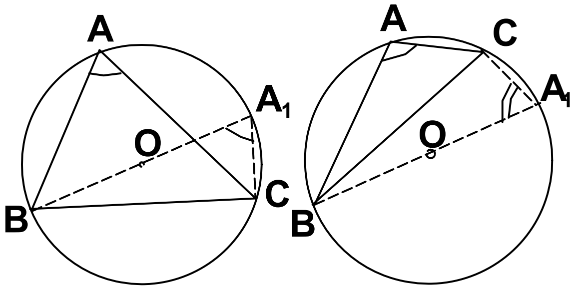
Заметим, что в учебно-методической литературе нередко первую из приведённых теорем не выделяют, и под теоремой синусов понимают расширенную теорему синусов.

Доказательство. Докажем, например, что $\frac{BC}{\sin\alpha}=2R$. Для доказательства проведём диаметр BA_1 описанной окружности и рассмотрим образовавшийся при этом прямоугольный треугольник A_1BC (в случае совпадения точек A_1 и C доказываемая формула, очевидно, верна). Возможны два случая: когда точки A и A_1 лежат по одну сторону от прямой BC, и когда эти точки лежат по разные стороны от этой прямой.

В обоих случаях, поскольку угол $\angle A_1CB$ этого треугольника прямой, имеем $BC = BA_1 \cdot \sin\angle BA_1C$. В первом случае, по свойству углов, вписанных в окружность, углы $\angle BA_1C$ и $\angle BAC$ равны, и поэтому их синусы также равны, следовательно, $BC = BA_1 \cdot \sin\angle BAC$, откуда получаем искомое равенство

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

Во втором случае величина угла $\angle BA_1C$ равна $\pi - \angle BAC$, и поэтому их синусы также равны, следовательно, и в этом случае получаем справедливость равенства $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. Равенства $\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$ и $\frac{AB}{\sin\gamma} = 2R$ доказываются аналогично.



Замечание 1. С помощью теоремы синусов достаточно просто доказать тот факт, что в треугольнике против большей (меньшей) стороны лежит больший (меньший) угол и наоборот, т.е. что неравенства $a \le b \le c$ и $\alpha \le \beta \le \gamma$ равносильны (см., например, [27]).

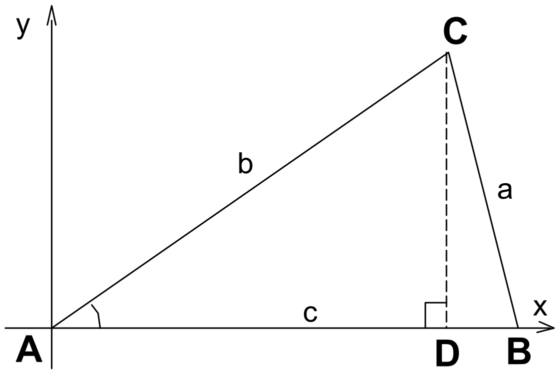
Замечание 2. Используя формулы $h_a = \frac{bc}{2R}$, $h_b = \frac{ac}{2R}$, $h_c = \frac{ab}{2R}$, легко показать, что неравенство $a \le b \le c$, равносильное неравенству $ab \le ac \le bc$, равносильно тем самым неравенству $h_a \ge h_b \ge h_c$.

Замечание 3. Можно доказать также (см., например, [27]) равносильность неравенств $a \le b \le c$ и $l_a \ge l_b \ge l_c$, где l_a, l_b, l_c – биссектрисы треугольника, проведённые к сторонам a, b, c.

Замечание 4. Имеем ещё один *признак равнобедренного треугольника:* если в треугольнике две высоты равны, то такой треугольник равнобедренный.

Теорема (косинусов). Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус угла между ними, т.е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



Доказательство. Докажем, например, справедливость первой из приведённых формул. Две другие доказываются аналогично. Воспользуемся *методом координат*. Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A, направив ось абсцисс вдоль стороны AB так, как это изображено на рисунке.

Тогда во введённой системе координат запишем координаты точек $A(0;0)$, $B(c;0)$, $C(b\cos\alpha;b\sin\alpha)$, $D(b\cos\alpha;0)$. По теореме Пифагора для треугольника BCD имеем: $BC^2 = BD^2 + CD^2 \Leftrightarrow a^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + (b\sin\alpha)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + c^2 + b^2\sin^2\alpha \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

В учебнике А.В.Погорелова [22], а также в [27] рассмотрено иное – векторное – доказательство.

Следствие 1. Если в треугольнике один из углов, например, угол γ, прямой, то имеем: $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. утверждение теоремы Пифагора является частным случаем теоремы косинусов для треугольников.

Следствие 2 *(критерий определения вида угла в треугольнике)*. Для того чтобы в треугольнике со сторонами a,b,c угол α напротив стороны a являлся а) острым, б) тупым, с) прямым,
необходимо и достаточно, чтобы квадрат стороны, противолежащей этому углу, был

а) меньше, б) больше, с) равен

сумме квадратов длин двух других сторон, т.е.

а) $a^2 < b^2 + c^2$, б) $a^2 > b^2 + c^2$, с) $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство. Запишем теорему косинусов по отношению к стороне a: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Отсюда, выражая косинус угла, получаем

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (0^0 < \alpha < 180^0).$$

Знак косинуса угла α определяется, таким образом, знаком числителя дроби в правой части равенства. Поэтому имеем:

а) угол α - острый $(0^0 < \alpha < 90^0) \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

б) угол α - тупой $(90^0 < \alpha < 180^0) \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

в) угол α - прямой $(\alpha = 90^0) \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Следствие 3 *(критерий определения вида треугольника по сторонам)*. Пусть $a = \max(a;b;c)$ (a - наибольшая сторона треугольника). Тогда для того чтобы треугольник со сторонами a,b,c являлся:

а) остроугольным, б) тупоугольным, с) прямоугольным,

необходимо и достаточно, чтобы квадрат наибольшей стороны был:

а) меньше, б) больше, с) равен

сумме квадратов длин двух других сторон, т.е.

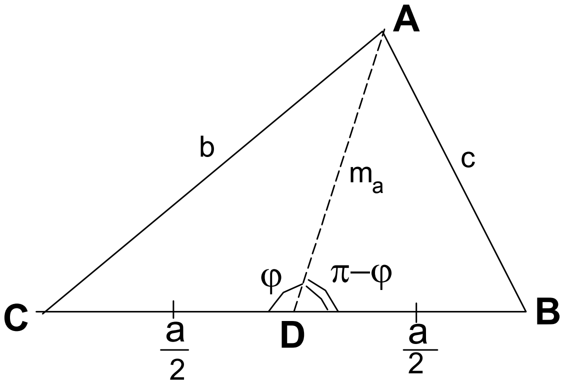
а) $a^2 < b^2 + c^2$, б) $a^2 > b^2 + c^2$, с) $a^2 = b^2 + c^2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что вид треугольника (остро-, тупо- или прямоугольный) определяется видом наибольшего угла в треугольнике, а против наибольшего угла в треугольнике лежит наибольшая сторона.

Следствие 4 (формула вычисления длины медианы треугольника по известным сторонам). В треугольнике длины медиан m_a, m_b, m_c, проведённых соответственно к сторонам a, b, c, вычисляются по формулам

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Доказательство. Докажем справедливость первой из формул. Две другие формулы доказываются аналогично.



Проведём медиану AD и обозначим $\varphi = \angle ADC$. Тогда $\angle ADB = \pi - \varphi$ как смежный с φ. По теореме косинусов для треугольников ACD и ABD имеем: $b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi$,

$$c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(\pi - \varphi).$$

Учитывая, что $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, и складывая эти два равенства, получим $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$, откуда и находим искомое соотношение для m_a.

С помощью формул из следствия 4 можно доказать следующие достаточно известные утверждения (см. их доказательство, например, в [27]):

1) стороны треугольника выражаются через длины его медиан по формулам $a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$, $c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$.

2) *Критерий определения вида треугольника по медианам*. Пусть m_c - наименьшая медиана треугольника. Тогда для того чтобы треугольник со сторонами a, b, c являлся:

а) остроугольным, б) тупоугольным, с) прямоугольным,

необходимо и достаточно, чтобы выражение $m_a^2 + m_b^2$ было:

а) меньше, б) больше, с) равно

выражению $5m_c^2$, т.е.

а) $m_a^2 + m_b^2 < 5m_c^2$, б) $m_a^2 + m_b^2 > 5m_c^2$, с) $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

3) В любом треугольнике неравенства $a \le b \le c$ и $m_a \ge m_b \ge m_c$ равносильны.

4) *Признак равнобедренного треугольника*: если в треугольнике две медианы равны, то этот треугольник – равнобедренный.

Заметим, что теорема косинусов верна и для вырожденного треугольника, т.е. для «треугольника», вершины которого лежат на одной прямой.

<u>Теорема</u> (косинусов для четырёхугольников). Пусть a,b,c,d – последовательные стороны четырёхугольника, m,n – длины его диагоналей, α,γ – величины двух противолежащих углов. Тогда $(mn)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cdot \cos(\alpha+\gamma)$.

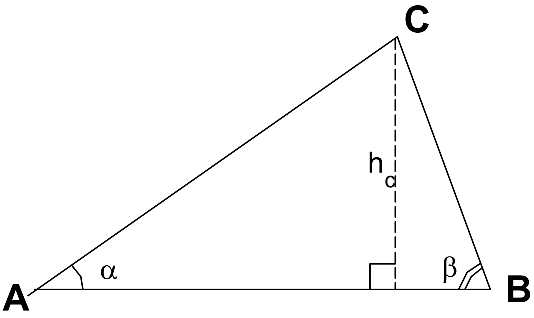
Доказательство этой теоремы, которую иногда называют обобщённой теоремой Птолемея, можно найти, например, в [16].

Следующая теорема имеет небольшое практическое значение, и поэтому её обычно не рассматривают в курсе элементарной математики средней школы. Однако для полноты изложения материала, приведём её здесь.

<u>Теорема</u> (тангенсов (котангенсов)). Во всяком треугольнике отношение суммы длин двух сторон к их разности равно отношению тангенса полусуммы противолежащих им углов к тангенсу их полуразности, т.е.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\dfrac{\alpha-\beta}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{tg\dfrac{\beta-\gamma}{2}}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{tg\dfrac{\alpha-\gamma}{2}}$$

(*формулы Региомонтана*).



Доказательство. Докажем справедливость первой из формул, поскольку две другие формулы доказываются аналогично.

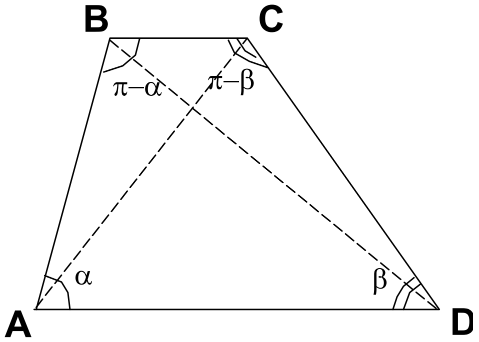
Пусть a,b – стороны треугольника, лежащие напротив углов α,β. Очевидно, что для сторон треугольника ABC справедливы соотношения $a = \dfrac{h_c}{\sin\beta}$, $b = \dfrac{h_c}{\sin\alpha}$. Поэтому имеем:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{h_c\left(\dfrac{1}{\sin\beta} + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)}{h_c\left(\dfrac{1}{\sin\beta} - \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\dfrac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Последнее соотношение можно было записать через котангенсы, и тогда получили бы вторую форму представления: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{ctg((\alpha-\beta)/2)}{ctg((\alpha+\beta)/2)}$.

Теорема доказана.

Пример 1 [ВМК-2000,апр.,устн.] *$ABCD$ - трапеция. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, BCD и ACD, равны R_1, R_2 и R_3 соответственно. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABD.*



Решение. Пусть x - искомый радиус. По теореме синусов для треугольников ABC и ACD имеем: $AC = 2R_1 \cdot \sin(\pi - \alpha)$ и $AC = 2R_3 \cdot \sin\beta$, откуда, приравнивая, находим: $R_1 \cdot \sin\alpha = R_3 \cdot \sin\beta$. $\quad(1)$

Аналогично, по теореме синусов для треугольников BCD и ABD получаем: $BD = 2R_2 \cdot \sin(\pi - \beta)$ и $BD = 2x \cdot \sin\alpha$, откуда, приравнивая, находим:

$$R_2 \cdot \sin\beta = x \cdot \sin\alpha . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим искомый радиус окружности $x = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$.

Пример 2 [ВМК-1998,устн.]. *В треугольнике длина медианы в 3 раза меньше длины стороны, к которой она проведена. Является ли этот треугольник остроугольным или тупоугольным?*

Решение. По условию, $m_a = a/3$. Воспользуемся формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} .$$

Приравнивая правые части, получаем равенство: $\frac{a}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2a = 3\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \Leftrightarrow 4a^2 = 9\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \Leftrightarrow 13a^2 = 18b^2 + 18c^2$.

Так как, очевидно, $13a^2 < 18a^2$, то получаем неравенство: $18a^2 > 18b^2 + 18c^2$, или $a^2 > b^2 + c^2$. Согласно критерию определения вида угла, угол напротив стороны a является тупым, следовательно, данный треугольник – тупоугольный.

3.12. Понятие площади плоской фигуры. Площади основных фигур. Длина окружности

Площадь плоской фигуры. Аксиомы площади. Площади квадрата и прямоугольника

Площадь – одна из основных числовых характристик, связанных с геометрическими фигурами. Не все фигуры имеют площадь. Если фигура имеет площадь, то она называется *квадрируемой*. Измерить площадь фигуры – это значит сравнить её с площадью некоторой фигуры, принятой за единицу измерения площади (обычно с площадью квадрата со стороной, равной масштабной единице). Строгое определение этого понятия даётся только в курсе высшей математики, поэтому здесь ограничимся интуитивным пониманием площади и рассмотрением простейших фигур.

В простейших случаях площадь плоской геометрической фигуры измеряется числом заполняющих её единичных квадратов, т.е. квадратов со стороной, равной единице длины. Назовём фигуру *простой*, если её можно разбить на конечное число треугольников. Примером простой фигуры является выпуклый многоугольник (он делится на треугольники диагоналями, проведёнными из одной вершины). О том, как определяется понятие площади в случае произвольной плоской фигуры, имеющей площадь, можно прочитать, например, в [21]. В курсе высшей математики доказывается, в частности, что если фигура ограничена на плоскости замкнутой непрерывной кривой, то она квадрируема. Фигуры (не обязательно равные), имеющие равные площади, называются *равновеликими*.

Следующие утверждения являются *аксиомами площади* простых фигур [27].

Аксиома 1. Каждая простая фигура имеет площадь S, причём $S > 0$.

Аксиома 2. Равные простые фигуры имеют равные площади.

Аксиома 3. Если простую фигуру разделить на несколько простых фигур, то площадь этой фигуры равна сумме площадей её частей.

Аксиома 4. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1 квадратной единице.

Примем без доказательства (оно выходит за рамки школьной программы и его можно найти, например, в [17]) утверждение о том, что площадь прямоугольника со сторонами длин a и b вычисляется по формуле

$$S_{прямоуг-ка} = ab.$$

Тогда, в частности, площадь квадрата со стороной a численно равна квадрату длины его стороны:

$$S_{квадрата} = a^2.$$

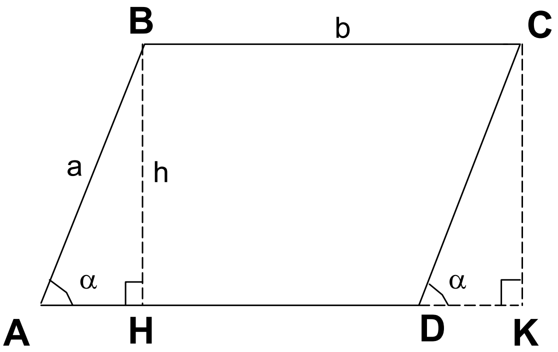
Площадь параллелограмма

Теорема (площадь параллелограмма). Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

Замечание. Помним, что более точно формулировка этой теоремы звучит так: «Величина площади параллелограмма численно равна произведению длины любой его стороны на длину высоты, проведённой к этой стороне».

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба, где $AB = a$, $BC = b$. Пусть, ради определённости, AD – большая по длине сторона этого параллелограмма и $\angle BAD$ – острый. Опустим высоты

$BH = h$ и CK на прямую AD ($H \in AD$, так как $AH < AB < BC$). Требуется доказать, что $S = bh$.



В самом деле, прямоугольные треугольники ABH и DCK равны (по гипотенузе ($AB = CD$) и острому углу ($\angle BAH = \angle CDK$ как соответственные углы)), поэтому их площади равны.

Значит, $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{BCDH} =$ $= S_{DCK} + S_{BCDH} = S_{BCKH}$, т.е. площадь параллелограмма $ABCD$ численно равна площади прямоугольника $BCKH$, но $S_{BCKH} = bh$. Теорема доказана.

Случай, когда $ABCD$ – ромб, рассмотрите самостоятельно.

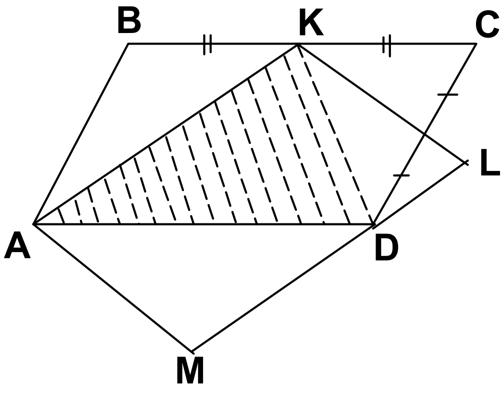
Следствие. Так как $h = a\sin\alpha$ (α – величина угла $\angle BAD$), то площадь параллелограмма может быть вычислена как произведение длин его смежных сторон a и b на синус угла между ними.

Если воспользоваться общепринятыми обозначениями, то мы сейчас доказали следующие формулы:

$$S_{параллелогр-ма} = a \cdot h_a = b \cdot h_b \quad \text{и} \quad S_{параллелогр-ма} = ab\sin\alpha .$$

В курсе аналитической геометрии доказывается, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{a_1;a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1;b_2\}$, вычисляется по формуле (без доказательства, [29]):

$$S = |a_1b_2 - a_2b_1|.$$



Пример [ВМиК-1999,устн.]. *Сравнить площади параллелограммов $ABCD$ и $AKLM$, изображённых на рисунке:*

По условию, K - середина BC. Сторона KL параллелограмма $AKLM$ проходит через середину отрезка CD. Соединим отрезком точки K и D. Заметим, что площадь образовавшегося при этом треугольника AKD составляет половину площади параллелограмма $ABCD$. С другой стороны, площадь ΔAKD также составляет половину площади параллелограмма $AKLM$. Поэтому эти параллелограммы равновелики.

Площадь треугольника

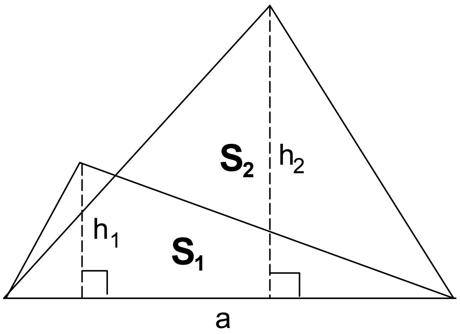
Теорема (площадь треугольника). Площадь S треугольника ABC со сторонами a,b,c и противолежащими им углами α,β,γ вычисляется по формулам:

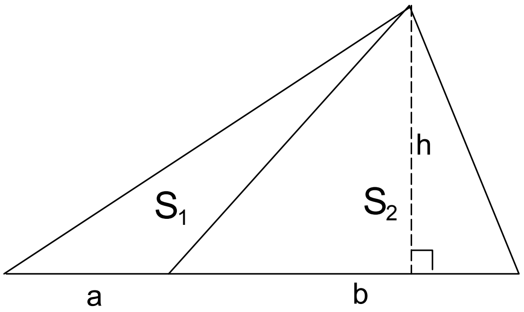
1) $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$; 2) $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$;

3) $S=\frac{abc}{4R}$, $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; 4) $S=pr$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр, r - радиус впис. окружности; 5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*).

Доказательство. 1),2) Всякий треугольник можно достроить до параллелограмма. Поэтому, так как параллелограмм представляет собой объединение двух равных (по 3-м сторонам) треугольников, то площадь треугольника составляет половину площади параллелограмма.

Следствие 1. У треугольников с равными основаниями площади относятся как высоты: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{½ah_1}{½ah_2}=\frac{h_1}{h_2}$. У треугольников с равными высотами площади относятся как основания: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{½ah}{½bh}=\frac{a}{b}$.





Следствие 2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения длин его катетов.

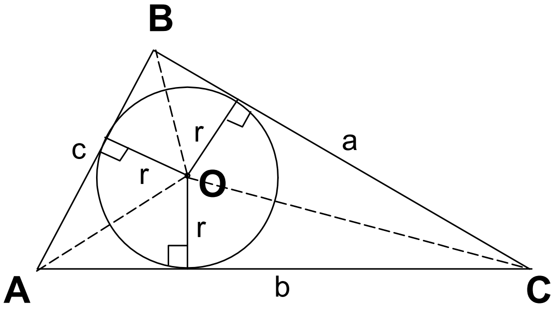
Следствие 3. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника. Все три медианы треугольника делят его площадь на шесть равных частей.

Следствие 4. Отрезки, соединяющие центроид треугольника с его вершинами, делят треугольник на три равновеликие части.

3) Из теоремы синусов имеем: $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$.

Тогда $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}(2R\sin\alpha)(2R\sin\beta)\sin\gamma=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Кроме того, $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$.



4) Пусть O - центр вписанной окружности.

Тогда $S = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{ACO}$ = $=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br$ = $\frac{a+b+c}{2}r = pr$ (см. рис.).

5) По теореме косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Из формулы 2) имеем: $4S = 2bc\sin\alpha$. Выразим из этих равенств соответственно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ и $\sin\alpha$ = $\frac{4S}{2bc}$. Поскольку $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то, подставляя, получаем:

$$\left(\frac{4S}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1,$$

или $16S^2 = (2bc)^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2$ = $\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)$=

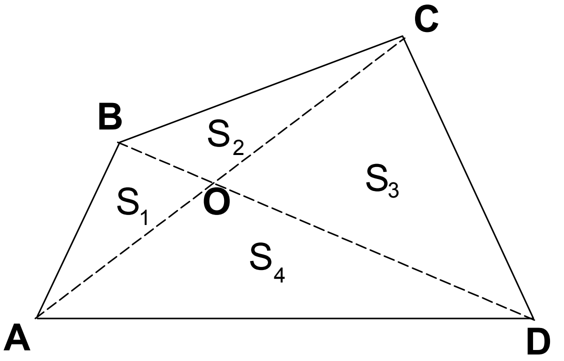
$$=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)=(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c).$$

После деления обеих частей полученного равенства на 16 имеем:

$$S^2 = \frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2} = p(p-a)(p-c)(p-b),$$

То есть $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Пример 1. В выпуклом четырёхугольнике проведены диагонали, разбивающие его на четыре треугольника. Площади трёх из этих треугольников равны S_1, S_2, S_3. Найти площадь S_4 четвёртого треугольника.



Решение. Пусть $ABCD$ - четырёхугольник, O - точка пересечения его диагоналей.

Треугольники BCO и DCO имеют равные высоты, опущенные на BD из вершины C, поэтому их площади относятся как основания: $\frac{S_2}{S_3} = \frac{BO}{OD}$.

Аналогично, треугольники ABO и ADO имеют равные высоты, опущенные на BD из вершины A, поэтому их площади относятся как основания: $\frac{S_1}{S_4} = \frac{BO}{OD}$. Таким образом, имеем пропорцию $\frac{S_2}{S_3} = \frac{S_1}{S_4}$, откуда и находим искомую площадь. *Ответ:* $S_4 = \frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}$.

Пример 2 [из задач вступительных экзаменов в Школу им. А.Н. Колмогорова, 2000]. *Какую наибольшую площадь может иметь треугольник со сторонами $a \le 6$, $b \le 5$, $c \le 3$?*

Решение. Пусть некоторый треугольник удовлетворяет условиям задачи. Тогда для его площади S одновременно выполняются следующие оценки:

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \le \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 = 15 \\ S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \le \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{15}{2} \\ S = \frac{1}{2} ac \sin\beta \le \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 = 9 \end{cases},$$

из которых следует, что $S \le 15/2$. Покажем, что $S = 15/2$ - наибольшая площадь. Достаточно найти хотя бы один треугольник, удовлетворяющий условиям задачи и имеющий такую площадь. Обратим внимание на строку: $S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \le \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{15}{2}$. Данное неравенство обращается в равенство (наибольшее значение площади достигается), только если $\begin{cases} b = 5; c = 3; \\ \sin\alpha = 1. \end{cases}$

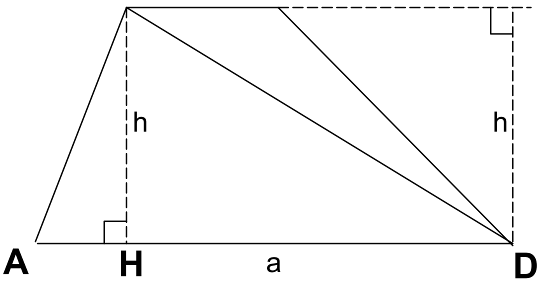
Такой треугольник существует: это прямоугольный треугольник с катетами 5 и 3; при этом длина его гипотенузы $\sqrt{34}$, очевидно, не превышает 6.

Ответ: наибольшая площадь треугольника равна $15/2$ $(кв.ед.)$.

Площадь трапеции

Теорема *(площадь трапеции). Площадь S трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.*

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Опустим на прямую AD высоту $BH = h$, а на прямую BC - высоту DE (её длина, очевидно, также равна h, так как BH и DE - отрезки перпендикуляров, заключённых между параллельными прямыми).



Требуется доказать, что

$$S_{трапеции} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH.$$

Проведём диагональ BD, она разобьёт трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому

$$S_{трапеции} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2}\left(AD + BC\right) \cdot BH = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

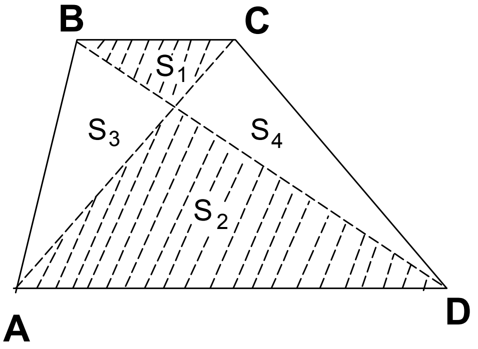
Теорема доказана.

Замечание. Поскольку полусумма длин оснований трапеции равна длине её средней линии, то площадь трапеции равна произведению длины её средней линии на высоту.

Пример. В трапеции проведены диагонали, разбивающие трапецию на четыре треугольника. Площади треугольников, примыкающих к основаниям, равны S_1 и S_2. Найти площадь трапеции.

Решение. При решении этой задачи мы не будем использовать выведенную выше формулу площади, а вычислим площадь трапеции как сумму площадей составляющих её треугольников. Обозначим площади треугольников, примыкающих к боковым сторонам трапеции, через S_3 и S_4.

Во-первых, докажем, что $S_3 = S_4$. Этот факт непосредственно вытекает из равенства площадей треугольников ABD и ACD.



