Арифметика

Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2000

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я72
А81

Авторы:
С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

Рецензенты:
кафедра геометрии и методики преподавания математики Владимирского педагогического университета, кандидат педагогических наук, профессор ***В. Д. Степанов,*** доцент ***В. П. Покровский***, методист кабинета математики Владимирского областного института усовершенствования учителей ***В. Н. Фуфыкин***

Условные обозначения:

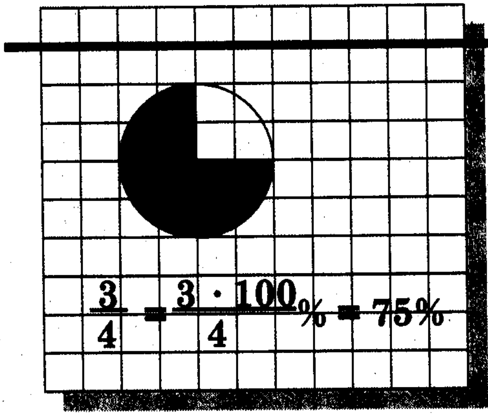
° — задания, предназначенные для устной работы;
* — задания повышенной трудности;
○ — начало необязательного материала внутри пункта;
● — конец необязательного материала внутри пункта.

А81 **Арифметика:** Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2000. — 270 с.: ил. — ISBN 5-09-009001-7.

Учебник является второй частью двухлетнего курса математики для 5-х и 6-х классов общеобразовательных учреждений, включает главы: «Отношения, пропорции, проценты», «Целые числа», «Рациональные числа», «Десятичные дроби», «Обыкновенные и десятичные дроби».

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я72

ISBN 5-09-009001-7



ГЛАВА I

ОТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ, ПРОЦЕНТЫ

1.1. Отношения чисел и величин

Частное двух не равных нулю чисел a и b называют еще **отношением чисел a и b.** Числа a и b называют **членами отношения.**

Например,

$8:2$, или $\frac{8}{2}$ есть отношение числа 8 к числу 2;

$\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ есть отношение $\frac{1}{3}$ к $\frac{1}{5}$.

Из основного свойства частного следует свойство отношения: **отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю:**

$a:b=(a\cdot c):(b\cdot c)$, или $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$ $(c\neq 0)$.

Частное двух величин называют **отношением** этих величин. Сами величины называют **членами отношения.**

Отношение величин одного наименования (длин, скоростей, стоимостей и т. д., выраженных одинаковыми единицами измерения), есть **число.** Например,

а) $\frac{5\text{ км}}{3\text{ км}}=\frac{5\cdot 1\text{ км}}{3\cdot 1\text{ км}}=\frac{5}{3}$, короче $\frac{5\text{ км}}{3\text{ км}}=\frac{5}{3}$;

б) $\frac{2\text{ дм}}{1\text{см}}=\frac{2\cdot 10\text{ см}}{1\text{ см}}=20$.

Отношение величин разных наименований (пути и времени, стоимости товара и его количества, массы тела и его объема и т. д.) есть **новая величина.**

Например, отношение пути (5 км) к времени (3 ч) есть новая величина — **скорость,** выраженная в единицах скорости $\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)$:

$$\frac{5\ \text{км}}{3\ \text{ч}}=\frac{5}{3}\cdot 1\frac{\text{км}}{\text{ч}}=\frac{5}{3}\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Отношение массы тела (520 кг) к его объему (2 м^3) есть новая величина — **плотность вещества,** выраженная в единицах плотности $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$:

$$\frac{520\ \text{кг}}{2\ \text{м}^3}=260\cdot 1\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}=260\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Аналогично отношение массы вещества (например, 12 кг соли) к объему раствора (3 м^3) есть новая величина — **концентрация раствора,** она выражается в единицах концентрации $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$:

$$\frac{12\ \text{кг}}{3\ \text{м}^3}=4\cdot 1\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}=4\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Знакомая нам величина — **цена** есть отношение стоимости товара к его массе или количеству единиц товара. Например, если за 2 кг товара заплатили 10 р., то его цена равна

$$\frac{10\ \text{р.}}{2\ \text{кг}}=5\frac{\text{р.}}{\text{кг}}.$$

Если за три одинаковые книги заплатили 24 р., то цена одной книги равна

$$\frac{24\ \text{р.}}{3\ \text{шт.}}=8\ \frac{\text{р.}}{\text{шт.}}.$$

Знаменатель в единицах цены обычно не пишут, а пишут и говорят: «цена 1 кг товара 5 р.» и «цена одной книги 8 р.».

Обозначения $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, $\frac{\text{м}}{\text{мин}}$, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ и др. часто пишут с наклонной чертой: км/ч, м/мин, м/с, ...

1.° Что называют:

а) отношением числа a к числу b; б) членами отношения? Приведите примеры.

2.° Чем является отношение величин:

а) одного наименования; б) разных наименований? Приведите примеры.

3.° Используя слово «отношение», прочитайте запись:

а) $7:2$; б) $\frac{3}{5}$; в) $1:5$; г) $\frac{1}{6}$.

4. Запишите отношение, назовите его члены:

а) 7 к 3; б) 5 к 9; в) 12 к 4; г) 10 к 1000.

5. Найдите отношение:

а) 3 к $\frac{1}{2}$; б) 5 к $\frac{10}{13}$; в) $\frac{7}{8}$ к $\frac{21}{32}$; г) $\frac{12}{17}$ к $\frac{48}{51}$.

6. Прочитайте отношение, назовите его члены, упростите отношение с помощью свойства отношения:

а) $40:50=4:5$; б) $99:18$; в) $450:250$; г) $720:81$.

В чем заключается свойство отношения?

7. Запишите отношение в виде дроби (там, где можно, упростите отношение):

а) $3:5$; б) $49:28$; в) $35:700$;
г) $5:7$; д) $520:460$; е) $27:81$.

8. Какие из отношений можно выразить натуральным числом:

а) $40:20$; б) $30:60$; в) $1000:100$;
г) $600:30$; д) $20:40$; е) $100:1000$?

9. Замените отношение дробных чисел равным ему отношением натуральных чисел по *образцу*:

$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$; *I способ.* $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}$.

II способ. **Умножим каждый член отношения на 6:**

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{6}{2}:\frac{6}{3}=3:2.$$

а) $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$; б) $\frac{3}{7}:\frac{4}{5}$; в) $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$;
г) $\frac{12}{17}:1\frac{1}{2}$; д) $1\frac{1}{2}:\frac{3}{8}$; е) $2\frac{1}{2}:1\frac{2}{3}$.

10. Упростите отношение величин одного наименования (такие величины иногда называют **однородными**):

а) $\frac{35\ \text{м}}{28\ \text{м}}$; б) $\frac{45\ \text{кг}}{36\ \text{кг}}$; в) $\frac{420\ \text{км}}{720\ \text{км}}$;
г) $\frac{450\ \text{т}}{540\ \text{т}}$; д) $\frac{320\ \text{ч}}{48\ \text{ч}}$; е) $\frac{480\ \text{мин}}{840\ \text{мин}}$.

11. Упростите отношение величин:

а) $\frac{12\text{ м}}{15\text{ дм}}$; б) $\frac{18\text{ кг}}{540\text{ г}}$; в) $\frac{490\text{ см}}{35\text{ дм}}$;

г) $\frac{450\text{ кг}}{2\text{ т}}$; д) $\frac{3500\text{ см}^3}{21\text{ дм}^3}$; е) $\frac{9900\text{ дм}^3}{18\text{ м}^3}$.

12. Упростите отношение величин по *образцу*:

а) $\frac{\mathbf{350\text{ км}}}{\mathbf{5\text{ ч}}}=\frac{\mathbf{350}}{\mathbf{5}}\,\frac{\mathbf{км}}{\mathbf{ч}}=\mathbf{70}\frac{\mathbf{км}}{\mathbf{ч}}$;

б) $\frac{720\text{ км}}{8\text{ ч}}$; в) $\frac{360\text{ м}}{3\text{ мин}}$; г) $\frac{420\text{ кг}}{4\text{ м}^3}$;

д) $\frac{2250\text{ кг}}{3\text{ м}^3}$; е) $\frac{720\text{ м}}{20\text{ с}}$; ж) $\frac{450\text{ г}}{5\text{ см}^3}$.

13. Найдите пройденный путь s, если известны скорость v и время t равномерного движения:

а) $v=2$ м/с, $t=3$ с; б) $v=2$ м/с, $t=\frac{1}{20}$ мин.

14. Найдите скорость равномерного движения v, если известны пройденный путь s и время движения t:

а) $s=6$ м, $t=3$ с; б) $s=6$ м, $t=\frac{1}{20}$ ч.

15. Скорость пешехода $5\frac{1}{5}$ км/ч. Найдите путь, пройденный пешеходом:

а) за 2 ч; б) за $1\frac{1}{2}$ ч;

в) за 45 мин; г) за 125 мин.

16. Расстояние в $1\frac{1}{2}$ км пешеход прошел за 20 мин. Найдите скорость пешехода. Ответ запишите в следующих единицах:

а) км/ч; б) км/мин; в) м/ч; г) м/мин; д) м/с.

17. Скорость легковой автомашины 72 км/ч. Какой путь она проедет за:

а) $\frac{2}{3}$ ч; б) 45 мин; в) 50 мин; г) 165 мин?

18. Скорость легковой автомашины 1200 м/мин. За сколько часов машина проедет:

а) 144 км; б) 36 км; в) 8 км; г) 54 км?

19. Найдите скорость автомашины, если 80 км она проезжает:

а) за 1 ч; б) за $\frac{4}{5}$ ч; в) за $\frac{4}{3}$ ч; г) за $\frac{8}{7}$ ч;

д) за 50 мин; е) за 65 мин; ж) за 90 мин; з) за 100 мин.

20.* Два конькобежца стартовали на дистанцию 10 000 м по замкнутой дорожке, длина которой равна 400 м. Скорость одного из них 20 км/ч, а скорость второго — 22 км/ч. Обгонит ли второй конькобежец первого на круг до конца дистанции? А на два круга?

1.2. Масштаб

Рисуя на бумаге изображения предметов, мы чаще всего вынуждены изменять их настоящие размеры. Чтобы изображения поместились на листе бумаги, большие предметы приходится изображать в уменьшенном виде, а маленькие — увеличивать. Но рисунок, чертеж или план должен давать представление о настоящих размерах предметов. На чертежах и планах делают специальную запись, показывающую отношение длины какого-нибудь отрезка на чертеже к его настоящей длине.

Например, если на плане комнаты отрезком в 1 см изображен отрезок, настоящая длина которого равна 2 м, то пишут:

в 1 см 2 м, или 1 см : 200 см, или 1 : 200.

Отношение длины линии на плане к длине соответствующей линии в натуре называют масштабом.

При одинаковых единицах измерения размеров предметов и их изображений масштаб выражается числом (отношением).

В приведенном выше примере масштаб равен 1 : 200.

Масштаб, выраженный числом, называют **числовым масштабом.** Для географических карт (рис. 1) числовой масштаб выражают дробью, числитель которой равен 1, а знаменатель есть число, показывающее, во сколько раз любое расстояние на карте меньше соответствующего расстояния на местности.

Например, запись

$$\frac{1}{20\,000}, \text{ или } 1:20\,000$$

означает, что 1 см на карте соответствует 20 000 см на местности.

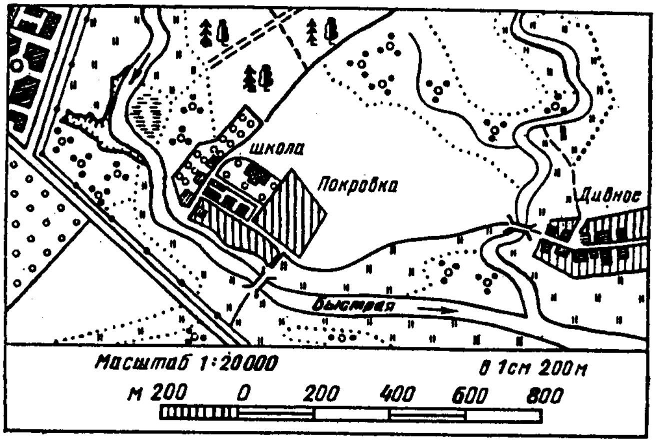


Рис. 1

Измерения на местности проводят в метрах или километрах. Для удобства нередко на карте изображают отрезок и указывают соответствующее ему расстояние в натуре в метрах или километрах.

21. Что показывает числовой масштаб:

а) 1:100; б) 1:1000; в) 1:20 000?

22. Определите числовой масштаб, если известно, что 1 см на плане (географической карте) изображает отрезок в натуре длиной:

а) 10 см; б) 50 см; в) 6 дм; г) 10 м;
д) 100 м; е) 1 км; ж) 6 км; з) 10 км.

23. Расстояние между двумя городами равно 200 км. Определите расстояние между изображениями этих городов на карте, если числовой масштаб карты равен:

а) 1:1 000 000; б) 1:200 000;

в) $\frac{1}{5\,000\,000}$; г) $\frac{1}{20\,000\,000}$.

24. Числовой масштаб карты равен $\frac{1}{50\,000}$. Определите расстояние на местности, если на карте оно равно:

а) 1 см; б) 5 см; в) 22 см;

г) 37 мм; д) $1\frac{1}{5}$ дм; е) 146 мм.

25. План комнаты имеет вид прямоугольника со сторонами 40 мм и 31 мм. Определите длину и ширину комнаты, если числовой масштаб плана 1:200.

26. Огород имеет вид прямоугольника, длина которого 340 м, а ширина 220 м. Какие размеры будет иметь изображение этого огорода на плане, выполненном в масштабе 1:500?

27. Прямоугольник со сторонами 72 см и 36 см изображает на плане поле, занятое под овес. Определите масштаб плана, если бо́льшая сторона поля имеет длину 360 м. Определите меньшую сторону поля.

28. Используя план местности (рис. 2), определите:
а) расстояние от A до B;
б) расстояния от A и от B до моста через реку;
в) расстояние от B до леса;
г) площадь поля.

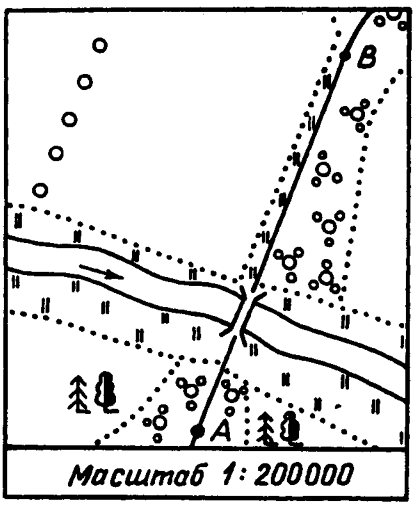


Рис. 2

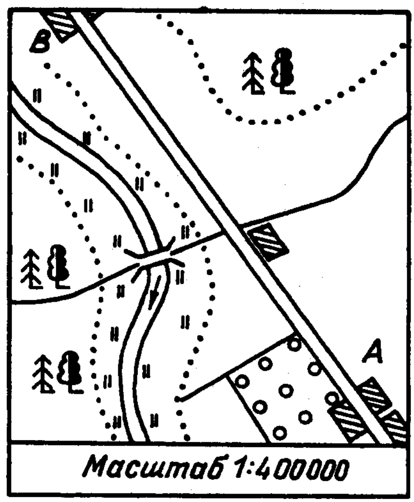


Рис. 3

29. За сколько часов туристы преодолеют расстояние от A до B (рис. 3), если будут двигаться со скоростью:
а) 5 км/ч; б) 4 км/ч?

30. Начертите план класса в масштабе 1:100.

31. Начертите план своей комнаты в масштабе 1:50.

32. Начертите план школьного здания в масштабе 1:250.

33. Можно ли начертить план здания (прямоугольной формы в основании) длиной 50 м и шириной 20 м на странице тетради, если использовать масштаб 1:50? Какой масштаб следует использовать, чтобы план поместился на странице тетради?

34. На рисунке 4 изображен комар в масштабе 4:1. Определите истинную длину крыла комара.

35. Определите, увеличен или уменьшен предмет, если он изображен в масштабе:

а) 1:100; б) 10:1; в) 1:20; г) 4:1.

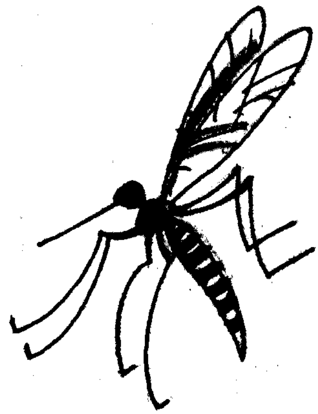


Рис. 4

1.3. Деление числа в данном отношении

Рассмотрим деление числа в данном отношении на конкретном примере.

Пусть требуется разделить между двумя друзьями 60 конфет в отношении 2:3.

Если считать, что 60 конфет составляют $2+3=5$ частей, то на одну часть приходится $60:5=12$ конфет.

Но тогда на две части приходится $12\cdot 2=24$ конфеты, а на три части приходится $12\cdot 3=36$ конфет.

Следовательно, конфеты между друзьями надо разделить так: первому дать 24 конфеты, а второму — 36 конфет.

Запишем решение этой задачи иначе:

1) $\frac{60}{2+3}\cdot 2=24$, 2) $\frac{60}{2+3}\cdot 3=36$.

Таким образом, **чтобы разделить число 60 в отношении 2:3, можно разделить число 60 на сумму членов отношения 2+3 и результат умножить на каждый член отношения.**

По такому правилу можно разделить любое число в данном отношении.

Задача 1. Два брата сложили свои деньги для покупки акций. Старший брат внес 500 р., а младший — 300 р. Через некоторое время они продали акции за 1000 рублей. Как они должны разделить эти деньги между собой?

Решение. Естественно разделить 1000 р. в том отношении, в котором они вложили деньги, т. е. в отношении 500:300, или 5:3.

Поэтому надо дать:

1) старшему брату $\frac{1000}{5+3} \cdot 5 = 625$ (р.),

2) младшему брату $\frac{1000}{5+3} \cdot 3 = 375$ (р.).

Ответ: старшему брату — 625 р., младшему — 375 р.

○ Задача 2. Трое хотят купить дом, в котором 13 комнат, за 26 000 р. Первый желает иметь 6 комнат, второй — 4, третий — 3. Сколько денег должен внести каждый из них?

Решение. Естественно, что каждый из них должен внести сумму, соответствующую количеству комнат, которые он желает иметь (будем считать, что комнаты равноценные).

Сумма, которую внесет первый, должна составить 6 частей, второй — 4 части, третий — 3 части. Говорят, что надо разделить 26 000 р. в отношении 6:4:3. Поэтому:

1) $\frac{26\,000}{6+4+3} \cdot 6 = 12\,000$ (р.) — сумма первого,

2) $\frac{26\,000}{6+4+3} \cdot 4 = 8000$ (р.) — сумма второго,

3) $\frac{26\,000}{6+4+3} \cdot 3 = 6000$ (р.) — сумма третьего.

Ответ: первому надо внести 12 000 р., второму — 8000 р., третьему — 6000 р.

Заметим, что последнее действие в приведенных выше решениях можно упростить, найдя ответ вычитанием. ●

36. Разделите 900 р. в отношении: а) 5:4; б) 2:3.

37. Разделите число:

а) 12 в отношении 1:3; б) 15 в отношении 2:3;

в) 48 в отношении 3:5; г) 100 в отношении $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$;

д) 96 в отношении $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$; е) 90 в отношении $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$.

38.* а) Объясните, как разделить число c в отношении $a:b$.
б) Объясните, как разделить число 24 в отношении $1:2:3$.

39. Первая машинистка печатает 10 страниц в час, вторая — 8 страниц в час. Как разделить между ними рукопись в 90 страниц, чтобы они закончили работу одновременно?

40. *Старинная задача.* Чтобы приготовить стекло, берут 10 частей поташу, 31 часть песку и 2 части мелу. Сколько нужно этих материалов на 86 пудов стекла?

41. Скорость велосипедиста в 5 раз больше скорости пешехода. Однажды они отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми 30 км. Какой путь проедет велосипедист до встречи с пешеходом?

42. Первая машинистка может перепечатать 90 страниц за 10 ч, вторая — за 15 ч. Как распределить между ними 90 страниц, чтобы они перепечатали их в кратчайший срок?