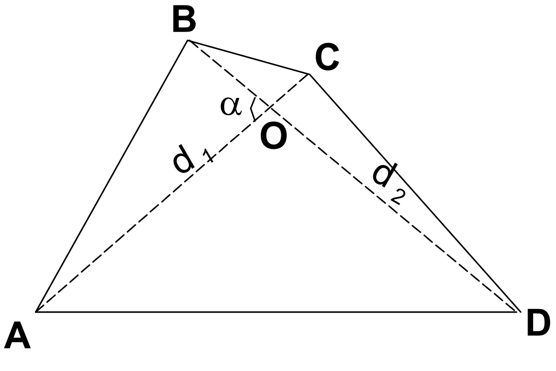
Во-вторых, найдём S_3 из пропорции $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$. Окончательно,

$$S = S_1 + S_2 + 2S_3 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = \\ = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Площадь произвольного выпуклого четырёхугольника

Теорема (площадь четырёхугольника). Площадь S выпуклого четырёхугольника равна половине произведения длин d_1 и d_2 его диагоналей на синус угла α между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$



Доказательство. Пусть $ABCD$ - произвольный выпуклый четырёхугольник, $AC = d_1$ и $BD = d_2$ - его диагонали, α - угол между ними. Тогда $S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$

$$=\frac{1}{2}AO\cdot BO\sin\alpha+\frac{1}{2}BO\cdot CO\sin(\pi-\alpha)+\frac{1}{2}CO\cdot DO\sin\alpha+\frac{1}{2}AO\cdot DO\sin(\pi-\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(BO(AO+CO)+DO(CO+AO))=\frac{1}{2}\sin\alpha(BO\cdot AC+DO\cdot AC)=$$

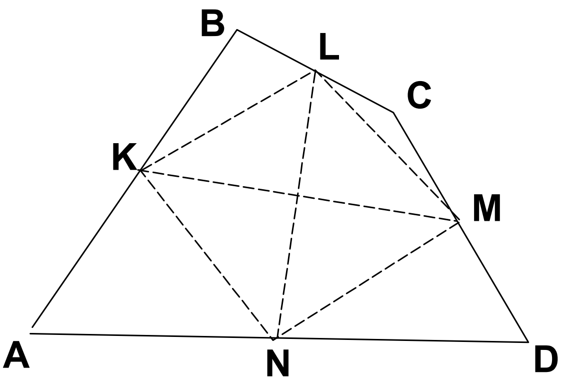
$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AC\cdot(BO+DO)=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot d_1\cdot d_2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей.

Пример 1. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны между собой. Найти площадь четырёхугольника.

Решение. Пусть $ABCD$ - четырёхугольник, $AC=a$, $BD=b$. Обозначим через K,L,M,N - середины сторон AB,BC,CD,AD.



Во-первых, четырёхугольник $KLMN$ параллелограмм. Во-вторых, по условию, его диагонали KM и NL равны, а значит, $KLMN$ - прямоугольник. Далее, так как стороны $KLMN$ параллельны диагоналям $ABCD$, то $AC\perp BD$. Тогда площадь $ABCD$ находим по доказанной выше формуле:

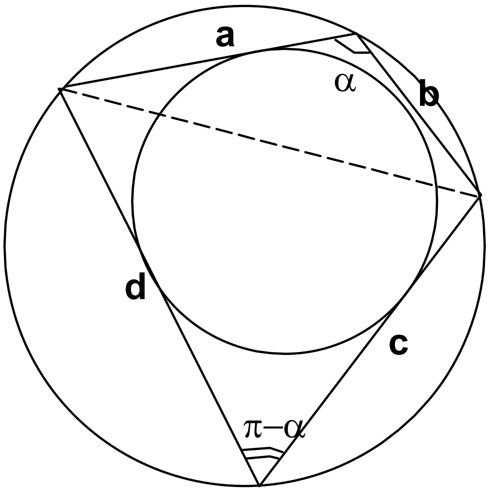
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin 90^0=\frac{ab}{2}\ (кв.ед.).$$

Пример 2 [ВМК-1999,устн.]. *Доказать, что если вокруг четырёхугольника с последовательными сторонами a,b,c,d можно описать окружность, то его площадь можно найти по формуле (Птолемея)*

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ - полупериметр. Если, кроме того, в этот четырёхугольник можно вписать окружность, то его площадь вычисляется по формуле $S=\sqrt{abcd}$.

Первую из формул площади связывают также с именем индийского математика и астронома *Брахмагупты* (598–ок.660).



Доказательство. 1) Проведём одну из диагоналей четырёхугольника, разбив его на два треугольника. Тогда $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\alpha)=$ $=\frac{ab+cd}{2}\cdot\sin\alpha$.

По теореме косинусов имеем:

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\alpha)$

Учитывая, что $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$, отсюда находим:

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

следовательно,

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)^2}=\frac{\sqrt{(2(ab+cd))^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(ab+cd)}.$$

Тогда $S=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2cd+(a^2+b^2-c^2-d^2))(2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2))}=$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}=$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c-d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{c+d+a-b}{2}\cdot\frac{c+d+b-a}{2}}= \qquad (1)$$

$=\sqrt{(p-d)(p-c)(p-b)(p-a)}$, что и требовалось доказать.

2) Пусть, к тому же, $a+c=b+d$. Тогда, учитывая это в подкоренных сомножителях в выражении (1) для площади, получим:

$$S=\sqrt{\frac{b+d+b-d}{2}\cdot\frac{a-c+a+c}{2}\cdot\frac{b+d+d-b}{2}\cdot\frac{c-a+a+c}{2}}=\sqrt{badc}.$$

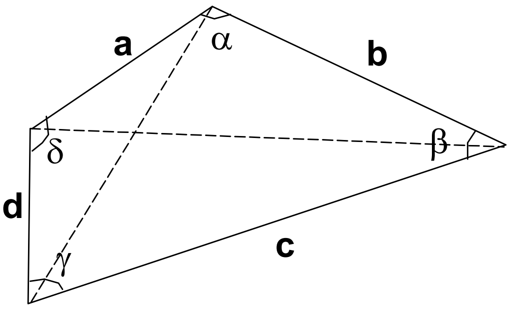
Задача решена.

<u>Пример 3</u> [ВМК-2000,устн.]. *Пусть* a,b,c,d *- длины последовательных сторон выпуклого четырёхугольника,* S *- его площадь. Доказать, что*

а) $S\le\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$; *б)* $S\le\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$.

На каких четырёхугольниках эти неравенства обращаются в равенства?

Доказательство. а) Проведём одну из диагоналей четырёхугольника, разбив его на два треугольника. Для площади четырёхугольника можно записать: $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\gamma$. Проведя другую диагональ, аналогично запишем: $S=\frac{1}{2}bc\sin\beta+\frac{1}{2}ad\sin\delta$. Складывая эти неравенства и заменяя синусы единицей, получим искомую оценку: $2S=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+cd\sin\gamma+bc\sin\beta+ad\sin\delta)\le$ $\le\frac{1}{2}(ab+cd+bc+ad)=\frac{1}{2}(b(a+c)+d(a+c))=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)$. При этом неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда синусы всех внутренних углов четырёхугольника равны единице, т.е. *на прямоугольниках*.



б) $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\gamma\le\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd\le\frac{a^2+b^2}{4}+\frac{c^2+d^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$,

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда оба неравенства $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ и $cd\le\frac{c^2+d^2}{2}$ одновременно обращаются в равенство, т.е. при условии $\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$.

Длина окружности

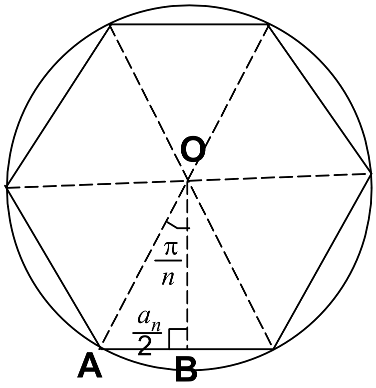
Длиной окружности называется предел последовательности периметров P_n правильных n-угольников, вписанных в данную окружность, при неограниченном увеличении числа сторон n, т.е.

$$L=\lim_{n\to+\infty}P_n$$

(доказательство того факта, что этот предел существует и притом единственен, можно найти, например, в [21]).

Иначе *длину окружности* можно определить как наименьшее число, большее периметра любого вписанного в неё выпуклого многоугольника (или как наибольшее число, меньшее периметра любого описанного около неё многоугольника) [31]. Существование и единственность такого числа доказывается в курсе высшей математики. При этом *длиной дуги окружности* называется наименьшее число, большее длины любой выпуклой ломаной, вписанной в эту дугу (ломаная $A_1A_2...A_n$ называется выпуклой, если многоугольник $A_1A_2...A_n$ – выпуклый).

Выведем формулу, выражающую длину L окружности через её радиус R.



Теорема (длина окружности). Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Доказательство. Покажем, что отношение длины окружности к её диаметру не зависит от окружности, т.е. одно и то же для любых двух окружностей. Пусть L и L' - длины каких-либо двух окружностей радиусов R и R' с центрами в точках O и O'. Впишем в каждую из этих двух окружностей правильный n-угольник и обозначим через P_n и P_n' их периметры, а через a_n и a_n' - их стороны. Тогда $P_n = n \cdot a_n$ и $P_n' = n \cdot a_n'$. Из прямоугольного треугольника OAB ($AO = R$) имеем: $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{2} : R$, откуда $a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$ и, значит, $P_n = n \cdot 2R\sin\frac{\pi}{n}$. Аналогично имеем: $a_n' = 2R'\sin\frac{\pi}{n}$ и $P_n' = n \cdot 2R'\sin\frac{\pi}{n}$. Поэтому $\frac{P_n}{P_n'} = \frac{2R}{2R'}$ (при любом $n \geq 3$).

Перейдём в последнем равенстве к пределу, устремив число сторон в многоугольнике $n \to +\infty$. В левой части получим: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{P_n}{P_n'} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} P_n'} = \frac{L}{L'}$. Правая часть равенства от n не зависит и поэтому в пределе сохранит своё значение. Таким образом, в пределе имеем: $\frac{L}{L'} = \frac{2R}{2R'}$, откуда получаем, что $\frac{L}{2R} = \frac{L'}{2R'}$, т.е. отношения длины окружности к её диаметру есть величина постоянная для всех окружностей. Это число обозначили греческой буквой π (π - это первая буква греческого слова ‘$\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\varepsilon\iota\alpha$ ‘ «окружность»).

Немецкий математик Иоганн Генрих *Ламберт* (1728-1777) и французский математик Адриен Мари *Лежандр* (1752-1833) доказали иррациональность числа π.

Из равенства $\frac{L}{2R} = \pi$ и получаем искомую формулу: $L = 2\pi R$.

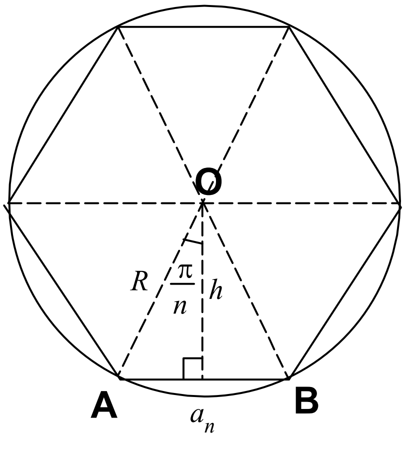
Замечание. Можно доказать, что предел последовательности периметров правильных n-угольников, описанных около окружности, при неограниченном увеличении числа n также равен длине окружности [21].

Пример (задача о Земле и апельсине). Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем, и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее, вообразим, что окружность каждого обруча удлинили на 1 метр. Тогда, разумеется, обручи отстанут от поверхностей тел, которые они раньше стягивали, и между обручами и поверхностями тел образуется некоторый зазор. В каком случае этот зазор будет больше – у земного шара или у апельсина и во сколько раз, если радиус Земли больше радиуса апельсина в n раз?

Решение. «Здравый смысл» подсказывает ответ: «Конечно, у апельсина». Ведь в сравнении с окружностью земного шара – 40000 км – какой-нибудь 1 метр есть столь ничтожная величина, что её прибавка останется совершенно незаметной. Другое дело апельсин: по сравнению с его окружностью 1 м - огромная величина, и её прибавка к длине окружности должна быть весьма ощутима.

А теперь проверим этот вывод с помощью вычислений. Пусть L $(м)$ - длина окружности земного шара, а l $(м)$ – длина окружности апельсина. Тогда радиус Земли $R = \frac{L}{2\pi}$, а апельсина $r = \frac{l}{2\pi}$. После прибавки к обручам по 1 $м$ окружность обруча у Земли будет L+1, а у апельсина l+1, радиусы их соответственно будут $\frac{L+1}{2\pi}$ и $\frac{l+1}{2\pi}$. Найдём ширину зазоров, вычитая из новых радиусов прежние: $\frac{L+1}{2\pi} - \frac{L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$ для Земли; $\frac{l+1}{2\pi} - \frac{l}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$ для апельсина. Итак, у Земли и у апельсина получится одинаковый (!) зазор в $\frac{1}{2\pi}$ $м$ ($\approx 16см$). Столь поразительный результат есть следствие постоянства отношения длины любой окружности к её радиусу.

Площадь круга



Пусть S_n - площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. *Площадью круга* называется предел при $n \to +\infty$ последовательности S_n площадей правильных n-угольников, вписанных в его окружность (описанных около его окружности) [29].

В [27] *площадью круга* радиуса R называется предел при $n \to +\infty$ последовательности площадей правильных 2^n-угольников, вписанных в окружность радиуса R. Иначе [31] *площадь круга* можно определить как наименьшее число, большее площади любого вписанного в него выпуклого многоугольника (или как наибольшее число, меньшее площади любого описанного около него многоугольника). Существование и единственность такого числа доказывается в курсе высшей математики.

Теорема (площадь круга). Площадь круга радиуса R равна $S = \pi R^2$.

Доказательство. Очевидно, что

$$S_n = S_{AOB} = \frac{1}{2}a_n h = \frac{1}{2}a_n R\cos\frac{\pi}{n}.$$

Тогда $n \cdot S_n = \frac{1}{2}n \cdot a_n R\cos\frac{\pi}{n}$, причём при $n \to +\infty$ имеем $n \cdot a_n \to L$, $\cos\frac{\pi}{n} \to 1$.

Итак, $S = \lim\limits_{n\to+\infty}(n \cdot S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}n \cdot a_n R\cos\frac{\pi}{n}\right) = \frac{LR}{2} = \pi R^2$.

Следствие 1 (площадь сектора). Площадь сектора с центральным углом α пропорциональна углу α и равна $S = \frac{\alpha R^2}{2}$ (угол α измеряется в радианах).

Действительно, искомое соотношение следует из пропорции

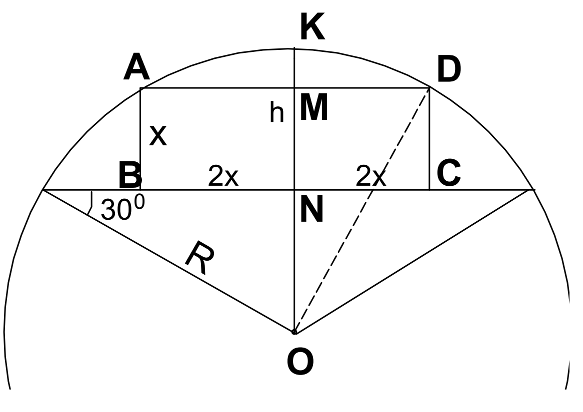
$$\begin{array}{ccc} 2\pi & - & \pi R^2 \\ \alpha & - & S. \end{array}$$

Следствие 2 (площадь сегмента). Площадь сегмента с центральным углом α равна $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ (угол α измеряется в радианах, $0 < \alpha < 2\pi$).

Доказательство. Площадь сегмента равна сумме (если $\alpha > \pi$) или разности (если $0 < \alpha < \pi$) площадей сектора OAB и равнобедренного треугольника OAB, откуда и получаем искомое соотношение.

Следствие 3 (площадь кольца). Площадь кольца между двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$) равна $S = \pi(R_2^2 - R_1^2)$.

Пример 1 [ВМК-2002,устн.]. *В сегмент с дугой 120^2 и высотой h вписан прямоугольник $ABCD$ так, что $AB : BC = 1 : 4$ (BC лежит на хорде). Найти площадь прямоугольника.*



Решение. Обозначим $AB = x$, M, N - соответственно середины сторон AD и BC прямоугольника. Тогда, по условию, $BC = 4x$, $NK = h$. Из прямоугольного треугольника PNO (P - одна из точек пересечения хорды, на которой лежит сторона BC прямоугольника, с окружностью) находим, что $NO = \frac{R}{2}$. Тогда $OK = ON + NK \Leftrightarrow R = \frac{R}{2} + h$, откуда $R = 2h$. Далее, из прямоугольного треугольника MOD по теореме Пифагора запишем:

$$OD^2 = MD^2 + OM^2,$$

или $(2h)^2 = (2x)^2 + (h+x)^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 2hx - 3h^2 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим корни $x_{1,2} = \frac{-h \pm 4h}{5}$. Итак, $x = \frac{3}{5}h$, тогда $S_{ABCD} = AB \cdot BC = = 4x^2 = \frac{36}{25}h^2$. *Ответ:* площадь прямоугольника равна $\frac{36}{25}h^2$.

<u>*Пример 2*</u> [МТУСИ-1996]. *В окружность радиуса* R *вписан правильный* n*-угольник площади* $3R^2$. *Найти* n.

Решение. Разобьём правильный n-угольник на n равнобедренных треугольников с боковой стороной R и углом $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ при вершине. Тогда, по условию, имеем уравнение: $n\left(\frac{1}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{n}\right) = 3R^2 \Leftrightarrow n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} = 6$. $\quad (1)$

Сделав замену n на $\frac{2\pi}{\alpha}$, придём к уравнению $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{3}{\pi}$. Покажем, что при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ функция $f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$ монотонно убывает. В самом деле, $f'(\alpha) = \frac{(\sin\alpha)'\alpha - (\alpha)'\sin\alpha}{\alpha^2} = \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} < 0$, так как при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ условие $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha < 0$ равносильно верному неравенству $tg\alpha > \alpha$. Итак, в левой части уравнения находится убывающая функция, в правой – постоянная, и поэтому уравнение $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{3}{\pi}$, а значит, и уравнение (1), имеет не более одного решения.

Заметим также, что поскольку $\sin\frac{2\pi}{n} \le 1$, то из (1) получаем оценку для n: $n \ge 6$. С учётом этого подбором находим единственное решение $n = 12$.

Ответ: $n = 12$.

Задачи к разделу 3: «Планиметрия – геометрия на плоскости»

🕮 Задачи на свойства треугольников

3.1 [**1984, 4**] В треугольнике ABC длина стороны AC равна 5см, сумма длин двух других сторон равна 7см, косинус угла $\angle BAC$ равен $4/5$. Найти площадь треугольника ABC.

3.2 [**1986, 2**] Длины сторон AB, BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найти отношение длины высоты треугольника ABC, опущенной на сторону BC из вершины A, к радиусу вписанной окружности.

3.3 [**1988, 1**] Катеты прямоугольного треугольника ABC $AB=1$ и $AC=2$. На AB как на стороне построен квадрат $ABDE$. Определить, что больше: $AC+BC$ или $3\cdot AD$?

3.4 [**1989, 4**] В треугольнике ABC проведена биссектриса CD, при этом величины углов ADC и CDB относятся как $7:5$. Найти AD, если известно, что BC=1, а величина угла $\angle BAC$ равна $\pi/6$.

3.5 [**1992, устн.**] В треугольнике известны длины двух сторон: 6$см$ и 3$см$. Найти длину третьей стороны, если известно, что полусумма длин высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей высоты.

3.6 [**1993, устн.,1**] Дан треугольник ABC, у которого $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Вывести формулу длины медианы, проведённой к стороне AB.

3.7 [**1993, устн.,2**] Дан треугольник ABC, $AC=b$, $BC=a$, $\angle ACB=\gamma$. Вывести формулу длины биссектрисы треугольника, проведённой из вершины C.

3.8 [**1994, май, устн.,1**] В треугольнике ABC проведены биссектриса CE и медиана BD, пересекающиеся в точке O. Длина стороны BC в два раза больше длины стороны AC. Найти отношение длины отрезка BO к длине отрезка OD, и отношение площади треугольника DOC к площади треугольника BOC.

3.9 [**1994, май, устн.,2**] В прямоугольном треугольнике длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти $\sin\alpha$, где α - величина наименьшего угла этого треугольника.

3.10 [**1994, май, устн.,3**] Стороны треугольника образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Что больше: знаменатель этой прогрессии или число 2?

3.11 [**1994, май, устн.,4**] Радиусы описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в этот прямоугольный треугольник окружностей равны R и r соответственно. Найти периметр этого треугольника.

3.12 [**1995, май, 6**] Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение длин которых равно $1+\sqrt{2}$, считая от вершины. Найти острые углы треугольника.

3.13 [**1996, май, 6**] Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведённой к гипотенузе.

3.14 [**1997, 4**] В треугольнике ABC угол $\angle B$ прямой, $AB=5$, $BC=4$. Точка D лежит на стороне AC, M - точка пересечения медиан треугольника ABD, а N - точка пересечения медиан треугольника DBC. Найти площадь треугольника BMN.

3.15 [**1997, устн.,1**] В треугольнике угол против стороны $a=2\sqrt{3}$ в два раза больше, чем угол против стороны $b=2$. Найти третью сторону.

3.16 [**1997, устн.,2**] В треугольнике даны две стороны $a=4$, $b=6$ и площадь $S=6\sqrt{3}$. Найти третью сторону.

3.17 [**1998, май, устн.**] Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$). Найти радиус вписанной окружности, если известны:

а) $AB=a$, $AC=b$; б) $AC=b$, $\angle ACB=\gamma$.

3.18 [**1998, устн.,1**] Найти стороны треугольника ABC с биссектрисой AD, если $AB\cdot AC=24$, площадь треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$, $CD:DB=2$.

3.19 [**1998, устн.,2**] Найти площадь прямоугольного треугольника, в котором длина высоты, проведённой к гипотенузе, равна h, а угол между этой высотой и одним из катетов равен φ.

3.20 [**1999, 4**] Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Угол между AM и высотой AH равен 40^0. Найти углы треугольника ABC.

3.21 [**1999, устн.,1**] Дан треугольник ABC с медианой BD, площадь треугольника ABD равна a. Найти площадь треугольника BDC.

3.22 [**1999, устн.,2**] В треугольнике ABC даны стороны $AB=2$, $AC=2\sqrt{3}$ и угол $\angle ACB=\pi/6$. Найти величину угла $\angle ABC$.

3.23 [**1999, устн.,3**] Определить вид треугольника, если его площадь выражается через длины его сторон a и b по формуле $S=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$.

3.24 [**1999, устн.,4**] В прямоугольном треугольнике известны радиусы вписанной и описанной окружностей r и R. Найти площадь этого треугольника.

3.25 [**1999, устн.,5**] В треугольнике ABC даны стороны $AB=7$, $AC=5$ и $\angle ACB=\pi/3$. Вычислить сторону BC.

3.26 [**1999, устн.,6**] Найти площадь прямоугольного треугольника, если известны его катет a и радиус вписанной окружности r.

3.27 [2000, май,4] В треугольнике KMN известны $\sin\angle KNM = \sqrt{3}/2$ и $\cos\angle KMN = 1/3$. Найти отношение длин высот, опущенных соответственно из вершины N на сторону MK и из вершины M на сторону NK.

3.28 [2000, устн.,1]. Найти расстояние между основаниями высот треугольника, если длины его сторон равны $\frac{8}{3}, \frac{10}{3}$ и 2.

3.29 [2000, устн.,2]. Правильный треугольник вписан в квадрат со стороной $\sqrt{3}+1$ так, что они имеют общую вершину (две другие вершины треугольника лежат на сторонах квадрата). Какова площадь такого треугольника?

3.30 [2001, 4]. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части 5м и 7м. Найти площадь треугольника и указать, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника?

3.31 [2001, устн.,1] В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты AB =3 и AC =5. Найти длину высоты AD.

3.32 [2001, устн.,2] В прямоугольном треугольнике ABC известны катеты AB =3 и AC =5. Найти длину биссектрисы AD.

3.33 [2001, устн.,3] В треугольнике ABC известно, что $\angle A + \angle B = \angle C$, AC =3, $BC = 4$. Найти сторону AB.

3.34 [2001, устн.,4] В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 2\cdot\angle B$, AC =2, AB =3. Найти сторону BC.

3.35 [2002, май,5] В треугольнике ABC угол C - прямой, отношение медианы CM к биссектрисе CN равно $\sqrt{6}:1$, а высота $CK = 2$. Найти площади треугольников CNK и ABC.

3.36 [2002, май,устн.] В прямоугольном треугольнике один из острых углов в 5 раз меньше другого острого угла. Длина медианы, проведённой к гипотенузе, равна 2. Найти длину катетов.

3.37 [2002, 6] В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC). Найти площадь треугольника ABC, если $CE = 4м$, $CA = 3м$.

3.38 [2002, устн.,1] В прямоугольном треугольнике один из катетов вдвое больше другого, радиус описанной около треугольника окружности равен $\sqrt{5}$. Чему равен радиус вписанной окружности?

3.39 [2002, устн.,2] В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 2\cdot\angle B$, AB =4, BC =5. Найти длину третьей стороны AC.

3.40 [2003, устн.] В треугольнике ABC величина угла $\angle A$ равна 60^0, AD - биссектриса и $BD:DC = 1:2$. Найти остальные углы треугольника ABC.

3.41 [2004, устн.,1] В равнобедренном треугольнике ABC (AC - основание) высота AM равна 3. Биссектриса угла C образует с AM угол $\pi/3$. Чему равна площадь треугольника ABC?

3.42 [2004, устн.,2] В треугольнике медиана в три раза меньше стороны, к которой она проведена. Является ли этот треугольник остроугольным или тупоугольным?

3.43 [2004, устн.,3] В прямоугольном треугольнике один из катетов вдвое больше другого, радиус описанной около треугольника окружности равен 4. Чему равен радиус вписанной окружности?

3.44 [2005, 3] В треугольнике ABC угол C прямой, тангенс угла $\angle A$ равен $1/4$, медиана BD равна $\sqrt{5}$. Найти площадь треугольника ABD и радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABD.

3.45 [2005, устн.,1] Треугольник ABC - равнобедренный: $BA = BC$, CD - биссектриса, точка E находится на стороне AC, угол CDE - прямой, $CE = 4$. Найти AD.

3.46 [2005, устн.,2] В треугольнике ABC угол C прямой, $CA = 4$, $CB = 3$. Найти отношение $AH : HB$, где CH - высота, опущенная из вершины C.

3.47 [2007, устн.,1] В треугольнике длина каждой из сторон не превосходит 2. Доказать, что площадь треугольника не превосходит $\sqrt{3}$.

3.48 [2007, устн.,2] В треугольнике ABC отношение длины медианы BM к длине основания AC равно $11:24$. Является ли треугольник ABC остроугольным?

3.49 [2007, устн.,3] В треугольнике ABC высота AD пересекается с медианой BK и биссектрисой BE в точках P и Q соответственно. Длины отрезков AP, PQ и QD относятся как $5:1:2$. Чему равна величина угла $\angle ABC$?

Задачи на свойства окружностей

3.50 [1991, 5] Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причём угол $\angle AED$ равен 60^0. Угол $\angle ABD$ в три раза больше угла $\angle BAC$. Доказать, что AD - диаметр окружности.

3.51 [1993, устн.,1] В окружности проведены диаметр и хорда, радиус окружности равен R. Диаметр, пересекая хорду, делит её на два равных отрезка, длины которых равны $\frac{R}{2}$. Найти длины отрезков, на которые точкой пересечения разбивается диаметр.

3.52 [**1993, устн.,2**] В угол величины 60^0 вписывается бесконечная система окружностей, каждая из которых касается сторон угла, а начиная со второй – касается предыдущей и последующей окружностей. Радиус первой окружности равен R. Найти сумму радиусов всех этих окружностей, если известно, что радиусы этих окружностей убывают.

3.53 [**1995, 7**] Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причём CL - диаметр данной окружности. Найти отношение отрезков BL и AC, если синус $\angle BAC$ равен $1/4$.

3.54 [**1998, май,5**] Среди треугольников KLM, у которых радиус описанной окружности равен 10$см$, сторона KL равна 16$см$, высота MH равна $39/10$ $см$, найти величину угла $\angle KML$ того треугольника, медиана MN которого наименьшая.

3.55 [**1999, май,8**] Две окружности радиусов $\sqrt{19}$ и $\sqrt{76}$, касающиеся друг друга внешним образом, вписаны в полуокружность (т.е. каждая из окружностей касается этой полуокружности и её диаметра). Вычислить радиус полуокружности.

3.56 [**2001, май,5**] Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AC и AB соответственно в точках L и K, отличных от вершины A. Найти отношение $AC:AB$, если известно, что длина отрезка LC в два раза больше длины отрезка KB, а отношение $CM:BM=3:2$.

3.57 [**2004, устн.,1**] Окружность касается сторон угла с вершиной A в точках B и C. Найти длину отрезка BC, если AB =1, а расстояние от вершины A до центра окружности равно 2.

3.58 [**2004, устн.,2**] В круге проведены две взаимно перпендикулярные хорды AC и BD, которые пересекаются в точке P. Через точку P и середину отрезка BC проведена прямая, пересекающая отрезок AD в точке N. Чему равен угол $\angle ANP$?

3.59 [**«Олимпиада Ломоносов-2005», 5**] На окружности взята точка A, на её диаметре BC - точки D и E, а на его продолжении за точку B - точка F. Найти BC, если $\angle BAD=\angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

3.60 [**«Олимпиада Ломоносов-2006», 4**] Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC - диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что $BD=9$, $BE=12$. Найти радиусы окружностей.

3.61 [**«Олимпиада Ломоносов-2006», устн.**] Из точки A, расположенной вне окружности, проведены к данной окружности касательная $AK = 4$ и секущая AC, внешняя часть которой AB равна 3. Найти длину отрезка BC.

🕮 Задачи на свойства четырёхугольников

3.62 [**1987, 1**] Найти площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10$см$ и 12$см$.

3.63 [**1992, устн.,1**] В трапеции $ABCD$ $AB \| CD$, AB=6, CD=4. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и K. Найти длину MK.

3.64 [**1992, устн.,2**] Периметр ромба равен 20$см$, а сумма длин диагоналей равна 14$см$. Найти площадь ромба.

3.65 [**1992, устн.,3**] Определить углы ромба, если его площадь равна 8$см^2$, а площадь вписанного в него круга равна $\pi\ см^2$.

3.66 [**1993, устн.,1**] В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, S – его площадь. Доказать, что $S \le \dfrac{ab + cd}{2}$, и исследовать случай, когда имеет место равенство.

3.67 [**1993, устн.,2**] В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, AC – диагональ, площадь треугольника ABC равна S_1, $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, $CD = d$. Найти площадь треугольника ADC.

3.68 [**1993, устн.,3**] Доказать, что середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

3.69 [**1994, 8**] Четырёхугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC. Доказать, что разности длин его противоположных сторон равны по модулю.

3.70 [**1994, устн.**] В трапеции $ABCD$ с острыми углами при основании AD проведена диагональ AC, которая разбивает её на два подобных треугольника. Длина основания AD равна a, длина основания BC равна b. Вычислить длину диагонали AC.

3.71 [**1996, 7**] В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и равна 9, CD=12, а отрезок AO, где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равен 6. Найти площадь треугольника BOC.

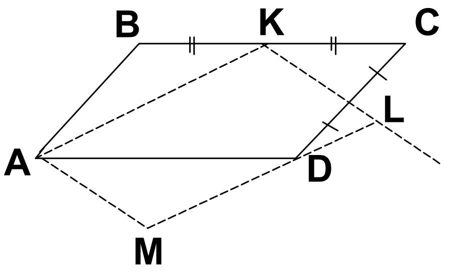
3.72 [**1997, май, 6**] В ромб, одна из диагоналей которого равна 10, вписан круг радиуса 3. Найти площадь части ромба, расположенной вне круга. Будет ли эта площадь больше 9?

3.73 [1998, май, устн.,1] Дан произвольный выпуклый четырёхугольник, который диагоналями разделён на четыре треугольника. Площади трёх из них известны: S_1, S_2, S_3. Найти площадь четвёртого треугольника.

3.74 [1998, май, устн.,2] Дан произвольный выпуклый четырёхугольник, в котором последовательно соединены середины сторон. Известно, что площадь получившегося четырёхугольника равна S. Найти площадь исходного четырёхугольника.

3.75 [1998, май, устн.,3] Вычислить площадь трапеции с основаниями $BC = 7$, $AD = 10$ и боковыми сторонами $AB = 4$, $CD = 5$.

3.76 [1999, устн.] Сравнить площади параллелограммов $ABCD$ и $AKLM$, изображённых на рисунке (для построения параллелограмма $AKLM$ через середину K стороны BC и середину стороны CD провели луч KL, затем параллельно ему из точки A провели луч AM, и, наконец, через точку D параллельно AK провели прямую. M и L – точки пересечения указанной прямой с построенными лучами).



3.77 [2000, май, устн.] В трапеции боковые стороны равны меньшему основанию, а диагонали – большему. Найти углы трапеции.

3.78 [2001, устн.] На стороне AD квадрата $ABCD$ выбрана точка E так, что $tg\angle ABE = 1/\sqrt{2}$. Найти отношение площади треугольника ABE к площади четырёхугольника $BCDE$.

3.79 [2002, май, устн.,1] В ромбе со стороной, равной 1, длина одной из диагоналей равна длине стороны. Чему равна длина другой диагонали?

3.80 [2002, май, устн.,2] Периметр равнобедренной трапеции вдвое больше длины вписанной в неё окружности. Найти углы трапеции.

3.81 [2002, устн.] Прямая, проходящая через вершину параллелограмма, делит его площадь в отношении 1:5. В каком отношении эта прямая делит сторону параллелограмма?

3.82 [2003, устн.] Боковая сторона описанной около окружности равнобочной трапеции равна a, а угол при основании равен α. Найти площадь трапеции.

3.83 [2004, устн.,1] Боковая сторона описанной около окружности равнобочной трапеции равна 2, а угол при основании равен $\pi/6$. Найти площадь трапеции.

3.84 [2004, устн.,2] Основания трапеции равны 1 и 7. Найти длину отрезка прямой, которая параллельна основаниям и делит трапецию на две равновеликие трапеции.

3.85 [**2004, устн.,3**] а) Найти угол, под которым пересекаются в трапеции биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне.

б) Доказать, что в трапеции точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне, находится на прямой, которая содержит среднюю линию трапеции.

3.86 [**Олимпиада «Ломоносов-2005», 3**] Найти площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC = 5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

3.87 [**2007, 4**] Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна 9, радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины сторон AB и BC равны 3 и 5 соответственно. Чему равны длины сторон AD и CD?

Смешанные задачи

3.88 [**1988, 4**] Точка O лежит на отрезке AB так, что $AO = 13$, $OB = 7$. С центром в O проведена окружность радиуса 5. Из A и B к ней проведены касательные, пересекающиеся в точке M, причём точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Найти радиус окружности, описанной вокруг треугольника AMB.

3.89 [**1988, устн.**] В трапецию вписана окружность. Точка касания делит одну из боковых сторон на отрезки длиной 12 и 3, меньшее основание равно 9. Найти площадь трапеции.

3.90 [**1990, 6**] Окружность, проведённая через вершины B и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC – в точке E. Площадь круга, ограниченного этой окружностью, в 12 раз меньше площади круга, описанного около треугольника ADE. Отношение площади треугольника ADE к площади четырёхугольника $BDEC$ равно $25/11$. Угол $\angle DBE$ равен 60^0. Найти угол $\angle ADC$.

3.91 [**1992, 5**] В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel DC$, AB=5, DC=1, угол $\angle ABC$ равен 60^0. Точка K лежит на отрезке AB, причём $AK = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от C. Найти площадь треугольника OFC.

3.92 [**1993, 5**] На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15^0. Найти углы треугольника ABC.

3.93 [**1994, май,7**] У треугольника известны длины двух сторон $a = 2$, $b = 3$ и площадь $S = 3\sqrt{15}/4$. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

3.94 [1994, устн.] Точки B и D расположены в одной полуплоскости относительно прямой a. Точки A и C – основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек B и D на прямую a. Длины этих перпендикуляров соответственно равны c и d. O – точка пересечения прямых AD и BC. Найти расстояние от точки O до прямой a.

3.95 [1998, 6] Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность. Диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS=13$, $QM=10$, $QR=26$. Найти площадь четырёхугольника $PQRS$.

3.96 [2000, 6] В трапецию с основаниями длины 3 и 5 можно вписать окружность и около неё можно описать другую окружность. Вычислить площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, её меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

3.97 [2003, май, 5] Окружность пересекает стороны угла BAC в точках B, N, M и C, точка N находится между A и B, точка M – между A и C. Величины углов ACB и BMC равны $\pi/3$ и $\pi/4$ соответственно, $BN = 2\cdot MN$. Чему равна величина угла BAC?

3.98 [2003, 5] Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность. Из вершины C прямого угла проведена хорда CM, пересекающая гипотенузу в точке K. Найти площадь треугольника ABM, если $AK:AB=1:4$, $BC=\sqrt{2}$, $AC=2$.

3.99 [2004, 4] В треугольнике ABC угол B прямой, точка M лежит на стороне AC, причём $AM:MC=1:3\sqrt{3}$. Величина угла ABM равна $\pi/6$, $BM=6$. Найти величину угла BAC и расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников BCM и BAM.

3.100 [2006, 3] В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы AB равна 5, разность углов BAC и ABC равна $\pi/10$, а точка D – середина AB. Чему равно расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ACD и BCD?

3.101 [Олимпиада «Ломоносов-2007», 5] На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найти AD, если $AC=9$, $BC=12$ и $CD=6$.

🕮 Задачи на построение

3.102 [1999, устн.,1] Построить с помощью циркуля и линейки квадрат по заданным двум вершинам.

3.103 [1999, устн.,2] Построить прямоугольный треугольник по радиусам r и R вписанной и описанной окружностей.

3.104 [2000, устн.,1] Построить циркулем и линейкой прямоугольный треугольник по разности его острых углов и меньшему катету.

3.105 [2000, устн.,2] Построить циркулем и линейкой прямоугольный треугольник по катету и высоте, проведённой к гипотенузе.

3.106 [2003, устн.,май] Построить с помощью циркуля и линейки треугольник ABC по заданным медиане m_a и высотам h_b, h_c.

3.107 [2003, устн.] Построить треугольник ABC, если заданы отрезки c, m_a и $\angle B$.

3.108 [2004, устн.] Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. Построить с помощью циркуля и линейки отрезок длины 2.

3.109 [2007, устн.] Длины отрезоков равны a и 1. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\frac{a+1}{a+2}$.

Раздел 4.

СТЕРЕОМЕТРИЯ – ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

> *«**Стереометрия** (от греческого στερεος – объёмный, пространственный, и μετρεω – измеряю) – часть элементарной геометрии, в которой изучаются пространственные фигуры».*
>
> *Большой энциклопедический словарь* [4]

В современной геометрии *пространство* определяют как множество объектов, которые называются его *точками*. Пространство (речь в данном случае идёт о трёхмерном пространстве) есть совокупность *всех* точек [29].

В [2] пространство рассматривается как совокупность всех точек, прямых и плоскостей.

Пространство служит средой, где строятся разнообразные геометрические фигуры, также состоящие из точек. Прямая, плоскость – множества точек. Предполагается, что в любой плоскости выполнены все аксиомы планиметрии.

В стереометрии, так же как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путём доказательства соответствующих теорем. При этом отправными являются свойства основных геометрических фигур, выражаемые аксиомами. Основными (первичными, неопределяемыми) понятиями в пространстве являются точка, прямая и плоскость. Введение нового, по сравнению с планиметрией, геометрического образа – плоскости – заставляет расширить совокупность используемых геометрических понятий.

Обращаем внимание на то, что часть определений из планиметрии практически без изменений переносятся в стереометрию. С другой стороны, не все теоремы, справедливые на плоскости, верны и в пространстве. Так, на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой. В пространстве это утверждение не справедливо.

4.1. Основные определения стереометрии

Понятие равных фигур в пространстве вводится аналогично тому, как это делалось на плоскости. Две геометрические фигуры называются *равными*, если их можно совместить при наложении.

Или: фигуры называются *равными*, если существует движение пространства, отображающее одну из них на другую [28]. Аналогично в [22]: «две фигуры называются *равными*, если они совмещаются движением». Напомним, что *движением пространства* называется преобразование пространства, сохраняющее расстояния между любыми двумя точками. Как и в планиметрии, равенство фигур обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. В пространстве к основным видам движений относят *центральную симметрию*, *зеркальную симметрию* (симметрию относительно плоскости), *параллельный перенос* и *поворот вокруг ориентированной оси на заданный угол* (в частности, осевая симметрия). Наряду с ними существует такие виды движений как, например, *скользящая симметрия* (композиция симметрии относительно плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный этой плоскости), *винтовое движение* (композиция поворота на заданный угол вокруг заданной оси и параллельного переноса на вектор, параллельный этой оси) и пр.

Имеет место следующая теорема (без доказательства): любое движение пространства, сохраняющее ориентацию тетраэдра (*движение 1-го рода*), есть либо параллельный перенос, либо поворот вокруг оси (в частности, осевая симметрия), либо винтовое движение, либо их композиция. Любое движение пространства, изменяющее ориентацию тетраэдра (*движение 2-го рода*), представляет собой либо зеркальную симметрию, либо скользящую симметрию, либо зеркальный поворот (в частности, центральную симметрию – зеркальный поворот на угол 180^0), либо их композицию [28]. Доказывается, что всякое движение пространства есть композиция не более четырёх симметрий относительно плоскости. В пространстве, как и на плоскости, вводятся понятия *гомотетии* (с центром в заданной точке и заданным коэффициентом), а также подобия (с заданным коэффициентом).

Приведём ещё несколько определений. Фигуру в пространстве называют *ограниченной*, если найдётся такое положительное число d, что расстояние между любыми двумя точками фигуры не превосходит d. В противном случае фигуру называют *неограниченной*. При этом расстояние между наиболее удалёнными друг от друга точками фигуры (если такие существуют) называется *диаметром* фигуры (как и отрезок, соединяющий эти точки) [25]. Иначе: фигура называется *ограниченной*, если найдётся шар, целиком содержащий эту фигуру [28,29]. Ясно, что для неограниченной фигуры такого шара не существует. Примерами ограниченных фигур могут служить точка, отрезок, многоугольник, многогранник и пр. Примерами неограниченных фигур являются луч, прямая, полоса, полуплоскость, трёхгранный угол и пр.

Точка называется *граничной* для данной пространственной фигуры, если в любой сколь угодно малой её окрестности (например, в шаре сколь угодно малого диаметра с центром в данной точке) есть точки как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество граничных точек фигуры называется её *границей*. Точка фигуры называется её *внутренней* точкой, если существует окрестность этой точки, целиком принадлежащая фигуре. Множество внутренних точек фигуры называется её *внутренней областью*, или *внутренностью*. Точки, которые не являются ни внутренними, ни граничными для фигуры, называются *внешними* для неё точками [25,28,29].

Фигура называется *связной*, если любые две её точки можно соединить линией (например, ломаной) целиком лежащей в этой фигуре. Связная пространственная фигура, все точки которой внутренние, называется пространственной *областью* [28,29].

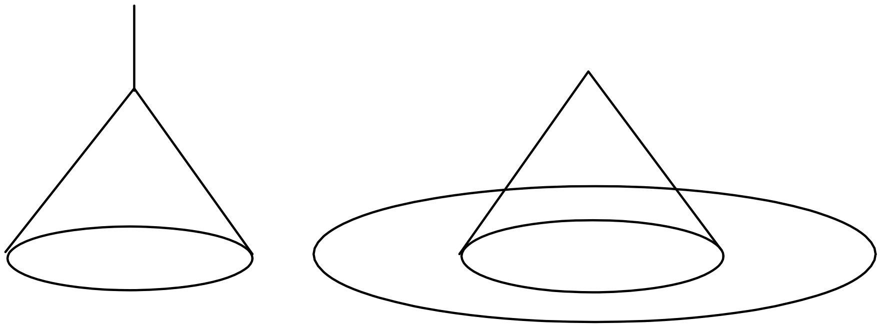
Сформулируем определение того, что в курсе элементарной стереометрии называют телом [25,28,29]. *Телом* называется ограниченная фигура в пространстве, обладающая двумя свойствами:

1) у неё есть внутренние точки и любые две из них можно соединить ломаной внутри фигуры;

2) фигура содержит свою границу, и её граница совпадает с границей её внутренней области.

Иначе: *геометрическое тело* – это объединение ограниченной пространственной области и её границы [28,29].

Согласно первому условию, внутренность тела не распадается на отдельные «куски». Поэтому фигура, состоящая из объединения двух шаров, не имеющих общих точек, телом не считается. Точно так же не считается телом фигура, состоящая из двух шаров, имеющих лишь одну общую точку. Второе условие означает, что граница тела принадлежит ему, так что шар без сферы или даже шар без одной её точки – уже не тело. Кроме того, граница тела везде прилегает к его внутренности, так что конус «со шпилем» или конус «с полями», как изображено на рисунке, телами не считаются.



Граница тела называется его *поверхностью*. Простейшие тела, изучаемые в средней школе, таковы, что они имеют объём, а их поверхность имеет площадь.

Одним из важнейших классов тел является класс выпуклых тел. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с каждыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок [25,28]. Точка и пустое множество считаются по определению выпуклыми фигурами. Примеры выпуклых фигур: отрезок, луч, прямая, треугольник, плоскость, полупространство, пространство, шар и пр. Выпуклые фигуры обладают, в частности, следующими свойствами [25]:

1) пересечение любых двух выпуклых фигур есть выпуклая фигура;

2) пересечение выпуклой фигуры с плоскостью является выпуклой фигурой;

3) каждая плоскость разбивает выпуклую фигуру на две выпуклые фигуры;

4) проекция выпуклой фигуры на плоскость есть выпуклая фигура.

Можно, например, доказать, что цилинд и конус выпуклы тогда и только тогда, когда их основания – выпуклы (см. определения цилиндра и конуса ниже).

Тело, являющееся выпуклой фигурой, называется *выпуклым телом*. Важнейшие примеры выпуклых тел – шар, цилиндр вращения, конус вращения, тетраэдр, параллелепипед.

Тело, образованное при вращении плоской ограниченной замкнутой фигуры вокруг прямой, лежащей в плоскости этой фигуры и не содержащей её внутренних точек, называется *телом вращения*. Прямая, вокруг которой осуществляется вращение, называется *осью* тела вращения. Граница тела вращения называется его *поверхностью*; она образуется при вращении границы вращаемой плоской фигуры (точки границы плоской фигуры, лежащие на оси вращения, являются внутренними точками тела вращения). Сечение тела (поверхности) вращения плоскостью, перпендикулярной оси этого тела (этой поверхности), называется *перпендикулярным сечением* тела (поверхности) вращения. Перпендикулярным сечением тела (поверхности) вращения может быть круг (окружность), точка или кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с центром на оси вращения. Сечение тела вращения плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением* этого тела. Поскольку поворот вокруг прямой на угол 180^0 есть симметрия относительно этой прямой, то осевым сечением тела вращения является фигура, симметричная относительно его оси.

Взаимное расположение двух прямых

Перечислим все возможные случаи взаимного расположения двух различных прямых в пространстве. Таких случаев три.

1) Прямые *пересекаются*, если имеют только одну общую точку (при этом они лежат в одной плоскости);
2) прямые *параллельны*, если лежат в одной плоскости и не имеют общих точек;
3) прямые *скрещиваются*, если не лежат в одной плоскости.

Замечание. Иногда параллельность прямых рассматривают в широком смысле слова, и в этом случае совпадающие прямые также относят к параллельным.

В частности, две прямые в пространстве называются *взаимно перпендикулярными*, если величина угла между ними равна 90^0. При этом они могут быть как пересекающимися, так и скрещивающимися (см. определение угла между пересекающимися и скрещивающимися прямыми ниже в пункте «Углы в пространстве»). А, например, прямая и отрезок называются *перпендикулярными*, если эта прямая перпендикулярна той прямой, на которой расположен отрезок.

Перпендикуляр к прямой из заданной точки определяется в пространстве аналогично тому, как это делается на плоскости. Пусть дана прямая a и точка A вне её. *Перпендикуляром, проведённым из точки* A *к прямой* a называется отрезок прямой b, пересекающей a под прямым углом, с концами в точках A и B, где B – точка пересечения прямых a и b (основание перпендикуляра). При этом длина перпендикуляра называется *расстоянием от точки* A *до прямой* a. Доказывается, что к данной прямой через данную точку можно провести только один перпендикуляр.

Под *общим перпендикуляром* к двум параллельным прямым понимают отрезок с концами, расположенными на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из указанных прямых. Аналогично, *общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым* называется отрезок с концами, расположенными на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из указанных прямых.

Известно, что *расстоянием между* двумя *геометрическими фигурами* называют расстояние между ближайшими точками этих фигур. В частности, *расстояние между параллельными (скрещивающимися) прямыми* – это длина их общего перпендикуляра. Аналогично определяется расстояние между параллельными плоскостями.

Взаимное расположение плоскости и прямой

Возможные следующие случаи взаимного расположения плоскости и прямой в пространстве.

1) Плоскость и прямая *пересекаются*, если имеют только одну общую точку (эта точка называется *следом прямой* на плоскости);
2) плоскость и прямая *параллельны*, если не имеют общих точек;
3) прямая *лежит в плоскости*, если любая точка прямой принадлежат плоскости.

Иначе: «плоскость и не лежащая в ней прямая называются *пересекающимися*, если они имеют общую точку» [2]. «Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются *параллельными*, если они не пересекаются» [17].

В частности, *прямая,* пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной этой плоскости*, если эта прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости [2,29].

Для сравнения: в [17,22,25] «прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведённой на плоскости через точку пересечения». Это определение равносильно приведённому выше (см. доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости).

Отрезок или *луч перпендикулярен плоскости*, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*. *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Ортогональной проекцией какой-либо *точки*, лежащей вне плоскости, *на* эту *плоскость* называется основание перпендикуляра, опущенного из точки на данную плоскость. *Ортогональной проекцией* какой-либо *линии на плоскость* называется геометрическое место проекций всех точек этой линии на данную плоскость. Вообще, *ортогональной проекцией фигуры* F на плоскость α называется множество F_1 ортогональных проекций всех её точек. Если фигура F имеет площадь S и лежит в плоскости, образующей с плоскостью α угол величины φ, то площадь S_1 фигуры F_1, являющейся ортогональной проекцией F на плоскость α, связана с площадью фигуры F следующей формулой:

$$S_1 = S \cdot \cos\varphi .$$

Углом между прямой и плоскостью в том случае, когда прямая наклонна к плоскости, называется острый угол, образованный этой прямой и её проекцией на данную плоскость. Если прямая параллельна плоскости, то угол между этой прямой и плоскостью считается нулевым. Величина угла между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью равна, по определению, 90^0.

Свойство: *угол между прямой и плоскостью* есть наименьший из всех углов, образованных этой прямой с любой прямой, лежащей в данной плоскости [29].

Наклонной, проведённой из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведённых из одной и той же точки к плоскости, называется *проекцией наклонной на эту плоскость*.

Перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости, – кратчайший из отрезков, соединяющих эту точку с точками плоскости, а основание перпендикуляра является при этом ближайшей к точке A точкой плоскости. Кроме того, перпендикуляр, проведённый из точки A к плоскости, – единственный [25].

Доказывается, например, в [17], что если из одной и той же точки вне плоскости проведены к этой плоскости перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то: 1) две наклонные, имеющие равные проекции, равны; 2) из двух наклонных та больше, проекция которой больше. Справедлива и обратная теорема: если из одной и той же точки вне плоскости проведены перпендикуляр и наклонные, то: 1) равные наклонные имеют равные проекции; 2) из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.

В общем случае *наклонной* называется прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей [29].

Взаимное расположение двух плоскостей

Две плоскости, имеющие общую прямую, содержащую все их общие точки, называются *пересекающимися* (по указанной прямой, называемой *прямой их пересечения*) [2]. Теперь попробуем убрать из этого определения всё «лишнее» и получим следующее определение: две не совпадающие плоскости называются *пересекающимися*, если они имеют общую точку [2]. При этом была учтена аксиома I_6 (о том, что если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку), а также аксиома I_5 (о том, что если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости).

Две плоскости называют *параллельными*, если они не имеют общих точек [24].

В [1,17] две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. Если вы используете это определение, то надо предварительно определить, какие две плоскости называются *пересекающимися*. Иногда параллельность плоскостей понимают в широком смысле, относя к параллельным совпадающие плоскости. В этом случае параллельные, но не совпадающие плоскости называют *параллельными в собственном* (строгом) *смысле*.

Определение угла между двумя плоскостями и, в частности, двух *взаимно перпендикулярных* плоскостей дано в следующем пункте.

Углы в пространстве

Углом между двумя пересекающимися (неперпендикулярными) *прямыми* называется меньший из углов, образующийся при пересечении этих прямых. *Угол между двумя параллельными (или совпадающими) прямыми* считается нулевым. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол, образованный двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым. Как отмечалось выше, *углом между прямой и плоскостью* в том случае, когда прямая наклонна к плоскости, называется острый угол, образованный этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Если прямые a,b,c попарно перпендикулярны, а прямая d образует с ними углы величины α,β,γ, то $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a [1]. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*. Прямая a – общая граница полуплоскостей – называется *ребром* двугранного угла.

В [17] *двугранным углом* называется «фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой».

Два двугранных угла называются *равными*, если они совмещаются при вложении. Если же один из углов можно совместить с другим так, что первый составит часть другого, то он – первый – называется *меньшим* углом, а другой, соответственно, *большим* [17]. Подобно углам в планиметрии двугранные углы могут быть *смежными, вертикальными* и пр. Так, двугранные углы называются *смежными*, если у них одна грань – общая, а две другие составляют одну плоскость.

Если отметить на ребре двугранного угла какую-либо точку O и в каждой грани из этой точки провести луч перпендикулярно к ребру, то образованный этими лучами угол (вместе с точкой O) называется *линейным углом* двугранного угла [1,2]. Любые два линейных угла одного и того же двугранного угла равны [2]. *Величиной* двугранного угла называется величина его линейного угла. Отметим, что плоскость (ненулевого) линейного угла перпендикулярна к ребру, так как она содержит две прямые, перпендикулярные к нему. Доказываются (см., например, [17]) следующие утверждения: 1) равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы и наоборот; 2) большему (меньшему) двугранному углу отвечает больший (меньший) линейный угол и наоборот; 3) вертикальные двугранные углы равны.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре попарно равных между собой двугранных угла с общим ребром. *Углом между двумя пересекающимися плоскостями* называется тот двугранный угол, который не превосходит каждого из остальных образовавшихся двугранных углов. Очевидно, что величина φ этого угла удовлетворяет ограничениям: $0^0 < \varphi \le 90^0$. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* (или *взаимно перпендикулярными*), если величина двугранного угла между ними равна 90^0. Если плоскости пересекаются не под прямым углом, то углом между ними будет меньший из образовавшихся при пересечении двугранных углов. Величина угла между параллельными (или совпадающими) плоскостями считается по определению равной нулю. Двугранный угол называется *прямым* (*острым, тупым*), если его градусная мера равна 90^0 (положительна и меньше 90^0, больше 90^0 и меньше 180^0). Два двугранных угла равны тогда и только тогда, когда они имеют одну градусную меру.