Решение. Выясним, сколько страниц печатает каждая машинистка за 1 ч.

1) $90:10=9$ (стр.) — печатает I машинистка за 1 ч;
2) $90:15=6$ (стр.) — печатает II машинистка за 1 ч.

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо 90 страниц разделить в отношении $9:6$ или $3:2$.

3) $\frac{90\cdot3}{3+2}=54$ (стр.) — надо дать I машинистке;

4) $90-54=36$ (стр.) — надо дать II машинистке.

Ответ: первой машинистке — 54 страницы, второй — 36 страниц.

43. Мотоциклист может проехать расстояние между пунктами за 2 ч, а велосипедист — за 6 ч. Однажды они одновременно отправились навстречу друг другу из этих пунктов. Сколько километров проехал каждый до встречи, если расстояние между пунктами 60 км? Решите задачу двумя способами.

44.* Над выполнением задания 3 дня работала первая бригада из 5 плотников и 4 дня вторая бригада из 6 плотников. За работу заплатили 3900 р. Какую сумму получит первая бригада, если все плотники работали с одинаковой производительностью?

45.* *Из «Арифметики» А. П. Киселева.* а) Разделить 84 на три части пропорционально числам 7, 5 и 2.

б) Разделить 125 на такие 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2:3, вторая к третьей, как 3:5, а третья к четвертой, как 5:6.

в) Разделить 125 на такие части, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2:3, вторая к третьей, как 4:5, а третья к четвертой, как 6:11.

г) Три купца составили товарищество для ведения некоторого торгового дела. Первый купец внес для этой цели 15 000 р., второй — 10 000 р., третий — 12 500 р. По окончании торгового дела они получили общей прибыли 7500 р. Спрашивается, сколько из этой прибыли придется получить каждому купцу.

д) На железной дороге работало 3 артели рабочих; в первой артели было 27 рабочих, во второй — 32, в третьей — 15; первая артель работала 20 дней, вторая — 18, третья — 16; все три артели получили за работу 4068 р. Сколько рублей придется получить каждой артели?

1.4. Пропорции

Равенство двух отношений называют пропорцией.

Пропорцию $a:b=c:d$, или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, читают так: «отношение a к b равно отношению c к d», или «a относится к b, как c относится к d».

Числа a и d называют **крайними членами** пропорции, а числа b и c — **средними членами** пропорции:

средние члены

$$a:b=c:d$$

крайние члены

Эти названия условны — достаточно написать пропорцию в обратном порядке (справа налево):

$$c:d=a:b,$$

и крайние члены станут средними, а средние члены — крайними.

Основное свойство пропорции заключается в том, что **произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:**

$$\text{если } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ то } a\cdot d=b\cdot c.$$

В самом деле, умножив равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ на $b\cdot d$, получим:

$$\frac{a\cdot \overset{1}{\cancel{b}}\cdot d}{\underset{1}{\cancel{b}}}=\frac{c\cdot b\cdot \overset{1}{\cancel{d}}}{\underset{1}{\cancel{d}}}, \text{ или } a\cdot d=c\cdot b.$$

Верно и обратное утверждение. Пусть a, b, c и d не равные нулю числа. Если $a\cdot d=b\cdot c$, то $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

В самом деле, если разделить равенство $a\cdot d=b\cdot c$ на $b\cdot d$ ($b\neq 0$, $d\neq 0$), то получим равенство:

$$\frac{a\cdot \overset{1}{\cancel{d}}}{b\cdot \underset{1}{\cancel{d}}}=\frac{\overset{1}{\cancel{b}}\cdot c}{\underset{1}{\cancel{b}}\cdot d}, \text{ или } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Заметим, что из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следует пропорция $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, потому что если дроби равны, то равны и обратные им дроби.

Если один из членов пропорции неизвестен и необходимо его определить, то говорят, что нужно **решить пропорцию.**

Пример 1. Решим пропорцию $\frac{x}{12}=\frac{7}{4}$.

Решение. Умножив правую и левую части данного равенства на 12, получим:

$$\frac{x\cdot \overset{1}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{12}}}=\frac{7\cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}.$$

Откуда $x=21$.

Пример 2. Решим пропорцию $\frac{30}{x}=\frac{5}{8}$.

Решение. По основному свойству пропорции произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$x \cdot 5 = 30 \cdot 8.$$

Откуда $x=\frac{\overset{6}{\cancel{30}} \cdot 8}{\underset{1}{\cancel{5}}}$; $x=48$.

Пример 3. Решим пропорцию $\frac{7}{12}=\frac{10}{x}$.

Решение. Заменим данную пропорцию на пропорцию $\frac{x}{10}=\frac{12}{7}$ и умножим правую и левую части этого равенства на 10:

$$x=\frac{12 \cdot 10}{7}$$

Откуда $x=17\frac{1}{7}$.

46.° Что называют пропорцией? Приведите пример, назовите крайние и средние члены пропорции. Сформулируйте основное свойство пропорции.

47. Запишите в виде пропорции:

а) 2 относится к 3, как 10 относится к 15;

б) $\frac{1}{3}$ относится к 6, как 1 относится к 18;

в) 3 во столько же раз больше 2, во сколько раз 6 больше 4;

г) 7 больше $3\frac{1}{2}$ во столько же раз, во сколько раз 9 больше $\frac{9}{2}$.

48. Можно ли составить пропорцию из отношений:

а) $6:3$ и $24:12$; б) $1:5$ и $17:85$;

в) $2:5$ и $10:4$; г) $20:8$ и $35:14$?

Верно ли равенство **(49—51)**:

49. а) $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; б) $7:5=\frac{77}{55}$; в) $\frac{12}{18}=14:21$?

50. а) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=10:12$; б) $\frac{3}{7}:\frac{4}{9}=27:28$;

в) $\frac{4}{11}:\frac{5}{6}=48:110$; г) $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=4:3$?

51. а) $\frac{1}{7}:\frac{3}{4}=\frac{1}{14}:\frac{3}{8}$; б) $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{1}{3}:\frac{2}{5}$;

в) $1\frac{1}{2}:5=3:10$; г) $1\frac{4}{5}:2=10:9$?

52. Замените пропорцией равенство:

а) $12\cdot 2=6\cdot 4$; б) $15\cdot 6=9\cdot 10$;

в) $42\cdot 4=84\cdot 2$; г) $24\cdot 10=2\cdot 120$.

53. Из данной пропорции получите новую, поменяв местами крайние члены (средние члены):

а) $\frac{25}{13}=\frac{50}{26}$; б) $28:25=84:75$.

Решите пропорцию **(54—59)**:

54. а) $\frac{x}{2}=\frac{3}{7}$; б) $\frac{x}{3}=\frac{2}{5}$; в) $\frac{x}{12}=\frac{7}{10}$; г) $\frac{x}{16}=\frac{9}{32}$.

55. а) $\frac{7}{8}=\frac{x}{6}$; б) $\frac{13}{15}=\frac{x}{10}$; в) $\frac{12}{21}=\frac{x}{14}$; г) $\frac{48}{51}=\frac{x}{34}$.

56. а) $\frac{15}{x}=\frac{5}{8}$; б) $\frac{24}{x}=\frac{8}{7}$; в) $\frac{12}{x}=\frac{4}{5}$; г) $\frac{25}{x}=\frac{5}{7}$.

57. а) $\frac{3}{5}=\frac{7}{x}$; б) $\frac{8}{7}=\frac{15}{x}$; в) $\frac{7}{1}=\frac{12}{x}$; г) $\frac{8}{1}=\frac{3}{x}$.

58. а) $x:\frac{1}{2}=3:5$; б) $x:\frac{2}{3}=3:4$;

в) $x:5=7:\frac{1}{2}$; г) $x:6=\frac{1}{3}:8$.

59. а) $14:15=3:x$; б) $12:29=\frac{1}{58}:x$;

в) $12:25=\frac{7}{15}:x$; г) $144:125=1\frac{1}{2}:x$.

60. Докажите, что если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то:

а) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; б) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; в) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$; г) $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$.

Решите пропорцию **(61—62)**:

61. а) $\frac{2x}{3}=\frac{4}{9}$; б) $\frac{3x}{5}=\frac{9}{10}$;

в) $\frac{8}{15}=\frac{6x}{9}$; г) $\frac{12}{13}=\frac{18x}{39}$.

62. а) $\frac{1}{5}=2:3x$; б) $\frac{2}{7}=\frac{3}{4x}$;

в) $\frac{21}{25}=\frac{49}{50x}$; г) $\frac{16}{19}=32:38x$.

1.5. Прямая и обратная пропорциональность

Пусть книга стоит 3 р., тогда стоимость таких же двух, трех и т. д. книг легко рассчитать:

Количество книг, шт.	1	2	3	4	5	6
Стоимость, р.	3	6	9	12	15	18

С увеличением количества книг в несколько раз их стоимость увеличивается во столько же раз.

Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая увеличивается во столько же раз.

В рассмотренном примере стоимость покупки прямо пропорциональна количеству купленных книг.

Приведем еще пример.

Время движения и пройденный путь прямо пропорциональны при постоянной скорости движения. Если машина за 2 ч проедет 120 км, то за 6 ч она проедет 360 км, время увеличилось в 3 раза, значит, и путь должен увеличиться в 3 раза.

Пусть имеется 12 р. Хотят купить несколько одинаковых книг. Зависимость количества книг, которые можно купить на 12 р., от цены 1 книги задана таблицей:

Цена, р.	1	2	3	4	6	12
Количество книг, шт	12	6	4	3	2	1

С увеличением цены книги в несколько раз количество книг, которые можно купить, уменьшается во столько же раз.

Две величины называют обратно пропорциональными, если при увеличении одной из них в несколько раз другая уменьшается во столько же раз.

В рассмотренном примере количество купленных книг обратно пропорционально их цене.

Скорость и время движения с постоянной скоростью на одном участке пути обратно пропорциональны. Если машина проедет некоторый участок пути со скоростью 50 км/ч за 4 ч, то со скоростью 25 км/ч она проедет тот же участок пути за 8 ч, так как скорость уменьшилась в 2 раза, значит, время увеличится в 2 раза.

Задача 1. Двигаясь с постоянной скоростью, поезд прошел 60 м за 2 с. Какой путь пройдет поезд за 15 с?

Решение. При постоянной скорости путь прямо пропорционален времени движения. Запишем кратко условие задачи, считая, что за 15 с поезд пройдет x м:

$$\downarrow \begin{array}{rcr} 60 \text{ м} & — & 2 \text{ с} \\ x \text{ м} & — & 15 \text{ с} \end{array} \downarrow$$

Одинаково направленными стрелками показано, что величины прямо пропорциональны.

Время увеличилось в $\frac{15}{2}$ раза, а путь увеличился в $\frac{x}{60}$ раз. Так как величины прямо пропорциональны, то отношения $\frac{x}{60}$ и $\frac{15}{2}$ равны:

$$\frac{x}{60}=\frac{15}{2}.$$

Решим полученную пропорцию:

$$x=\frac{15\cdot\overset{30}{\cancel{60}}}{\underset{1}{\cancel{2}}};\ x=450.$$

Ответ: 450 м.

Задача 2. Поезд, скорость которого 45 км/ч, затратил на некоторый участок пути 4 ч. За сколько часов пройдет этот же участок пути товарный поезд, если его скорость 40 км/ч?

Решение. При постоянном пути скорость и время движения обратно пропорциональны. Запишем кратко условие задачи, считая, что товарный поезд пройдет тот же участок пути со скоростью 40 км/ч за x ч.

$$\downarrow \begin{array}{rcr} 45 \text{ км/ч} & — & 4 \text{ ч} \\ 40 \text{ км/ч} & — & x \text{ ч} \end{array} \uparrow$$

Противоположно направленными стрелками показано, что величины обратно пропорциональны.

Скорость уменьшилась в $\frac{45}{40}$ раза, а время движения увеличилось в $\frac{x}{4}$ раза. Так как величины обратно пропорциональны, то отношения $\frac{45}{40}$ и $\frac{x}{4}$ равны: $\frac{45}{40}=\frac{x}{4}$.

Решим полученную пропорцию:

$$x = \frac{45 \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{10}{\cancel{40}}}, \text{ т. е. } x = 4\frac{1}{2}.$$

Ответ: $4\frac{1}{2}$ ч.

63.° Какие величины называют:
а) прямо пропорциональными;
б) обратно пропорциональными?
Приведите примеры.

64.° За несколько одинаковых карандашей заплатили 8 р. Сколько нужно заплатить за такие же карандаши, если их:
а) в 2 раза больше; б) в 2 раза меньше?

65.° За несколько одинаковых карандашей заплатили 8 р. Сколько нужно заплатить за такое же количество карандашей, каждый из которых:
а) в 2 раза дороже; б) в 2 раза дешевле?

66.° На имеющиеся деньги можно купить 30 карандашей.
а) Сколько тетрадей можно купить на те же деньги, если тетрадь дешевле карандаша в 2 раза?
б) Сколько ручек можно купить на те же деньги, если ручка дороже карандаша в 10 раз?

67. Велосипедист за несколько часов проехал 36 км.
а) Сколько километров пройдет за то же время пешеход, скорость которого в 3 раза меньше скорости велосипедиста?
б) Сколько километров проедет за то же время мотоциклист, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста?

68. Расстояние от села до города велосипедист проехал за 3 ч.
а) За сколько часов это расстояние пройдет пешеход, скорость которого в 3 раза меньше скорости велосипедиста?
б) За сколько часов это расстояние проедет мотоциклист, скорость которого в 5 раз больше скорости велосипедиста?

69.° Какова зависимость между:

а) ценой карандаша и стоимостью нескольких таких карандашей при постоянном их количестве;

б) количеством карандашей одного сорта и их стоимостью при постоянной их цене;

в) количеством карандашей и их ценой при постоянной стоимости покупки?

70.° Какова зависимость между:

а) скоростью и расстоянием при постоянном времени движения;

б) временем и расстоянием при постоянной скорости движения;

в) временем и скоростью при постоянном пути?

71.° Какова зависимость между:

а) количеством одинаковых тракторов и площадью, которую они вспашут за один день;

б) числом дней работы трактора и площадью, которую он вспашет;

в) количеством одинаковых тракторов и числом дней, за которые они вспашут поле?

72.° а) Покупают одинаковые тетради. Какова зависимость между количеством тетрадей и стоимостью всей покупки?

б) Некто хочет проехать расстояние между двумя городами с постоянной скоростью. Какова зависимость между скоростью и временем движения?

73. За 6 ч поезд прошел 480 км. Сколько километров поезд прошел за первые 2 ч, двигаясь с постоянной скоростью?

74. Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песку. Сколько килограммов сахарного песку надо взять на 12 кг ягод?

75. Для варки варенья из вишни на 6 кг ягод берут 4 кг сахарного песку. Сколько килограммов ягод надо взять на 12 кг сахарного песку?

76. а) В 100 г раствора содержится 4 г соли. Сколько соли содержится в 300 г этого раствора?

б) В 4000 г раствора содержится 80 г соли. Сколько соли содержится в 200 г этого раствора?

77. Расстояние между двумя городами первый поезд прошел со скоростью 80 км/ч за 3 ч. За сколько часов второй поезд пройдет то же расстояние со скоростью 60 км/ч?

78. 5 маляров могли бы покрасить забор за 8 дней. За сколько дней тот же забор покрасят:

а) 10 маляров; б) 1 маляр?

79. 8 м сукна стоят столько же, сколько стоят 63 м ситца. Сколько метров ситца можно купить вместо 14 м сукна?

80. *Старинная задача.* В жаркий день 6 косцов выпили бочонок кваса за 8 ч. Нужно узнать, сколько косцов за 3 ч выпьют такой же бочонок кваса.

81. *Из «Арифметики» А. П. Киселева.* 8 аршин сукна стоят 30 р. Сколько стоят 15 аршин этого сукна?

82. Со скоростью 80 км/ч товарный поезд прошел 720 км. Какое расстояние пройдет за то же время пассажирский поезд, скорость которого 60 км/ч?

83. а) Грузовой автомобиль со скоростью 60 км/ч проехал расстояние между городами за 8 ч. За сколько часов то же расстояние проедет легковой автомобиль со скоростью 80 км/ч?

б) Бригада из 4 человек может выполнить задание за 10 дней. За сколько дней выполнит такое же задание другая бригада из 5 человек, если все 9 человек работают одинаково хорошо?

84. Один килограмм металлолома заменяет $2\frac{1}{2}$ кг богатой железом руды. Сколько руды заменяют 4 т металлолома?

85. а) Автомобилист заметил, что со скоростью 60 км/ч он проехал мост через реку за 40 с. На обратном пути он проехал этот же мост за 30 с. Определите скорость автомобиля на обратном пути.

б) Автомобилист заметил, что со скоростью 60 км/ч он проехал тоннель за 1 мин. За сколько минут он проехал бы этот тоннель на скорости 50 км/ч?

86. Две шестеренки сцеплены зубьями. Первая, имеющая 60 зубьев, за минуту делает 50 оборотов. Сколько оборотов за минуту делает вторая, имеющая 40 зубьев?

87. За одно и то же время токарь делает 6 деталей, а его ученик — 4 детали.

а) Сколько деталей сделает ученик токаря за то же время, за которое токарь сделает 27 деталей?

б) Сколько времени потратит ученик токаря на задание, которое токарь выполняет за 1 ч?

88. За одно и то же время пешеход прошел 6 км, а велосипедист проехал 18 км.

а) Сколько километров проехал велосипедист за то же время, за которое пешеход прошел 10 км?

б) Сколько времени потратил велосипедист на тот путь, который пешеход прошел за 2 ч?

89. 6 человек сделают некоторую работу за 18 дней. За сколько дней сделают ту же работу 9 человек, работающих так же успешно, как и первые?

90.* а) Шесть маляров выполнят работу за 5 дней. Сколько еще маляров надо пригласить, чтобы все вместе они выполнили то же задание за 3 дня?

б) Двое рабочих могли выполнить задание за 10 дней. Сколько еще рабочих надо пригласить, чтобы все вместе они выполнили ту же работу за 4 дня?

91.* *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некий господин позвал плотника и велел двор построить. Дал ему двадцать человек работников и спросил, в сколько дней построят они его двор. Плотник ответил: в тридцать дней. А господину надобно в 5 дней построить, и ради того спросил он плотника: сколько человек тебе надо иметь, дабы с ними ты построил двор в 5 дней; и плотник, недоумевая, спрашивает тебя, арифметик: сколько человек ему надо иметь, чтобы построить тот двор в 5 дней?

1.6. Понятие о проценте

Одну сотую часть числа (величины) называют процентом (от латинского *pro cento* —на сотню, из сотни, с сотни) этого числа (величины). Кратко говорят: **процент — это одна сотая** — и пишут

$$\boxed{\frac{1}{100}=1\%.}$$

Например, 1% м $=\frac{1}{100}$ м $=1$ см.

Запись «2%» читается «два процента». Вместо того чтобы говорить «тридцать девять сотых», говорят «тридцать девять процентов» и пишут «39%». Таким образом, $\frac{2}{100}=2\%$; $\frac{39}{100}=39\%$.

С процентами связаны задачи трех основных типов на нахождение:

— процентов данного числа;

— числа по его процентам;

— процентного отношения двух чисел.

Для их решения достаточно знать, что процент — одна сотая.

Задача 1. Найти 1% от 600 м.

Решение. 1% от 600 м равен $\frac{1}{100}$ от 600 м:

$$\frac{1}{100}\cdot 600 = 6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 6 м.

Задача 2. Найти 25% от 36 м.

Решение. 25% от 36 м равны $\frac{25}{100}$ от 36 м:

$$\frac{25}{100}\cdot 36 = \frac{25\cdot 36}{100} = \frac{36}{4} = 9 \text{ (м)}.$$

Ответ: 9 м.

Задача 3. Найти число, 1% которого равен 5.

Решение. Так как 1% числа равен 5, то само число в 100 раз больше:

$$5\cdot 100 = 500.$$

Ответ: 500.

Задача 4. Найти число, 30% которого равны 60.

Решение. Так как 30% числа равны 60, то 1% числа равен $\frac{60}{30}$. Само число в 100 раз больше:

$$\frac{60}{30}\cdot 100 = \frac{60\cdot 100}{30} = 200.$$

Ответ: 200.