Заметим, что многие стереометрические понятия имеют свои аналоги в планиметрии. Можно, например, ввести понятия *внутренней* и *внешней* областей двугранного угла аналогично тому, как это делалось для плоских углов, и назвать объединение двугранного угла с его внутренней областью – *пространственным двугранным углом*. Для двугранных углов существует понятие, аналогичное понятию биссектрисы плоского угла: *биссекторной (биссектральной) полуплоскостью* двугранного угла называется полуплоскость, имеющая ту же границу, что и данный двугранный угол, проходящая в его внутренней области и делящая его на два равных пространственных двугранных угла.

Определим *трёхгранный угол*. Для этого возьмём любые три луча a,b,c, имеющие общее начало O и не лежащие в одной плоскости. Эти лучи являются сторонами трёх плоских углов: угла α со сторонами b,c, угла β со сторонами a,c и угла γ со сторонами a,b. Объединение этих трёх углов α, β, γ и называется *трёхгранным углом* $Oabc$, а сами плоские углы α, β, γ – его *гранями*. Эти углы-грани образуют *поверхность* трёхгранного угла. Точка O называется *вершиной* трёхгранного угла. При каждом из рёбер трёхгранного угла образуется соответствующий двугранный угол. Обозначим через $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ – величины внутренних двугранных углов трёхгранного угла $Oabc$ при рёбрах a,b,c.

Допустимые значения основных элементов трёхгранного угла удовлетворяют следующим условиям [28,29]:

1. Величина каждого плоского угла трёхгранного угла меньше суммы величин двух других плоских углов: $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$, $\gamma < \alpha + \beta$.

2. Сумма величин всех плоских углов трёхгранного угла меньше 360^0: $0 < \alpha + \beta + \gamma < 360^0$.

3. Сумма величин внутренних двугранных углов больше 180^0 и меньше 540^0: $180^0 < \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} < 540^0$.

4. В трёхгранном угле против большего плоского угла лежит больший двугранный угол, и наоборот, против большего двугранного угла лежит больший плоский угол. Против равных плоских углов лежат равные двугранные углы, и, наоборот, против равных двугранных углов лежат равные плоские углы.

5. Внутренние двугранные углы трёхгранного угла удовлетворяют неравенствам: $\hat{a} + \hat{b} - \hat{c} < 180^0$, $\hat{a} - \hat{b} + \hat{c} < 180^0$, $-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} < 180^0$.

Справедлива формула [25,28,29], являющаяся аналогом *теоремы косинусов для трёхгранных углов*:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\hat{c} \qquad (1)$$

(аналогично для косинусов α и β), или в форме

$$\cos\hat{c} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

по которой величина внутреннего двугранного угла данного трёхгранного угла может быть вычислена, если известны величины трёх его плоских углов. Аналогично, величина плоского угла данного трёхгранного угла может быть вычислена по трём внутренним двугранным углам:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\hat{a} + \cos\hat{b}\cos\hat{c}}{\sin\hat{b}\sin\hat{c}}.$$

Справедливы также следующие формулы, являющиеся аналогом *теоремы синусов для трёхгранного угла*:

$$\frac{\sin\hat{a}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\hat{b}}{\sin\beta} = \frac{\sin\hat{c}}{\sin\gamma}.$$

Отметим частный случай формулы (1): если двугранный угол при ребре c прямой, то имеем из (1) аналог теоремы Пифагора для «прямоугольного» трёхгранного угла

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

(его «гипотенуза» – угол γ – выражается через «катеты» – углы α и β).

Существуют *признаки равенства* трёхгранных углов; приведём кратко четыре из них [25,29]:

1) по двум граням и двугранному углу, заключённому между этими гранями;

2) по грани и двум прилежащим к ней двугранным углам;

3) по трём граням;

4) по трём двугранным углам.

Если все плоские углы трёхгранного угла равны между собой: $\alpha = \beta = \gamma$, то равны и все внутренние двугранные углы, т.е. $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c}$, при этом $\cos\hat{a} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Обратное утверждение также верно: если все внутренние двугранные углы трёхгранного угла равны между собой: $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c}$, то равны и все плоские углы, т.е. $\alpha = \beta = \gamma$, при этом $\cos\alpha = \dfrac{\cos\hat{a}}{1-\cos\hat{a}}$. Такой трёхгранный угол носит название *правильного* трёхгранного угла.

Многогранным углом называется фигура [25], образованная плоскими углами так, что выполнены условия:

1) никакие два угла не имеют общих точек, кроме их общей вершины или целой стороны;

2) у каждого из этих углов каждая его сторона является общей с одним и только одним другим таким углом;

3) от каждого угла к каждому другому углу можно перейти по углам, имеющим общие стороны;

4) никакие два угла с общей стороной не лежат в одной плоскости.

При этих условиях плоские углы, образующие многогранный угол, называются его *гранями*, их стороны – его *рёбрами*, а общая вершина плоских углов – *вершиной* многогранного угла.

Иначе: *многогранным углом* (или n*-гранным углом,* $n \geq 3$) называется фигура, состоящая из n лучей $OA_1, OA_2, ..., OA_n$, выходящих из одной точки O и не лежащих в одной плоскости (уточнение: никакие три из этих лучей не должны лежать в одной плоскости – *авт.*), и из плоских углов A_1OA_2, $A_2OA_3, \ldots$, A_nOA_1 между этими лучами [29].

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Доказывается, например в [17], что в выпуклом многогранном угле сумма величин всех плоских углов меньше 360^0.

В [28] многогранный угол сразу определяется как выпуклый. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – плоский выпуклый многоугольник и O – точка, лежащая вне плоскости этого многоугольника. Множество всех точек, принадлежащих лучам OM, где точка M «пробегает» многоугольник $A_1, A_2, ..., A_n$, называется *многогранным (*выпуклым – *авт.) углом*.

Объединение всех граней многогранного угла является его границей. Эта поверхность делит всё пространство (не включая саму границу) на две части, одна из которых (обычно та, что не включает в себя никакое полупространство) называется *внутренней областью* многогранного угла, а другая (та, которой принадлежит какое-нибудь полупространство) – *внешней*.

Два многогранных угла *равны*, если они могут быть совмещены наложением (некоторым движением пространства).

Многогранники

Многогранником называется тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников [25,28]. Необходимо добавить к этому определению, что каждая сторона каждого такого многоугольника является стороной ещё одного (и только одного) многоугольника. Такую поверхность называют *замкнутой многогранной поверхностью*.

В [24] *многогранником* (выпуклым – *авт.*) называют тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских выпуклых многоугольников. Или: *многогранником* называется геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками [17,29]. В последнем определении используется понятие «ограниченное», что, вообще говоря, требует расшифровки.

Многоугольники, составляющие поверхность многогранника, называются его *гранями*.

Уточним, что *гранью многогранника* следует считать такой многоугольник на поверхности многогранника, который не содержится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности многогранника (иначе он является лишь частью грани). Без учёта этого замечания можно было бы сказать, что грани куба, например, – это двенадцать равнобедренных прямоугольных треугольников, ведь они составляют границу куба.

Общие стороны смежных многоугольников называются *рёбрами* многогранника. Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются *вершинами многогранника*. Отрезки прямых, соединяющие какие-либо две вершины многогранника, не лежащие на одной грани, называется его *диагоналями*. Внутренний угол многоугольника, являющегося гранью многогранника, называется его *плоским углом* (при соответствующей вершине). Грани многогранника, имеющие общее ребро, называются *соседними гранями*.

Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней. (В [28] это доказывается как необходимое и достаточное условие выпуклости.) Данное определение полностью согласуется с общим определением выпуклых тел (см. доказательство этого факта в [25]). При этом каждая грань выпуклого многогранника является выпуклым многоугольником. Более того, плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику (оба последних утверждения доказаны в [28]). Двугранный угол, образованный плоскостями двух соседних граней и содержащий данный выпуклый многогранник, называется (внутренним) *двугранным углом многогранника при данном его ребре*.

Для выпуклых многогранников, аналогично тому, как это было сделано для многоугольников на плоскости, вводятся понятия *внутренней* и *внешней областей.* Так, пересечение полупространств, границы которых содержат грани многогранника (исключая грани), а сами полупространства содержат многогранник, называется его *внутренней областью*, а остальная часть пространства (также исключая грани многогранника) – *внешней областью*. Подобно понятию плоского многоугольника в планиметрии, в пространстве вводится понятие *пространственного (выпуклого) многогранника* как объединения многогранника с его внутренней областью.

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник. Пусть e – число его вершин, k – число его рёбер, а f – число его граней. Рене *Декартом*, а позднее независимо от него и Леонардом *Эйлером*, была доказана удивительная теорема: для любого выпуклого многогранника справедливо равенство:

$$e-k+f=2.$$

Многогранник называется *правильным*, если: 1) он выпуклый; 2) все его грани – равные друг другу правильные многоугольники; 3) в каждой его вершине сходится одинаковое число рёбер (примыкает одинаковое количество граней); 4) все его двугранные углы между соседними гранями равны друг другу [28,29].

Существует всего пять правильных многогранников (доказательство см., например, в [28,29]): правильный тетраэдр, куб (гексаэдр), правильный октаэдр (восьмигранник, у которого все грани – правильные треугольники), икосаэдр (правильный двадцатигранник, у которого все грани – правильные треугольники) и додекаэдр (двенадцатигранник, грани которого – правильные пятиугольники, сходящиеся по три в каждой вершине). Можно доказать, что для любой внутренней точки правильного многогранника сумма расстояний от граней остаётся постоянной [29].

Два многогранника называются *подобными*, если существует преобразование подобия, переводящее один многогранник в другой. Подобные многогранники имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. У подобных многогранников соответствующие внутренние двугранные углы также равны, а соответствующие рёбра пропорциональны. Например, если в пирамиде провести секущую плоскость параллельно основанию, то она отсечёт от неё пирамиду, подобную данной. Площади поверхностей подобных многогранников относятся как квадраты, а их объёмы – как кубы сходственных (соответственных) линейных элементов многогранников.

Рассмотрим некоторые наиболее известные многогранники.

n*-угольной пирамидой* называется многогранник, у которого одна грань – какой-либо плоский n-угольник, а остальные грани – плоские треугольники с общей вершиной [25,28]. Первая из упомянутых граней называется *основанием* пирамиды, а остальные – *боковыми гранями*; их общая вершина называется *вершиной* пирамиды.

Иначе [29]: n*-угольной пирамидой* называется многогранник, ограниченный гранями многогранного (n-гранного) угла и плоскостью, пересекающей все его грани. При этом *основанием* пирамиды называется многоугольник, полученный в секущей плоскости.

Стороны граней пирамиды называются её *рёбрами*, причём рёбра, сходящиеся в вершине, называются *боковыми*. У n-угольной пирамиды имеется $(n+1)$ вершина, $2n$ рёбер и $(n+1)$ грань. Диагоналей пирамида не имеет. *Двугранным углом при ребре пирамиды* называют содержащий пирамиду двугранный угол, образованный плоскостями граней, проходящими через данное ребро. *Высотой* пирамиды называется отрезок перпендикуляра (а также его длина), опущенного из вершины пирамиды на плоскость её основания. Если высота пирамиды одновременно является одним из её рёбер, то такая пирамида называется *прямоугольной.* Высоту боковой грани правильной пирамиды, проведённую из её вершины к ребру основания, принято называть *апофемой*.

Простейшая – треугольная – пирамида (n=3) называется *тетраэдром*, т.е. четырёхгранником. У тетраэдра четыре грани и все они треугольники. Тетраэдр называется *прямоугольным*, если у него все плоские углы при вершине – прямые. Если соединить любую вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани (точкой пересечения медиан), то получим четыре отрезка (по количеству вершин), называемых *медианами* тетраэдра. Доказывается [25,29], что все эти отрезки пересекаются в одной точке, называемой *центроидом* тетраэдра, или его *центром масс*. Тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке, называется *ортоцентрическим*. Тетраэдр, все грани которого равны, называется *равногранным* (его развёрткой является остроугольный треугольник).

Пирамида называется *правильной*, если в её основании находится правильный n-угольник, а вершина ортогонально проектируется в центр основания [28,29]. Из определения следует, что все боковые рёбра такой пирамиды равны. Поэтому все боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники с вершиной в вершине пирамиды. Все боковые рёбра правильной пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, а все боковые грани – равные двугранные углы. Имеют место следующие признаки правильной пирамиды. Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, является правильной, если: а) все её боковые рёбра равны; б) все её боковые рёбра образуют с плоскостью основания равные углы; в) все её боковые грани – равные равнобедренные треугольники.

Поперечным сечением пирамиды называется её пересечение с плоскостью, параллельной плоскости основания пирамиды. Такая плоскость отсекает от пирамиды меньшую пирамиду, подобную исходной [28]. Сечение пирамиды плоскостью, проведённой через вершину пирамиды и какую-либо диагональ основания, называется её *диагональным сечением*.

Боковая поверхность пирамиды представляет собой объединений всех её боковых граней (она состоит из всех отрезков, которые соединяют вершину пирамиды с точками на границе основания). *Полная поверхность* пирамиды есть объединение основания пирамиды с её боковой поверхностью.

Для того чтобы около пирамиды можно было *описать сферу*, необходимо и достаточно, чтобы около её основания можно было описать окружность [29].

Обозначим через ①, ②, ③ следующие три утверждения:

① все боковые рёбра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы;

② основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, описанной около основания пирамиды;

③ все боковые рёбра пирамиды равны между собой;

④ все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы;

⑤ основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, вписанной в её основание.

Тогда справедливы следующие утверждения (их доказательство можно найти, например, в [28]).

1) Если верно ①, то верны ② и ③.

2) Если верно ②, то верны ① и ③.

3) Если верно ③, то верны ① и ②.

4) если высота пирамиды пересекает её основание и верно ④, то верно и ⑤;

5) если верно ⑤, то верно и ④.

Усечённая пирамида получается отсечением от неё меньшей пирамиды плоскостью, параллельной основанию исходной пирамиды. Иными словами, *усечённой пирамидой* называется часть пирамиды, заключённая между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию [17,28,29]. Параллельные грани называются *основаниями* усечённой пирамиды, остальные грани – её *боковыми гранями*. *Высотой* усечённой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, опущенного из какой-либо точки одного основания на плоскость другого (а также его длина). Усечённая пирамида называется *правильной*, если она была получена усечением правильной пирамиды. Так как нижнее и верхнее основания усечённой пирамиды гомотетичны, то все её боковые грани – трапеции. Боковые грани правильной усечённой пирамиды представляют собой равные равнобокие трапеции, их высоты называют *апофемами* усечённой пирамиды. Все её апофемы равны между собой. У n-угольной усечённой пирамиды $2n$ вершин, $3n$ рёбер, $n+2$ граней и $n(n-3)$ диагоналей. *Боковой поверхностью* усечённой пирамиды называется объединениие всех её боковых граней. *Полная поверхность* усечённой пирамиды есть объединение боковой поверхности и оснований.

n*-угольная призма* – это многогранник, две грани которого, называемые *основаниями*, – равные n-угольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные n граней (называемые *боковыми гранями*) – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований призмы [28,29,24].

Общие стороны боковых граней призмы называются *боковыми рёбрами* призмы. *Высотой* призмы называется отрезок перпендикуляра, проведённого из любой точки основания призмы к плоскости другого её основания, а также его длина. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной её грани, называют *диагональю* призмы. У n-угольной призмы $2n$ вершин, $3n$ рёбер, $n+2$ граней и $n(n-3)$ диагоналей.

Различают *прямые* и *наклонные* призмы. Призма, у которой все боковые грани – прямоугольники, называется *прямой*, в противном случае (если не все боковые грани призмы являются прямоугольниками) призму относят к *наклонным*. Иначе можно было сказать, что *прямая призма* – это призма, в которой боковые рёбра перпендикулярны основаниям. Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется *правильной*. Рёбра правильных призм являются высотами этих призм. Многоугольник, получаемый в результате пересечения призмы с плоскостью, перпендикулярной её боковым рёбрам, называют *перпендикулярным сечением* призмы [17,29].

Иначе*: перпендикулярным сечением* призмы называется проекция её основания на любую плоскость, перпендикулярную боковым рёбрам призмы [25].

Диагональным сечением призмы называют сечение её плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани. *Поперечным сечением* призмы называется сечение призмы плоскостью, параллельной плоскости её основания. Объединение боковых граней призмы называется её *боковой поверхностью*. *Полной поверхностью* призмы называется объединение оснований призмы и её боковой поверхности.

Призма является выпуклым многогранником, если её основание – выпуклый многоугольник, и невыпуклым, если основание этой призмы – невыпуклый многоугольник.

Для того чтобы около призмы можно было *описать сферу*, необходимо и достаточно, чтобы она была прямой и около её основания можно было описать окружность. Под призмой, *описанной около сферы*, понимают такую призму, грани которой касаются сферы. Для того чтобы в призму можно было *вписать сферу,* необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность, и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности. Так, в правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда её высота равна диаметру окружности, вписанной в основание [29].

Параллелепипед – это призма, в основании которой лежит параллелограмм. Из определения следует, что у параллелепипеда шесть граней и все они параллелограммы. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называют *противолежащими*. Параллельные рёбра параллелепипеда, не лежащие в одной грани, называются его *противолежащими рёбрами*. Для каждой вершины параллелепипеда есть одна противоположная ей вершина, та, которая не лежит с данной вершиной в одной грани. Отрезок, соединяющий противоположные вершины параллелепипеда, называется *диагональю* параллелепипеда. Доказывается [17,28], что в параллелепипеде: 1) противоположные грани равны и параллельны; 2) все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам; 3) сумма квадратов длин всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов длин всех его рёбер (аналогичным свойством в планиметрии обладает параллелограмм):

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 .$$

Параллелепипед называется *прямым*, если его боковые рёбра перпендикулярны к плоскостям оснований. В противном случае параллелепипед называется *наклонным*. Прямой параллелепипед, основание которого – прямоугольник, называется *прямоугольным* [17,24,28]. Из определения следует, что у *прямоугольного параллелепипеда* все шесть граней являются прямоугольниками. Длины трёх ребер прямоугольного параллелепипеда, исходящих из одной его вершины, называются его *измерениями*; одно из них обычно рассматривается как длина, другое – как ширина, а третье – как высота этой фигуры. Пространственным *аналогом теоремы Пифагора* является следующее утверждение: *квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений*.

Куб – это прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны. Из определения следует, что у куба все грани – равные квадраты.

В [17,29]: прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется *кубом*. Или [25]: *куб* – это многогранник, у которого шесть граней и все они квадраты.

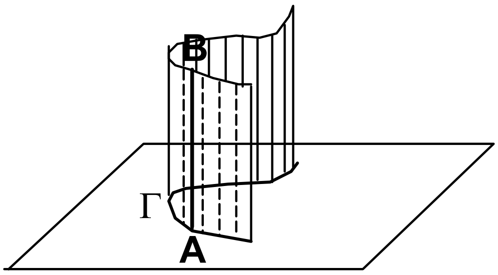
Куб имеет девять плоскостей симметрии: шесть диагональных плоскостей и три плоскости, проходящие через середины каждой четвёрки его параллельных рёбер.

Рассмотрим теперь так называемые *круглые тела*.

Цилиндр

Дадим общее определение цилиндра [25]. Пусть даны две параллельные плоскости α и α', и на плоскости α задана некоторая фигура F (имеющая площадь). Из всех точек фигуры F проведём параллельные друг другу отрезки до плоскости α'. Фигура, которую образуют эти отрезки, и называется *цилиндром*. Фигура F при этом называется *основанием* цилиндра. Отрезки, образующие цилиндр, так и называются – *образующими*. Концы образующих, лежащие на плоскости α', образуют ещё одно *основание* цилиндра. Таким образом, основания цилиндра равны друг другу и лежат в параллельных плоскостях. Иногда *образующими* называют только те из упомянутых выше отрезков, которые соединяют *граничные точки* оснований цилиндра [24].

Несколько иначе даётся определение цилиндра в [29]. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, производимая движением прямой линии AB, сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную линию Γ. Прямая AB называется *образующей*, а линия Γ – *направляющей* (см. рис.). Если за направляющую цилиндрической поверхности взята окружность в некоторой плоскости, то такая поверхность называется *круговой*. Если плоскость, в которой лежит направляющая цилиндрической поверхности, перпендикулярна её образующей, то такая поверхность называется *прямой*.



Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей (начало линии Γ совпадает с её концом) и двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие. Часть поверхности, заключённая между параллельными плоскостями, называется при этом *боковой поверхностью* цилиндра, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью, – *основаниями* цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой* цилиндра. Соответственно, если плоскости оснований цилиндра перпендикулярны образующим, то цилиндр называется *прямым*. Если в основании прямого цилиндра лежит круг, то такой цилиндр имеет название *прямого кругового цилиндра*. Отрезок, соединяющий центры его оснований, называется *осью* цилиндра. Образующие прямого кругового цилиндра, исходящие из точек окружности основания, образуют его *боковую поверхность*.

В курсе средней школы обычно изучается только прямой круговой цилиндр, определяемый как тело, образуемое при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону [28]. По этой причине второе название прямого кругового цилиндра – *цилиндр вращения*. Тогда круги, образованные вращением сторон прямоугольника, перпендикулярных оси вращения, называются *основаниями* цилиндра (верхним и нижним). Отрезок перпендикуляра, опущенного из любой точки плоскости одного основания цилиндра на плоскость другого его основания, а также его длина, называются *высотой* цилиндра. В частности, цилиндр называется *прямым (наклонным)*, если его образующие перпендикулярны (наклонны) к плоскости основания.

Поверхность, образованная вращением стороны прямоугольника, параллельной оси вращения, называется *боковой поверхностью* цилиндра. *Полной поверхностью* цилиндра называется объединение его оснований и боковой поверхности. Отрезок, соединяющий точки окружностей оснований и перпендикулярный к их плоскостям, называется *образующей* цилиндра вращения. Отрезок оси вращения, заключённый внутри цилиндра, называется *осью* цилиндра. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется *осевым сечением* цилиндра. Осевым сечением цилиндра вращения является прямоугольник, стороны которого равны диаметру основания и образующей цилиндра. Все осевые сечения цилиндра – равные между собой прямоугольники. Цилиндр, осевое сечение которого – квадрат, называется *равносторонним.*

Плоскость, содержащая одну и только одну образующую кругового цилиндра, называется *касательной плоскостью* этого цилиндра. Признак касательной плоскости: плоскость, проходящая через образующую цилиндра перпендикулярно плоскости осевого сечения, проведённой через эту образующую, является касательной плоскостью к цилиндру (в [28,29] это рассматривается как определение). Через каждую точку боковой поверхности цилиндра можно провести лишь одну плоскость, касательную к данному цилиндру.

Шар (или сфера) называется *описанным около цилиндра* (мы рассматриваем только цилиндры вращения), если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара (или: если основания цилиндра служат сечениями шара). Цилиндр при этом называют *вписанным в шар*. Около любого цилиндра можно описать шар. *Шар (сфера)* называется *вписанным в цилиндр*, если поверхность шара (сфера) касается оснований цилиндра и всех образующих боковой поверхности цилиндра. Цилиндр в таком случае называется *описанным около шара*. В цилиндр можно вписать шар тогда и только тогда, когда он равносторонний.

Призму называют *вписанной в цилиндр*, если её основания вписаны в основания цилиндра. В этом случае боковые рёбра призмы лежат на боковой поверхности цилиндра и являются его образующими. Призму называют *описанной около цилиндра*, если её основания описаны около оснований цилиндра. В этом случае плоскости её граней касаются боковой поверхности цилиндра (по образующим).

Если боковую поверхность цилиндра вращения пересечь плоскостью так, чтобы эта плоскость не пересекала его оснований, то в сечении получится кривая в виде *эллипса*. Помимо окружности и эллипса сечением цилиндрической поверхности плоскостью могут быть две параллельные прямые.

Можно теперь сформулировать определение *призмы*, опираясь на понятие цилиндра. Призма является частным случаем цилиндра. А именно: *призмой* называется цилиндр, основание которого – многоугольник. Поскольку призма – цилиндр, то все понятия, относящиеся к цилиндрам, относятся и к призмам.

Конус

Приведём вначале определение произвольного конуса. Пусть дана плоская фигура F и некоторая точка S, не лежащая с фигурой F в одной плоскости. Отрезки, проведённые из точки S во все точки фигуры F, образуют фигуру, называемую *конусом*. Точка S при этом называется *вершиной* конуса, а фигура F – *основанием* конуса. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками его основания, называются *образующими* конуса. *Высотой* конуса называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины конуса на плоскость его основания, а также его длина. Если основание конуса – круг, то конус называется *круговым*. Если вершина кругового конуса проектируется в центр его основания, то такой конус называется *прямым круговым*.

Иначе определяется конус в [29]. *Конической поверхностью* называется поверхность, производимая движением прямой SA, перемещающейся в пространстве так, что она при этом всё время проходит через неподвижную точку S и пересекает данную линию Γ. Прямая SA называется *образующей*, точка S – *вершиной*, а линия Γ – *направляющей* конической поверхности. *Конусом* называется тело, ограниченное частью конической поверхности с замкнутой направляющей Γ, а также плоскостью, не проходящей через вершину S (и пересекающей все образующие). Вершина конической поверхности называется *вершиной* конуса, а часть конической поверхности, ограниченная вершиной и секущей плоскостью – *боковой поверхностью* конуса. Часть секущей плоскости, высекаемая конической поверхностью, – *основанием* конуса. В [24] конус (круговой – *авт.*) называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

В элементарной геометрии рассматриваются только прямые круговые конусы. Сформулируем ещё одно определение такого конуса – как тела вращения [28]. Тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет, называется *прямым круговым конусом*, или *конусом вращения*. Отрезок оси вращения, заключённый внутри конуса, называется *осью* конуса (одновременно он является *высотой* конуса). Круг, образованный при вращении второго катета, называется *основанием* конуса. Длина этого катета называется *радиусом основания*. Вершина острого угла вращающегося треугольника, лежащая на оси вращения, называется *вершиной конуса*. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности его основания, называются образующими конуса. Все образующие конуса вращения равны между собой и равнонаклонены к плоскости его основания. Поверхность, полученная при вращении гипотенузы, называется *боковой поверхностью* конуса. Боковая поверхность конуса является объединением всех его образующих. Объединение боковой поверхности конуса и его основания называется *полной поверхностью* конуса.

Осевые сечения конуса вращения – это его сечения плоскостями, проходящими через его ось. Так как длины всех образующих конуса равны, то осевые сечения представляют собой равнобедренные треугольники с основаниями, равными диаметру основания конуса. Конус, в осевом сечении которого – правильный треугольник, называется *равносторонним* конусом. Любое сечение конуса вращения плоскостью, параллельной основанию, есть круг, а сечение боковой поверхности конуса такой плоскостью – окружность этого круга.

Плоскость, содержащая одну и только одну образующую кругового конуса, называется *касательной плоскостью* этого конуса. Признак касательной плоскости: плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно плоскости осевого сечения, проведённой через эту образующую, является касательной плоскостью к конусу. (В [28,29] это принято за определение касательной плоскости.) Через каждую точку боковой поверхности конуса можно провести лишь одну плоскость, касательную к данному конусу.

Шар (или сфера) называется *описанным около кругового конуса*, если поверхность шара проходит через вершину конуса, а окружность основания конуса лежит на поверхности шара. Конус при этом называют *вписанным в шар*. *Шар (сфера)* называется *вписанным в конус*, если поверхность шара касается основания конуса и всех образующих боковой поверхности конуса. Конус при этом называют *описанным около шара*. Центр вписанного в прямой круговой конус шара совпадает с точкой пересечения высоты конуса с биссектрисой угла между любой образующей и плоскостью основания.

Пирамидой, *вписанной в конус*, называют такую пирамиду, основание которой вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. В этом случае конус называется *описанным около пирамиды*. Боковые рёбра пирамиды при этом принадлежат боковой поверхности конуса (и являются образующими конуса). Пирамиду называют *описанной около конуса*, если основание конуса вписано в основание пирамиды, а вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. В этом случае конус называют вписанным в пирамиду. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

Усечённый конус получается, если от конуса отсечь меньший конус плоскостью, параллельной основанию. То есть *усечённым конусом* называется часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. В усечённом конуса *два основания*: «нижнее» (основание исходного конуса) и «верхнее» (основание отсекаемого конуса). *Образующей* усечённого конуса называется часть образующей полного конуса, заключённая между основаниями усечённого конуса. *Высотой* усечённого конуса называется отрезок перпендикуляра, опущенного из точки одного основания на плоскость другого, а также его длина. *Усечённый конус вращения* получается из конуса вращения. Поэтому его основания – круги с центрами, лежащими на оси конуса. Усечённый конус вращения получается вращением прямоугольной трапеции вокруг её боковой стороны, перпендикулярной основаниям (или вращением равнобедренной трапеции вокруг оси симметрии). Та боковая сторона трапеции, вокруг которой происходит вращение, называется *осью* усечённого конуса, а вторая боковая сторона трапеции – *образующей* усечённого конуса. Основания трапеции при этом являются радиусами оснований усечённого конуса. *Боковая поверхность* усечённого конуса вращения – это принадлежащая ему часть боковой поверхности конуса вращения, из которого он получен. *Полная поверхность* усечённого конуса вращения состоит из его оснований и боковой поверхности.

Шар (или сфера) называется *описанным около усечённого кругового конуса*, если окружности оснований конуса лежат на поверхности шара. *Шар (сфера)* называется *вписанным в усечённый конус*, если поверхность шара касается оснований конуса и всех образующих боковой поверхности конуса.

Если вокруг данной прямой – оси – вращать пересекающую её прямую, то при этом образуется поверхность, которую называют *круговой конической поверхностью*, или *конической поверхностью вращения*. Точка пересечения оси и вращаемой вокруг неё прямой называется *вершиной* конической поверхности.

В курсе аналитической геометрии доказывается, что сечением конической поверхности вращения плоскостью может быть либо окружность (секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности и не проходит через её вершину), либо эллипс (секущая плоскость не перпендикулярна оси конической поверхности и пересекает все её образующие), либо парабола (секущая плоскость параллельна только одной образующей конической поверхности), либо гипербола (секущая плоскость параллельна оси конической поверхности), либо пара пересекающихся прямых (секущая плоскость проходит через вершину конической поверхности). Поэтому невырожденные кривые – окружность, эллипс, параболу и гиперболу – называют *коническими сечениям*.

Опираясь на введённое понятие конуса, можно сформулировать следующее определение пирамиды как частного случая конуса. *Пирамидой* называется конус, основанием которого является многоугольник. Поскольку пирамида – конус, то все понятия, относящиеся к конусам, относятся и к пирамидам.

Сфера и шар

Сфера и шар в пространстве определяются аналогично окружности и кругу на плоскости. *Сферой* называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на одно и то же (положительное) расстояние [25]. Эта точка называется *центром* сферы, а отрезок, соединяющий любую точку на сфере с её центром, а также его длина – *радиусом* сферы. *Шаром* называется фигура, образованная всеми точками пространства, находящимися на расстоянии не большем данного (положительного) расстояния r от данной точки. Эта точка называется *центром* шара, а отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой, удалённой от него на расстояние r, а также его длина – *радиусом* шара. Сферу, имеющую с шаром общий центр и один и тот же радиус, называют также *поверхностью, ограничивающей шар*, или просто *границей* шара.

Напомним, что точка называется *граничной* для данной фигуры, если в любой сколь угодно малой её окрестности есть точки как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество граничных точек фигуры называется её *границей* [25].

Хордой сферы (шара) называется отрезок, соединяющий две точки сферы (шаровой поверхности). Хорда сферы (шаровой поверхности), проходящий через её центр, называется *диаметром* сферы (шара).

В [25] *диаметром* шара называют любой отрезок, по которому пересекает шар прямая, проходящая через его центр, а также величину, равную удвоенному радиусу.

Точки сферы (шара), являющиеся концами диаметра, называются *диаметрально противоположными*. Окружность, по которой сфера пересекается с плоскостью, проходящей через центр сферы (диаметральная плоскость), называется *большой окружностью сферы*. Сечение шара диаметральной плоскостью называют *большим кругом* шара.

В случае, когда шар, а также ограничивающая его сфера, имеют с некоторой плоскостью единственную общую точку, говорят, что плоскость *касается* шара и ограничивающей его сферы, а их общая точка называется *точкой касания*. Плоскость, касающаяся сферы (шара), называется *касательной плоскостью* этой сферы (шара). *Свойство касательной плоскости*: касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. *Признак касания сферы и плоскости*: если плоскость проходит через точку на сфере и перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то она касается сферы (доказательство двух последних утверждений можно найти, например в [28]).

Говоря о *взаимном расположении шара (сферы) и плоскости*, приведём теорему [28].

1) Если расстояние от центра шара до данной плоскости меньше радиуса шара, то пересечением шара с плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, проведённого из центра шара на плоскость, или сам центр шара, если плоскость проходит через этот центр. Пересечением сферы с плоскостью является окружность указанного круга. Радиус r сечения в этом случае равен

$$r = \sqrt{R^2 - d^2},$$

где R – радиус шара, а d – расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2) Если расстояние от центра шара до данной плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку (точку касания).

3) Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше его радиуса, то плоскость не имеет с шаром общих точек.

Прямую, имеющую со сферой (шаром) единственную общую точку, называют *касательной прямой*. Через любую точку сферы проходит бесконечно много касательных прямых, причём все они лежат в касательной плоскости. Прямая, имеющая со сферой две общие точки, называется *секущей*.

Секущие и касательные прямые к сфере обладают свойствами, аналогичными свойствам секущих и касательных к окружности. В частности, справедливы следующие утверждения.

1) Если две прямые пересекаются в точке S и касаются сферы соответственно в точках A и B, то отрезки касательных равны: $SA = SB$ (*теорема об отрезках касательных*).

2) Если одна из двух прямых, пересекающихся в точке S, касается сферы в точке A, а другая пересекает сферу в точках B и C, то $SB \cdot SC = SA^2$ (*тео-*

рема о касательной и секущей).

3) Если две прямые, пересекающиеся в точке S, пересекают сферу в точках A, B и C, D, то $SA \cdot SB = SC \cdot SD$. Точка S при этом может лежать как вне, так и внутри сферы (*теорема о секущих и хордах*).

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнение сферы с центром в точке $(a;b;c)$ и радиусом $R > 0$ имеет вид (доказательство см. в [28]):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Шар с центром в точке $(a;b;c)$ и радиусом $R > 0$ задаётся неравенством

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \le R^2.$$

При $R = 0$ говорят о *вырождении* сферы и шара *в точку*.

Отметим, что сфера, как и шар, относятся к *фигурам вращения*. Так, сфера получается вращением полуокружности вокруг её диаметра, а шар получается вращением полукруга тоже вокруг его диаметра [28].

В [17] *шаром* называется тело, происходящее от вращения полукруга вокруг диаметра, а поверхность, образуемая при этом полуокружностью, называется *шаровой* или *сферической поверхностью*.

Диаметр в этом случае будет служить *осью* вращения. Сфера и шар – *центрально симметричные* фигуры (а также *зеркально симметричные* фигуры). А именно, центр сферы (шара) является её (его) центром симметрии. Любая диаметральная плоскость сферы (шара) является её (его) плоскостью симметрии.

Шар (сфера) называется *вписанным в двугранный угол*, если он касается обеих граней угла (и при этом расположен во внутренней области угла). Центр вписанного в двугранный угол шара лежит на биссекторной плоскости этого двугранного угла.

Шар (сфера) называется *вписанным в многогранный угол*, если он касается каждой его грани (располагаясь во внутренней области угла). Не во всякий многогранный угол можно вписать шар.

Шар (сфера) называется *вписанным в многогранник*, а многогранник – *описанным вокруг шара (сферы)*, если шар (сфера) касается всех граней многогранника (при этом шар находится внутри многогранника). Если же шар касается одной из граней многогранника и продолжений граней, смежных с ней, то он называется *вневписанным*. Центр вписанной сферы является точкой пересечения биссекторных плоскостей всех внутренних двугранных углов многогранника. Не во всякий многогранник можно вписать шар. Но, например, в любую треугольную или правильную пирамиду всегда можно вписать шар. Объём многогранника, описанного около сферы, равен произведению полной поверхности многогранника на треть радиуса сферы (доказательство можно найти, например, в [29]).

Говорят, что шар (сфера) *описан около многогранника*, если все вершины многогранника принадлежат поверхности шара (сфере). А о многограннике в этом случае говорят, что он *вписан в шар (сферу)*. Центр шара, описанного около многогранника, равноудалён от всех вершин многогранника. Для того чтобы около многогранника можно было описать шар (сферу), необходимо и достаточно, чтобы все плоскости, проходящие через середины рёбер перпендикулярно им, имели одну общую точку. Например, около любой правильной или любой треугольной пирамиды шар описать можно. Около пирамид, все рёбра которых одинаково наклонены к основанию, также можно описать шар, причём его центр будет лежать на прямой, содержащей высоту пирамиды.

Две или несколько сфер (шаров) называются *концентрическими*, если их центры совпадают. Две сферы (шара) называются *касающимися* друг друга, если они имеют единственную общую точку. Ясно, что две сферы касаются друг друга в точке A, если они касаются некоторой плоскости, содержащей эту точку [29]. При этом касание может быть внешним или внутренним. *Линией (плоскостью) центров* двух сфер называется прямая (плоскость), проходящая через центры этих сфер. Точка касания сфер лежит на линии центров. *Признак касания*: если две сферы имеют общую точку, лежащую на линии центров, то это точка их касания. Две касающиеся сферы имеют общую касательную плоскость, перпендикулярную их линии центров. Две сферы разных радиусов называются *пересекающимися*, если они имеют более одной общей точки. Линией пересечения двух сфер является окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной их линии центров. *Признак пересечения*: если две сферы имеют общую точку, расположенную вне линии центров, то они пересекаются.

Приведём ещё несколько определений, связанных со сферами и шарами. *Сферическим сегментом* (сегментной поверхностью) называют общую часть сферы и полупространства, граница которого – плоскость, пересекающая сферу. Окружность, по которой плоскость пересекает сферу, называется *основанием сферического сегмента*. Если через центр сферы провести диаметр перпендикулярно плоскости сечения, то отрезок этого диаметра между точками его пересечения с данной плоскостью и сферой (а также длина этого отрезка) называется *высотой* сегмента. Как следует из определения, любая пересекающая сферу плоскость делит её на два сферических сегмента. В случае если в качестве такой плоскости выступает диаметральная (проходящая через центр сферы), то образовавшиеся сегменты называют *полусферами*.

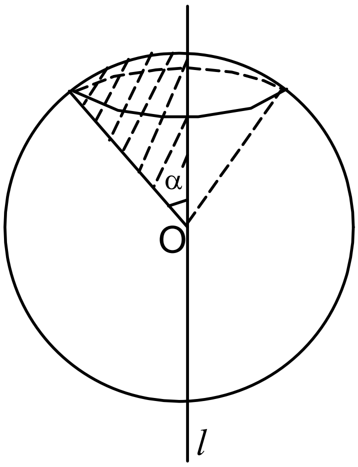
Сферическим поясом называется часть сферы, лежащая между двумя параллельными плоскостями, пересекающими сферу. *Высотой сферического пояса* при этом называется расстояние между этими плоскостями (а также отрезок перпендикуляра, проведённого из точки одного основания к плоскости другого). Сферический сегмент и сферический пояс можно рассматривать как поверхности, образованные вращением соответствующих дуг окружности вокруг её диаметра.

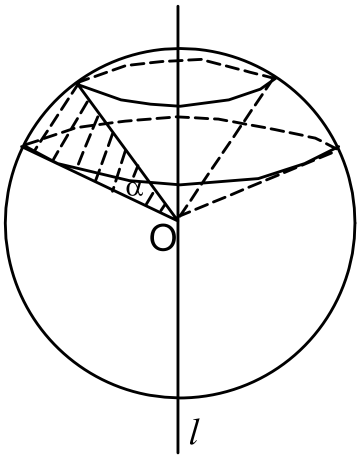
Аналогично можно определить шаровые сегмент и слой. Шаровой сегмент ограничен частью сферы (*сегментная поверхность*) и кругом, полученным в сечении шара плоскостью (*основание шарового сегмента*). Если провести диаметр шара, перпендикулярный плоскости сечения, то та его часть, которая принадлежит сегменту (а также её длина), называется *высотой сегмента* (*сегментной поверхности*).

В [28] *шаровой сегмент* определяется как часть шара, заключённая между секущей плоскостью и одной из двух частей его сферической поверхности. В пособиях [17,24,25,29] *шаровым (сферическим) сегментом* называют часть шара (сферы), отсекаемую от него (от неё) плоскостью.

Шаровым слоем (*шаровым поясом*) называют часть шара (шаровой поверхности), заключённую между двумя пересекающими его параллельными плоскостями. Поверхность шарового слоя состоит из двух кругов, называемых *основаниями* шарового слоя, и шарового пояса соответственно.

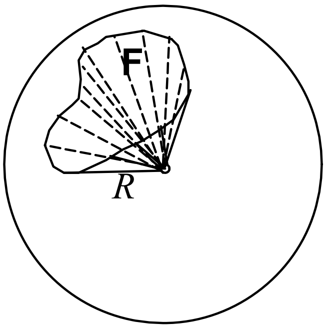
Шаровой сектор получают из шарового сегмента, добавляя или удаляя соответствующий конус вращения. А именно, если высота сегмента меньше радиуса исходного шара, то шаровой сектор получают добавлением к сегменту конуса с вершиной в центре шара и с основанием, совпадающим с основанием сегмента. Если же высота сегмента больше радиуса исходного шара, то шаровой сектор получают удалением из сегмента такого конуса.





В [29,17] шаровой сектор определяется как тело вращения. А именно, *шаровым сектором* называется тело, образованное при вращении кругового сектора с углом α $\left(0^0 < \alpha < 180^0\right)$ вокруг прямой, которая содержит диаметр круга, не имеющий с круговым сектором общих внутренних точек. На рисунке вверху изображены два круговых сектора (отмечены штриховкой), вращение которых вокруг оси приводит к образованию шарового сектора.

Если при этом ось вращения совпадает с радиусом, ограничивающим вращаемый круговой сектор, то полученный в результате вращения шаровой сектор называется *простым* (первый из рисунков). Если же ось вращения не совпадает с радиусом, ограничивающим круговой сектор, то полученный шаровой сектор называют *полым* (второй рисунок). Таким образом, поверхность простого шарового сектора состоит из сегментной поверхности и боковой поверхности конуса, а поверхность полого сектора – из поверхности шарового пояса и боковых поверхностей двух конусов.



В общем случае *шаровой сектор* определяется так [25]. Рассмотрим шар радиуса R и на его поверхности – некоторую фигуру F площади S. Назовём *шаровым сектором с основанием* F фигуру, образованную радиусами, проведёнными из центра шара во все точки фигуры F. Ясно, что определение шарового сектора, приведённое выше, описывает лишь частный случай этой фигуры.

Справедливо утверждение: *площадь* S *фигуры* F *на сфере радиуса* R *и объём* V *шарового сектора, основанием которого служит данная фигура, связаны формулой*

$$V = \frac{1}{3}SR.$$

Итак, рассмотрим некоторые из важнейших теорем стереометрии.

4.2. Теоремы о параллельных прямых в пространстве

Напомним четыре аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве.

I_3. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

I_4. На каждой плоскости есть по крайней мере одна точка, и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

I_5. Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости.

I_6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку.

Замечание (к аксиоме I_6). Опираясь на аксиому I_6, можно доказать, что если две несовпадающие плоскости имеют общую точку, то они имеют единственную общую прямую, проходящую через эту точку [2].

Замечание (к аксиоме I_4). В книге [26] доказывается, что каждая плоскость содержит по крайней мере три точки.

Докажем три следствия из этих аксиом.

Следствие 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.*

Доказательство. Действительно, точка вне прямой вместе с какими-либо двумя другими точками этой прямой составляют три точки, через которые, в силу аксиомы I_3, можно провести плоскость, причём только одну.

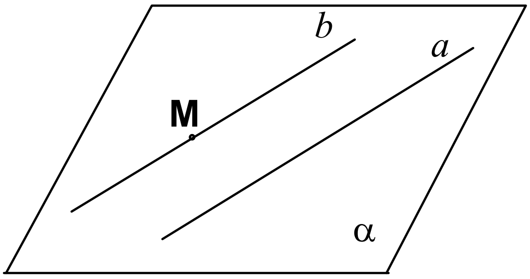
Следствие 2. *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.*

Доказательство. Действительно, взяв точку пересечения и ещё по одной точке на каждой прямой, получим три точки, не лежащие на одной прямой, через которые можно провести плоскость, и притом только одну.

Следствие 3. *Через две параллельные (не совпадающие) прямые можно провести плоскость, и притом только одну.*

Доказательство. В самом деле, параллельные прямые, по определению, лежат в одной плоскости. Эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных прямых и какую-нибудь точку на другой прямой в силу следствия 1 можно провести только одну плоскость.

Теорема 1. *Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*

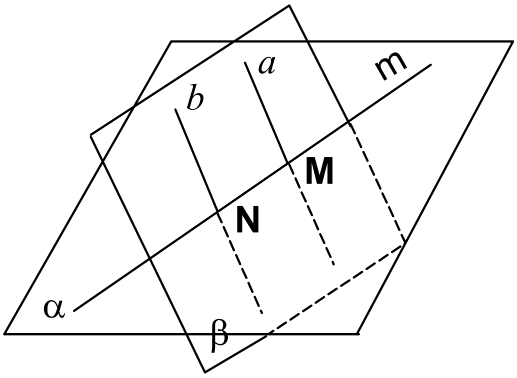


Доказательство.

Рассмотрим прямую a и точку M, не лежащую на этой прямой. По следствию 1 через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна. Обозначим эту плоскость буквой α. Проведём в этой плоскости через точку M параллельно прямой a прямую b (это можно сделать, причём единственным образом, в силу аксиомы параллельности прямых и теоремы, доказывающей существование такой прямой [2]). Построенная прямая b является параллельной a не только на плоскости α, но и в пространстве (т.к. выполняется соответствующее определение параллельных прямых в пространственном случае). Теорема доказана.

Прежде чем сформулировать и доказать теорему о трёх параллельных прямых в пространстве, докажем вначале одну вспомогательную лемму.

<u>Лемма</u>. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

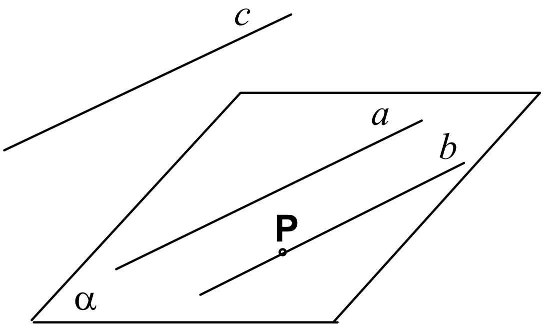


Доказательство. Рассмотрим две параллельные прямые a и b, одна из которых – прямая a – пересекает плоскость α в точке M. Докажем, что прямая b тоже пересекает плоскость α, т.е. имеет с ней ровно одну общую точку.

Обозначим буквой β плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как две различные плоскости α и β имеют общую точку M, то по аксиоме I_6 они имеют ещё одну общую точку. Известно (см., например, в [2]), что, опираясь на аксиому I_6, можно доказать, что если две плоскости имеют общую точку, то они имеют единственную общую прямую, проходящую через эту точку (сейчас примем это утверждение без доказательства). Таким образом, плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой m.

Итак, с одной стороны, полученная прямая m лежит в плоскости β и пересекает прямую a в точке M, поэтому она пересекает параллельную ей прямую b в некоторой точке N. С другой стороны, прямая m лежит также в плоскости α, поэтому N – точка плоскости α. Следовательно, N – общая точка прямой b и плоскости α.

Докажем теперь, что что прямая b не имеет других общих точек с плоскостью α, кроме точки N. Это и будет означать, что прямая b пересекает плоскость α. Действительно, если бы прямая b имела ещё одну общую точку с плоскостью α, то, согласно замечанию к аксиоме I_6, она целиком лежала бы в плоскости α и была бы общей прямой плоскостей α и β, т.е. совпадала бы с прямой m. Но это невозможно, так как по условию прямые a и b параллельны, а прямые a и m пересекаются. Лемма доказана.



Следующая теорема доказывает, что отношение параллельности прямых в пространстве обладает свойством транзитивности.

<u>Теорема 2</u>. Если две прямые в пространстве параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.

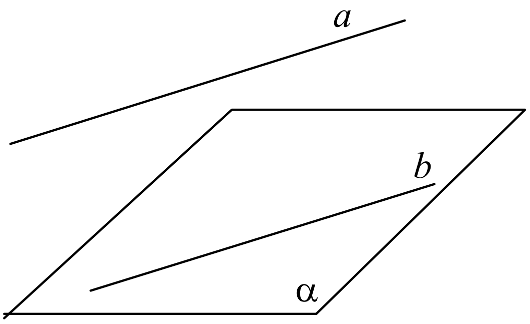
Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой c, и прямая b тоже параллельна прямой c. Требуется доказать, что прямые a и b параллельны, т.е. лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

1) Докажем, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Отметим какую-нибудь точку P на прямой b. Обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку P. Докажем, что прямая b лежит в плоскости α. Допустим, что прямая b пересекает плоскость α, тогда по доказанной выше лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая c также пересекает плоскость α. Но так как прямая c параллельна прямой a, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, так как прямая a лежит в плоскости α. Полученное противоречие доказывает, что прямые a и b лежат в одной плоскости.

2) Докажем теперь, что прямые a и b не имеют общих точек. Это так, поскольку в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые a и b, параллельные прямой c, что невозможно. Теорема доказана.

4.3. Признак параллельности прямой и плоскости

<u>Теорема 1</u> (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

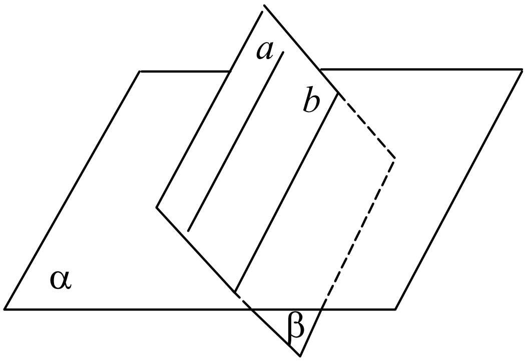


Доказательство.

Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые a и b, расположенные так, что прямая b лежит в плоскости α, а прямая a не лежит в этой плоскости. Докажем, что прямая a параллельна плоскости α.

Предположим, что это не так. Тогда прямая a пересекает плоскость α, и тогда по лемме из предыдущего пункта (о пересечении плоскости параллельными прямыми) прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, поскольку прямая b лежит в плоскости α. Следовательно, прямая a не пересекает плоскость α, и, значит, она параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

<u>Теорема 2</u> . Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.



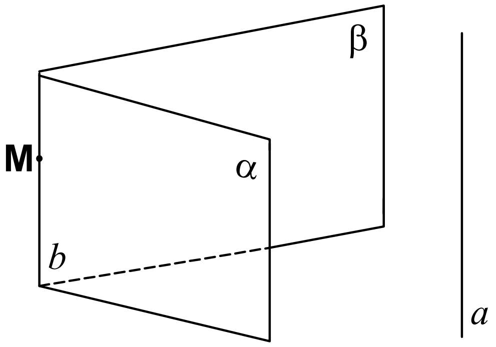
Доказательство. Пусть через данную прямую a, параллельную плоскости α, проходит плоскость β, пересекающая плоскость α по прямой b. Докажем, что прямая b параллельна прямой a.

Действительно, эти прямые лежат в одной плоскости (плоскости β) и не пересекаются, ведь в противном случае прямая a пересекала бы плоскость α. Но это невозможно, поскольку по условию теоремы прямая a параллельна плоскости α. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения.

Доказательство. Пусть даны две плоскости α и β, которые пересекаются по прямой b, и, кроме того, некоторая прямая a параллельна и плоскости α, и плоскости β. Докажем, что прямая a параллельна прямой b.

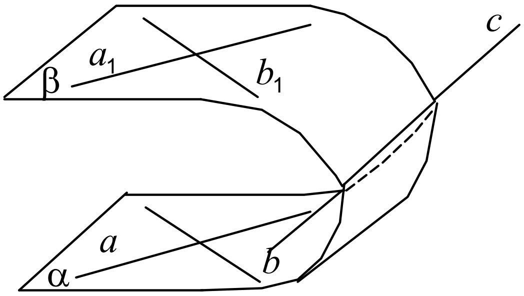
Через какую-нибудь точку M, лежащую на прямой b, и через прямую a проведём плоскость. Тогда эта плоскость должна пересекаться с плоскостями α и β по прямым, параллельным прямой a и проходящим через точку M. Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную прямой a, поэтому две линии пересечения проведённой плоскости с плоскостями α и β должны совпадать с этой прямой. Кроме того, эта прямая, находясь одновременно и в плоскости α, и в плоскости β, должна, в свою очередь, совпадать с прямой b, по которой плоскости α и β пересекаются. Это и означает, что прямая a параллельна прямой b.



4.4. Признак параллельности плоскостей

<u>Теорема 1</u> (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

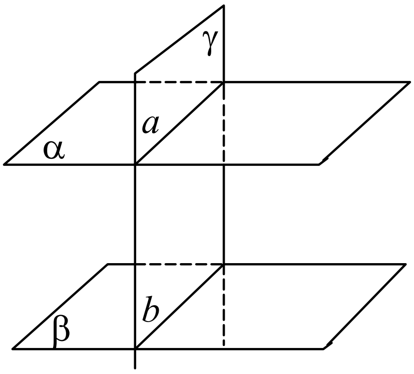
Доказательство.



Рассмотрим две различные плоскости α и β. Пусть в плоскости α лежат две прямые a и b, пересекающиеся в точке M, а в плоскости β лежат две прямые a_1 и b_1, причём прямая a параллельна прямой a_1 и прямая b параллельна прямой b_1. Докажем, что плоскость α параллельна плоскости β.