Задача 5. Из 30 учащихся класса в различных кружках занимается 12. Сколько процентов учащихся класса занимается в кружках?

Решение. В кружках занимается $\frac{12}{30}$ всех учащихся класса. Задача заключается в том, чтобы выразить отношение $\frac{12}{30}$ в процентах, т. е. узнать, сколько раз $\frac{1}{100}$ (процент) содержится в числе $\frac{12}{30}$:

$$\frac{12}{30} = \frac{12\cdot 100}{30}\cdot\frac{1}{100} = \frac{12\cdot 100}{30}\% = 40\%.$$

Таким образом, **чтобы отношение двух чисел выразить в процентах, можно это отношение умножить на 100.**

Выразим отношение чисел 125 к 200 в процентах:

$$\frac{125}{200} = \frac{125 \cdot 100}{200}\% = \frac{125}{2}\% = 62\frac{1}{2}\%.$$

92.° Что называют процентом?

93.° Как найти несколько процентов числа?

94. Запишите в виде обыкновенной дроби:

1%, 5%, 70%, 100%, 120%, 150%, 200%, 1020%.

95. Прочитайте предложение, выразите число процентов дробью, прочитайте полученное предложение:

а) Число 25 составляет 25% от 100.
б) Число 20 составляет 50% от 40.
в) Найдите 10% от 200.
г) Число 500 увеличили на 10% и получили 550.

96. Выразите в процентах:

а) $\frac{1}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 2, $1\frac{15}{100}$.

97.° В начале XX века в России из каждых 100 человек, занятых в хозяйстве, 9 человек работали в промышленности, 75 работали в сельском хозяйстве, 9 человек работали в торговле. Выразите в процентах долю работников, занятых в промышленности, сельском хозяйстве и в торговле, от общего числа занятых в хозяйстве.

98.° Найдите 1% от:

а) 1 метра; б) 1 центнера; в) 1 килограмма.

99.° Найдите 5%; 17%; 23% от:

а) 1 метра; б) 1 центнера; в) 1 килограмма.

100. Найдите:

а) 1% от 100; б) 1% от 300; в) 5% от 40;
г) 7% от 200; д) 20% от 15; е) 25% от 48;
ж) 100% от 49; з) 120% от 250; и) 200% от 300.

101. Служащий вложил 500 р. в акции своего предприятия и получил 20% дохода. Сколько рублей дохода он получил?

102. Какую часть числа составляют его:

а) 1%; б) 5%; в) 10%; г) 20%;
д) 25%; е) 50%; ж) 75%; з) 100%?

103.° Вычислите:

а) 50% от 400; б) 10% от 20;
в) 25% от 16; г) 75% от 8.

104. Из сахарной свеклы получают сахар, масса которого составляет 18% массы свеклы. Сколько сахара получится при переработке:

а) 40 т свеклы; б) 30 т свеклы; в) 500 т свеклы?

105. Магнитный железняк содержит 70% чистого железа. Сколько тонн железа в 13 т железняка?

106. Сплав содержит 62% олова и 38% свинца. Сколько граммов олова и сколько свинца в 400 г сплава?

107. Папа потратил свою премию 200 р. на подарки маме и нам — детям. На подарок маме он потратил 40% этой суммы, мне и моей сестре по 30%. Все ли деньги потратил папа? Нет ли в задаче лишних данных?

108.° а) 25% учащихся класса соревновались в прыжках в высоту, еще 75% — в прыжках в длину. Все ли учащиеся класса участвовали в соревнованиях?

б) Туристы проехали 80% намеченного маршрута на поезде и 15% — на автобусе. Весь ли маршрут они уже проехали?

в) Маша потратила 70% имевшихся у нее денег на книги и 30% — на тетради. Все ли деньги потратила Маша?

109.° Учительница сказала: «С контрольной работой справились 100% учащихся нашего класса». Как это понимать?

110.° а) Потратили 80% суммы. Сколько процентов этой суммы осталось?

б) Мужчины составляют 75% всех работников завода. Сколько процентов всех работников составляют женщины?

в) Девочки составляют 40% класса. Сколько процентов класса составляют мальчики?

111. а) Найдите 15% числа 36.

б) Найдите число, 15% которого равны 36.

112. Найдите число:

а) 1% которого равен 3; б) 10% которого равны 40;
в) 15% которого равны 30; г) 50% которого равны 250.

113. Выразите дробь в процентах:

а) $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{60}{100}=60\%$;

б) $\frac{5}{3}=\frac{5\cdot 100}{3}\%=\frac{500}{3}\%=166\frac{2}{3}\%$;

в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{5}{4}$; д) $\frac{3}{4}$; е) $\frac{13}{25}$; ж) $\frac{17}{20}$; з) $\frac{4}{3}$.

114. а) В магазин электротоваров привезли партию лампочек. Среди них оказалось 16 разбитых лампочек, что составило 2% от общего числа. Сколько лампочек привезли в магазин?

б) Посадили семена гороха, 270 из них взошли. Это составило 90% всех посаженных семян. Сколько семян посадили?

115. Из 16 кг свежих груш получили 4 кг сушеных. Какую часть от массы свежих груш составляет масса сушеных? Выразите эту часть в процентах. Сколько процентов массы теряется при сушке?

116. Сколько процентов числа 50 составляет число 40? Сколько процентов числа 40 составляет число 50?

117. а) Посадили 50 семян, 47 из них взошли. Определите процент всхожести семян.

б) В школе 400 учащихся, 12 из них учатся на «5». Сколько процентов учащихся школы учится на «5»?

118. Маша прочитала 120 страниц, и ей еще осталось прочитать 130 страниц книги.

а) Сколько процентов всех страниц она прочитала?

б) Сколько процентов всех страниц ей осталось прочитать?

119. В июне было 12 солнечных и 18 пасмурных дней. Сколько процентов составили: а) солнечные дни; б) пасмурные дни?

120. В одном килограмме сыра содержится 200 г белка. Сколько процентов белка содержится в сыре?

1.7. Задачи на проценты

В предыдущем пункте были рассмотрены простые задачи на проценты. Так как задачи на проценты являются задачами на дроби, то их можно решать известным способом — умножением или делением на обыкновенную дробь.

Задача 1. В городе 64 тыс. избирателей, 85% всех избирателей приняли участие в выборах. Сколько избирателей приняли участие в выборах?

Решение. Найдем 85%, или $\frac{85}{100}$ от 64 000:

$$\frac{85}{100}\cdot 64\,000=54\,400 \text{ (избирателей).}$$

Задача 2. В соревнованиях было 9 победителей, что составило 18% числа всех участников соревнований. Сколько было участников соревнований?

Решение. Число 9 составляет 18%, или $\frac{18}{100}$ неизвестного числа. Найдем это число, поделив 9 на $\frac{18}{100}$:

$$9:\frac{18}{100}=50 \text{ (участников).}$$

○ Заметим, что все три типа задач на проценты можно решать с помощью одного приема — как задачи на прямую пропорциональность.

Пример 1. Найдем 8% от 35.

Решение. Пусть x — искомое число, тогда:

$$\begin{array}{l} \downarrow 35 \text{ — } 100\% \downarrow \\ x \text{ — } 8\% \end{array}$$

$$\frac{35}{x}=\frac{100}{8},\ x=\frac{35\cdot 8}{100}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}.$$

Ответ: $2\frac{4}{5}$.

Пример 2. Найдем число, 12% которого равны 3.

Решение. Пусть x — искомое число, тогда:

$$\begin{array}{l} \downarrow x \text{ — } 100\% \downarrow \\ 3 \text{ — } 12\% \end{array}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{100}{12},\ x=\frac{3\cdot 100}{12}=25.$$

Ответ: 25.

Пример 3. Найдем процентное отношение чисел 8 и 40.
Решение. Пусть 8 от 40 составляет x процентов, тогда:

$$\begin{array}{lcr} 40 & \text{—} & 100\% \\ 8 & \text{—} & x\% \end{array}$$

$$\frac{40}{8} = \frac{100}{x}, \; x = \frac{8 \cdot 100}{40} = 20.$$

Ответ: 20%. ●

121. а) В магазин привезли 2500 кг помидоров. В первый день продали 30% всех помидоров. Сколько килограммов помидоров осталось продать?
б) В школе 400 учащихся, 52% этого числа составляют девочки. Сколько мальчиков в школе?

122. Масса сушеных груш составляет 20% массы свежих. Сколько килограммов сушеных груш получится из 100 кг; 350 кг; 25 кг свежих? Сколько процентов массы свежих груш теряется при сушке?

123. Виноград при сушке теряет 70% своей массы. Сколько изюма (сушеного винограда) получится из 100 кг; 250 кг; 80 кг свежего винограда?

124. Припой содержит 40% олова, 2% сурьмы, остальную часть составляет свинец. Сколько граммов олова, свинца и сурьмы в 300 г припоя?

125. Токарь до обеденного перерыва обточил 24 детали, что составляет 60% сменной нормы. Сколько деталей должен обточить токарь за смену?

126. Туристы прошли 75% маршрута, и им осталось пройти еще 5 км. Какова длина маршрута?

127. Что больше:
а) 30% от 40 или 40% от 30;
б) 80% от 60 или 60% от 70?

128. Определите без вычислений, что больше:
а) 12% от 34 или 13% от 34;
б) 12% от 49 или 12% от 50?

129. Товар стоил 500 р. Его цена повысилась на 20%. На сколько рублей повысилась цена?

130. У Алеши 80 марок, у Бори на 20% больше, чем у Алеши. У Вовы на 25% меньше, чем у Алеши. Сколько марок у Бори и Вовы в отдельности?

131. Увеличьте число:

а) 60 на 10%; б) 80 на 25%;
в) 40 на 50%; г) 425 на 4%.

132. Уменьшите число:

а) 60 на 10%; б) 80 на 25%;
в) 90 на 50%; г) 125 на 20%.

133. а) Увеличьте число 80 на 25%; 30%; 65%; 80%.
б) Уменьшите число 60 на 15%; 20%; 25%; 75%.

134. Мясо при варке теряет 40% своей массы.
а) Сколько вареного мяса получится из 6 кг свежего?
б) Сколько свежего мяса нужно взять, чтобы получить 6 кг вареного?

1.8. Круговые диаграммы

Для того чтобы наглядно показать соотношение целого и его частей, часто используют **круговые диаграммы.** Например, если в 5 классе учатся 18 девочек и 18 мальчиков, то всем учащимся класса соответствует круг, а девочкам и мальчикам — по половине этого круга (рис. 5). Каждому мальчику и каждой девочке на диаграмме соответствует угол с вершиной в центре круга **(центральный угол)** величиной 180°:18=10°. Всем учащимся класса соответствует **полный угол,** составленный из двух развернутых углов. Полный угол содержит 360° (рис. 6).

Покажем на круговой диаграмме результаты выполнения контрольной работы по математике в 6 классе: «5» получили 4 человека, «4» — 14 человек, «3» — 12 человек. Всем

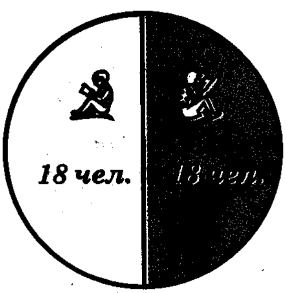


Рис. 5

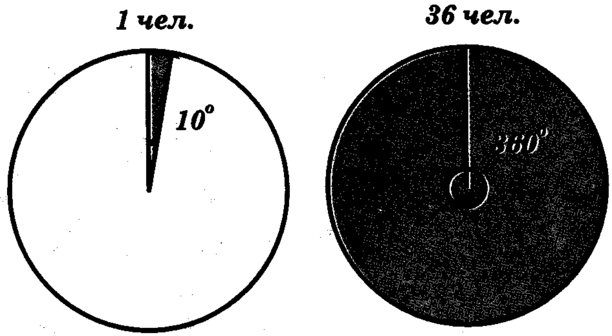


Рис. 6

$4+14+12=30$ учащимся соответствует полный угол величиной $360°$, а каждому учащемуся соответствует центральный угол величиной $360°:30=12°$. Получившим «5» соответствует угол в $12°\cdot4=48°$, получившим «4» — $12°\cdot14=168°$, получившим «3» — $12°\cdot12=144°$ (рис. 7).

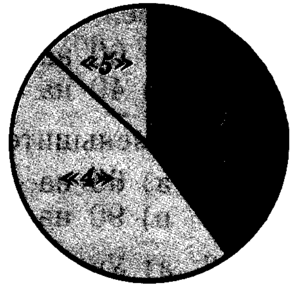


Рис. 7

Иногда на круговой диаграмме не указывают точных данных, а выражают части целого в процентах. Например, на диаграмме (рис. 8) отражено участие жителей города N в голосовании по выборам депутатов в Городскую думу: 80% всех избирателей приняли участие в голосовании, а 20% — нет. Чтобы построить такую диаграмму, надо определить величину центрального угла, соответствующего 20% избирателей:

$$360°:100\cdot20=72°.$$

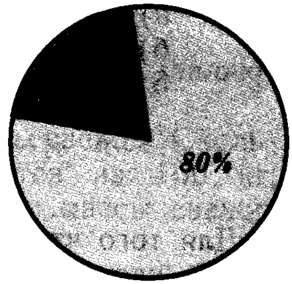


Рис. 8

135.° Сколько градусов содержит развернутый угол? Сколько градусов содержит полный угол?

136.° Используя круговую диаграмму (рис. 9), скажите, сколько в доме однокомнатных квартир; двухкомнатных; трехкомнатных.

137. На круговой диаграмме (рис. 10) показан процентный состав населения города N. Сколько мужчин, женщин и детей живет в городе N, если всего в нем 48 тыс. жителей?

Рис. 9

Рис. 10

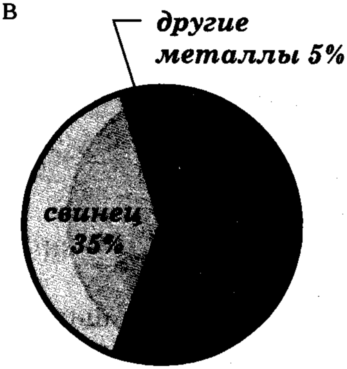


Рис. 11

138. На круговой диаграмме (рис. 11) показано содержание металлов в сплаве. Сколько граммов олова, свинца и других металлов содержится в 200 г такого сплава?

139. Постройте круговую диаграмму, отражающую результаты выполнения контрольной работы по русскому языку в 7 классе: «5» получили 3 человека, «4» — 12 человек, «3» — 15 человек («2» и «1» — нет).

140. Постройте круговую диаграмму «Мой режим дня».

1.9.* Задачи на перебор всех возможных вариантов

Рассмотрим задачи, в которых требуется осуществить перебор всех возможных вариантов или подсчитать их число.

Задача 1. Запишите все трехзначные числа, в записи которых используются цифры 1, 2 и 3 без повторения.

Решение. Запишем в порядке возрастания все числа, удовлетворяющие условию задачи, без пропусков и повторений: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Задача 2. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2 и 3?

Решение. В отличие от задачи 1, здесь можно повторять цифры. Чтобы ответить на вопрос задачи, можно выписать все числа без пропусков и повторений:

11	21	31
12	22	32
13	23	33

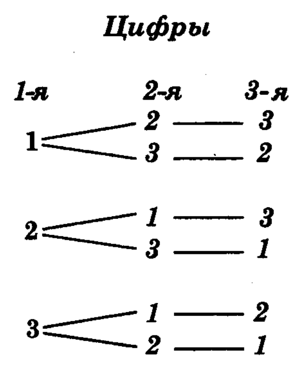


Рис. 12

На первом месте может стоять одна из трех цифр: 1, 2 или 3. В каждом из этих трех случаев на второе место можно поставить одну из трех цифр: 1, 2 или 3. Итого, имеется $3 \cdot 3 = 9$ двузначных чисел, записанных цифрами 1, 2 и 3.

Ответ: 9.

Убедимся тем же способом, что в задаче 1 можно составить только 6 чисел. На первое место можно поставить любую из трех цифр (рис. 12), на второе место можно поставить только одну из двух оставшихся,

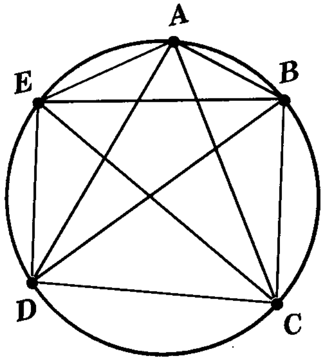


Рис. 13

т. е. имеется $3\cdot2=6$ возможностей занять два первых места. В каждом из этих шести случаев третье место займет оставшаяся третья цифра. Всего, таким образом, можно составить только 6 трехзначных чисел.

Задача 3. На окружности отмечено 5 точек: A, B, C, D, E. Каждую точку соединили с каждой. Сколько отрезков получилось?

Решение. На рисунке 13 отрезки можно пересчитать — их 10. Но при большом числе точек такой пересчет может привести к ошибке.

Решим задачу вторым способом. Из точки A проведено 4 отрезка: AB, AC, AD, AE; из точки B проведено тоже 4 отрезка, но один из них (AB) уже учтен, значит, из B выходят 3 новых отрезка. Из C выходят 2 новых отрезка, из D — один. Из точки E выходят 4 отрезка, но все они уже учтены. Итого, имеется $4+3+2+1=10$ отрезков.

Решим задачу 3 еще одним способом. Из A выходят 4 отрезка: AB, AC, AD, AE. Из B выходят 4 отрезка: BA, BC, BD, BE и т. д.

Из каждой из пяти точек выходят по четыре отрезка. Но чтобы получить ответ, надо произведение $4\cdot5$ разделить на 2, так как каждый из отрезков в этих перечислениях назван дважды. Итак, всего отрезков $\frac{5\cdot4}{2}=10$.

Ответ: 10.

141. Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры:

а) 1, 3, 9 без повторения; б) 1, 3, 9 с повторением;
в) 2, 4, 6 без повторения; г) 2, 4, 6 с повторением.

142. Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1, 5:

а) без повторения; б) с повторением.

143. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 9, 8, 7:

а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

144. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 0, 2, 4, 6:

а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

145. Четыре подружки купили четыре билета в кино. Сколькими различными способами они могут занять свои места в зрительном зале?

146. Сколько двузначных, трехзначных, четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5: а) без повторения; б) с повторением?

147. Бросили два игральных кубика. На первом выпало 3 очка, на втором — 6 очков (рис. 14). Сколькими различными способами могут выпасть очки на этих кубиках? Какая сумма должна выпадать чаще при большом числе бросков — 11 или 12 очков? Почему?

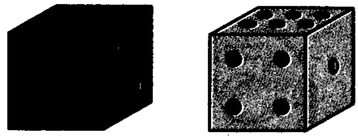


Рис. 14

148. а) На окружности отметили 6 точек (рис. 15). Сколько получится отрезков, если соединить каждую точку с каждой?

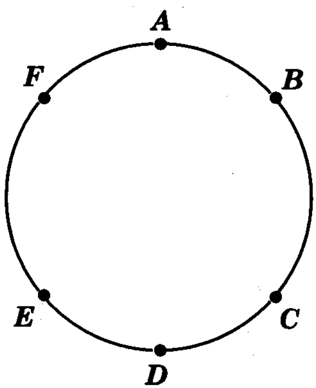


Рис. 15

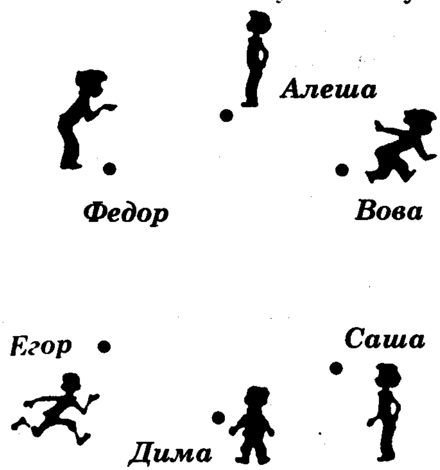


Рис. 16

б) Встретились 6 друзей (рис. 16), каждый пожал руку каждому. Сколько было рукопожатий?

149. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

1.10.* Вероятность события

Часто говорят: «это вполне вероятно», или «это маловероятно», или «это невероятно». В этих и других выражениях встречается слово «вероятно». Что же такое вероятность?

Событие A:

«выпала решка»

Событие B:

«выпал орел»

Рис. 17

Пример 1. Пусть на стол бросают монету. В результате обязательно произойдет одно из двух **событий** (рис. 17).

Так как предполагается, что монета не изогнута, то события A и B в нашем примере **равновозможные** и одно из них обязательно произойдет. Говорят, что случай выпадения решки благоприятствует событию A. Вероятность события A определяется как отношение количества случаев, благоприятствующих событию A, к числу всех равновозможных случаев, один из которых обязательно произойдет.

Таким образом, вероятность события A равна $\frac{1}{2}$. Очевидно, что в этом примере вероятность события B также равна $\frac{1}{2}$.

Случай «монета встала на ребро» считаем невероятным и не учитываем.

Вообще, **отношение числа случаев, благоприятствующих событию A, к числу всех равновозможных случаев, один из которых обязательно произойдет, называют вероятностью события A.**

Пример 2. Пусть на стол бросают игральный кубик. Возможны 6 случаев: выпадение 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков. Эти случаи равновозможны. Пусть событие A заключается в выпадении 3 очков. Вероятность этого события равна $\frac{1}{6}$, т. е. отношению числа случаев, благоприятствующих событию A (1), к числу всех равновозможных случаев (6), один из которых обязательно произойдет.

Пример 3. Двое играют в такую игру. Они бросают два кубика. Первый получает очко, если выпадает сумма 8. Второй получает очко, если выпадает сумма 9. Справедливая ли это игра?

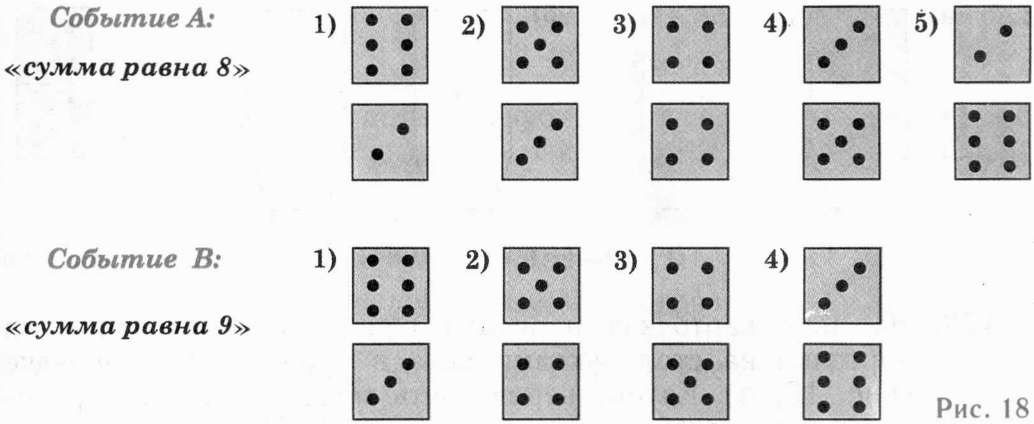


Рис. 18

Решение. Будем считать, что игра справедливая, если вероятность выиграть очко у каждого из соперников одна и та же. Подсчитаем число благоприятных случаев для каждого события (рис. 18).

Для события A есть 5 благоприятных случаев, для события B — только 4. Так как $5>4$, то вероятность события A больше, чем вероятность события B. Следовательно, игра несправедливая.

Чтобы подсчитать вероятности событий A и B в этом примере, надо определить число всех возможных случаев, один из которых обязательно произойдет. На первом кубике может выпасть одно из шести чисел; для каждого из них на втором кубике может выпасть одно из шести чисел, т. е. число всех случаев $6 \cdot 6 = 36$.

Вероятность события A равна $\frac{5}{36}$, а вероятность события B равна $\frac{4}{36}$.

150. Бросают игральный кубик. Подсчитайте вероятность события:

а) A: «выпадает 5 очков»;
б) B: «выпадает четное число очков»;
в) C: «выпадает нечетное число очков»;
г) D: «выпадает число очков, кратное 3».

151. Из ящика, где находятся 2 черных и 5 белых шаров, вынут наугад один шар. Какова вероятность того, что вынут:
а) черный шар; б) белый шар?

152. Подбросьте монету 50 раз. Сколько раз выпал орел?

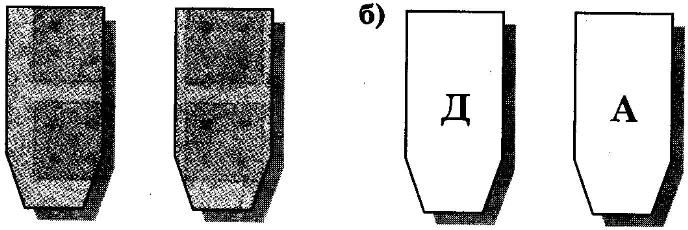
а) б)


Рис. 19

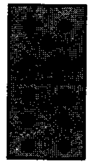


Рис. 20

153. На двух карточках написали буквы А и Д, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке (рис. 19, *а*). Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится слово «ДА» (рис. 19, *б*)?

154. На трех карточках написали буквы Е, Н, Т, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится слово «НЕТ»?

155. На четырех карточках написали буквы К, О, Л, Я и положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится имя КОЛЯ?

156. На четырех карточках написали буквы А, С, А, Ш, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится имя САША?

157. Синоптики обещают на следующей неделе 2 солнечных дня и 5 пасмурных. Какое событие более вероятно: «воскресенье — солнечный день» или «воскресенье — пасмурный день»?

158. Из 28 костей домино выбирают наугад 1 кость (на рисунке 20 изображена кость с суммой очков 11). Какова вероятность выбрать кость с суммой очков: а) 0; б) 2; в) 6; г) 10?

159.*Бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность события:

а) A: «сумма очков равна 2»; б) B: «сумма очков равна 10»;
в) C: «сумма очков равна 12»; г) D: «сумма очков равна 13»?

160. В первом ряду микроавтобуса имеется только 3 места. На них собираются сесть двое мужчин и одна женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?

161.*Бросают две монеты. Если выпадут два орла, то выиграл 1-й, если выпадут орел и решка, то выиграл 2-й. Справедлива ли эта игра?

162.*Бросают два игральных кубика. Если сумма очков 11 — выиграл 1-й, если сумма очков 12 — выиграл 2-й. Справедлива ли эта игра?

163.*Придумайте справедливую и несправедливую игру:
а) с двумя игральными кубиками; б) с двумя монетами.

164.*Витя задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения. Коля пытается это число угадать. Какова вероятность того, что Коля угадает число с первого раза, если это число:
а) двузначное; б) трехзначное; в) четырехзначное?

165.*Коля задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без повторения. Витя пытается это число угадать. Какова вероятность того, что Витя угадает число с первого раза, если это число:
а) двузначное; б) трехзначное; в) четырехзначное?

1.11. Исторические сведения

При решении разнообразных практических задач часто приходится сравнивать однородные величины между собой, вычислять их отношения. Долгое время под числом понималось только натуральное число (собрание единиц), полученное в результате счета. Отношение как результат деления одного числа на другое не считалось числом. Новое определение числа было дано впервые великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643—1727). В своей «Всеобщей арифметике» он писал: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Слово «пропорция» (от лат. *proportio*) означает соразмерность, определенное соотношение частей между собой. В древности учение о пропорциях было в большом почете у пифагорейцев. С пропорциями они связывали мысли о порядке и красоте в природе, о созвучных аккордах в музыке и гармонии во вселенной. В VII книге «Начал» Евклида изложена теория отношений и пропорций.

Р. Декарт

И. Ньютон

А. Н. Колмогоров

Из пропорции, которую в современной записи мы записываем так: $a:b=c:d$, Евклид выводит производные пропорции (здесь $a\neq b$, $c\neq d$):

$$b:a=d:c, \quad (a+b):b=(c+d):d, \quad a:(a-b)=c:(c-d)$$
$$a:c=b:d, \quad (a-b):b=(c-d):d,$$

и доказывает основное свойство пропорций.

Известный нам способ записи пропорций появился не сразу. Еще в XVII веке Р. Декарт записывал пропорцию $7:12=84:144$ так: |7|12|84|144|.

Современная запись пропорции с помощью знаков деления и равенства была введена Г. В. Лейбницем (1646—1716) в 1693 году.

В работах Б. Паскаля и других математиков XVII века были заложены основы новой математической теории — теории вероятностей. Во второй половине XIX века выдающиеся исследования по теории вероятностей велись русскими учеными П. Л. Чебышевым (1821—1894), А. А. Марковым (1856—1922) и другими. К настоящему времени в России сложилась сильная школа теории вероятностей. Крупнейшим ее представителем являлся Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987). А. Н. Колмогоров был выдающимся математиком XX столетия, внесшим большой вклад во многие разделы математики и ее приложений. Много внимания уделял А. Н. Колмогоров проблемам школьного математического образования. Им была основана школа-интернат физико-математического профиля при МГУ для способных школьников всей страны. Теперь эта школа носит имя А. Н. Колмогорова.

1.12. Занимательные задачи

166.* Пруд зарастает лилиями, причем за неделю площадь, занятая лилиями, удваивается. За сколько недель пруд покрылся лилиями наполовину, если полностью он покрылся лилиями за 8 недель?

167.* Некоторый вид бактерий размножается со скоростью 1 деление в минуту (каждую минуту каждая бактерия раздваивается). Если посадить 1 бактерию в пустой сосуд, то он наполнится за 1 ч. За какое время наполнится сосуд, если в него сначала посадить 2 бактерии?

168.* 3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 куриц за 12 дней?

169.* 100 синиц за 100 дней съедают 100 кг зерна. Сколько килограммов зерна съедят 10 синиц за 10 дней?

170.* 3 маляра за 5 дней могут покрасить 60 окон.
а) Сколько окон покрасят 5 маляров за 4 дня?
б) За сколько дней 2 маляра покрасят 48 окон?

171.* *Старинная задача.* 2 землекопа за 2 ч выкопают 2 м канавы. Сколько землекопов за 5 ч выкопают 5 м канавы?

172.* *Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.* Если писец может за 8 дней написать 15 листов, сколько понадобится писцов, чтобы написать 405 листов за 9 дней?

173.* *Старинная задача.* Переписчик в течение 4 дней может переписать 40 листов, работая по 9 ч в день. Во сколько дней он перепишет 60 листов, работая по 12 ч в день?

174.* *Старинная задача.* У хозяйки спросили: «Хорошо ли несутся ваши куры?» «Считайте сами, — был ответ, — полторы курицы за полтора дня несут полтора яйца, а всего у меня 12 кур». Сколько яиц несут куры в день?

175. *Задачи Даламбера.* а) Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб? б) Монета бросается три раза. Какова вероятность того, что герб выпадет по крайней мере один раз?

176. На рисунке 21 одна из фигур пентамино показана в четырех возможных положениях. Нарисуйте другую фигуру (рис. 22) в восьми возможных положениях.

177. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник 2×4 (рис. 23). Его можно разделить на две равные части отрезком или ломаной, которые проходят по линейкам клет-

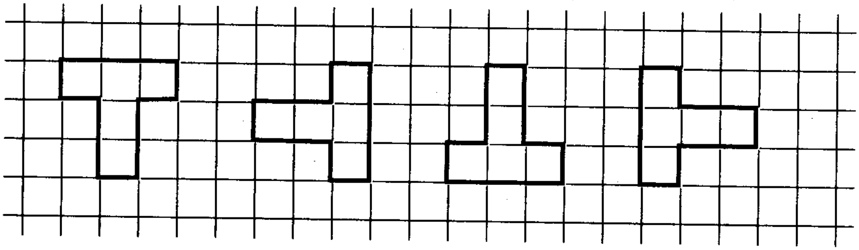


Рис. 21

чатой бумаги. Разделите прямоугольник на две равные части тремя различными способами.

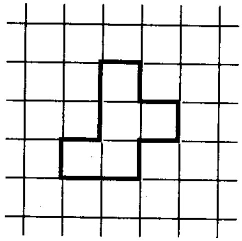


Рис. 22

178. Найдите все способы разбиения на две равные части прямоугольника 2×6 по тем же правилам. Сколько существует таких способов?

Если лист бумаги, на котором изображен прямоугольник $ABCD$, перегнуть так, чтобы точка A совпала с точкой D, а точка B с точкой C, то линия сгиба образует прямую —**ось симметрии** прямоугольника (рис. 24). Говорят, что прямоугольник **симметричен относительно** этой **прямой.**

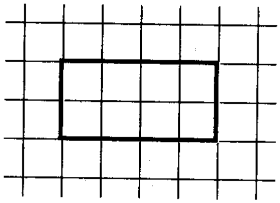


Рис. 23

179. Постройте прямоугольник 6×4 клетки и постройте две его оси симметрии.

180. Постройте на клетчатой бумаге квадрат и все его оси симметрии. Сколько осей симметрии у квадрата?

181. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии. Постройте окружность и три ее оси симметрии.

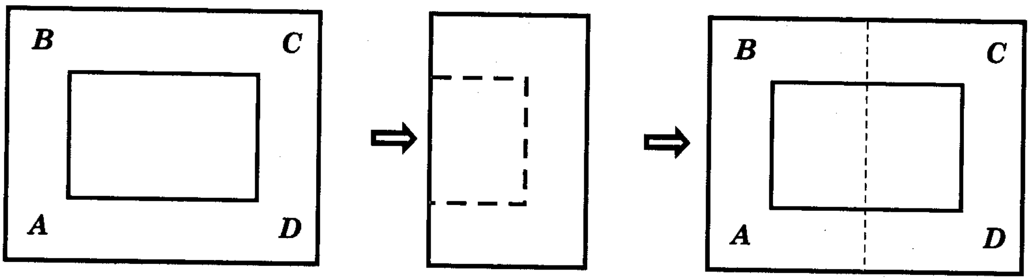


Рис. 24

182. Перерисуйте в тетрадь те буквы алфавита, у которых есть ось симметрии. Для каждой из них укажите число осей симметрии.

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П
Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ь Ы Ъ Э Ю Я

183. На рисунках 25 и 26 показана часть фигуры, имеющей ось симметрии *a*. Перерисуйте ее в тетрадь и дорисуйте недостающую часть фигуры.

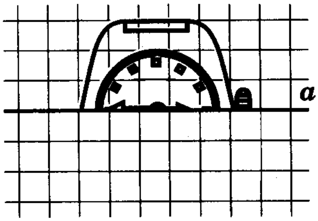


Рис. 25

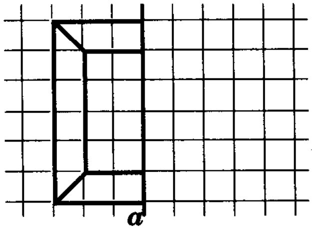


Рис. 26

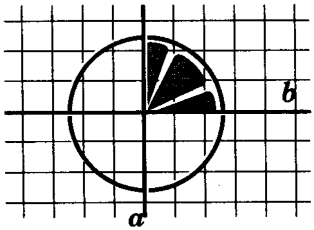


Рис. 27

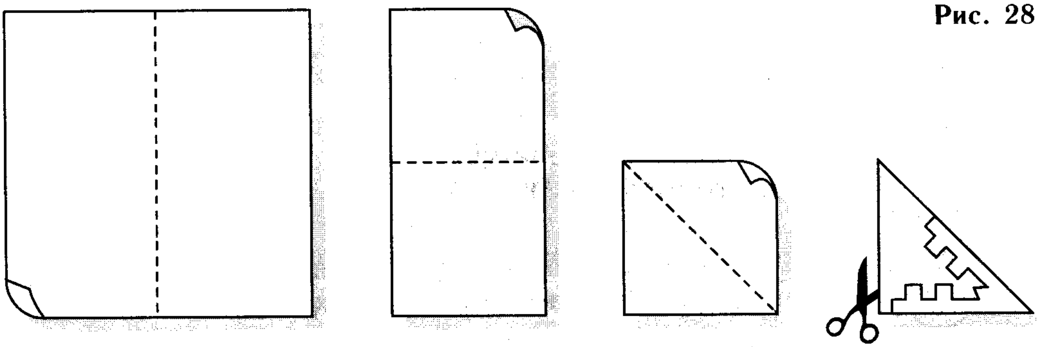
184. На рисунке 27 показана часть фигуры, имеющей две оси симметрии *a* и *b*. Дорисуйте недостающую часть фигуры.

185. Нарисуйте в тетради фигуру, имеющую:
а) одну ось симметрии; б) две оси симметрии.

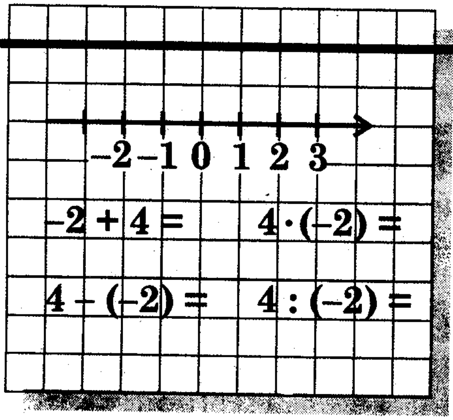
186. Перегните лист бумаги пополам, вырежите ножницами какую-нибудь фигуру, имеющую ось симметрии.

187. Перегните лист бумаги, как показано на рисунке 28. Из полученного треугольника вырежите ножницами выделенные цветом части. Расправьте бумагу. Сколько осей симметрии имеет полученная «снежинка»?

Рис. 28



188. Вырежите из бумаги «снежинку», имеющую 8 осей симметрии.



ГЛАВА II

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Напомним, что числа, которые используют при подсчете количества предметов, называют натуральными числами. Нуль не считается натуральным числом. Натуральные числа и нуль, записанные в порядке возрастания и без пропусков, образуют ряд целых неотрицательных чисел:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\ \ldots$$

В этой главе будут введены новые числа — **целые отрицательные.**

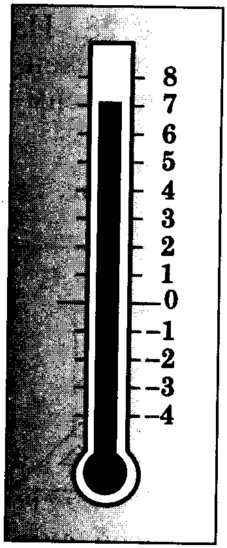


Рис. 29

2.1. Отрицательные целые числа

Термометр, изображенный на рисунке 29, показывает температуру 7° тепла. Если температура понизится на 4°, то термометр будет показывать 3° тепла. Уменьшению температуры соответствует действие вычитания:

$$7-4=3.$$

Если температура понизится на 7°, то термометр покажет 0°:

$$7-7=0.$$

Если же температура понизится на 8°, то термометр покажет $-1°$ (1° мороза). Но результат вычитания $7-8$ нельзя записать с помощью натуральных чисел и нуля, хотя он имеет реальный смысл.

Проиллюстрируем вычитание на ряде целых неотрицательных чисел.

1) От числа 7 отсчитаем влево 4 числа и получим 3:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots$$

$$-4$$

$$7-4=3.$$

2) От числа 7 отсчитаем влево 7 чисел и получим 0:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots$$

$$-7$$

$$7-7=0.$$

Отсчитать в ряду неотрицательных целых чисел от числа 7 влево 8 чисел нельзя. Чтобы действие 7 − 8 стало выполнимым, расширим ряд неотрицательных целых чисел. Для этого влево от нуля запишем (справа налево) по порядку все натуральные числа, добавляя к каждому из них знак «−», показывающий, что это число стоит слева от нуля.

Записи −1, −2, −3, ... читают «минус 1», «минус 2», «минус 3» и т. д.:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ .$$

Полученный ряд чисел называют **рядом целых чисел.** Точки слева и справа в этой записи означают, что ряд можно продолжать неограниченно вправо и влево.

Справа от числа 0 в этом ряду расположены числа, которые называют **натуральными** или **целыми положительными.**

Слева от числа 0 в этом ряду расположены числа, которые называют **целыми отрицательными.**

Число 0 не является ни положительным, ни отрицательным числом. Оно разделяет положительные и отрицательные числа.

Таким образом, **ряд целых чисел** образуют натуральные числа, целые отрицательные числа и число нуль.