Прежде всего, отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости (теорема 1 п. 4.3.) прямые a и b параллельны плоскости β (поскольку они не лежат в этой плоскости и для каждой из них в плоскости β существует параллельная ей прямая).

Доказательство проведём методом от противного. Предположим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Покажем, что прямые a и c параллельны. С одной стороны, прямые a и c не имеют общих точек, поскольку прямая a параллельна плоскости β (по признаку параллельности прямой и плоскости: так как a параллельная прямой a_1, лежащей в β). С другой стороны, прямые a и c лежат в одной плоскости (α). Отсюда, по определению параллельности прямых, прямые a и c параллельны. Рассуждая аналогично, доказывается, что прямые b и c также параллельны. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как противоречит теореме о параллельных прямых (теорема 1 п. 4.2.), утверждающей, что через точку (M) в пространстве можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой (c). Следовательно, сделанное предположение о непараллельности α и β неверно. Значит, эти плоскости параллельны. Теорема доказана.



Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

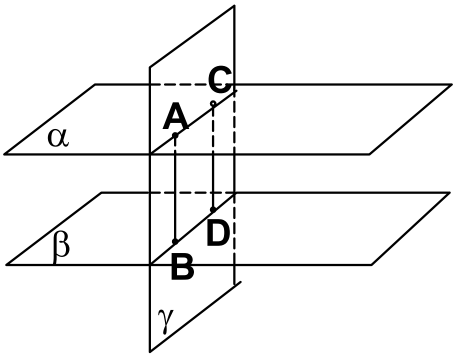
<u>Теорема 2</u>. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

Доказательство. Рассмотрим прямые a и b, по которым две параллельные плоскости α и β пересекаются с третьей плоскостью γ.

Необходимо доказать, что прямые a и b параллельны.

Действительно, эти прямые a и b, по условию, лежат в одной плоскости (γ). Покажем, что при этом они не пересекаются. В самом деле, если бы эти прямые пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку (точку пересечения прямых), что противоречит определению параллельности плоскостей. Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, следовательно, согласно определению, они параллельны. Теорема доказана.

Теорема 3. Отрезки параллельных прямых, заключённые между двумя параллельными плоскостями, равны.



Доказательство. Пусть две параллельные прямые пересечены двумя параллельными плоскостями α и β. Рассмотрим отрезки AB и CD этих параллельных прямых, заключённые между плоскостями α и β. Докажем, что длины отрезков AB и CD равны.

Рассмотрим плоскость γ, проходящую через параллельные прямые AB и CD. Тогда эта плоскость γ по предыдущей теореме пересекает плоскости α и β по двум параллельным прямым AC и BD. Заметим, что в получившемся четырёхугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, по определению, данный четырёхугольник – параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому длины AB и CD равны. Теорема доказана.

Замечание 1. Приведём ещё один признак параллельности двух плоскостей (см. его доказательство, например, в [25]): две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны. Справедливо также утверждение: прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой их них.

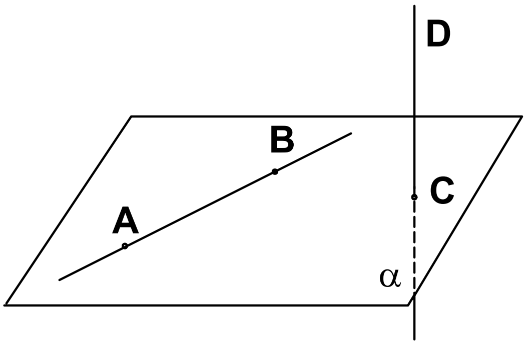
Замечание 2. Аналогом аксиомы о параллельных прямых на плоскости в стереометрии является следующая теорема, которую в [25] называют *основной теоремой о параллельных плоскостях:* через каждую точку, не лежащую на данной плоскости, проходит плоскость, параллельная данной, и притом только одна. У этой теоремы имеются два следствия: 1) если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую из них; 2) две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны между собой.

4.5. Теоремы о скрещивающихся прямых

Теорема 1. Если две прямые скрещиваются, то они не пересекаются и не параллельны.

Доказательство. Если бы эти прямые пересекались или были бы параллельны, то они лежали бы в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых. Теорема доказана.

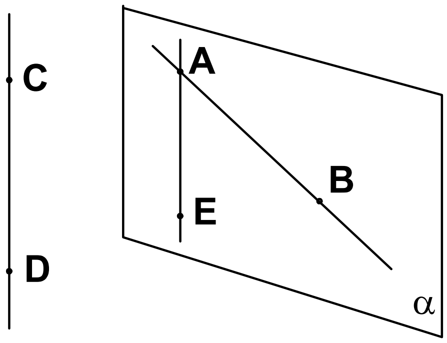
Теорема 2 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.



Доказательство. Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB.

Докажем, что прямые AB и CD – скрещивающиеся прямые, т.е. что они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β должна будет проходить через прямую AB и точку C, и поэтому совпадёт с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD, по условию теоремы, не лежит в плоскости α.

Теорема 2. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.



Доказательство. Пусть прямые AB и CD скрещиваются. Докажем, что через прямую AB обязательно проходит плоскость, параллельная прямой CD, и притом только одна (существование и единственность плоскости, проходящей через CD параллельно AB доказывается аналогично).

Проведём через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE. Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α (по признаку параллельности прямой и плоскости).

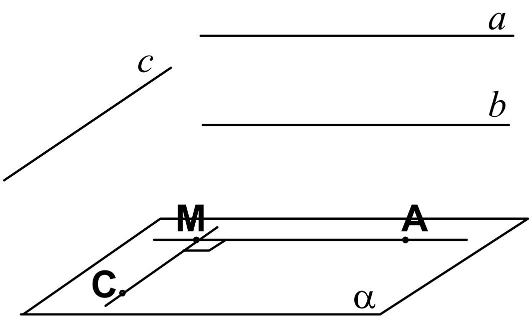
Докажем, что плоскость α – единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD (по лемме о параллельных прямых). Теорема доказана.

Замечание. Указанные в формулировке теоремы две плоскости параллельны между собой [2].

В [25] доказывается следующий *признак* скрещивающихся прямых: если на двух прямых найдутся четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то эти прямые скрещиваются.

4.6. Перпендикулярность прямой и плоскости

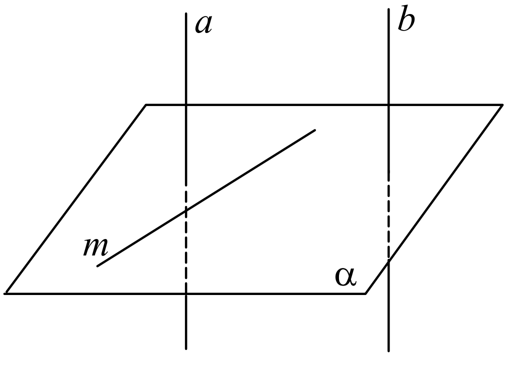
Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.



Доказательство. Пусть прямая a параллельна прямой b, и прямая a перпендикулярна прямой c. Докажем, что тогда и прямая b перпендикулярна прямой c.

Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведём прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c. Так как прямые a и c по условию взаимно перпендикулярны, то параллельные им прямые MA и MC образуют прямой угол, т.е. $\angle AMC = 90^0$. По условию леммы прямые a и b параллельны, а по построению прямая a параллельна прямой MA, поэтому и прямая b параллельна прямой MA (теорема 2 п. 4.2.). Таким образом, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, лежащим в одной плоскости, и величина угла между которыми равна 90^0. Это по определению означает, что величина угла между прямыми b и c также равна 90^0, т.е. прямая b перпендикулярна прямой c. Лемма доказана.

Теорема 1 (о параллели к перпендикуляру). Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

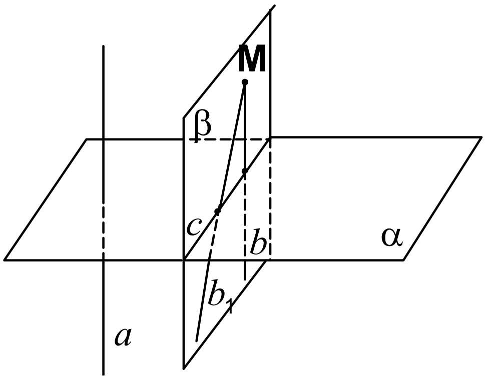


Доказательство. Рассмотрим две параллельные прямые a и b и плоскость α такую, что прямая a перпендикулярна плоскости α. Докажем, что и прямая b перпендикулярна плоскости α.

Проведём какую-нибудь прямую m в плоскости α. Так как прямая a перпендикулярна плоскости α, то прямая a перпендикулярна и прямой m, лежащей в плоскости α. По доказанной выше лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей заключаем, что и прямая b перпендикулярна прямой m. Поскольку m – произвольная прямая в плоскости α, то прямая b перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т.е. прямая b перпендикулярна к плоскости α. Теорема доказана.

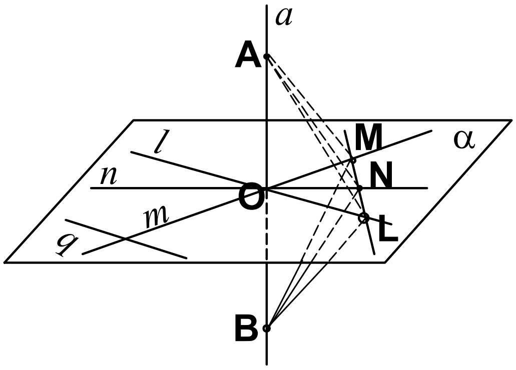
<u>Теорема 2</u> (о параллельности перпендикуляров). Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Доказательство. Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α. Докажем, что эти прямые параллельны.



Через какую-нибудь точку M прямой b проведём прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме получим, что прямая b_1 перпендикулярна плоскости α. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Допустим, что это не так и прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β. Но это невозможно (противоречит теореме о единственности перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой). Следовательно, прямая b_1 совпадает с прямой b, и поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

<u>Теорема 3</u> (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если некоторая прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



Доказательство. Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым m и n, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O. Необходимо доказать, что прямая a перпендикулярна к плоскости α. Для этого по определению нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой q, лежащей в плоскости α.

1) Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O. Проведём через точку O прямую l, параллельную прямой q (если прямая q проходит через точку O, то в качестве l возьмём саму прямую q). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведём в плоскости α прямую, пересекающую прямые m, n и l соответственно в точках M, N и L (существование такой прямой доказывается, например, в [2]). Будем считать для определённости, что точка N лежит между точками M и L. Так как прямые m и n – серединные перпендикуляры к отрезку AB, то верны равенства

$$AM = BM \text{ и } AN = BN.$$

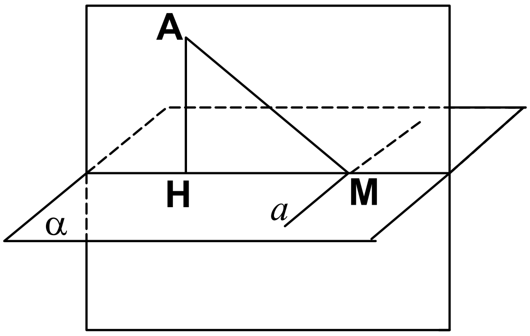
Следовательно, треугольники AMN и BMN равны по трём сторонам. Поэтому их углы $\angle AMN$ и $\angle BMN$ равны. Сравним теперь треугольники AML и BML. Они равны по двум сторонам и углу между ними: стороны AM и BM и углы $\angle AML$ и $\angle BML$ равны по доказанному выше, а сторона ML – общая. Поэтому их соответственные стороны AL и BL тоже равны. Это означает, что треугольник ABL равнобедренный, а значит, его медиана LO является также высотой, т.е. прямая l перпендикулярна прямой a. Так как прямая l параллельна прямой q и перпендикулярна прямой a, то и прямая q перпендикулярна прямой a (по лемме из данного пункта о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Таким образом, прямая a перпендикулярна к любой прямой q, лежащей в плоскости α. Это означает, что прямая a перпендикулярна к плоскости α.

2) Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведём тогда через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме прямая a_1 перпендикулярна и прямой m, и прямой n, поэтому, по доказанному в первом случае, прямая a_1 перпендикулярна плоскости α. Отсюда (по теореме 1) следует, что прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

В [17] доказываются дополнительно следующие обратные друг другу свойства: 1) если прямая перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой; 2) Если две плоскости перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны. В [17,25] приводится доказательство теоремы о том, что через каждую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна.

4.7. Перпендикуляр и наклонные. Теорема о трёх перпендикулярах

Теорема 1 (о трёх перпендикулярах). Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.



Доказательство. Пусть из точки A проведены отрезок AH – перпендикуляр к плоскости α, и отрезок AM – наклонная к этой плоскости. Кроме того, пусть через основание наклонной M в плоскости α проведена прямая a, перпендикулярная к проекции HM наклонной AM. Требуется доказать, что прямая a перпендикулярна к наклонной AM.

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и HM, лежащим в этой плоскости: прямая a перпендикулярна прямой HM по условию теоремы и перпендикулярна прямой AH, так как прямая AH перпендикулярна плоскости α. По определению перпендикулярности прямой и плоскости это означает, что прямая a будет перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности, прямая a перпендикулярна к наклонной AM. Теорема доказана.

Справедлива также обратная теорема.

Теорема 2 . Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции на эту плоскость.

Доказательство. Пусть теперь через точку M проведена прямая a, перпендикулярная наклонной AM (см. предыдущий рис.). Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и AM: прямая a перпендикулярна прямой AM по условию и перпендикулярна прямой AH, так как прямая AH перпендикулярна плоскости α.

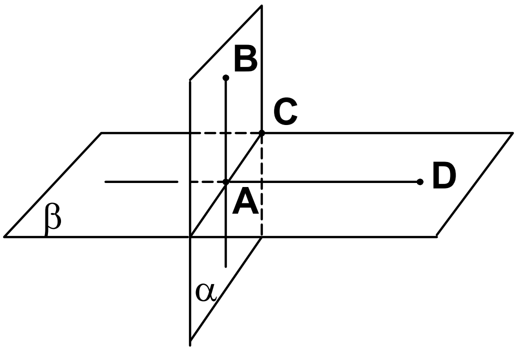
Отсюда по определению перпендикулярности прямой и плоскости следует вывод о том, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности, прямая a перпендикулярна к проекции HM наклонной AM. Теорема доказана.

Таким образом, теорему о трёх перпендикулярах можно было сформулировать в виде необходимого и достаточного условия: наклонная к плоскости перпендикулярна к прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.

4.8. Признак перпендикулярности плоскостей

Теорема 1 (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Рассмотрим две плоскости α и β такие, что плоскость α проходит через прямую AB, перпендикулярную к плоскости β и пересекающуюся с ней в точке A. Требуется доказать, что в этом случае плоскости α и β будут взаимно перпендикулярны.



Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой AC, причём прямая AB будет обязательно перпендикулярна прямой AC, так как по условию прямая AB перпендикулярна плоскости β и, следовательно, прямая AB перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.

Проведём в плоскости β прямую AD, перпендикулярную к прямой AC. Тогда угол $\angle BAD$ будет являться линейным углом двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей α и β. Но $\angle BAD$ прямой по условию (так как прямая AB перпендикулярна плоскости β). Следовательно, величина угла между плоскостями α и β равна 90^0, т.е. плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Теорема доказана.

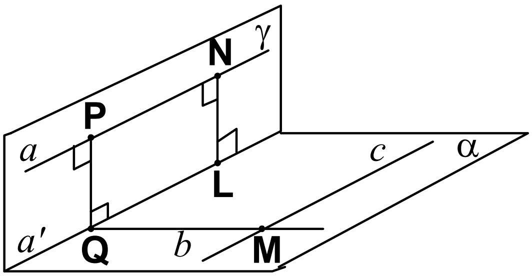
Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.

4.9. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым

Теорема. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один.

Доказательство. Пусть прямые a и b скрещиваются. Построим общий перпендикуляр этих прямых. Для этого возьмём любую точку M прямой b и проведём через M прямую c, параллельную прямой a.

Пусть плоскость α проходит через прямые b и c. Тогда по признаку параллельности прямой и плоскости прямая a параллельна плоскости α, так как прямая a параллельна прямой c, лежащей в плоскости α.

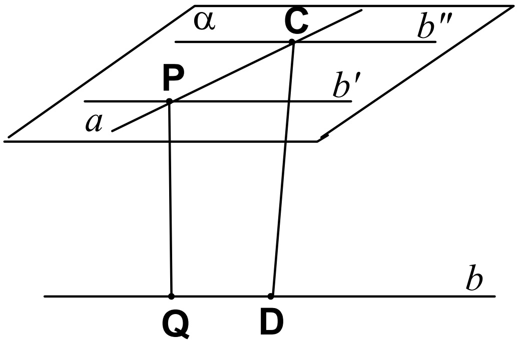


Теперь, аналогично, возьмём на прямой a произвольную точку N и проведём из неё перпендикуляр NL к плоскости α. Через прямую a и перпендикуляр NL проходит плоскость γ. Обозначим линию пересечения плоскостей γ и α через a'. Заметим, что прямые a и a' параллельны, поскольку они лежат в одной плоскости и перпендикулярны одной и той же прямой NL.

В самом деле, $a \perp NL$, так как если одна из двух параллельных прямых (c) перпендикулярна к третьей прямой (NL), то и другая прямая (a) перпендикулярна к этой прямой (см. лемму из п.4.6). То, что $a' \perp NL$, следует из того, что $NL \perp \alpha$ и $a' \in \alpha$.

Докажем, что прямая a' пересекает прямую b в некоторой точке Q. Действительно, если бы оказалось, что a' не пересекает прямую b, то, поскольку они лежат в одной плоскости, это означало бы, что они параллельны. Поскольку прямая a' одновременно параллельна и прямой a, то получалось бы, что прямые a и b параллельны, что противоречит условию теоремы, где сказано, что прямые a и b скрещиваются.

Проведём из точки Q перпендикуляр к прямой a, точку пересечения обозначим буквой P. Так как прямые PQ и NL являются перпендикулярами к одной прямой a и лежат в одной плоскости, то они параллельны. Следовательно, по теореме 1 (п. 4.6) отрезок PQ перпендикулярен плоскости α, и поэтому отрезок PQ перпендикулярен прямой b. Таким образом, отрезок PQ является общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых a и b.



Теперь остаётся доказать, что построенный отрезок PQ является единственным общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым a и b.

Предположим, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр CD, отличный от PQ. Проведём через точку P прямую b', параллельную прямой b, а через точку C – прямую b'', также параллельную b. Заметим, что прямые a, b' и b'' лежат в одной плоскости. Прямые b' и b'' лежат в одной плоскости как параллельные, а прямая a лежит в этой же плоскости, так как две её точки P и Q лежат в этой плоскости. Обозначим эту плоскость буквой α.

Прямая CD перепендикулярна прямой b, а, следовательно, и прямой b''. Это означает, что прямая CD перпендикулярна плоскости α по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Аналогично рассуждая, имеем, что прямая PQ тоже перпендикулярна плоскости α. Следовательно, по теореме 2 (п. 4.6) прямые PQ и CD параллельны и, таким образом, лежат в одной плоскости. Это, в частности, означает, что точки P, Q, C и D лежат в одной плоскости.

Отсюда следует, что прямые a и b, задаваемые точками P и C и точками Q и D соответственно, тоже лежат в одной плоскости, что противоречит условию теоремы о том, что эти прямые скрещиваются. Полученное противоречие доказывает, что сделанное нами предположение о существовании другого общего перпендикуляра CD, отличного от PQ, неверно. Теорема доказана.

Замечание. Построенный общий перпендикуляр является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые [2]. Его длина равна расстоянию между этими плоскостями.

4.10. Понятие объёма. Вычисление объёмов тел

Строгие определения понятий объёма пространственного тела и площади его поверхности, а также их вычисление в общем случае не входят в курс средней школы и рассматриваются в рамках высшей математики. Это связано, в том числе, с тем, что нахождение объёмов тел, границы которых заданы уравнениями в прямоугольной системе координат, в общем случае удобно производить с помощью кратных интегралов, а вычислять площади криволинейных поверхностей позволяет применение поверхностных интегралов. То есть вычисление этих характеристик тел должно предваряться достаточно подробным изучением интегрального исчисления.

По этой причине в курсе элементарной стереометрии рассматривается вычисление объёмов и площадей поверхностей лишь для простейших геометрических тел. В [17] *объёмом* геометрического тела описательно называется численная величина занимаемой им части пространства. Приведём более формальное определение.

Объёмом тела назовём положительное число, поставленное в соответствие телу таким образом, что оно удовлетворяет следующим условиям.

1) Равные тела имеют равные объёмы (свойство инвариантности);

2) Если тело является объединением конечного числа тел, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, то объём данного тела равен сумме объёмов составляющих его тел (свойство аддитивности).

3) Объём куба, длина ребра которого равна единице измерения длин отрезков, равен одной кубической единице и принимается за единицу измерения объёмов [28].

Тела, имеющие равные объёмы, называются *равновеликими*. Заметим, что аналогичными свойствами характеризуются и площади плоских фигур, и длины отрезков (дуг кривых).

К основным *способам вычисления* объёмов тел относятся следующие:

– разбиение тела на несколько более простых тел; объём тела находится как сумма объёмов составляющих его тел (так часто вычисляют объёмы многогранников);

– вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям;

– вычисление объёмов тел вращения с помощью определённого интеграла;

– вычисление объёмов тел в случае, когда известны уравнения ограничивающих их поверхностей, с помощью кратных (двойных, тройных) интегралов.

Рассмотрим формулы для вычисления *объёмов* основных тел и их частей. Вывод этих формул можно найти, например, в [25,17].

Многогранник.

Любой выпуклый многогранник можно разбить на некоторое конечное число пирамид. Для этого достаточно, например, взять любую точку внутри данного многогранника и соединить её отрезками со всеми его вершинами. Тогда объём многогранника будет численно равен сумме объёмов составляющих его пирамид.

Если в многогранник можно вписать сферу радиуса R, то объём V многогранника выражается через площадь S его полной поверхности по формуле: $V = SR/3$.

Отметим несколько свойств тетраэдров, связанных с их объёмами.

1) Объёмы тетраэдров с равными основаниями относятся как их высоты, опущенные на эти основания.

2) Объёмы тетраэдров с равными высотами относятся как площади их оснований.

3) Объёмы тетраэдров, имеющих равные трёхгранные углы, относятся как произведения длин рёбер, образующих эти углы.

Цилиндр (призма): $V = SH$, где H – высота цилиндра (призмы), S – площадь основания (если в основании цилиндра лежит круг радиуса R, то $S = \pi R^2$); а также $V = S_{пер} l$, где l – длина образующей (бокового ребра), $S_{пер}$ – площадь перпендикулярного сечения.

В частности, полагая в первой из формул $S = ab$, $H = c$, получим для ***прямоугольного параллелепипеда:*** $V = abc$, где a, b, c – длины рёбер, выходящих из одной вершины (измерения параллелепипеда).

Конус (пирамида): $V = SH/3$, где H – высота конуса (пирамиды), S – площадь основания.

Усечённый конус: $V = \pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)/3$, где H – высота усечённого конуса, R, r – радиусы оснований.

Усечённая пирамида: $V = H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)/3$, где H – высота усечённой пирамиды, S_1, S_2 – площади оснований.

Шар: $V = 4\pi R^3/3$, где R – радиус шара.

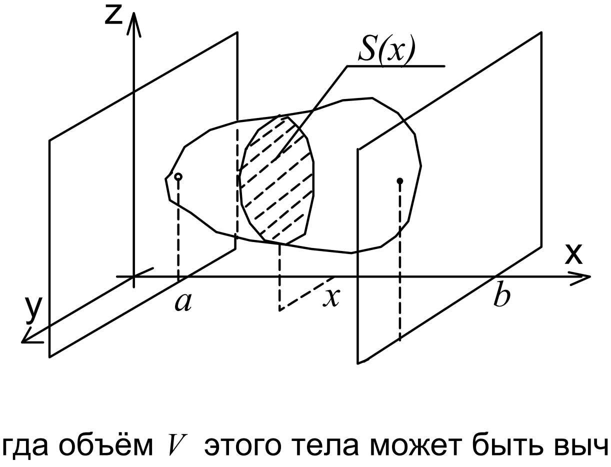
Подумайте, можно ли, по аналогии с длиной дуги и площадью круга, объём шара определить как наименьшее число, большее объёма любого выпуклого многогранника, вписанного в этот шар (или как наибольшее число, меньшее объёма любого описанного около этого шара многогранника).

Шаровой сегмент: $V = \pi H^2 (R - H/3)$, где H – высота сегмента, R – радиус шара.

Шаровой сектор: $V = 2\pi R^2 H/3$, где H – высота сегмента (слоя), отвечающего данному сектору; R – радиус шара.

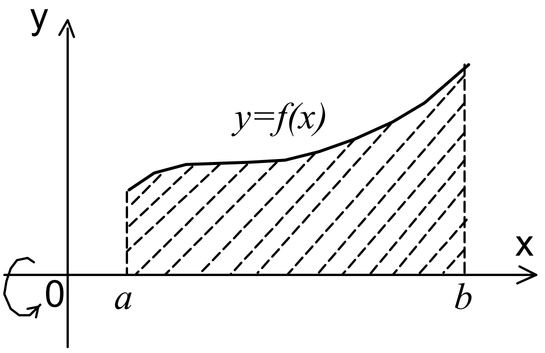
Шаровой слой: $V = \pi H\left(H^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2\right)/6$, где H – высота шарового слоя, r_1, r_2 – радиусы оснований шарового слоя.

Рассмотрим два важных случая вычисления объёмов геометрических тел с использованием *определённого интеграла*: по известным поперечным сечениям и для тел вращения.



1. Пусть для некоторого тела известна площадь любого его поперечного сечения, перпендикулярного некоторому направлению, принятому за положительное направление оси Ox, как функция $S(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, где a и b – абсциссы крайних точек тела. Тогда объём V этого тела может быть вычислен по формуле $V = \int_a^b S(x)dx$.

2. Рассмотрим криволинейную трапецию на плоскости Oxy, ограниченную снизу осью абсцисс, сверху – графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно (на рисунке показана штриховкой). Представим себе, что эта трапеция вращается вокруг оси Ox, образуя некоторое тело вращения. Объём этого тела может быть вычислен по формуле (её вывод и применение для вычисления объёмов полного и усечённого конусов, шара, шаровых слоя, сегмента и сектора можно найти, например, в [28]):



$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

4.11. Понятие площади поверхности. Вычисление площадей поверхностей

В курсе средней школы понятие площади криволинейной поверхности в общем случае не определяется. В высшей школе в случаях, когда известно уравнение, задающее поверхность, её площадь можно вычислить при помощи так называемых поверхностных интегралов. В элементарной математике рассматриваются площади поверхностей лишь основных – простейших – пространственных фигур. Их можно вычислить, не применяя поверхностных интегралов.

Так, для боковых поверхностей *цилиндров и конусов* интуитивно ясно, что их можно развернуть на плоскость и затем подсчитать площадь полученной плоской фигуры. Приближённое значение площади поверхности *сферы* можно получить, описывая вокруг неё многогранник. Чем меньше размеры его граней, тем ближе значение площади его поверхности к площади поверхности сферы. Можно сказать по-другому [28,24,17], что за площадь сферы, полученной вращением полуокружности вокруг её диаметра, принимается предел, к которому стремится площадь поверхности тела, получаемого вращением около того же диаметра правильной вписанной в полуокружность ломаной линии при неограниченном увеличении числа её звеньев (с сохранением «правильности» ломаной).

В [17] за величину боковой поверхности *цилиндра* принимают предел, к которому стремится величина боковой поверхности вписанной в этот цилиндр правильной призмы, когда число сторон правильного многоугольника в основании призмы неограниченно удваивается. Аналогично, за величину боковой поверхности конуса (полного или усечённого) принимается предел, к которому стремится величина боковой поверхности вписанной в этот конус правильной пирамиды (соответственно, полной или усечённой), когда число сторон правильного многоугольника в основании пирамиды неограниченно удваивается.

Ниже выписаны формулы для вычисления *площадей поверхностей* известных геометрических тел, а также их частей. Вывод этих формул можно найти, например, в [25,28].

Многогранник.

Площадь полной поверхности многогранника в общем случае складывается из площадей всех его граней.

Если в многогранник можно вписать сферу радиуса R, то площадь S полной поверхности такого многогранника выражается через его объём V по формуле: $S = 3V / R$.

<u>Замечание</u>. Похожим соотношением связаны площадь S многоугольника, описанного около круга радиуса R, и его периметр L: $S = LR/2$.

Призма.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = P_{пер} l$, где $P_{пер}$ – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра.

Пирамида.

Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом величины α $\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$, и высота пересекает основание, то $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$.

Правильная пирамида.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \dfrac{1}{2} P_{осн} h$, где $P_{осн}$ – периметр основания, h – длина апофемы, или $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$, где α – величина угла наклона боковых граней к плоскости основания.

Усечённая пирамида.

Площадь боковой поверхности: если величины всех двугранных углов при рёбрах большего основания равны α $\left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$, то $S_{бок} = \dfrac{S_1 - S_2}{\cos\alpha}$, где S_1, S_2 – площади большего и меньшего оснований пирамиды.

Правильная усечённая пирамида.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \dfrac{1}{2}(P_1 + P_2)h$, где P_1, P_2 – периметры оснований, h – длина апофемы.

Цилиндр вращения.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH$,

площадь полной поверхности: $S_{полн.} = 2\pi R(R+H)$, где H – высота цилиндра вращения, R – радиус оснований.

Конус вращения.

Во многих пособиях по геометрии за площадь боковой поверхности конуса вращения принимают предел последовательности площадей боковых поверхностей правильных вписанных в конус (или описанных около конуса) n-угольных пирамид при $n \to +\infty$.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \pi LR$,

площадь полной поверхности: $S_{полн.} = \pi R(L+R)$, где L – образующая конуса вращения, R – радиус его основания.

Конус вращения усечённый.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \pi(R+r)l$,

площадь полной поверхности: $S_{полн.} = \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2$, где l – образующая усечённого конуса, R и r – радиусы его оснований.

Сфера.

Площадь поверхности: $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Шаровой сегмент.

Площадь сегментной поверхности: $S_{сегм} = 2\pi RH$,

площадь полной поверхности (с основанием): $S_{полн.} = \pi H(4R-H)$, где H – высота сегмента, R – радиус шара.

Шаровой слой.

Площадь шаровой поверхности (шарового пояса): $S_{сегм} = 2\pi RH$,

площадь полной поверхности (с основаниями): $S_{полн.} = \pi\left(2RH + r_1^2 + r_2^2\right)$,

где H – высота слоя, R – радиус шара, r_1 и r_2 – радиусы оснований слоя.

Шаровой сектор.

Площадь полной поверхности: $S_{полн.} = \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R-H)}\right)$, где H – высота сегмента, R – радиус шара.

Отметим, что в случае, когда поверхность образована вращением дуги графика функции $y = f(x)$, $a \le x \le b$, непрерывной и имеющей непрерывную производную на этом отрезке, вокруг оси абсцисс, то площадь указанной *поверхности вращения* может быть вычислена при помощи определённого интеграла по формуле $S_{пов} = 2\pi\int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Завершая краткий обзор основных вопросов элементарной геометрии, скажем, что современная геометрия далеко ушла от той, о которой говорится в классическом определении геометрии как науке о формах, размерах и границах тех частей пространства, которые в нём занимают реальные тела. Современная геометрия представлена разнообразными направлениями – ветвями. В настоящее время различают геометрии: *элементарную* (изучает евклидовые, т.е. сохраняющиеся при движениях, свойства фигур), *аналитическую* (геометрические фигуры описываются уравнениями или неравенствами и затем исследуются на основе метода координат средствами алгебры), *дифференциальную* (изучает любые плоские и пространственные кривые и поверхности методом математического анализа, с помощью дифференциальных уравнений), *проективную* и *начертательную* (изучают проективные свойства фигур, т.е. свойства, сохраняемые при проективных преобразованиях проективного пространства), *сферическую* (геометрия на сфере), *топологию* (одна из самых молодых ветвей геометрии; изучает свойства, сохраняющиеся при топологических преобразованиях; под топологическим преобразованием понимается любая деформация фигуры такая, как изгиб, сжатие, расширение, изменение размеров и формы фигуры при отсутствии склеиваний и разрывов) и другие. Подробнее с историей развития геометрии и достижениями учёных, занимавшихся ранее и работающих в настоящее время в области геометрии можно ознакомиться, например, в специальном очерке на страницах [28] и других изданиях.

Задачи к разделу 4: «Стереометрия»

🕮 Задачи на многогранники

[1984, 6] У пирамиды $SABC$ длины рёбер AB и AC равны 1, длина ребра BC равна $\sqrt{3}$, а длина высоты SH равна 2. Основание H высоты находится на расстоянии 1 от вершины C, и AH перпендикулярен AB. Найти отношение площадей поверхностей вписанного в пирамиду и описанного вокруг пирамиды шаров.

[1987, 6] На продолжении ребра SK правильной четырёхугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости SMN равно $24\,см$. Найти длину отрезка KA, если $SL = 2\sqrt{41}\ см$, $MN = 16\ см$.

[1994, 10] Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нём через вершину B проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через её середину, к площади его полной поверхности.

[1999, май,6] В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, длина каждого ребра которой равна 2, построено сечение плоскостью, параллельной диагонали основания AC и боковому ребру SB пирамиды и пересекающей ребро AB. Найти периметр многоугольника, полученного в этом сечении, если длина нижнего основания сечения равна $\sqrt{2}$.

[1999, устн.,1] Построить сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через вершину A' и середины рёбер BB' и $C'D'$.

[1999, устн.,2] Построить сечение прямой правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ плоскостью, проходящей через центр грани $ABB'A'$ и середины рёбер BC и $C'C$.

[2002, 8] В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с длиной ребра, равной 1, на вертикальном ребре AA' и на горизонтальном ребре AB взяты точки M и N соответственно, при этом $AM = 1/3$, $AN = 3/4$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная диагонали AC нижнего основания куба. Чему равна площадь получившегося сечения?

[2003, 8] В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S отношение длины высоты SO к длине стороны основания равно $\sqrt{5}$. Через точку M, лежащую на стороне основания BC, и боковое ребро SA проведена плоскость; при этом точка M выбрана так, что площадь сечения пирамиды этой плоскостью является наименьшей. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

[2005, 8] В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы ABC и SAB прямые, двугранный угол между плоскостями ABS и ABC равен $arcctg\left(2\sqrt{10}/3\right)$. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины B на плоскость ASC, если $BC = 7$, $AB = 4$.

[2006, 7] Плоскость пересекает боковые рёбра SA и SB треугольной пирамиды $SABC$ в точках K и L соответственно и делит объём пирамиды пополам. В каком отношении эта плоскость делит медиану SN грани SBC, если

$$\frac{SK}{SA} = \frac{2}{3},\ \frac{SL}{SB} = \frac{4}{5}?$$

[Олимпиада «Ломоносов-2005», 7] Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12, 13, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30^0. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

[2007, 8] В каком отношении делит объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\left(AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1\right)$ плоскость, проходящая через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

Задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

[2003, май, 8] Длина стороны правильного треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. На перпендикуляре, восстановленном из вершины A к плоскости этого треугольника, отложен отрезок AD длины $\sqrt{3}/3$. Найти расстояние между прямыми AB и DC.

Задачи на тела вращения

[1985, 6] Прямой круговой конус вращается вокруг оси – прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найти площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если длина образующей конуса равна 5, а длина высоты равна 4.

[2000, май, 8] Четыре одинаковых шара радиуса r помещены внутрь некоторой сферы так, что каждый из них касается этой сферы и трёх других шаров. Найти радиус сферы.

[2001, 7] Сфера с диаметром $AD = \sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A. Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN, если AB =3, AC =$3\sqrt{5}$, а $\angle BDC = \pi/3$.

Смешанные задачи

[1999,7] Сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через вершины B, C, C_1 и через середину ребра A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найти площадь поверхности этого куба.

[2000, 8] В прямоугольном параллелепипеде, стороны основания которого равны a и b, а высота - a, расположены 9 шаров. Восемь из них одинакового радиуса, причём каждый касается трёх граней параллелепипеда и двух соседних шаров. Девятый шар внешним образом касается всех восьми вышеуказанных шаров. Найти R - радиус девятого шара. Установить, при каких значениях величины b/a задача имеет решение, если $R \le a/4$.

[2001, май, 8] Найти радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие – на не пересекающей эту диагональ куба диагонали его грани.

[2002, май, 8] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S и основанием ABC длина стороны основания равна $\sqrt{3}$, расстояние между рёбрами SA и BC равно $3\sqrt{3}/4$. Сфера проходит через точки C, S и середины сторон AB и AC. Найти отношение площади поверхности сферы к площади боковой поверхности пирамиды.

[2004, 8] Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины $2\sqrt{2}$. Рёбра SB и SC равны. Шар касается сторон основания, плоскости грани SBC, а также ребра SA. Чему равен радиус шара, если $SA = 3\sqrt{2}/2$?

[Олимпиада «Ломоносов-2006», 8] В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^0$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 - центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \ge 2$ точка O_n - это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

* * *

В заключение хочется ещё раз подчеркнуть, что для того чтобы научиться *хорошо решать* математические задачи - мало обладать природными способностями к математике. Необходимо развивать их регулярными занятиями и тренировками навыков. Надо приучить себя всегда тщательно разбираться в особенностях теории, запоминать основные определения, свойства и приёмы, изучать существующие типы задач и подходы к их решению, а далее, развивая свои математические способности, в том числе память и интуицию, постигать (не боясь ошибиться!) теорию на практике - в процессе решения разнообразных примеров и задач различной сложности.

Приложение 1

(список используемых обозначений)

Для краткой записи формулировок утверждений в книге использованы общепринятые в математической практике *условные знаки* («кванторы») и *обозначения*, смысл которых следующий:

$a \in A$ – элемент a принадлежит множеству A;

$x \in \varnothing$ – такая запись означает, что задача (уравнение, неравенство) с неизвестной x не имеет решений;

$A \subset B$ – множество A принадлежит множеству B (знак строгой принадлежности); в этом случае множество B помимо A содержит элементы, не принадлежащие множеству A;

$A \subseteq B$ – знак нестрогой принадлежности множества A множеству B, допускается случай совпадения A и B;

$\{a;b;...;c\}$ – множество, состоящее из чисел (элементов) $a,b,...,c$;

N – множество всех натуральных чисел;

Z – множество всех целых чисел;

Q – множество всех рациональных чисел;

$(-\infty,+\infty)$, R – числовая прямая, множество всех действительных чисел;

$(-\infty,a),(a,+\infty)$ – числовая полупрямая, открытый луч;

$(-\infty,a],[a,+\infty)$ – числовая полупрямая, замкнутый луч;

$[a,b]$ – отрезок (сегмент); (a,b) – интервал; $[a,b)$, $(a,b]$ – полуинтервалы;

$(a;b)$ – пара чисел, например, решение уравнения с двумя неизвестными или координаты точки на плоскости;

$\Rightarrow$ – знак следствия, означает «следовательно», «следует»;

$\exists$ – квантор существования, означает «существует», «найдётся»;

$\exists!$ – означает «существует и единственно»;

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности, означает «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно»;

$\forall$ – означает «любой, всякий» или «для любого, для каждого»;

$\vdots$ – означает «кратно», «делится нацело на»;

$\sum\limits_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_N$ (знак суммирования);

$\prod\limits_{k=1}^{N} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_N$ (знак произведения);

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$, где n – любое натуральное число; $0! = 1$.

$\vec{a}$ – вектор на плоскости или в пространстве.

Приложение 2

(аксиоматика Д.Гильберта и другие системы аксиом)

У Д.Гильберта, внёсшего существенный вклад в развитие аксиоматики геометрии, в число основных понятий вместо наложения (движения) входило понятие «конгруэнтность». Также к основным он причислял понятия «параллельность» и «непрерывность». В системе аксиом Гильберта III группа содержит 5 *аксиом конгруэнтности*, которые описывают отношение «конгруэнтен». Для сравнения приведём гильбертову систему аксиом.

I. *Аксиомы принадлежности*

I_1. Для любых двух точек A и B существует прямая a, проходящая через каждую из этих точек.

I_2. Для любых двух точек A и B существует не более одной прямой a, проходящей через каждую из этих точек.

I_3. На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4. Для любых трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, существует плоскость α, проходящая через каждую из этих точек. Для любой плоскости всегда существует принадлежащая ей точка.

I_5. Для трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих точек.

I_6. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α, то всякая точка прямой a лежит в плоскости α.

I_7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по крайней мере ещё одну общую точку B.

I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Аксиомы I_1– I_3 можно назвать *плоскостными* аксиомами, а аксиомы I_4– I_8 соответственно *пространственными* аксиомами этой группы.

II. *Аксиомы порядка*

II_1. Если точка B лежит между A и C, то A, B, C – различные точки, лежащие на одной прямой, и точка B лежит также между C и A.

II_2. Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна точка B такая, что точка C лежит между A и B.

II_3. Среди любых трёх точек прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

II_4. Пусть A, B, C – три различные точки, не лежащие на одной прямой, и a – прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Если при этом прямая a проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC (аксиома Паша).

Следующая группа аксиом определяет понятие конгруэнтности и тем самым понятие движения. Отрезки находятся в некотором соотношении друг с другом; для обозначения этого отношения служат слова «конгруэнтный» или «равный».

III. *Аксиомы конгруэнтности*

III₁. Если A и B суть две точки на прямой a, и A' – точка на той же прямой или на другой прямой a', то всегда можно найти точку B', лежащую по данную от точки A' сторону прямой a', и притом такую, что отрезок AB конгруэнтен, иначе говоря, равен отрезку $A'B'$. Конгруэнтность отрезка AB отрезку $A'B'$ обозначается следующим образом: $AB \equiv A'B'$.

Эта аксиома даёт возможность откладывать отрезки, равные данным.

III₂. Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то отрезок $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$.

III₃. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a, не имеющие ни одной общей (внутренней – авт.) точки, и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a', также не имеющие ни одной общей точки. Если при этом $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то и $AC \equiv A'C'$.

Эта аксиома даёт возможность складывать отрезки.

В следующей аксиоме углы, как и отрезки, находятся в некотором соотношении друг с другом, для обозначения которого служит слово «конгруэнтный», или «равный». Например, каждый угол конгруэнтен сам себе. Обозначим $\angle(h;k)$ – угол, образованный лучами h и k, исходящими из точки O. Конгруэнтность двух каких-либо углов $\angle(h;k)$ и $\angle(h';k')$ обозначается с помощью знака «$\equiv$»: $\angle(h;k) \equiv \angle(h';k')$.

III₄. Пусть дан $\angle(h;k)$ в плоскости α и прямая a' в плоскости α', а также вполне определённая по отношению к прямой a' сторона плоскости α'. Пусть h' обозначает луч прямой a', исходящий из точки O'. В таком случае в плоскости α' существует один и только один луч k', обладающий следующим свойством: $\angle(h;k) \equiv \angle(h';k')$, и вместе с тем все внутренние точки $\angle(h';k')$ находятся в плоскости α' по данную сторону от прямой a'.

III₅. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, то имеет место также и конгруэнтность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Аксиомы III₁–III₃ называют *линейными* аксиомами, а аксиомы III₄–III₅ – *плоскостными* аксиомами этой группы.

А вот как эта же группа аксиом в адаптированном для школьного учебника виде сформулирована у А.П.Киселёва [17].

III. *Аксиомы конгруэнтности*

III₁. На любой прямой от любой её точки можно отложить отрезок, равный данному.

III₂. Два отрезка, равные третьему, равны между собой.

III₃. Пусть A, B, C – точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 – также точки одной прямой, и $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Если отрезки AB и BC, а также A_1B_1 и B_1C_1 не имеют общих точек, то $AC = A_1C_1$.

III₄. От любой точки данной прямой по данную её сторону можно отложить один и только один угол, равный данному; каждый угол равен самому себе.

III₅. Если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Заметим также, что в книге [17] аксиома Кантора заменена аксиомой линейной полноты.

Четвёртая группа аксиом у Гильберта состоит из двух аксиом непрерывности: аксиомы Архимеда и аксиомы полноты. Авторы пособия [28] предлагают заменить их эквивалентной этим аксиомам аксиомой Дедекинда.

IV. *Аксиома Дедекинда*. Если все точки отрезка AB, включая и его концы, распределены на два класса так, что: 1) каждая точка отрезка принадлежит одному и только одному из этих классов, точка A принадлежит первому классу, а точка B – второму классу; 2) каждая точка первого класса, отличная от A, лежит между A и любой точкой второго класса, то на отрезке AB существует одна и только одна такая точка C, что всякая точка, лежащая между A и C, принадлежит первому классу, а всякая точка, лежащая между C и B, принадлежит второму классу. Сама точка C принадлежит либо первому, либо второму классу.

Наконец, последняя группа аксиом состоит из единственной аксиомы – аксиомы о параллельных.

V. *Аксиома Евклида*. Пусть a – произвольная прямая, а A – точка, лежащая вне её. В таком случае в плоскости, определяемой прямой a и точкой A, существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a.

Справедливости ради отметим, что приведённая выше система аксиом элементарной геометрии не является единственной в своём роде. Например, группа аксиом, используемая в учебнике А.В.Погорелова [22], частично пересекается с приведённым выше списком аксиом, но имеет и значительные отличия. В частности, аксиома I₂ сформулирована более обще: «Какова бы ни была прямая, существуют (не указано, сколько – *авт.*) точки, принадлежащие этой прямой, и точки (опять не указано, сколько – *авт.*), не принадлежащие ей». Аксиома I₃ доказывается как теорема. А, например, аксиома II₃ сформулирована более сильно: «Из трёх точек на прямой одна *и только одна* лежит между двумя другими». Аксиому II₄ (аксиому Паша) автор также не относит к аксиомам, а доказывает как теорему: «Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон». Добавлены некоторые аксиомы, например, такие: «Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой»; «Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости»; «Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой» и др. Отличных от гильбертовой (в той или иной мере) систем аксиом придерживаются современные авторы [21,29].

Существуют различные подходы и к отбору тех понятий, которые следует относить к первичным. Так, в аксиоматике В.Ф.Кагана (1905) одним из основных понятий было «расстояние» [30]; в так называемой векторно-точечной аксиоматике немецкого математика Германа *Вейля* (1885–1955) основными понятиями являются «точка» и «вектор»; в качестве основного понятия может быть принято и отношение симметрии (Ф.Бахман, 1969).

Приложение 3

(основные тригонометрические формулы)

1. *Основное тригонометрическое тождество:* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

2. $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\cos ec\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$; $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

3. *Формулы сложения:*

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

$tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$, $ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$

4. *Формулы двойного аргумента:* $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$.

5. *Формулы тройного аргумента:* $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$,

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $tg3\alpha=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$, $ctg3\alpha=\dfrac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$.

6. *Формулы половинного аргумента:* $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$,

$tg^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

7. *Формулы универсальной подстановки:* $\sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2ctg\frac{\alpha}{2}}{1+ctg^2\frac{\alpha}{2}}$,

$\cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}{ctg^2\frac{\alpha}{2}+1}$, $tg\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $ctg\alpha=\dfrac{ctg^2\frac{\alpha}{2}-1}{2ctg\frac{\alpha}{2}}$.

8. *Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:*

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$, $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$,

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$. .

9. *Формулы преобразования суммы тригон. функций в произведения:*

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$tg\alpha\pm tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$, $ctg\alpha\pm ctg\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

10. *Формулы приведения:* $\sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cdot\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cdot\cos\alpha$.

11. *Тригонометрические функции обратных тригонометрических функций:*

$\sin(\arcsin x)=x$, $|x|\le 1$; $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, $|x|\le 1$;

$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, $|x|\le 1$; $\cos(\arccos x)=x$, $|x|\le 1$;

$tg(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$; $tg(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0<|x|\le 1$;

$ctg(\arcsin x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0<|x|\le 1$; $ctg(\arccos x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$;

$\sin(arctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$; $\sin(arcctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$;

$\cos(arctgx)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$; $\cos(arcctgx)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in R$;

$tg(arctgx)=x$, $x\in R$; $tg(arcctgx)=\dfrac{1}{x}$, $x\in R\setminus\{0\}$;

$ctg(arctgx)=\dfrac{1}{x}$, $x\in R\setminus\{0\}$; $ctg(arcctgx)=x$, $x\in R$.

12. *Формулы с обратными тригононометрическими функциями:*

$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin(-\alpha)=-\arcsin\alpha$, $\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha$ $(|\alpha|\le 1)$;

$arctg\alpha+arcctg\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $arctg(-\alpha)=-arctg\alpha$, $arcctg(-\alpha)=\pi-arcctg\alpha$ $(\alpha\in R)$;

$\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ $\left(\alpha\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$, $\arccos(\cos\alpha)=\alpha$ $(\alpha\in[0,\pi])$;

$arctg(tg\alpha)=\alpha$ $\left(\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $arcctg(ctg\alpha)=\alpha$ $(\alpha\in(0,\pi))$.

13. *Решение простейших тригонометрических уравнений:*

$$\sin x=a\ (|a|\le 1)\ \Leftrightarrow\ x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\arcsin a+2\pi n, n\in Z\\ x=\pi-\arcsin a+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.;$$

$$\cos x=a\ (|a|\le 1)\ \Leftrightarrow\ x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=\arccos a+2\pi n, n\in Z\\ x=-\arccos a+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.;$$

$$tgx=a\ (a\in R)\ \Leftrightarrow\ x=arctga+\pi n,\ n\in Z\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=arctga+2\pi n, n\in Z\\ x=\pi+arctga+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.;$$

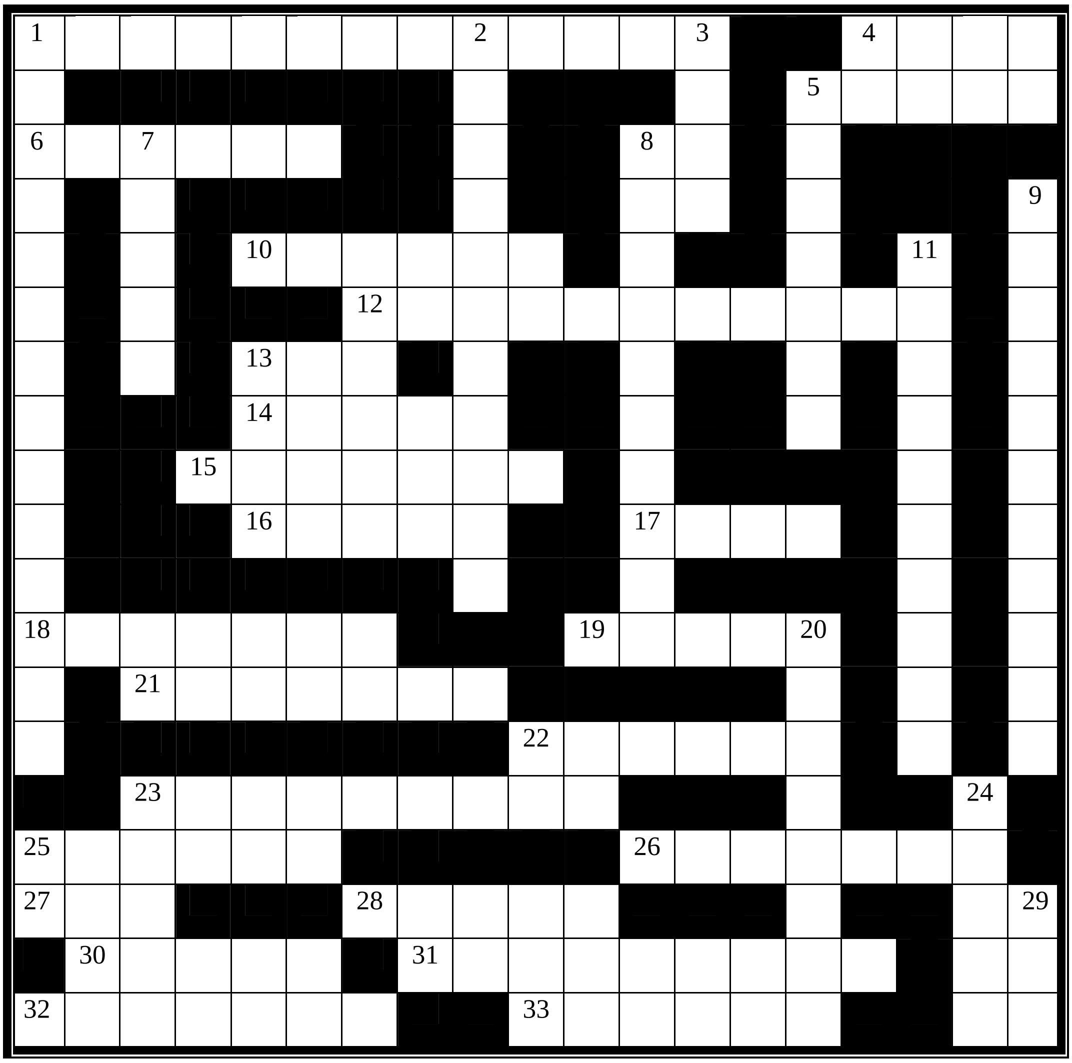
$$ctgx=a\ (a\in R)\ \Leftrightarrow\ x=arcctga+\pi n,\ n\in Z\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=arcctga+2\pi n, n\in Z\\ x=\pi+arcctga+2\pi k, k\in Z\end{array}\right..$$

Приложение 4

☺Геометрический кроссворд

«Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом».

Карл Вейерштрасс



ПО ГОРИЗОНТАЛИ.