189.°Можно ли проиллюстрировать на ряде неотрицательных чисел вычитание:

а) $7-4$; б) $7-7$; в) $7-8$?

190.°Как получить ряд целых чисел?

191.°Как называют числа, расположенные в ряде целых чисел:

а) справа от нуля; б) слева от нуля?

192.°Является ли число 0:

а) положительным; б) отрицательным?

193.°Прочитайте числа: $+2$, -3, 0, $+7$, -9.

а) Какие из этих чисел расположены в ряду целых чисел справа от нуля; слева от нуля?

б) Какие из этих чисел являются положительными; отрицательными?

194.°Прочитайте записи и объясните их смысл:

Москва....... $-2°$,
Калуга........ $-8°$,
Тверь.......... $+3°$.

195. Используя знаки «+» и «−», запишите:

а) 3° тепла; б) 4° тепла; в) 6° выше нуля;
г) 2° мороза; д) 5° ниже нуля; е) 1° холода.

2.2. Противоположные числа. Модуль числа

Считают, что если перед целым числом поставить знак «+», то это не изменяет самого числа.

Например, число 5 можно записать как $+5$, число -5 как $+(-5)$:

$$5=+5, \quad -5=+(-5).$$

Поэтому ряд целых чисел можно записать в виде:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots .$$

Числа, которые отличаются только знаком, называют противоположными.

Например, $+1$ и -1, -5 и $+5$, $+10$ и -10 — противоположные числа.

Если перед целым числом поставить знак «−», то получится число, ему противоположное:

$$-(+1)=-1, \quad -(-2)=+2.$$

Нуль считается противоположным самому себе:

$$0=-0=+0.$$

Число, противоположное числу a, обозначают $-a$. Заметим, что $-a$ может быть положительным, отрицательным или нулем. Например, если $a=+2$, то $-a=-2$, так как $-(+2)=-2$; если $a=-3$, то $-a=+3$, так как $-(-3)=+3$; если $a=0$, то $-a=0$, так как $-0=0$.

Введем понятие модуля, или абсолютной величины числа.

Модулем положительного числа называют само это число.

Например, модулем числа $+3$ является число $+3$, пишут:

$$|+3|=+3.$$

Модулем отрицательного числа называют противоположное ему (положительное) число.

Например, модулем числа -4 является число $+4$, пишут:

$$|-4|=+4.$$

Таким образом, **модуль целого, отличного от нуля числа есть положительное число.**

Противоположные числа имеют одинаковый модуль:

$$|a|=|-a|.$$

Например, $|+3|=|-3|=+3$, $|-5|=|+5|=+5$.

Модулем числа 0 является число 0, пишут:

$$|0|=0.$$

196.°Какие числа называют противоположными? Приведите примеры противоположных чисел.

197.°Какое число противоположно числу 0?

198.°Что получится, если перед целым числом поставить:

а) знак «+»; б) знак «−»?

199.°Что называют модулем:

а) положительного целого числа;

б) отрицательного целого числа;

в) числа нуль?

200.°Какие числа имеют одинаковый модуль? Приведите примеры.

201.°Для какого числа модуль — противоположное ему число?

202. Запись $-(-2)$ читают еще так: «число, противоположное минус двум» или «минус минус 2». Прочитайте запись числа и упростите ее по *образцу*:

а) $+(+2)=+2$; б) $-(-2)=+2$; в) $+(-2)$;
г) $+(-3)$; д) $-(+3)$; е) $-(-3)$;
ж) $-(+8)$; з) $+(-9)$; и) $-(-10)$.

203. Какие числа получатся, если перед числами -1, 3, 0, -6, 7 поставить:

а) знак «+»; б) знак «−»?

204. Какие из чисел -5, 6, 8, -10, 0, $+4$, -0 являются:

а) положительными; б) отрицательными?

205. Заполните пропуски, прочитайте полученную запись:

а) $|+1|=\ldots$; б) $|-6|=\ldots$; в) $|0|=\ldots$;
г) $|-3|=\ldots$; д) $|+7|=\ldots$; е) $|-8|=\ldots$.

206. Найдите модули чисел:

$+2$, -2, $+5$, -5, $+8$, -10, $+100$, $+0$, -3.

207. Найдите два различных числа, модули которых равны.

208. Для каждого из чисел: 2, 5, -3, 10, -17 укажите другое число, имеющее тот же модуль.

209.° Назовите два противоположных числа, имеющих модуль:

а) 2; б) 7; в) 9; г) 8.

210. Выполните действия:

а) $|+6|+|+7|$; б) $|-9|+|-8|$;
в) $|-6|+|+7|$; г) $|+8|+|+9|$.

211. Вычислите:

а) $|-9|-|-6|$; б) $|-5|-|+3|$;
в) $|-20|-|-6|$; г) $|-17|-|-8|$.

212. Вычислите сумму:

а) $|-7|+|+5|+|+8|+|-10|$;
б) $|+12|+|-2|+|+10|+|-20|$;
в) $|+18|+|-2|+|-5|+|-15|$;
г) $|-10|+|-2|+|-8|+|-5|$.

213. Назовите число, модуль которого равен:

а) $+5$; б) $+8$; в) $+1$; г) 0.

Сколько таких чисел можно назвать?

214. Если целое число обозначено буквой a, то противоположное ему число обозначают $-a$. Заполните таблицу.

a	5	-3			7		-9
$-a$			-2	6		-8	

215. Всегда ли модуль числа равен самому числу, т. е. $|a|=a$? Для каких чисел это равенство верно?

216. Всегда ли модуль числа равен противоположному числу, т. е. $|a|=-a$? Для каких чисел это верно?

217. Для какого числа выполняются оба условия:
$|a|=a$ и $|a|=-a$?

218. Сравните натуральные числа:
а) 425 и 452; б) 999 и 1000; в) 579 и 957;
г) 12 456 и 12 459; д) 1300 и 1297; е) 13 547 и 1354.

2.3. Сравнение целых чисел

Из двух целых чисел больше то, которое в ряду целых чисел стоит правее.

Если a больше b, то пишут $a > b$ или $b < a$.

Например, $1 > -1$, $-2 > -6$, $0 > -5$, $-6 < -3$, $-10 < -2$, так как в ряду целых чисел
$\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots$
1 правее (-1), (-2) правее (-6) и т. д.

Из правила сравнения целых чисел следует, что **любое положительное число больше 0, а любое отрицательное число меньше 0; любое положительное число больше любого отрицательного.**

Отрицательные числа удобно сравнивать с помощью их модулей. Так как в ряду целых чисел отрицательное число с бо́льшим модулем стоит левее, то **из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.**

Например, так как $|-2| < |-6|$, то $-2 > -6$.

Если числа a и b не равны друг другу, то пишут: $a \neq b$.

Например, $5 \neq 3$, $-2 \neq 0$, $-7 \neq +7$.

219.°Как сравнивают целые числа?

220.°Какие числа:

а) больше нуля; б) меньше нуля?

221.°Какое число больше: положительное или отрицательное?

222.°Сформулируйте правило сравнения:

а) целого числа с нулем;
б) положительного числа с отрицательным;
в) отрицательного числа с отрицательным.

223.°Существует ли:

а) наибольшее натуральное число;
б) наименьшее натуральное число;
в) наибольшее отрицательное целое число;
г) наименьшее отрицательное целое число;
д) наибольшее целое число;
е) наименьшее целое число?

Сравните числа (**224 – 226**):

224. а) 5 и 0; б) -5 и 0; в) 7 и 0; г) -7 и 0; д) 8 и -7; е) -3 и 100.

225. а) -9 и -6; б) -3 и -20; в) -7 и -15; г) -25 и -1; д) -20 и 0; е) 0 и -40; ж) -8 и 13; з) 128 и -300; и) -5 и -6.

226. а) 728 и 800; б) -296 и 1; в) -999 и 2; г) 0 и -500; д) 725 и 0; е) -600 и -5; ж) -856 и -100; з) -51 и -510; и) 326 и 32.

227. Запишите числа в порядке возрастания:

а) 400, -400, 0, 236, -528; б) 752, 0, -35, -257, 432.

228. Запишите числа в порядке убывания:

а) -250, 367, 0, -8, 12, -400;
б) -790, 790, 0, -9, -12, 425.

229. Найдите разность:

а) $|+5|-|-5|$; б) $|-5|-|+5|$;
в) $|+3|-|-3|$; г) $|-3|-|+3|$.

230. Верно ли, что $|-a|=|a|$?

231. Маша по ошибке считает, что $(-a)$ — это запись отрицательного числа. Назовите такое число a, чтобы число $(-a)$ было:

а) положительным числом;
б) отрицательным числом;
в) числом нуль.

232.*Для каких чисел верно утверждение: если $a > b$, то $|a| > |b|$? Приведите примеры.

233.*Для каких чисел верно утверждение: если $a > b$, то $|a| < |b|$? Приведите примеры.

234.*Может ли быть так, чтобы $a \neq b$, но $|a| = |b|$? Приведите примеры. Как называют такие числа a и b?

2.4. Сложение целых чисел

Сумма целых чисел a и b ($b \neq 0$) есть целое число c, отстоящее в ряду целых чисел от a на $|b|$ чисел **вправо**, если $b > 0$, и **влево**, если $b < 0$.

При этом числа a и b называют **слагаемыми** и пишут:

$$c = a + b.$$

Примечание. При $a > 0$ и $b > 0$ этим определением мы уже пользовались, когда определяли сложение натуральных чисел.

Пример 1. Определим сумму $(+3)+(+8)$.

Решение. Так как $+8 > 0$ и $|+8| = 8$, то от числа $+3$ в ряду целых чисел отсчитаем **вправо** 8 чисел:

$$\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10, +11, \ldots$$

$$+8$$

Таким образом, $(+3)+(+8) = +11$.

Пример 2. Определим сумму $(-3)+(-8)$.

Решение. Так как $-8 < 0$ и $|-8| = 8$, то от числа -3 в ряду целых чисел отсчитаем **влево** 8 чисел:

$$\ldots, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, \ldots$$

$$-8$$

Таким образом, $(-3)+(-8) = -11$.

Рассмотренные примеры подтверждают правило: **чтобы сложить два числа одинаковых знаков, надо сложить их модули и поставить перед суммой знак слагаемых.**

Еще раз подчеркнем, что **сумма положительных чисел есть число положительное, а сумма отрицательных чисел есть число отрицательное.**

На основании этого правила имеем:

$$(+7)+(+9)=+(7+9)=+16=16,$$
$$(-2)+(-3)=-(2+3)=-5.$$

Пример 3. Определим сумму $(-3)+(+8)$.

Решение. Так как $+8>0$ и $|+8|=8$, то от числа -3 в ряду целых чисел отсчитаем **вправо** 8 чисел:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, \ldots$$

$$+8$$

Таким образом, $(-3)+(+8)=+5$.

Заметим, что модуль положительного слагаемого больше модуля отрицательного слагаемого и сумма положительное число, равное $|+8|-|-3|$.

Пример 4. Определим сумму $(+3)+(-8)$.

Решение. Так как $-8<0$ и $|-8|=8$, то от числа $+3$ в ряду целых чисел отсчитаем **влево** 8 чисел:

$$\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

$$-8$$

Таким образом, $(+3)+(-8)=-5$.

Здесь модуль отрицательного слагаемого больше модуля положительного слагаемого и сумма отрицательное число, равное $-(|-8|-|+3|)$.

Рассмотренные примеры подтверждают правило: **чтобы сложить два числа разных знаков и с разными модулями, надо из большего модуля вычесть меньший и перед разностью поставить знак слагаемого с большим модулем.**

На основании этого правила имеем:

$(+17)+(-20)=-(20-17)=-3$, так как $|-20|>|+17|$;
$(-2)+(+1)=-(2-1)=-1$, так как $|-2|>|+1|$.

Пример 5. Определим сумму $(+5)+(-5)$.

Решение. Так как $-5<0$ и $|-5|=5$, то от числа $(+5)$ в ряду целых чисел отсчитаем **влево** 5 чисел, получим число 0:

$$\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ +6,\ \ldots$$

$$-5$$

Таким образом, $(+5)+(-5)=0$.

Этот пример подтверждает правило: **сумма противоположных чисел равна нулю.**

$$a+(-a)=0.$$

На основании этого правила имеем:

$$(+3)+(-3)=0,\quad (-7)+(+7)=0.$$

Для любого целого числа a:

$$a+0=a,\ 0+a=a.$$

Например, $0+(-3)=-3$; $(+5)+0=+5$; $0+0=0$.

---

235. С помощью ряда целых чисел определите сумму:

а) $(+3)+(+2)$; б) $(+3)+(-2)$;
в) $(-3)+(+2)$; г) $(-3)+(-2)$.

236.° Как сложить два числа:

а) с одинаковыми знаками; б) с разными знаками?

237.° Чему равна сумма противоположных чисел?

238.° Чему равна сумма целого числа и нуля?

239. Используя правило сложения, вычислите:

а) $\mathbf{+7+(+9)=+(7+9)=\ldots}$;
б) $\mathbf{-4+(-6)=-(6+4)=\ldots}$;
в) $-5+(-6)$; г) $-5+(-9)$;
д) $-6+(-1)$; е) $-1+(-6)$.

Вычислите **(240—241)**:

240.° а) $-1+(-2)$; б) $-2+(-1)$; в) $-2+(-4)$;
г) $-5+(-1)$; д) $-3+(-8)$; е) $-4+(-11)$.

241. а) $-9+(-2)$; б) $-7+(-3)$; в) $-13+(-8)$;
г) $+12+(+23)$; д) $-25+(-7)$; е) $+18+(+42)$.

242. Используя правило сложения, вычислите:

а) $+7+(-6)=+(7-6)=+1$, **так как** $|7|>|-6|$;
б) $-18+(+12)=-(18-12)=-6$, **так как** $|-18|>|12|$;

в) $-8+(+9)$; г) $+8+(-9)$; д) $+12+(-15)$;
е) $-13+(+18)$; ж) $-2+(+18)$; з) $+25+(-32)$.

243.° Найдите сумму:

а) $-1+(+2)$; б) $+5+(-2)$; в) $-4+(+1)$;
г) $-8+(+2)$; д) $+7+(-9)$; е) $-10+(+4)$.

З а м е ч а н и е. Для упрощения записи суммы у положительных слагаемых обычно опускают знак «+» и скобки. Например, вместо $+3+(+8)$ пишут $3+8$, т. е.

$$+3+(+8)=3+8.$$

Аналогично: $-5+(+9)=-5+9$.

244. Упростите запись суммы:

а) $-5+(+7)=-5+7$; б) $-6+(+13)$;
в) $-8+(+9)$; г) $-9+(+7)$;
д) $+3+(+7)$; е) $+8+(-13)$;
ж) $+9+(-17)$; з) $+13+(+24)$.

245.° Назовите знак каждого слагаемого:

а) $-5+8$; б) $5+7$;
в) $-13+(-9)$; г) $-91+26$;
д) $-95+(-13)$; е) $-56+(-102)$;
ж) $5+(-13)$; з) $92+(-100)$.

Вычислите по *образцу* **(246—250)**:

$$-755+(-983)=-(755+983)=-1738 \quad \left|\ \begin{array}{r} +\,755 \\ 983 \\ \hline 1738 \end{array}\right.$$

246. а) $-102+(-98)$; б) $-33+(-167)$;
в) $-128+(-12)$; г) $688+957$;
д) $-172+(-118)$; е) $694+738$.

247. а) $-354+(-293)$; б) $-293+(-354)$;
в) $784+951$; г) $-728+(-256)$;
д) $487+954$; е) $(-259)+(-728)$.

248. а) $-7825+(-3517)$; б) $7903+484$;
в) $-35+(-8094)$; г) $-1113+(-4570)$.

249. а) $359+(-483)$; б) $-703+117$;
в) $-14+864$; г) $151+(-87)$;
д) $17+(-256)$; е) $476+(-253)$.

250. а) $-170+(-250)$; б) $-350+480$;
в) $7805+(-454)$; г) $1306+(-2514)$;
д) $-8576+(-1720)$; е) $-6060+3903$.

251. Вычислите по *образцу*:
а) $-5+(-3)+2=-(5+3)+2=-8+2=-6$;
б) $3+(-7)+(-8)+6=-4+(-8)+6=-12+6=-6$;
в) $-8+3+(-1)$; г) $-7+(-2)+(-10)$;
д) $8+(-9)+(-7)$; е) $-3+(-4)+(-5)+(-6)$;
ж) $-4+8+(-9)+3$; з) $8+(-10)+(-12)+3$.

252. Вычислите, применяя законы сложения:
а) $5+798+35$; б) $(723+59)+17$;
в) $357+48+13$; г) $488+(596+12)$.

2.5. Законы сложения целых чисел

Для любых целых чисел a и b выполняется **переместительный закон сложения: сумма двух целых чисел не зависит от порядка слагаемых:**

$$\boxed{a+b=b+a.}$$

Переместительный закон сложения для целых чисел следует из правил сложения целых чисел и справедливости переместительного закона сложения для натуральных чисел.

Например, суммы $-3+(-5)$ и $-5+(-3)$ отрицательные, чтобы найти модуль каждой из этих сумм, надо сложить модули слагаемых: $3+5$ и $5+3$, а на основании переместительного закона для натуральных чисел эти суммы равны. Следовательно,

$$-3+(-5)=-5+(-3).$$

Для любых целых чисел a, b и c справедлив **сочетательный закон сложения: чтобы к сумме двух целых чисел прибавить третье целое число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего — результат будет тот же:**

$$\boxed{(a+b)+c=a+(b+c).}$$

Справедливость этого закона следует из правил сложения целых чисел и справедливости сочетательного закона сложения для натуральных чисел.

Например,

$$(2+5)+(-3)=2+(5+(-3)).$$

В справедливости этих законов можно убедиться и с помощью ряда целых чисел.

С помощью переместительного и сочетательного законов сложения можно показать, что сумму нескольких целых слагаемых:

1) можно записывать без скобок,
2) любые слагаемые в ней можно менять местами,
3) некоторые слагаемые в ней можно заключать в скобки.

Например, верно равенство

$$a+b+c+k=(c+k)+(a+b).$$

Докажем это:

$$\begin{gathered} a+b+c+k=(a+b+c)+k=k+(a+b+c)= \\ =k+((a+b)+c)=k+(c+(a+b))=(k+c)+(a+b)= \\ =(c+k)+(a+b). \end{gathered}$$

Приведенные выше правила применяются для упрощения вычислений. Например,

$$\begin{gathered} 3+(-6)+(-4)+6+(-5)+4= \\ =(3+(-5))+((-6)+6)+(4+(-4))=-2+0+0=-2. \end{gathered}$$

253. Запишите для целых чисел a и b переместительный закон сложения, сформулируйте его.

254. Запишите для целых чисел a, b и c сочетательный закон сложения, сформулируйте его.

255. Выполните сложение и сравните результаты:

а) $-15+(-23)$ и $-23+(-15)$;
б) $48+(-36)$ и $(-36)+48$;
в) $-25+16$ и $16+(-25)$;
г) $-8+(18+(-7))$ и $(-8+18)+(-7)$;
д) $13+(-6+(-7))$ и $(13+(-6))+(-7)$.

256. Примените переместительный закон сложения:

а) $-45+(-10)=-10+(-45)$;
б) $8+(-35)$;
в) $-13+49$;
г) $-17+(-23)$.

257. Примените сочетательный закон сложения:

а) $42+(-3+7)=(42+(-3))+7$; б) $56+(-16+7)$;
в) $(-52+17)+(-9)$; г) $-13+(-8+25)$.

258. Заполните пропуски:

а) $3+5+(-8)=3+(-8)+\ldots$;
б) $6+\ldots+(-1)=(-1)+(6+(-2))$;
в) $-4+\ldots+(-7)=2+(\ldots+(-4))$;
г) $-1+\ldots+\ldots=(3+(-7))+\ldots$.

259. Вычислите, применяя законы сложения:

а) $49+((-49)+22)$; б) $-12+(12+(-29))$;
в) $(47+(-58))+(-47)$; г) $(124+59)+(-24)$;
д) $-56+17+(-27)$; е) $49+(-72)+62$;
ж) $36+(-51)+14$; з) $-48+(-19)+28$.

260. Вычислите по *образцу*:

а) $\mathbf{-1+2+(-3)+5=(2+5)+((-1)+(-3))=7+(-4)=\ldots}$;

б) $-2+(-4)+2+5+(-3)+1+(-3)$;
в) $20+(-8)+2+5+(-10)+(-1)+(-3)$;
г) $-4+(-1)+3+(-2)+(-3)+9$;
д) $-17+17+(-8)+6+(-2)+8$;
е) $4+(-6)+(-1)+(-4)+6+(-3)+1$.

Вычислите наиболее простым способом **(261—262)**:

261.* а) $(-1)+(-2)+(-3)+(-4)+4+3+2+1$;
б) $(-7)+(-5)+(-3)+(-1)+1+3+5+7$;
в) $(-10)+(-9)+(-8)+(-7)+\ldots+7+8+9+10$;
г) $(-100)+(-99)+(-98)+\ldots+98+99+100$.

262.* а) $1+(-2)+3+(-4)+\ldots+9+(-10)$;
б) $1+(-2)+3+(-4)+\ldots+99+(-100)$;
в) $(-1)+2+(-3)+4+\ldots+(-9)+10$;
г) $(-1)+2+(-3)+4+\ldots+(-99)+100$.

263. Даны числа: 9, -11, 10. Убедитесь, что сумма любых двух соседних чисел отрицательна, а сумма всех трех чисел положительна. Напишите в строчку три числа так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма трех чисел была отрицательна.

264. Убедитесь, что для чисел 5, -4, -2, 5, -4, -2, 5 сумма любых трех соседних чисел отрицательна, а сумма всех чисел положительна. Напишите в строчку семь чисел так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна.

265. Запишите и вычислите:

а) сумму 17 и -23;
б) сумму -20 и 4;
в) сумму числа, противоположного -13, и числа -225;
г) сумму числа -26 и числа, противоположного -12.

266. К числу a прибавьте число, противоположное b:

а) $a=12$, $b=-7$;
б) $a=13$, $b=16$;
в) $a=15$, $b=7$;
г) $a=24$, $b=13$;
д) $a=-14$, $b=7$;
е) $a=-29$, $b=40$;
ж) $a=-24$, $b=-13$;
з) $a=-16$, $b=-18$.

267. Перепишите, заменив x числом так, чтобы получилось верное равенство:

а) $(-6)+(-7)=x$;
б) $-8+x=-10$;
в) $-8+x=-3$;
г) $-8+x=0$;
д) $-8+x=-8$;
е) $x+5=10$;
ж) $x+5=0$;
з) $x+5=-3$;
и) $x+5=-8$;
к) $x+(-5)=5$.

2.6. Разность целых чисел

Разностью целых чисел a и b называют такое число $a-b$, сумма которого с b равна a:

$$(a-b)+b=a.$$

Покажем, что **разность $a-b$ есть сумма числа a и числа, противоположного числу b:**

$$a-b=a+(-b).$$

Чтобы доказать это, надо найти сумму чисел $a+(-b)$ и b. Применяя сочетательный закон сложения, получаем:

$$(a+(-b))+b=a+((-b)+b)=a+0=a.$$

Таким образом, **чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому:**

$$a-b=a+(-b).$$

Например, $-3-(-5)=-3+5=2$,
$2-7=2+(-7)=-5$,
$0-5=0+(-5)=-5$,
$-7-2=-7+(-2)=-9$,
$0-0=0+(-0)=0+0=0$.

Отметим, что в множестве натуральных чисел нельзя было из меньшего числа вычесть большее. В множестве целых чисел это возможно. Например,

$$2-7=2+(-7)=-(7-2)=-5.$$

268.°Что называют разностью чисел a и b?

269.°Какой сумме равна разность $a - b$?

270.°Применяя определение разности, проверьте верно ли равенство:

а) $+28-(+9)=14$; б) $+7-(+12)=-5$;
в) $-2-(-3)=1$; г) $-12-(+1)=-11$.

271.°Назовите уменьшаемое, вычитаемое и число, противоположное вычитаемому:

а) $+45-(+63)$; б) $+27-(-52)$; в) $-4-(+19)$;
г) $-41-(+95)$; д) $-59-(-11)$; е) $+32-(-16)$.

272. Замените разность чисел суммой уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому:

а) $\mathbf{+25-(-6)=+25+(+6)}$;
б) $\mathbf{(-9)-(+45)=(-9)+(-45)}$;
в) $+47-(+58)$; г) $(-36)-(+12)$;
д) $+13-(-27)$; е) $(-45)-(-59)$.

З а м е ч а н и е. Для упрощения записи разности у положительных уменьшаемого и вычитаемого опускают скобки и знак «+».

Например, $+9-(+3)=9-3$,
$-9-(+3)=-9-3$,
$+9-(-3)=9-(-3)$.

273. Замените разность суммой:

а) $\mathbf{-5-(+2)=-5+(-2)}$; **б)** $\mathbf{12-(-7)=12+7}$;
в) $-6-(-3)$; г) $9-(+13)$;
д) $17-(+24)$; е) $-13-(-19)$;
ж) $13-(-27)$; з) $-15-(+10)$.

Вычислите по *образцу* **(274—275)**:

274. а) $\mathbf{9-10=9+(-10)=-(10-9)=-1}$;

б) $6-8$; в) $4-10$; г) $5-20$;
д) $6-11$; е) $8-13$; ж) $8-24$;
з) $24-48$ и) $35-47$; к) $64-71$;
л) $91-119$; м) $62-89$; н) $67-105$.

275. а) $\mathbf{-3-7=-3+(-7)=-(3+7)=-10}$;

б) $-4-8$; в) $-5-2$; г) $-8-14$;
д) $-10-10$; е) $-20-60$; ж) $-11-23$;
з) $-28-17$; и) $-5-91$; к) $-92-18$;
л) $-240-14$; м) $-50-105$; н) $-200-400$.

276.° Вычислите:

а) $-5-2$; б) $-1-3$; в) $-15-12$;
г) $-6-14$; д) $-100-200$; е) $-30-600$.

Вычислите по *образцу* **(277—278)**:

277. а) $\mathbf{-1-(-4)=-1+4=3}$; б) $-2-(-2)$;
в) $-3-(-4)$; г) $-5-(-2)$;
д) $-8-(-6)$; е) $10-(-5)$.

278. а) $\mathbf{-794-(-581)=-794+581=}$
$\mathbf{=-(794-581)=-213}$;

$$\begin{array}{r} -\,794 \\ \underline{581} \\ 213 \end{array}$$

б) $-824-(-642)$; в) $-498-(-402)$;
г) $-864-(-164)$; д) $-1240-(-200)$;
е) $-1000-(-2500)$; ж) $80-(-1800)$.

279. Запишите сумму чисел без скобок по *образцу*:

а) $\mathbf{(-25)+(-42)=-25-42}$;

б) $(-45)+(-12)$; в) $17+(-3)$;
г) $(-28)+(-49)$; д) $13+(-45)$.

280. Вычислите сумму чисел:

а) $49+(-23)$; б) $56+(-63)$;
в) $(-15)+(-40)$; г) $(-66)+(-28)$.

281. Вычислите:

а) $(-5+8)+9$; б) $(14-18)-7$;
в) $96-(-72+13)$; г) $-75-(-75+8)$;
д) $79+(48-79)$; е) $14-(15-94)$.

282. Если a и b — натуральные числа, то можно ли утверждать, что их сумма и разность также являются натуральными числами?

283. Если a и b — целые числа, то можно ли утверждать, что их сумма и разность также являются целыми числами?

Вычислите значение числового выражения наиболее простым способом **(284—285)**:

284. а) $-1-2-3-4-5-6+5+4+3+2+1$;
б) $-8-7-5-3-1+0+1+3+5+7+8+9$;

285. а) $-9-8-7-\ldots-1+0+1+\ldots+7+8+9+10$;
б) $-101-100-99-98-\ldots+98+99+100$;
в) $1-2+3-4+\ldots+9-10+11$;
г) $1-2+3-4+\ldots+99-100$;
д) $-1+2-3+4+\ldots-9+10-11+12$;
е) $-1+2-3+4+\ldots-99+100$.

Для какого числа x верно равенство **(286—287)**:

286. а) $x+13=7$, $x=7-13$, $x=-6$; $\quad 7-13=-(13-7)=-6$

б) $x+8=-7$;
в) $-7+x=9$;
г) $x-(-8)=13$;
д) $-15-x=7$.

287. а) $-498-x=-175$, $x=-498-(-175)$, $x=-498+175$, $x=-323$; $\quad$ $\begin{array}{r} -\,498 \\ \underline{175} \\ 323 \end{array}$

б) $79+x=-356$;
в) $x-57=-493$;
г) $167-x=39$;
д) $-542+x=542$.

288. Найдите сумму нескольких одинаковых слагаемых:
а) $\underbrace{(-5)+(-5)+\ldots+(-5)}_{6}$;
б) $\underbrace{(-7)+(-7)+\ldots+(-7)}_{8}$;
в) $\underbrace{(-10)+(-10)+\ldots+(-10)}_{9}$.

289. Вычислите:

а) $123 \cdot 9$; б) $357 \cdot 8$; в) $256 \cdot 32$;
г) $457 \cdot 48$; д) $521 \cdot 32$; е) $439 \cdot 528$.

290. Вычислите удобным способом:

а) $24 \cdot 2 \cdot 5$; б) $47 \cdot 4 \cdot 25$; в) $53 \cdot 8 \cdot 125$;
г) $2 \cdot 37 \cdot 5$; д) $25 \cdot 57 \cdot 4$; е) $8 \cdot 39 \cdot 125$.

291. Вычислите:

а) 12^2; б) 9^3; в) 4^4; г) 2^5.

2.7. Произведение целых чисел

Произведением двух целых не равных нулю чисел называют произведение их модулей, взятое со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «−», если они разных знаков.

Например,
$$6 \cdot 8 = (+6) \cdot (+8) = +(6 \cdot 8) = +48,$$
$$(-5) \cdot (-10) = +(5 \cdot 10) = +50,$$
$$7 \cdot (-3) = (+7) \cdot (-3) = -(7 \cdot 3) = -21,$$
$$(-5) \cdot 10 = (-5) \cdot (+10) = -(5 \cdot 10) = -50.$$

Произведение любого целого числа a и нуля равно нулю:
$$a \cdot 0 = 0,$$
$$0 \cdot a = 0.$$

Например,
$$(+7) \cdot 0 = 0 \cdot (+7) = 0,$$
$$(-10) \cdot 0 = 0 \cdot (-10) = 0,$$
$$0 \cdot 0 = 0.$$

Переместительный и сочетательный законы умножения верны для любых целых чисел:

$$\boxed{a \cdot b = b \cdot a,} \qquad \boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).}$$

Из определения произведения целых чисел и выполнимости переместительного и сочетательного законов умножения для неотрицательных целых чисел следует, что эти законы выполняются и для целых чисел.

Например, $(-5) \cdot (-6) = +(5 \cdot 6) = +(6 \cdot 5) = (-6) \cdot (-5)$.
$$((+5) \cdot (-3)) \cdot (-4) = (-(5 \cdot 3)) \cdot (-4) = +((5 \cdot 3) \cdot 4) =$$
$$= +(5 \cdot (3 \cdot 4)) = (+5) \cdot ((-3) \cdot (-4)).$$

Отметим, что при умножении любого целого числа a на (-1), меняется только его знак, т. е. получается противоположное ему число:

$$(-1)\cdot a=-a.$$

Например, $(-1)\cdot(+5)=-5$, $(-1)\cdot(-5)=+5$.

Для целых чисел степень числа с натуральным показателем определяется так же, как и для натуральных чисел.

Степенью числа a с натуральным показателем n $(n>1)$ называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{множителей}},\ (n>1)$$

Первая степень любого числа равна самому числу:

$$a^1=a.$$

Например, $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$,
$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+(3\cdot3)=9$,
$(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-(3\cdot3\cdot3)=-27$,
$(-7)^1=-7$.

292.° а) Что называют произведением двух целых не равных нулю чисел?
б) Чему равно произведение любого целого числа и нуля?

293.° Справедливы ли переместительный и сочетательный законы умножения для целых чисел? Сформулируйте их.

294.° Что получится, если число умножить на (-1)?

295.° Определите знак произведения. Выполните умножение:

а) $(-2)\cdot(+3)$; б) $(+8)\cdot(-3)$;
в) $(+6)\cdot(-5)$; г) $(-7)\cdot(+4)$;
д) $(-2)\cdot(-1)$; е) $(-8)\cdot(-8)$;
ж) $(-7)\cdot(-9)$; з) $(+9)\cdot(+8)$;
и) $(+10)\cdot(+77)$; к) $(-36)\cdot(+3)$.

296. Выполните умножение:

а) $0\cdot(-5)$; б) $(+3)\cdot0$;
в) $(-6)\cdot0$; г) $(+49)\cdot0$;
д) $0\cdot(-54)$; е) $0\cdot(+48)$.

297. Выполните умножение по *образцу*:

$$(-56)\cdot(-13)=+(56\cdot13)=\ldots \qquad \begin{array}{r} \times\, 56 \\ \underline{13} \\ \ldots \end{array}$$

а) $(+45)\cdot(-13)$; б) $(+230)\cdot(-48)$; в) $(-505)\cdot(-8)$;
г) $(358)\cdot(-5)$; д) $(-24)\cdot(-35)$; е) $(-125)\cdot(-160)$;
ж) $(-405)\cdot(+28)$; з) $(-72)\cdot(+101)$; и) $(+15)\cdot(+16)$.

Замечание. Для упрощения записи у положительных множителей знак «+» и скобки можно опускать, но этот знак надо учитывать, определяя знак произведения.
Например, $(-3)\cdot(+17)=(-3)\cdot17=-51$,
$(+2)\cdot(-48)=2\cdot(-48)=-96$.

298. Упростите запись произведения в предыдущем задании.

299. Определите знак произведения:
а) $(-1)\cdot(-1)$;
б) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$;
в) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$;
г) $(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$.

300. Определите знак произведения и вычислите это произведение:
а) $(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot4$; б) $(-2)\cdot3\cdot(-4)\cdot(-6)$.

301. Сколько отрицательных множителей должно содержать произведение, чтобы оно было:
а) положительным; б) отрицательным?

302. Используя законы умножения, вычислите по *образцу*:

$$(-16)\cdot(-7)\cdot(-25)=-(16\cdot25\cdot7)=-(4\cdot4\cdot25\cdot7)=$$
$$=-(100\cdot4\cdot7)=-(100\cdot28)=-2800.$$

а) $2\cdot(-3)\cdot(-10)$; б) $(-4)\cdot17\cdot25$; в) $8\cdot(-25)\cdot(-3)$;
г) $(-6)\cdot(-5)\cdot(-7)$; д) $8\cdot(-17)\cdot125$; е) $(-3)\cdot16\cdot(-125)$.

303.° Верно ли, что:
а) если $a>0$ и $b>0$, то $a\cdot b>0$;
б) если $a<0$ и $b<0$, то $a\cdot b<0$;
в) если $a\cdot b>0$, то $a>0$ и $b>0$;
г) если $a\cdot b<0$, то $a>0$ и $b<0$?

304. Произведение трех чисел положительно. Можно ли утверждать, что все три числа положительные? Приведите примеры.

305.* Произведение двух чисел равно нулю. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы один нуль.

306. Вычислите:

а) $(-1)^2$; б) $(-1)^3$; в) $(-4)^4$; г) $(-1)^5$;
д) $(-3)^2$; е) $(-2)^2$; ж) $(-4)^2$; з) $(-5)^2$;
и) $(-2)^3$; к) $(-3)^3$; л) $(-4)^3$; м) $(-5)^3$.

307. Определите знак степени:

а) $(-1)^2$; б) $(-1)^5$; в) $(-1)^8$; г) $(-1)^{11}$;
д) $(-1)^8$; е) $(-1)^9$; ж) $(-1)^{10}$; з) $(-24)^5$;
и) $(-33)^{50}$; к) $(-103)^{46}$; л) $(-12)^{100}$; м) $(-41)^{33}$.

308. Вычислите:

а) $(-1)^{11}-(-1)^{11}$; б) $(-2)^5-(-3)^3$;
в) $(-1)^4-(-1)^2-(-1)^2$; г) $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4$.

309. Убедитесь, что верно равенство:
$72-4\cdot(-3)=72+(-4)\cdot(-3)$.

310. Вычислите:

а) $48-12\cdot(-5)$; б) $69-(-12)\cdot(-5)$;
в) $129-15\cdot9$; г) $456-45\cdot(-6)$;
д) $158-45\cdot7$; е) $258-13\cdot(-7)$.

311. Какое число больше:

а) $3\cdot3\cdot3$ или $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)$;
б) $-5\cdot5$ или $(-5)\cdot(-5)$;
в) $(-7)\cdot(-7)$ или $7\cdot(-7)$;
г) $-2\cdot2\cdot2\cdot2$ или $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$?

312. Запишите выражение разными способами по *образцу*:

а) $(-8)^3=(-8)\cdot(-8)\cdot(-8)=-(8\cdot8\cdot8)=-(8)^3=-8^3$;
б) -6^3; в) $(-5)^4$; г) -5^4; д) -7^2; е) $(-18)^2$.

313. Какое число больше:

а) -2^2 или $(-2)^2$; б) -3^2 или -2^3;
в) $(-3)^2$ или $(-2)^3$; г) $(-4)^3$ или -3^4?

314. Запишите:

а) квадрат числа -2; б) произведение -4 и 7;
в) сумму чисел -7 и 7; г) куб числа -10;
д) четвертую степень -5; е) разность чисел -4 и -12.

315. Вычислите, предварительно указав порядок действий:

а) $3\cdot(-2)^2$; б) $-4\cdot(-3)^3$; в) $-(-3)^4$;
г) $-(-2)^3$; д) $-(-5)^2$; е) $-4\cdot(-3)^2$.

316. Найдите число одинаковых слагаемых:

а) $(-2)+(-2)+...+(-2)=-12$;
б) $(-8)+(-8)+...+(-8)=-80$;
в) $(-4)+(-4)+...+(-4)=-20$.

317. Какие одинаковые слагаемые сложили:

а) $(...)+(...)+(...)+(...)+(...)=-25$;
б) $(...)+(...)+(...)+(...)=-40$;
в) $(...)+(...)+(...)+(...)+(...)+(...)=-36$?

318. Выполните действия:

а) $234:6$; б) $744:8$; в) $1794:23$;
г) $2997:37$; д) $9268:331$; е) $21\ 333:547$.

319. Вычислите:

а) $576 \cdot 23-766 \cdot 35$; б) $849 \cdot 18-783 \cdot 28$;
в) $136 \cdot 13-(8416+1234)$; г) $4736:4-1245 \cdot 5$.

2.8. Частное целых чисел

Пусть a и b целые числа, не равные нулю, такие, что $|a|$ делится нацело на $|b|$, тогда **частное чисел a и b равно частному их модулей, взятому со знаком «+», если эти числа одинаковых знаков, и со знаком «−», если они разных знаков.**

Например, $(-20):(-5)=+(20:5)=4$,
$40:5=8$,
$8:(-2)=-(8:2)=-4$,
$(-12):3=-(12:3)=-4$.

Частное от деления нуля на любое целое, не равное нулю, число a равно нулю:

$$0:a=0.$$

Например, $0:(-5)=0$, $0:3=0$.

Делить на 0 нельзя.

Замечание. Так же как и для натуральных чисел, деление нацело целых отличных от нуля чисел не всегда возможно. В главе III будут рассмотрены новые — рациональные числа и тогда любое целое число можно будет разделить на любое отличное от нуля целое число.

320.° Чему равно частное от деления отличных от нуля целого числа a на целое число b, если $|a|$ делится нацело на $|b|$?

321.° Чему равно частное от деления нуля на любое целое, не равное нулю число?

322.° Можно ли делить на нуль?

323.° Определите знак числа x:

а) $x\cdot(-8)=400$; б) $(-10)\cdot x=-420$;
в) $x\cdot15=-60$; г) $12\cdot x=144$.

324.° Определите знак частного:

а) $400:(-8)$; б) $(-420):(-10)$;
в) $(-60):15$; г) $144:12$.