1. Прямая (отрезок прямой), пересекающая другую прямую (отрезок) под прямым углом. **4**. Геометрическое место точек плоскости, расположенных от заданной точки на расстоянии, не превышающем данное. **5**. Геометрическое понятие, точное и в то же время достаточно общее определение которого представляет значительные трудности. В элементарной геометрии это множество точек чаще всего имеет форму прямой, ломаной или кривой. **6**. Отрезок, соединяющий точку окружности или сферы с её центром. Этим словом называют также длину этого отрезка. **10**. Отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины геометрической фигуры (например, треугольника, пирамиды, конуса) на её основание или продолжение основания, а также длина этого отрезка. **12**. Геометрическая фигура, представляющая собой объединение трёх точек, не лежащих на одной прямой, с тремя отрезками с концами в этих точках. **13**. Прямая линия, вращением вокруг которой некоторой плоской фигуры образуются тела вращения. **14.** Этим термином называют плоский многоугольник, являющийся частью поверхности многогранника, ограниченный рёбрами многогранника. **15**. Отрезок, соединяющий одну из вершин треугольника с серединой противоположной стороны. **16**. Отрезок, соединяющий две произвольные различные точки окружности (произвольной кривой). **17**. Геометрическая фигура, состоящая из двух лучей, выходящих из одной точки. Иногда это понятие определяют как часть плоскости, заключённую между двумя лучами с общим началом (включая эти лучи). **18**. Отрезок перпендикуляра, опущенного из центра правильного многоугольника на любую из его сторон, а также его длина. В правильной пирамиде этим словом называют высоту её боковой грани. **19**. Сторона прямоугольного треугольника, прилегающая к прямому углу. **21**. Прямая, пересекающая некоторую кривую (например, окружность) более чем в одной точке. **22**. Многогранник, у которого две грани - n-угольники, а остальные n граней – параллелограммы. **23**. Прямая, пересекающая другую прямую (плоскость) под углом, отличным от прямого. **25**. Единица измерения плоского угла, равная $\frac{1}{90}$ части прямого угла. **26**. Результат пересечения плоскостью пространственного тела. **27**. Геометрическое место точек пространства, расстояние от которых до фиксированной точки не превосходит заданного. **28**. Одна из основных числовых характеристик пространственных фигур. В простейших случаях измеряется числом умещающихся в фигуре единичных кубов. **30**. Одно из основных, первичных понятий геометрии, понимаемое интуитивно, без определения. Через него определяется геометрическая фигура. **31**. Физический смысл этого термина – опорная часть предмета. Строгое геометрическое определение этого понятия отсутствует. Чаще всего этим словом обозначают сторону треугольника (многоугольника) или грань пространственного тела, перпендикулярные их высотам. Может иметь вид точки, отрезка прямой, многоугольника, круга и проч. **32**. Отрезок, соединяющий две соседние вершины плоского многоугольника. **33**. Одно из основных, первичных понятий геометрии. Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между точками пространства, то понятие, о котором идёт речь, можно определить как линию, вдоль которой расстояние между двумя точками является кратчайшим.

ПО ВЕРТИКАЛИ.

1. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. **2**. Прямая, представляющая собой предельное положение секущей к кривой линии. **3**. Плоский четырёхугольник с равными сторонами. **5**. Геометрическая фигура из соединяющихся отрезков прямых, следующих один за другим так, что конец каждого предыдущего отрезка совпадает с началом последующего. **7**. Числовая характеристика протяжённости линий; измеряется протяжённостью единичного отрезка. **8**. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла. **9**. Прямая, проходящая через вершину плоского угла (в плоскости угла) и делящая его пополам. **11**. Геометрическое место точек плоскости, расположенных от заданной точки на фиксированном расстоянии. **20.** Четырёхугольник, у которого по крайней мере две стороны параллельны. **24.** Сторона грани многогранника. **29**. Множество тех (и только тех) точек плоскости или пространства, которые удовлетворяют некоторому заданному условию.

Приложение 5

Латинский алфавит

A, a – a	N, n – эн
B, b – бэ	O, o – o
C, c – цэ	P, p – пэ
D, d – дэ	Q, q – ку
E, e – э	R, r – эр
F, f – эф	S, s – эс
G, g – жэ	T, t – тэ
H, h – аш	U, u – у
I, i – и	V, v – вэ
J, j – жи	W, w – дубль-вэ
K, k – ка	X, x – икс
L, l – эль	Y, y – игрек
M, m – эм	Z, z – зэт

Греческий алфавит

A, α – альфа	N, ν – ню
B, β – бэта	Ξ, ξ – кси
Γ, γ – гамма	O, ο – омикрон
Δ, δ – дэльта	Π, π – пи
E, ε – эпсилон	P, ρ – ро
Z, ζ – дзэта	Σ, σ – сигма
H, η – эта	T, τ – тау
Θ, θ – тэта	Y, υ – ипсилон
I, ι – йота	Φ, φ – фи
K, κ – каппа	X, χ – хи
Λ, λ – ламбда	Ψ, ψ – пси
M, μ – мю	Ω, ω – омега

Список литературы

1. *Якушева Е.В., Попов А.В., Якушев А.Г.*. Математика. Всё для экзамена: Учеб. пособие. 2-е изд., испр.и доп. М.: Изд-во УНЦ ДО, 2004. 207с.

2. *Будак А.Б., Щедрин Б.М.* Элементарная математика. Методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике. 3-е изд., испр. и доп. М.: МАКС ПРЕСС, 2005. 462с.

3. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: Учеб. пособие/ М.К.Потапов, В.В.Александров, П.И.Пасиченко. Под ред. В.А.Садовничего. М.: Высш.шк., 2001. 735 с.: ил.

4. Математика. Большой энциклопедический словарь. /Под ред. Ю.В. Прохорова. 3-е изд. М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. 848с.: ил.

5. Начала анализа. Задачник. 10–11 кл.: Учеб.пособие для общеобр. уч. заведений/ В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. М.: Дрофа, 1996. 416с.: ил.

6. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович, М.С. Якир. М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. 656с.

7. Тригонометрия (тождества, уравнения, неравенства, системы) /А.И. Азаров, В.И. Булатов, В.С. Федосенко, А.С. Шибут. Мн: ТетраСистемс, 2003. 304с.

8. *Пархимович И.В.* Математика для поступающих. Мн.: Выш. шк., 1998. 463с.: ил.

9. Задачи с параметрами: 3-е изд., доп. и исп./ П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2002. 336с.

10. *Натяганов В.Л., Лужина Л.М.* Методы решения задач с параметрами: Учеб.пособ. М.: Изд-во МГУ, 2003. 368с.

11. Математика. Методы решения задач: для поступающих в вузы. Учеб.пособие. / М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко. М.: Дрофа, 1995. 336с.

12. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по математике с решениями: Учеб.пособие для 11 кл. общеобр. учреждений. М.: ООО «Астрель», ООО «АСТ», 2001. 448с.: ил.

13. За страницами учебника математики: Мат.анализ. Теория вероятностей. Старинные и занимательные задачи: Кн. для уч. 10–11 кл. общеобраз. учрежд. /Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. М.: Просвещение, 1997. 269с.: ил.

14. Элементарная математика. Повторительный курс. Изд. 2-е. /В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави. М.: Наука,1974. 592с.

15. За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для уч. 10–11 кл. общеобр. учреждений. /Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. М.: Просвещение. АО «Учеб.лит.», 1996. 320с.: ил.

16. Геометрия на плоскости. Теория, задачи, решения: Учеб. пособ. по математике. /В.В. Амелькин, В.Л. Рабцевич, В.Л. Тимохович. Мн.: ООО «Асар», 2003. 592с.:ил.

17. *Киселёв А.П.* Геометрия / Под ред. Н.А. Глаголева. М.: Физматлит, 2004. 328с.

18. *Выгодский М.Я.* Аналитическая геометрия. (Основы высшей математикиI). М.: Физматгиз, 1963. 528с., ил.

19. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия: 9–11 кл. От учебной задачи к творческой: Учеб. пособие. М.: Дрофа, 1996. 400с., ил.

20. Справочник школьника и абитуриента /Составитель: О.В. Чепурных. М.: РИПОЛ, 1996. 416с.

21. Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики /В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. М.: Физматлит, 2005. 488с.

22. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учебник для 7–11 кл. сред. шк. 2-е изд. М.: Просвещение, 1991. 384с.: ил.

23. Геометрия для 8–9 классов: Учеб. пособ. для уч. школ и классов с углуб. изуч. математики /А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 1991. 415с.: ил.

24. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика: Учеб.-справ. пособие. М.: АСТ: Астрель, 2006. 671с.: ил. (Справочник школьника).

25. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. Висагинас, Alfa, 1998. 576с. (Библиотека школьника).

26. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М.: Наука, 1978.

27. *Никулин А.В., Кукуш А.Г., Татаренко Ю.С.* Планиметрия. Геометрия на плоскости: Уч. пос. / Под общ. ред. Ю.С. Татаренко. Висагинас: Альфа, 1998. 592с. (Библиотека школьника).

28. *Потоскуев Е.В, Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. 3-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2005. 368с.: ил.

29. *Гусев В.А, Кожухов И.Б., Прокофьев А.А.* Геометрия. Полный справочник. М.: Махаон, 2006. 320с. (Для школьников и абитуриентов).

30. *Каган В.Ф.* Очерки по геометрии. М.: МГУ, 1963.

31. *Погорелов А.В.* Элементарная геометрия. Изд. 3-е, доп. М.: Наука, 1977. 280с.

31. *Лурье М.В.* Геометрия. Техника решения задач (учебное пособие). М.: Изд. отдел УНЦ ДО, ФИЗМАТЛИТ, 2001. 240с.

Предметный указатель

Ответы к задачам

Раздел 1.

1.1 $E(y)=[-8,0]$. **1.2** $E(y)=[-8,-\sqrt{15}]$. **1.3** $x\in(-\infty,1]\cup\{2\}$. **1.4** $E(y)=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$. **1.5** $E(y)=\left[0,3\sqrt{2}/4\right]$. **1.6** $y_{\min}=y(0)=0$. **1.7** $y_{\max}=\left(1+\sqrt{2}\right)/4$. **1.8** $\min\limits_{x\in R}y(x)=y(-2)=0$, $\max\limits_{x\in R}y(x)=y(2)=2$. **1.9** Основной период функции равен $\frac{\pi}{3}$. **1.10** $T=105\pi$. **1.11** $a\in[1/3,3/4)\cup(3/4,33/32]$. **1.12** $k\in[1,2)\cup(2,3)$. **1.13** $a<0, b>0, c>0$. **1.14** при $a<-5$ нет решений; при $a=-5$ $x=0$; при $-5<a<1$ $x\in[0,(a+5)^2]$; при $a\geq 1$ $x\in[(a-1)^2,(a+5)^2]$. **1.15** $a=7/8$, $b=49/64$. **1.16** Наименьшее целое значение функции равно (-5). **1.17** *Указание:* преобразовать функцию к виду $y=\frac{-x(x-7)}{2}-10$ и доказать, что первое слагаемое делится нацело на 2.

Раздел 2.

2.1 $\sin\alpha=\pm 1/\sqrt{10}$. **2.2** 1. **2.3** $\sqrt{2}/2$. **2.4** $1/\sqrt{3}$. **2.5** 4. **2.6** $tg\alpha=\pm 2\sqrt{6}$.**2.7** $\sqrt{5}$. **2.8** -1. **2.9** $tg\alpha=-1/3$. **2.10** $tg2x=\frac{120}{119}$. **2.11** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **2.12** $\sin x+\sqrt{2}\cos x=\left(1\pm\sqrt{6}\right)/2$. **2.13** $\sin x+\sqrt{2}\cos x$ $=\sqrt{2}$ или 1. **2.14** Первое число меньше. **2.15** $\sin x\in\{-1;-1/2\}$. **2.16** Первое число меньше. **2.17** $\cos 2x=3/5$. **2.18** $\sin 2x=-1/4$. **2.19** $-0{,}5$. **2.20** $1/8$. **2.21** Функция определена в точках вида $x=\pi/4+\pi n, n\in Z$. **2.23** Наибольшее значение функции=18, а наименьшее значение=-9. **2.24** $[3\cos(-1)+\sin(-1),\sqrt{10}]$. **2.25** $y_{\min}=y\left(t=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}$, $y_{\max}=y\left(t=\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}$. **2.26** $y_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{4}$, $y_{\min}=\frac{4}{3}$. **2.27** $E(y)=\left[-2-\sqrt{2},1/4\right]$. **2.28** Областью изменения функции является отрезок $[\cos 1,1]$. **2.29** $x=\pm\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}+2\pi n, n\in Z$. **2.30** $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z$. **2.31** $x=\pm(2\pi/3)+2\pi n, n\in Z$. **2.32** $x\in\{3\pi/4\}$. **2.33** $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$. **2.34** $x\in\left\{\pi n;\frac{\pi}{14}+\frac{\pi k}{7};n,k\in Z\right\}$. **2.35** $x=\pm\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{4}{5}\right)+$ $+\pi n, n\in Z$. **2.36** $x\in\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.37** $x=\pi n, n\in Z$; $x=5$. **2.38** $x=\pm\arcsin\frac{3}{4}+\pi n, n\in Z$. **2.39** $x=(-1)^n+\frac{\pi n}{5}, n\in Z$. **2.40** $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+$ $+\pi n\ n\in Z$. **2.41** $x\in\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3};\pm\frac{\pi}{3}+\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.42** $x\in\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. **2.43** $x\in\{1;4\}$. **2.44**

$x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n, n\in Z$. **2.45** $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;(-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{6}+\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.46** $x\in\left\{\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;2\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.47** $x\in\left\{\pm\frac{1}{6};\pm\frac{11}{6};\pm\sqrt{3}\right\}$. **2.48** $x\in\left\{arcctg(-4)+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.49** $x=\pi k/3,k\in Z.$ **2.50 [1996,2]** $x=\pm\frac{2\pi}{21}+$ $+\frac{4\pi n}{7},n\in Z.$ **2.51** $x=\pm\left((-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n\in N$. **2.52** $x=\frac{\pi}{14}(1+2m)$, где $m=0,1,2,4,5,6$. **2.53** $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n;(-1)^{k}\frac{\pi}{6}+\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.54** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},n\in Z$. **2.55** $x\in\{21\pi/8;11\pi/4\}$. **2.56** $x=\pi n/4$, где $n\in Z, n\neq 4l, l\in Z$. **2.57** $x=\left(\frac{\pi}{6}+\pi n\right)^2$, $n\in Z, n\geq 0$. **2.58** $x=\pm\sqrt{-\pi/3+\pi n}$, где $n\in N$. **2.59** $x\in\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\frac{1}{3}arcctg6+\frac{\pi k}{3};n,k\in Z\right\}$. **2.60** $x=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\pi n}{2},n\in Z.$ **2.61** $x\in\{\pm\arcsin(\pi/6)+\pi k\},k\in Z$. **2.62** $x=-2\pi/3+2\pi m,m\in Z.$ **2.63** $x=1+2\pi n$, $x=2\pi k$, $n,k\in Z$. **2.64** $x=2-\pi n+2\sqrt{1-\pi n}$, $n\leq 0,n\in Z$. **2.65** $x\in\left\{2\pi(1+2n),(-1)^k\cdot 4\arcsin\frac{\sqrt{27}-5}{2}+4\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.66** $x=\pi+2\pi n,n\in Z.$ **2.67** $x\in\left\{-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2};-\frac{5\pi}{4}-\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$. **2.68** $x\in\left\{\frac{\pi n}{5};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},n,k\in Z;n,k\geq 0\right\}$. **2.69** $x\in\left\{2\pi n;\pi-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi k;\pi+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi m;n,k,m\in Z\right\}$. **2.70** $x=\pi k,k\in Z$. **2.71** $x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}$. **2.72** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. **2.73** $x\in\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right\}$, $n,k\in Z$. **2.74** $x\in\left\{\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi k;n,k\in Z\right\}$. **2.75** Сумма решений равна 40π. **2.76** $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **2.77** $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **2.78** $x\in\{2\pi n;\pi/2+2\pi k;n,k\in Z\}$. **2.79** $x\in\{5\pi\}$. **2.80** Множество корней уравнения пусто. **2.81** $x\in\left\{\pm\sqrt{2\pi n};-1\pm\sqrt{1+2\pi k};n,k=0,1,2,...\right\}$ **2.82** $x\in\{11\pi/30\}$. **2.83** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in Z$. **2.84** $x=(-1)^{n+1}\arcsin(1/3)+\pi n$, $n\in Z$. **2.85** $x=-3\pi/8+2\pi n,n\in Z$, $x=-\frac{7\pi}{8}+2\pi k,k\in Z$. **2.86** $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),n\in Z.$ **2.87** $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),n\in Z$. **2.88** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **2.89**

$x \in R \setminus \left\{ \frac{\pi n}{2}, n \in Z \right\}$. **2.90** $x \in \left\{ 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k; n, k \in Z \right\}$. **2.91** $x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \cup$ $\cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n \right]$ где $n \in Z$. **2.92** $x \in [2\pi n, arctg 2 + 2\pi n]$, $n \in Z$. **2.118** $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{3\pi}{8} + \pi p, -\frac{\pi}{8} + \pi q \right); \left(\frac{\pi}{8} + \pi p, \frac{5\pi}{8} + \pi q \right), p, q \in Z \right\}$. **2.119** $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi m \right), \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi l \right), n, m, k, l \in Z \right\}$. **2.120** $(x; y) \in \{(0;1)\}$.

2.121 $x = \sin 1$. **2.122** $x = arctg\left(3^{\frac{1}{\pi}} \right) + \pi n, n \in Z$. **2.123** $ctg\left(\arccos\left(-\frac{1}{7} \right) \right) = -\frac{\sqrt{3}}{12}$.

2.124 $\sin(2 arctg 2) = \frac{4}{5}$. **2.125** $tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3} \right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. **2.126** $\cos(2 arctg(-4)) = -\frac{15}{17}$.

2.127 $a_{\max} = -\sqrt{2}$. **2.128** $\cos(2 arctg(-4)) = -\frac{15}{17}$. **2.129** Не является. **2.130** $17 - \frac{11\pi}{2}$. **2.131** $\frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11} \right) = -7$. **2.132** $x = \frac{1}{2}$. **2.133** $y_{\min} = y\left(t = \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{8}$.
2.135 $10 - 7\pi/2$. **2.136** При $p = 9$ – единственное решение $x = 3\pi/2$, при $p < 9$ решений нет. **2.137** $a \in (-\infty, -3) \cup (1,6)$. **2.138** Уравнение имеет решения при любых b, только если $a = -1$. **2.139** $(a; b) \in \{(0;0);(1;0)\}$. **2.140** Уравнение имеет ровно шесть корней на отрезке $[2\pi a, (a^2 + 1)\pi]$ при $a \in \{3\} \cup [\sqrt{10}, \sqrt{11})$. **2.141** $a \in \left\{ -\frac{2}{3}; 0 \right\}$. **2.142** Уравнение имеет единственное решение при иррациональных значениях параметра a. **2.143** $a \in (-\infty, -2] \cup \{-1/2\} \cup [0, 1/2] \cup \{2\}$. **2.144** $(x; y) = (0;1)$. 2.145 $x \in \{0\}$. **2.146** $x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{3\pi}{4} + \pi n \right) \cup$ $\cup \left(1, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, -1 \right)$, $n = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Раздел 3.

3.1 6 (*кв.ед*). **3.2** Отношение длины высоты треугольника ABC, опущенной на BC из вершины A, к радиусу вписанной окружности равно 3. **3.3** $3 \cdot AD$ больше, чем $AC + BC$. **3.4** $AD = 3 - \sqrt{3}$. **3.5** Длина третьей стороны равна 4 *см*. **3.6** $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. **3.7** $l_c = \frac{2ab\cos(\gamma/2)}{a + b}$. **3.8** $BO : DO = 4 : 1$, $S_{DOC} : S_{BOC} = DO : BO = 1 : 4$. **3.9** $\sin\alpha = 3/5$. **3.10** Знаменатель прогрессии меньше 2. **3.11** $4R + 2r$. **3.12** $\angle A = \angle B = 45^0$. **3.13** Расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведённой к гипотенузе, равно $12/5$. **3.14** $S_{BMN} = 20/9$ (*кв.ед*). **3.15** Длина третьей стороны в треугольнике равна 4. **3.16** Длина третьей стороны треугольника равна $2\sqrt{7}$ или $2\sqrt{19}$. **3.17**

а) $r = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}} = \frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2(2a+b)}$; б) $r = \frac{b}{2}tg\frac{\gamma}{2}$. **3.18** $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{3}$, BC =6 или $BC = 2\sqrt{21}$. **3.19** $S_{ABC} = \frac{h^2}{\sin 2\varphi}$ $(кв.ед.)$. **3.20** $\angle A = 90^0$, $\angle B = 65^0, \angle C = 25^0$. **3.21** $S_{BDC} = a$ $(кв.ед.)$. **3.22** $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$ или $\frac{2\pi}{3}$. **3.23** Треугольник прямоугольный и равнобедренный. **3.24** $S = r(2R + r)$. **3.25** BC =8. **3.26** Площадь треугольника равна $ar\frac{a-r}{a-2r}$ $(кв.ед.)$. **3.27** Отношение высот равно $4\sqrt{6}/9$. **3.28** Расстояние между основаниями высот равно $8/5$. **3.29** $2\sqrt{3}$ $(кв.ед.)$. **3.30** Либо $S = 16/3\left(м^2\right)$ и центр находится вне треугольника; либо $S = 8\sqrt{5}/3\left(м^2\right)$ и тогда центр лежит внутри треугольника. **3.31** $AD = 15/\sqrt{34}$. **3.32** $AD = 15\sqrt{2}/8$. **3.33** $AB = 5$. **3.34** $BC = \sqrt{10}$. **3.35** $S_{CNK} = \sqrt{2}$, $S_{ABC} = 12$ $(кв.ед.)$. **3.36** $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. **3.37** $S = 9\sqrt{15}/4$ $(кв.ед.)$ **3.38** Радиус вписанной окружности равен $3 - \sqrt{5}$. **3.39** $AC = \sqrt{29} - 2$. **3.40** Треугольник ABC имеет углы $60^0, 90^0$ и 30^0. **3.41** $S = 3\sqrt{3}$ $(кв.ед.)$. **3.42** Тупоугольный. **3.43** $r = 4\left(3 - \sqrt{5}\right)/\sqrt{5}$. **3.44** $S_{ABD} = 1$, $R = \sqrt{85}/2$. **3.45** AD =2. **3.46** $AH : HB = 16 : 9$. **3.48** Треугольник не является остроугольным. **3.49** $\angle ABC = 60^0$. **3.51** Диаметр разбивается на отрезки длиной $R\left(1 - \left(\sqrt{3}/2\right)\right)$ и $R\left(1 + \left(\sqrt{3}/2\right)\right)$. **3.52** Сумма радиусов окружностей равна $3R/2$. **3.53** $BL : AC = \sqrt{15}$. **3.54** π - $\arcsin(4/5)$. **3.55** Радиус полуокружности равен $4\sqrt{19}$. **3.56** $AC : AB = 9 : 8$. **3.57** $BC = \sqrt{3}$. **3.58** $\angle ANP = \pi/2$. **3.59** $BC = 11$. **3.60** Радиусы первой и второй окружностей равны, соответственно, 36 и 8. **3.61** $BC = 7/3$. **3.62** $61\sqrt{3}/4$ $(кв.ед)$. **3.63** $MK = 24/5$. **3.64** Площадь ромба составляет 24 $\left(см^2\right)$. **3.65** В ромбе два острых угла величины $2arctg\left(2 - \sqrt{3}\right) = \pi/6$ и два тупых угла величины $\pi - 2arctg\left(2 - \sqrt{3}\right) = 5\pi/6$. **3.66** Неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда противоположные углы α и β - прямые. **3.67** $S_{ADC} = \frac{cd}{ab} \cdot S_1$. **3.70** $AC = \sqrt{ab}$ (среднему пропорциональному длин оснований a и b). **3.71** $S_{BOC} = 108/5$ $(кв.ед)$. **3.72** Площадь части ромба, лежащая вне круга, равна $(75/2) - 9\pi$ $(кв.ед)$, что больше, чем 9. **3.73** $\frac{S_1 \cdot S_3}{S_2}$. **3.74** $2S$. **3.75** $S_{ABCD} = 34$ $(кв.ед)$. **3.76** Площади параллелограммов $ABCD$ и $AKLM$ равны. **3.77** Два угла по $2\pi/5$ и два угла по $3\pi/5$. **3.78** $\frac{S_{ABE}}{S_{BCDE}} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1}$. **3.79** Вторая диагональ имеет длину, равную $\sqrt{3}$. **3.80** $\angle A = \angle D = \arcsin(2/\pi)$, $\angle B = \angle C = \pi - \arcsin(2/\pi)$. **3.81** В отношении 1:2. **3.82** $S = a^2 \sin\alpha$ $(кв.ед)$. **3.83** $S = 2$ $(кв.ед)$. **3.84** $MN = 5$. **3.85** Биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне, пересекаются под прямым углом. **3.86** 25$(кв.ед)$. **3.87** CD=6, AD=4. **3.88** Радиус окружности равен $\frac{91\left(6-\sqrt{6}\right)}{30}$. **3.89** Площадь трапеции равна 162$кв.ед$. **3.90** Таких углов $\angle ADC$ не существует. **3.91** $S_{OFC}=19\sqrt{3}/52\ (кв.ед)$. **3.92** $\angle A=60^0, \angle B=75^0, \angle C=45^0$. **3.93** Радиус описанной окружности равен $8/\sqrt{15}$. **3.94** Расстояние от точки O до прямой a равно $\frac{cd}{c+d}$. **3.95** S_{PQRS}=319$(кв.ед)$. **3.96** Площадь пятиугольника равна $3\sqrt{15}/2\ (кв.ед)$. **3.97** $\angle BAC=arctg\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$ (другая форма ответа $\angle BAC=\frac{\pi}{4}-arctg\frac{\sqrt{3}}{5}$). **3.98** $S=9\sqrt{2}/19\ (кв.ед)$. **3.99** $arctg3,\ 10$. **3.100** Расстояние между центрами окружностей равно $\frac{5}{2\sin(2\pi/5)}$. **3.101** AD=10. **3.103** Задача имеет решение, если $R/r\ge\sqrt{2}+1$. **3.107** Если $\angle B\ge\pi/2$, то решение задачи существует и единственно при $m_a>c$. Если $\angle B<\pi/2$, то решение существует и единственно при $m_a\ge c$; два решения будет при $c\sin B<m_a<c$, и если, наконец, $m_a\le c\sin B$, то решений нет (медиана не может быть меньше либо равна соответствующей высоте $h_a=c\sin B$).

Раздел 4.

4.1 Отношение площадей поверхностей вписанного в пирамиду и описанного вокруг неё шаров равно $\frac{R^2}{r^2}=\frac{6}{\left(\sqrt{19}+2\sqrt{15}+2\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2}$. **4.2** $AK=3\sqrt{41}$. **4.3** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **4.4** Периметр многоугольника равен $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. **4.7** Площадь сечения равна $\frac{31}{288}\sqrt{113}\ (кв.ед)$. **4.8** Плоскость делит объём пирамиды в отношении $\frac{V_{SABM}}{V_{SAMCD}}=\frac{1}{41}$. **4.9** Максимально возможный объём пирамиды равен $150\sqrt{3}$. **4.10** $BH=\frac{12}{5}$. **4.11** $SO:ON=120:19$. **4.12** Плоскость сечения делит объём куба в отношении 1:2. **4.13** Расстояние между скрещивающимися отрезками равно $3/\sqrt{31}$. **4.14** Площадь сечения тела вращения равна $50\arccos(4/5)\left(ед^2\right)$. **4.15** Радиус сферы равен $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot r$. **4.16** $MN=3/4$. **4.17** Площадь поверхности куба равна 384$(кв.ед)$. **4.18** $R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4}$; $\frac{b}{a}\in\left(1,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. **4.19** Радиус описанной сферы равен $1/\sqrt{2}$. **4.20** $61\pi/\left(9\sqrt{39}\right)$. **4.21** Радиус шара равен 1. **4.22** $SA=2$.

Учебное издание

ХОРОШИЛОВА Елена Владимировна

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для слушателей подготовительных курсов и абитуриентов
МГУ им. М.В.Ломоносова

Часть 2

В 2-х частях

Компьютерный набор, рисунки и компьютерная вёрстка
выполнены *Е.В.Хорошиловой*

Оригинал-макет предоставлен автором

Напечатано с готового оригинал-макета
Издательство ЗАО «ПСТМ»
Подписано к печати 01.03.2008 г.
Формат 60×90 1/16. Усл. печ.л. 23,87. Тираж 200 экз. Заказ 08/08.
Отпечатано в типографии ЗАО «ПСТМ»
Московская обл. г. Юбилейный, ул. Пионерская 1/4
Тел./Факс (495) 543-36-76.