Выполните деление **(325—326)**:

325. **а)** $\mathbf{(+60):(-10)=-(60:10)=-6}$;

б) $(-20):5$; в) $(-50):10$;
г) $(-80):(-20)$; д) $(-100):(-25)$;
е) $30:(-15)$; ж) $64:(-8)$.

326. а) $200:(-40)$; б) $(-500):100$;
в) $720:(-90)$; г) $(-810):(-9)$;
д) $(-560):(-70)$; е) $(-480):60$.

327. Выполните деление по *образцу*:

$\mathbf{7227:(-9)=-(7227:9)=-\ldots}$

$$\begin{array}{l|l} 7227 & \mathbf{9} \\ \hline & \ldots \end{array}$$

а) $(-711):9$; б) $1332:(-3)$;
в) $(-2316):(-12)$; г) $(-1302):42$;
д) $(-2205):(-7)$; е) $3208:(-8)$.

328. Найдите число x, для которого верно равенство:

а) $x\cdot(-12)=36$; б) $(-13)\cdot x=-143$;
в) $x\cdot(-15)=465$; г) $14\cdot x=-294$;
д) $x:8=7$; е) $x:6=-42$;
ж) $x:(-7)=-9$; з) $x:(-11)=-352$;
и) $48:x=6$; к) $56:x=-8$;
л) $(-64):x=8$; м) $(-68):x=-4$.

329. Выполните действия по *образцу*:

а) $13 \cdot 15 - 28 \cdot 25 = -505$;

$$
1)\ \begin{array}{r} \times\ 13 \\ \underline{15} \\ +\ 65 \\ \underline{13} \\ 195 \end{array}
\qquad
2)\ \begin{array}{r} \times\ 28 \\ \underline{25} \\ +\ 140 \\ \underline{56} \\ 700 \end{array}
\qquad
3)\ \begin{array}{r} -\ 700 \\ \underline{195} \\ 505 \end{array}
$$

б) $679 \cdot 13 - 846 \cdot 15$;
в) $849 \cdot 18 - 684 : 19$;
г) $4074 : 42 - 12 \cdot 59$;
д) $3612 : 12 - 8445 : 15$.

330. Вычислите:

а) $43\,212 : 78 - 407 \cdot 720 + 350 \cdot 509$;
б) $164 \cdot 756 + 148\,916 - 564 \cdot 702 + 48\,762 : 86$;
в) $(24\,968 + 11\,648) : (768 - 1564)$;
г) $37\,115 : 65 - 72\,675 : 85$.

331. Запишите произведение в виде суммы (разности):

а) $5 \cdot (38 + 17) = 5 \cdot 38 + 5 \cdot 17$;

б) $17 \cdot (31 + 16)$;
в) $(28 + 37) \cdot 56$;
г) $(72 + 98) \cdot 12$;
д) $(49 - 17) \cdot 12$;
е) $8 \cdot (57 - 38)$;
ж) $17 \cdot (28 + 31)$.

332. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $15 \cdot 12 + 15 \cdot 49 = 15 \cdot (12 + 49)$;

б) $57 \cdot 39 + 57 \cdot 64$;
в) $39 \cdot 12 + 28 \cdot 12$;
г) $73 \cdot 57 + 79 \cdot 57$;
д) $13 \cdot 195 - 13 \cdot 41$;
е) $27 \cdot 48 - 19 \cdot 48$;
ж) $54 \cdot 88 - 54 \cdot 87$.

333. Вычислите удобным способом:

а) $350 \cdot 46 + 250 \cdot 46$;
б) $728 \cdot 49 - 528 \cdot 49$;
в) $52 \cdot 100 - 52 \cdot 99$;
г) $99 \cdot 48 + 1 \cdot 48$;
д) $4300 - 43 \cdot 99$;
е) $999 \cdot 156 + 156$;
ж) $128 \cdot 32 + 872 \cdot 32 - 1000 \cdot 31$;
з) $728 \cdot 359 - 628 \cdot 359 + 641 \cdot 1000$;
и) $999 \cdot 999 - 999 \cdot 989 - 9990$.

2.9. Распределительный закон

Для любых целых чисел a, b, c выполняется **распределительный закон:**

$$\boxed{(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c.}$$

Доказательство его сводится к распределительному закону для неотрицательных чисел. Докажем, например, равенство:

$$((-3)+(-2))\cdot(-7)=(-3)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-7).$$

Действительно: $((-3)+(-2))\cdot(-7)=(-(3+2))\cdot(-7)=$
$=(3+2)\cdot 7=3\cdot 7+2\cdot 7=(-3)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-7).$

Распределительный закон верен и для нескольких слагаемых. Например,

$$(3+5+(-7))\cdot(-2)=3\cdot(-2)+5\cdot(-2)+(-7)\cdot(-2).$$

Переход от суммы $a\cdot c+b\cdot c$ к произведению $(a+b)\cdot c$ называют **вынесением общего множителя за скобки.**

Пример 1. Вынесем общий множитель за скобки:

$$3\cdot 35+3\cdot(-65).$$

Решение. $3\cdot 35+3\cdot(-65)=3\cdot(35+(-65))=3\cdot(35-65).$

Пример 2. Вычислим: $(-49)\cdot(-96)+86\cdot(-49).$

Решение. Заметим, что каждое слагаемое суммы имеет множитель (-49). Вынесем его за скобки:

$$(-49)\cdot(-96)+86\cdot(-49)=$$
$$=(-49)\cdot((-96)+86)=(-49)\cdot(-10)=490.$$

Этот пример показывает, что вынесение общего множителя за скобки в некоторых случаях позволяет избежать громоздких вычислений.

---

334. Запишите распределительный закон для целых чисел a, b, c; сформулируйте его.

335.° Как называют переход от суммы $a\cdot c+b\cdot c$ к произведению $(a+b)\cdot c$?

336. Проверьте выполнение распределительного закона для чисел a, b, c:

а) $a=-5,\ b=3,\ c=-10;$ б) $a=-5,\ b=-3,\ c=6.$

337. Запишите произведение в виде суммы по *образцу*:

а) $(-5)\cdot(-12+16)=(-5)\cdot(-12)+(-5)\cdot16$;

б) $6\cdot(8+(-17))$;
в) $(-7)\cdot((-15)+(-12))$;
г) $16\cdot(8-17)$;
д) $(-17)\cdot(-15-12)$;
е) $(25+16)\cdot(-9)$;
ж) $(45-17)\cdot(-11)$;
з) $(-15-42)\cdot13$;
и) $(-28-37)\cdot(-3)$.

338. Верно ли применен распределительный закон:

а) $(-2)\cdot(5+7)=-10-14$;
б) $(7-8)\cdot(-3)=-21-24$;
в) $6\cdot((-4)+(-12))=-24-72$;
г) $(-7+5-8)\cdot(-2)=14-10+16$?

339. Вместо знака «□» поставьте знак «+» или «−» так, чтобы равенство было верным:

а) $3\cdot(2-7)=\square3\cdot2\ \square\ 3\cdot7$;
б) $(-5)\cdot(-6-7)=\square5\cdot6\ \square\ 5\cdot7$;
в) $(-2)\cdot(6+9)=\square2\cdot6\ \square\ 2\cdot9$;
г) $(-2)\cdot(6-9)=\square2\cdot6\ \square\ 2\cdot9$.

Упростите числовое выражение **(340—342):**

340. а) $(-8)\cdot(-7+5)-5\cdot(-8)$;
б) $3\cdot(-98+2)+3\cdot98$;
в) $(-8)\cdot(-47+125)-47\cdot8$;
г) $(-25)\cdot(45-100)+25\cdot45$;
д) $83\cdot(-98-1)+98\cdot83$;
е) $(-15)\cdot(-7+15)-7\cdot15$.

341. а) $(12-27)\cdot(-1)$;
б) $(-1)\cdot(35-88)$;
б) $(-1)\cdot(56-74)$;
г) $(-1)\cdot(-28-112)$.

342. а) $4\cdot(-25+76+24)$;
б) $(25-62-38)\cdot(-4)$;
в) $(7-125+13)\cdot(-8)$;
г) $8\cdot(-8+100-22+25)$.

343. Вынесите общий множитель за скобки по *образцу*:

а) $45\cdot13-45\cdot81=45\cdot(13-81)$;

б) $49\cdot57-49\cdot570$;
в) $58\cdot64-99\cdot64$;
г) $(-53)\cdot48-(-53)\cdot59$;
д) $(-45)\cdot12+95\cdot(-45)$;
е) $-53\cdot48-57\cdot48$;
ж) $-45\cdot13-45\cdot27$.

344. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «+»:

а) $\mathbf{4\cdot 52-4\cdot(-95)=4\cdot(52-(-95))=4\cdot(52+95)}$;

б) $-16\cdot 17-16\cdot 18$;

в) $49\cdot 19-19\cdot 91$;

г) $-88\cdot 35-77\cdot 35$;

д) $73\cdot 37-73\cdot 73$;

е) $-57\cdot 33+48\cdot 33$;

ж) $99\cdot 98+99\cdot 100$.

345. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «−»:

а) $\mathbf{4\cdot 52-4\cdot(-95)=(-4)\cdot(-52-95)}$;

б) $-16\cdot 17-16\cdot 18$;

в) $49\cdot 19-19\cdot 91$;

г) $-88\cdot 35-77\cdot 35$;

д) $73\cdot 37-73\cdot 73$;

е) $-57\cdot 33+48\cdot 33$;

ж) $99\cdot 98+99\cdot 100$.

346. Вычислите:

а) $59\cdot 64+59\cdot 36$;

б) $72\cdot 128-72\cdot 228$;

в) $63\cdot 356-556\cdot 63$;

г) $-99\cdot 12-99\cdot 88$;

д) $-67\cdot 85-67\cdot 115$;

е) $41\cdot 91-91\cdot 51$.

347.* Покажите, что:

а) $43\cdot 15-55\cdot 15+34\cdot 15$ делится на 22;

б) $12\cdot 17-16\cdot 17+13\cdot 17$ делится на 9;

в) $99\cdot 51-99\cdot 91+69\cdot 99$ делится на 29;

г) $63\cdot 23-32\cdot 63+22\cdot 63$ делится на 13.

348.* Вычислите:

а) $42\cdot 53-32\cdot 53-42\cdot 63+32\cdot 63$;

б) $79\cdot 45+79\cdot 55-89\cdot 45-89\cdot 55$;

в) $88\cdot 75-12\cdot 45+12\cdot 75-88\cdot 45$;

г) $392\cdot 23-492\cdot 23+392\cdot 77-492\cdot 77$.

2.10. Раскрытие скобок и заключение в скобки

Такое выражение, как $-3+6-1$, часто называют суммой, потому что его можно записать в виде суммы $(-3)+(+6)+(-1)$.

Мы знаем, что
$$+5=5,$$
$$+(-5)=-5,$$
$$+(3+5)=3+5,$$
$$+(5-2)=5-2,$$
$$+(-3+6-1)=-3+6-1.$$

Эти же результаты можно получить, используя равенство:
$$+a=(+1)\cdot a.$$

Например,

$$+(-3+6-1)=(+1)\cdot(-3+6-1)=$$
$$=(+1)\cdot(-3)+(+1)\cdot 6+(+1)\cdot(-1)=-3+6-1.$$

Таким образом, верно равенство:

$$+(-3+6-1)=-3+6-1.$$

Говорят, что в левой части этого равенства слагаемые **заключены в скобки**, а в правой — **скобки раскрыты.**

Если сумма заключена в скобки, перед которыми стоит знак «+», то при раскрытии скобок знаки слагаемых оставляют без изменения.

Например, $+(-7+3-4)=-7+3-4$.

Если сумма заключается в скобки, перед которыми стоит знак «+», то знаки слагаемых, заключаемых в скобки, оставляют без изменения.

Например, $-3+8-7=+(-3+8-7)$.

Напомним, что верно равенство:

$$-a=(-1)\cdot a.$$

Например, $-5=(-1)\cdot 5$, $-(-2)=(-1)\cdot(-2)=2$.

Используя распределительный закон и равенство $-a=(-1)\cdot a$, можно раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «−».

Например,

$-(2-5)=(-1)\cdot(2-5)=(-1)\cdot 2+(-1)\cdot(-5)=-2+5;$

$-(6-4)=(-1)\cdot(6-4)=(-1)\cdot 6-(-1)\cdot 4=-6+4.$

Если сумма заключена в скобки, перед которыми стоит знак «−», то при раскрытии скобок знаки слагаемых меняют на противоположные.

Например, $-(-8+3-11)=+8-3+11$.

Если сумма заключается в скобки, перед которыми стоит знак «−», то знаки слагаемых, заключаемых в скобки, меняют на противоположные.

Например, $9-17+18-4=-(-9+17-18+4)$.

349.° Сформулируйте правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак:

а) «+»; б) «−»?

350.° По какому правилу заключают в скобки сумму, если перед скобками ставят знак:

а) «+»; б) «−»?

Раскройте скобки, объясняя свои действия **(351—353):**

351. а) $+(5+7)$; б) $+(3-8+7)$;
в) $+(-3+8+7)$; г) $+(-10-12+1)$.

352. а) $-(5+7)$; б) $-(3-8+7)$;
в) $-(-3+8+7)$; г) $-(-10-12+1)$.

353. а) $+(a-b-c)$; б) $-(a-b-c)$;
в) $+(-a+b+c)$; г) $-(-a+b+c)$,
где a, b и c — целые числа.

Раскройте скобки **(354—357):**

354. а) $+(56+42)$; б) $+(7\cdot 8+42)$;
в) $+(63+42)$; г) $+(63+6\cdot 7)$.

355. а) $-(45-35)$; б) $-(45-7\cdot 5)$;
в) $-(45-53)$; г) $-(9\cdot 5-53)$.

356. а) $+(48-93)-8$; б) $-(96-35)-6$;
в) $-(7\cdot 8-20)+7\cdot 8$; г) $+(99-5+8)-17$.

357. а) $-(2\cdot 5+48)+23$; б) $-(32-74)-74$;
в) $+(-120-9\cdot 9)-81$; г) $+(120-9^2)+81$.

358. Раскройте скобки и вычислите сумму:
а) $-(-72+39)+39=72-39+39=72$;
б) $+(398-700)+700$; в) $-(754-1200)-1200$;
г) $+(-32-491)+32$; д) $-(-129+59)-129$.

З а м е ч а н и е. Знак «+» перед скобками часто не пишут, но учитывают его при раскрытии скобок.

Вычислите **(359—360):**

359. а) $(456-75)-25$; б) $-(728-49)+51$;
в) $(-238+742)-42$; г) $-(-356+145)-56$.

360. а) $(7\cdot 95-900)-7\cdot 95$;
б) $-(795-9\cdot 99)-99\cdot 9$;
в) $(-48+101-29)-101+29$;
г) $-(-79-39+81)+81-39$.

361. Перепишите, заполняя пропуски:
а) $45-36=+(45-36)$; б) $45-36=-(\dots)$;
в) $-79+11=+(\dots)$; г) $-79+11=-(\dots)$;
д) $38+59=+(\dots)$; е) $-17-81=-(\dots)$.

362. Заключите первые два слагаемых в скобки, перед скобками поставьте знак «+»:

а) $79-48+15-8$;
б) $-56+38-12+100$;
в) $43+59-35-11$;
г) $-43-59+35+11$;
д) $42-79+13-1$;
е) $-57+48-17+23$.

363. Заключите первые два слагаемых в скобки, перед скобками поставьте знак «−»:

а) $79-48+15-8$;
б) $-56+38-12+100$;
в) $43+59-35-11$;
г) $-43-59+35+11$;
д) $42-79+13-1$;
е) $-57+48-17+23$.

2.11. Действия с суммами нескольких слагаемых

В предыдущем пункте были приведены правила, по которым можно раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «+» или «−». Но встречаются суммы, в которых стоящие перед скобками знаки «+» и «−» обозначают действия сложения и вычитания. Оказывается, что и в этом случае применимы изученные правила:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$
$$a-(b-c)=a-b+c,$$

где a, b и c — целые числа.

В самом деле:

$$a+(b-c)=a+(b+(-c))=a+b+(-c)=a+b-c,$$
$$a-(b-c)=a+(-(b-c))=a+(-b+c)=a-b+c.$$

Например, $9+(8-3)=9+8-3$,
$9-(7-3)=9-7+3$.

При вычислении суммы нескольких слагаемых используют правила раскрытия скобок, заключения в скобки и законы сложения. Иногда складывают сначала положительные, потом отрицательные слагаемые и находят сумму полученных чисел, применяя правило сложения чисел с разными знаками.

Например,

$$78-89+32-11=(78+32)+(-89-11)=$$
$$=110+(-100)=110-100=10.$$

Но можно вычислять иначе:

$$78-89+32-11=(78-89)+(32-11)=(-11)+21=10.$$

364.° По каким правилам раскрывают скобки в суммах?

365.° Какие правила и законы применяют для вычисления суммы нескольких слагаемых?

366. Раскройте скобки:

а) $49-(38-5)$;
б) $-32+(78-9)$;
в) $72+(-32+9)$;
г) $-63-(-63+1)$;
д) $(79-39)-(79-48)$;
е) $(37-49)-(87-59)$;
ж) $-(45-64)+(38-24)$;
з) $-(-35+2)+(-35-8)$.

367. Раскройте скобки и вычислите:

а) $108-(108-5)$;
б) $-49-(-49+2)$;
в) $-56+(-98+56)$;
г) $100-(-5+100)$;
д) $(79-81)-(39-81)$;
е) $(-78+23)+(27+78)$;
ж) $(-39+15)-(5-39)$;
з) $(105-48)-(62+105)$.

368. Вычислите, раскрывая скобки только в тех случаях, когда это облегчает вычисления:

а) $79-(63+7)$;
б) $43+(23+77)$;
в) $79-(79-7)$;
г) $43+(77-43)$;
д) $102-(56+44)$;
е) $102-(102-5)$;
ж) $93-(68+93)$;
з) $-72-(99+1)$;
и) $48-(11+19)$;
к) $48-(18+19)$;
л) $-56+(96+9)$;
м) $59+(96+4)$;
н) $52-(32-41)$;
о) $73-(68-8)$;
п) $-25-(-45+19)$;
р) $-49-(11-68)$.

369. Заключите два последних слагаемых в скобки двумя способами (со знаком «+» и со знаком «−» перед скобками):

а) $37+12+13$;
б) $45-2-12$;
в) $5-28+22$;
г) $76+38-52$.

370. Вычислите двумя способами (применяя и не применяя правила раскрытия скобок или заключения в скобки):

а) $48-19-1$;
б) $93-17-13$;
в) $48-(28-43)$;
г) $88-(18-30)$.

371. Вычислите, выбирая удобный способ:

а) $84-(44+28)$;
б) $94-(44+26)$;
в) $826-(231+269)$;
г) $728-(328-179)$;
д) $83-23-29$;
е) $83-21-29$;
ж) $236-136-92$;
з) $236-108-92$.

372. Вычислите:

а) $-(98+49)-(102-49)$; б) $(123-254)-(23-354)$;
в) $(149+237)-(137+49)$; г) $-(95+105)-(398-98)$;
д) $(49+35)-(49-35)$; е) $(48+15)-(48-15)$;
ж) $(76+28)-(76-28)$; з) $(72+29)-(72-29)$.

2.12. Представление целых чисел на координатной оси

Зададим прямую, на которой определим (стрелкой) направление, называемое **положительным;** отметим точку O, соответствующую числу 0, ее называют **начальной точкой или началом отсчета.** Зададим единичный отрезок.

Прямую, на которой заданы начало отсчета, направление отсчета и единичный отрезок, называют **координатной осью.**

Обычно координатную ось изображают в виде горизонтальной прямой, положительное направление выбирают вправо.

Координатная ось делится точкой O на два луча. Один из них положительный, на рисунке 30 идущий от нуля вправо, его называют **положительной координатной полуосью** или положительным координатным лучом. Другой — отрицательный, на рисунке 30 идущий от нуля влево, называют **отрицательной координатной полуосью** или отрицательным координатным лучом.

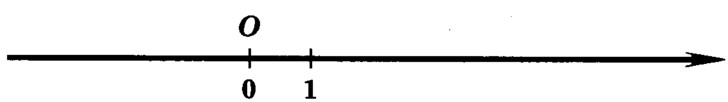


Рис. 30

С помощью координатной оси целые числа изображаются точками.

Точку O, изображающую число нуль, называют еще точкой нуль или точкой с координатой нуль и пишут $O(0)$.

Произвольное целое число n ($n \neq 0$) изображают точкой, расстояние которой от точки нуль равно модулю этого числа: $|n|$. Она находится на положительной полуоси, если число n больше нуля ($n>0$), и на отрицательной полуоси, если число n меньше нуля ($n<0$). Эту точку называют точкой n или точкой с координатой n, а число n — **координатой** этой точки.

Например, на рисунке 31 отмечена точка A с координатой 4, пишут A (4), и точка B с координатой -2, пишут B (-2).

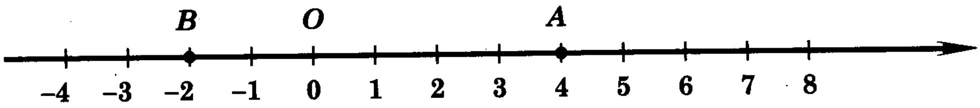


Рис. 31

Если m и n целые числа и $m>n$, то

1) точка m расположена правее точки n на координатной оси;

2) расстояние между точками m и n равно $m - n$.

Например, на координатной оси (рис. 32) отмечены точки $A(7)$ и $B(-4)$, так как $7 > -4$, то точка A правее точки B и

$$AB = 7 - (-4) = 7 + 4 = 11,\quad BO = 0 - (-4) = 0 + 4 = 4.$$

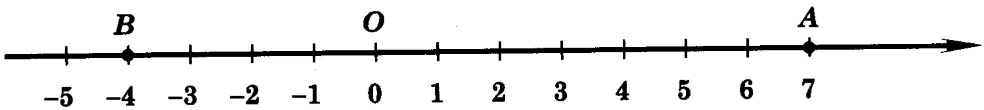


Рис. 32

Две точки, координаты которых противоположные числа, находятся на одинаковом расстоянии от точки нуль, но на разных полуосях (например, точки B и C на рис. 32).

373.° Что называют:

а) координатной осью;

б) положительной координатной полуосью;

в) отрицательной координатной полуосью?

374.° Как называют точку, изображающую число нуль?

375.° Как найти расстояние между точками m и n координатной оси ($m>n$)?

376.° Какие точки находятся на одинаковом расстоянии от точки нуль, но на разных полуосях?

377. Дана координатная ось (рис. 33), некоторые ее точки обозначены буквами A, B, C, D, E. Укажите координаты этих точек.

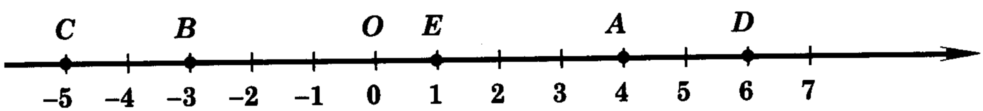


Рис. 33

378. Вычислите длину отрезка (рис. 33):

а) OA; б) OB; в) OC; г) OD; д) AC;
е) AE; ж) OE; з) CB; и) DA.

379. Изобразите координатную ось (единичный отрезок 1 см). Отметьте на ней точки $A\ (-5)$, $B\ (7)$, $C\ (4)$, $D\ (-4)$. Вычислите длину отрезка:

а) OA; б) OB; в) BC; г) BD; д) AD.

Результаты проверьте с помощью сантиметровой линейки.

380. Изобразите координатную ось (единичный отрезок 1 клетка тетради). Отметьте на ней точки $O\ (0)$, $A\ (5)$, $B\ (-8)$, $C\ (9)$, $D\ (-2)$. Вычислите длину отрезка:

а) OA; б) OB; в) AB; г) AC; д) DC.

381. Определите расстояние между точками m и n координатной оси, если:

а) $m=7,\ n=-3$; б) $m=3,\ n=-7$;
в) $m=-8,\ n=0$; г) $m=-8,\ n=8$.

2.13. Исторические сведения

Впервые отрицательные числа встречаются в одной из книг «Математика в девяти книгах» (Джань Цань, III в. до н. э., Китай). Отрицательное число тогда понималось как долг, а положительное — как имущество. Сложение и вычитание отрицательных чисел производилось на основе рассуждений о долге. Например, правило сложения формулировалось так: «Если к одному долгу прибавить другой долг, то в результате получится долг, а не имущество». Знака «минус» тогда не было, а чтобы отличать положительные и отрицательные числа, Джань Цань писал их чернилами разных цветов.

Древнегреческий ученый Диофант (III в.) свободно оперировал отрицательными числами. Они постоянно встречаются в промежуточных вычислениях во многих задачах его «Арифметики». Например, правило умножения с отрицательными числами он формулировал так: «Вычитаемое, умноженное на вычитаемое, дает прибавляемое, а вычитаемое, умноженное на прибавляемое, дает вычитаемое».

В VI—VII веках нашей эры индийские математики уже систематически пользовались отрицательными числами, по-прежнему понимая их как долг. Впервые все четыре арифметических действия с отрицательными числами приведены индийским математиком и астрономом Брамагуптой (598—660). Например, правило деления он формулировал так: «Положительное, деленное на положительное, или отрицательное, деленное на отрицательное, становится положительным. Но положительное, деленное на отрицательное, и отрицательное, деленное на положительное, остается отрицательным».

Независимо от индийцев к пониманию отрицательных чисел, как противоположности положительных, пришел итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (XIII в.).

Немецкий математик М. Штифель (XVI в.) впервые рассматривал отрицательные числа как числа, меньшие нуля («меньшие чем ничто»).

Однако и в XVI—XVII веках многие европейские математики не признавали отрицательных чисел. Если такие числа встречались в вычислениях, то их называли ложными, невозможными.

Современное толкование отрицательных чисел, основанное на откладывании отрезков на координатной оси влево от нуля, было дано в XVII веке, в основном в работах голландского математика А. Жирара (1595—1632) и знаменитого французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650).

Таким образом, для того чтобы разработать современный подход к отрицательным числам, понадобились усилия многих ученых на протяжении 18 веков от Джань Цаня до Декарта.

2.14. Занимательные задачи

382. Запишите в строчку 5 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна.

383. Можно ли записать в строчку 6 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

384. Можно ли записать в строчку 7 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

385. Можно ли записать в строчку 9 таких чисел, чтобы сумма любых трех соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

386. Можно ли расставить в клетках таблицы, состоящей из трех строк и четырех столбцов, целые числа так, чтобы сумма чисел:

а) в каждой строке была равна -20, а в каждом столбце -15;

б) в каждой строке была равна -20, а в каждом столбце -16;

в) в каждой строке была положительной, а в каждом столбце — отрицательной?

387. В строчку записаны несколько чисел так, что сумма любых трех соседних чисел положительна. Можно ли утверждать, что сумма всех чисел положительна, если чисел:
а) 18; б) 19; в) 20?

388. В непрозрачном мешке лежат 10 белых и 5 черных шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди них было 2 шара:
а) белых; б) черных;
в) разных цветов; г) одного цвета?

389. В непрозрачном мешке лежат 679 белых и 679 черных шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди них было 2 шара:
а) белых; б) черных;
в) разных цветов; г) одного цвета?

390. Имеется 3 комнаты с разными замками и 3 ключа от этих комнат. Какое наименьшее число проб нужно сделать, чтобы определить какой ключ от какой комнаты?

391. Вася возвел натуральное число в квадрат и получил число, оканчивающееся цифрой 2. Не ошибся ли Вася?

392. Ведущий телевизионной игры спросил игрока:
— Верите ли Вы, что я не курю уже 20 дней?
— Верю, — ответил игрок.
— А вот и неверно, я не курю уже 24 дня!
Правильно ли ведущий оценил ответ игрока?

393. Встретились три подруги — Белова, Краснова и Чернова. На одной из них было черное платье, на другой — красное, на третьей — белое. Девочка в белом платье говорит Черновой: «Нам надо поменяться платьями, а то цвет наших платьев не соответствует фамилиям». Кто в каком платье был?

394. Коля, Боря, Вова и Юра заняли первые четыре места в соревновании. На вопрос, какие места они заняли, трое из них ответили:

1) Коля ни первое, ни четвертое;
2) Боря второе;
3) Вова не был последним.

Какое место занял каждый мальчик?

395.*Имеется 3 мешка с монетами. В двух из них настоящие монеты, массой 10 г каждая, а в одном фальшивые монеты, массой 9 г каждая. Есть весы, показывающие общую массу положенных на них монет. Как с помощью одного взвешивания определить, в каком мешке фальшивые монеты, если из мешков можно брать любое число монет?

396.*Решите предыдущую задачу для:

а) четырех мешков; б) пяти мешков; в) десяти мешков.

397. В коробке лежат три пилотки — одна синяя и две красные. Учитель вызывает к доске двух учеников, которые становятся лицом к классу и закрывают глаза. Учитель надевает каждому из них на голову пилотку, а оставшиеся прячет в коробку. Ученики открывают глаза и каждый видит пилотку своего товарища, но не видит своей. Может ли кто-нибудь из них определить цвет своей пилотки?

Рассмотрите два случая:

а) надеты одна синяя и одна красная пилотка;
б) надеты две красные пилотки.

398.*Решите предыдущую задачу для пяти пилоток — двух синих и трех красных и трех учащихся. Какие случаи следует рассмотреть?

399. Приехав в город, Ходжа Насреддин постучал в ворота первого дома и попросил хозяина пустить его переночевать. Денег у Насреддина не было, но была золотая цепочка из семи звеньев. Хозяин согласился приютить путника на семь дней с такими условиями:

1) за один день Насреддин платит одним звеном цепочки;
2) расплачиваться он должен ежедневно;
3) хозяин соглашался принять не более одного распиленного звена.

Смог ли Ходжа Насреддин расплатиться с хозяином?

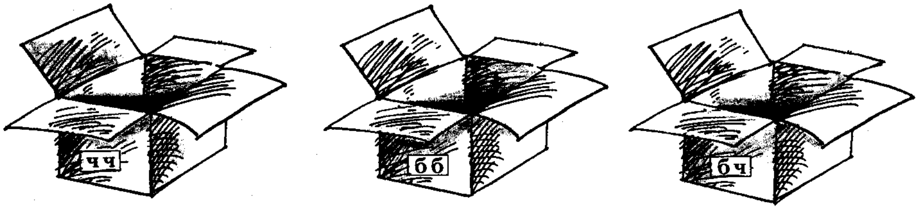


Рис. 34

400. В одной коробке лежат два белых шара, в другой — два черных, в третьей — один белый и один черный. На каждой коробке имеется табличка, но она неправильно указывает содержимое коробки (рис. 34). Из какой коробки, не глядя, надо вынуть шар, чтобы можно было определить содержимое каждой коробки?

401. Три друга Коля, Олег и Петя играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Коля сказал: «Это не я разбил стекло». Олег сказал: «Это Петя разбил стекло». Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое — нет. Кто из мальчиков разбил стекло?

402. Из двух фигур пентамино (рис. 35) составьте фигуры, изображенные на рисунке 36. Сколько решений имеет задача в каждом случае?

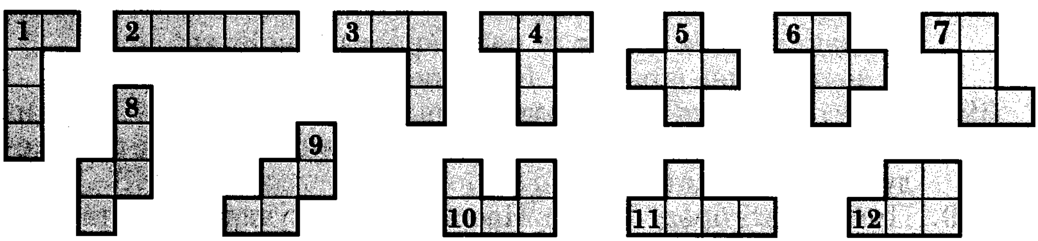


Рис. 35

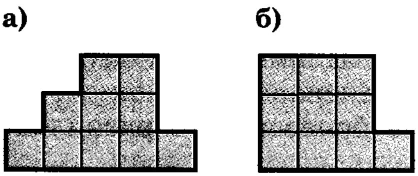


Рис. 36

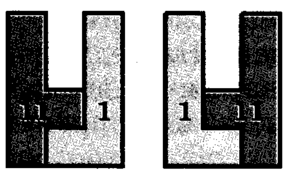


Рис. 37

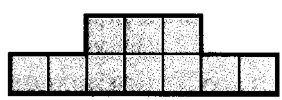


Рис. 38

а)

б)

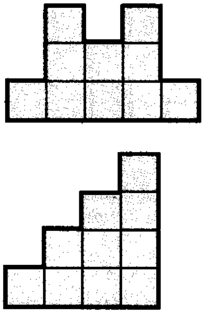


Рис. 39

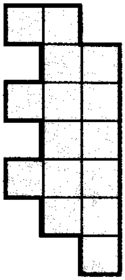


Рис. 40

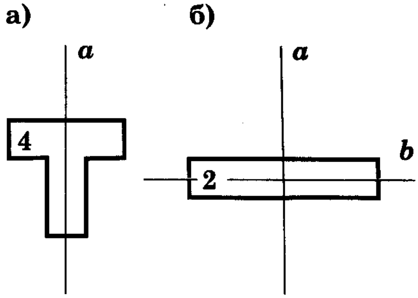


Рис. 41

403. На рисунке 37 показано, как одну и ту же фигуру можно сложить из фигур 1 и 11 пентамино[1] — они меняются местами, но при этом не меняется их взаимное расположение. Будем считать, что здесь (и в аналогичных случаях) изображено одно и то же решение.

Убедитесь, что фигуру, изображенную на рисунке 38, можно сложить из двух фигур пентамино единственным способом.

404. Составьте фигуры, изображенные на рисунке 39, из двух фигур пентамино. Сколько различных решений имеет задача в каждом случае?

405. Составьте из фигур 9, 10, 11 пентамино фигуру, изображенную на рисунке 40. Найдите два решения, зарисуйте их в тетрадь.

406. Из трех различных фигур пентамино сложите прямоугольник 3×5. Сколько различных решений у вас получится?

407. Фигура 4 симметрична относительно прямой a (рис. 41, a). У фигуры 2 тоже есть ось симметрии, даже две — это прямые a и b (рис. 41, *б*), а у фигуры 7 (см. рис. 35) осей симметрии нет. Сколько осей симметрии имеют другие фигуры пентамино?

408. На рисунке 42 показаны фигуры, составленные из нескольких фигур пентамино. Эти фигуры имеют ось симметрии — прямую a. Из фигур пентамино составьте несколько новых фигур, имеющих ось симметрии.

---

[1] Здесь и далее номера фигур пентамино указаны по рисунку 35.

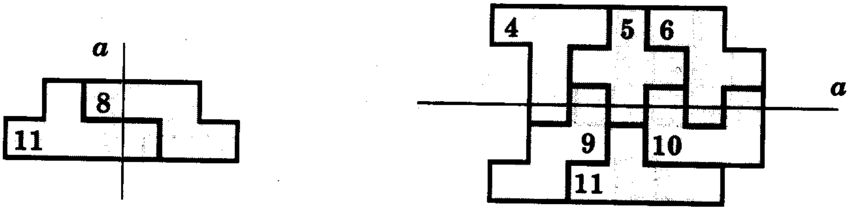


Рис. 42

409. Двенадцатью различными фигурами пентамино нужно замостить прямоугольник 6×10. Одно из 2339 решений этой головоломки показано на рисунке 43, *а*. Новые решения можно искать с использованием симметрии фигур, образованных несколькими фигурами пентамино. Например, фигуры 5 и 6 образуют фигуру, симметричную относительно прямой *a* (рис. 43, *б*). Если их поменять местами, то получится новое решение головоломки. Потом можно поменять местами фигуры 4 и 6 и т. д. Найдите описанным способом несколько новых решений.

а)

б)

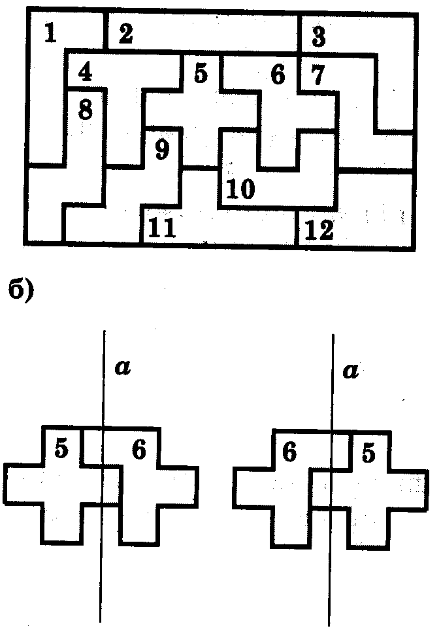


Рис. 43

а)

б)

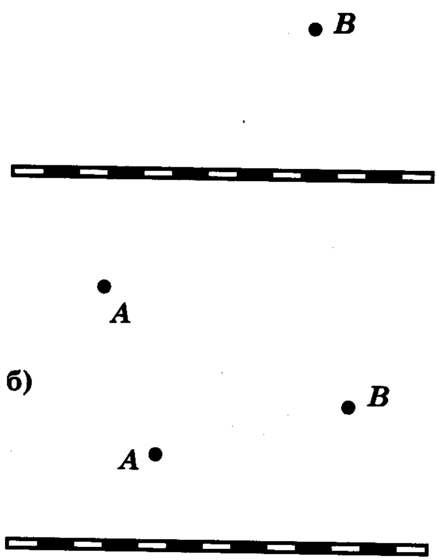


Рис. 44

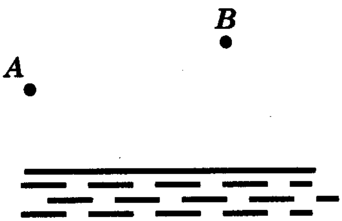


Рис. 45

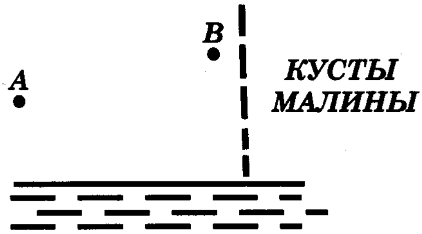


Рис. 46

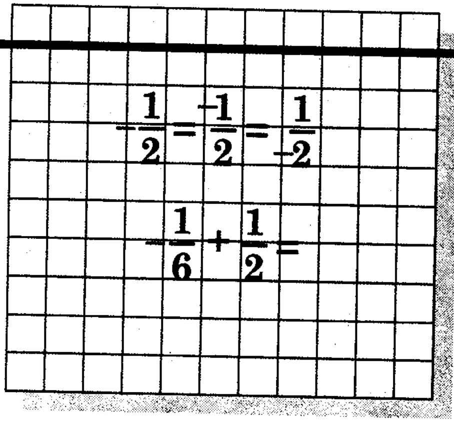
410.*На плане (рис. 44) показана железная дорога и два города A и B. Укажите место на железной дороге, где надо построить станцию C, чтобы суммарная длина дороги от A до C и от C до B была наименьшей?

411.*В жаркий день Винни-Пух направился из своего дома (A) в гости к Пятачку (B), но сначала решил подойти к реке попить воды. Укажите кратчайший путь от A до B с заходом к реке (рис. 45).

412.*Другой раз Винни-Пух направился из своего дома (A) в гости к Пятачку (B), но сначала решил подойти к реке попить воды, а потом поесть малины. Укажите кратчайший путь от A до B с заходом к реке и к кустам малины (рис. 46).

ГЛАВА III

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА



3.1. Отрицательные дроби

До сих пор мы изучали положительные дробные числа — их еще называют положительными дробями.

Например, числа $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{1}$ есть положительные дроби.

Если перед положительной дробью поставить знак «+», то получится то же самое число, т. е.

$$\frac{1}{2}=+\frac{1}{2},\ \frac{8}{7}=+\frac{8}{7},\ \frac{7}{1}=+\frac{7}{1}.$$

Если перед положительной дробью поставить знак «−», то получится новое число, которое называют **отрицательным дробным числом** или **отрицательной дробью**.

Например, числа $-\frac{1}{2}$, $-\frac{8}{7}$, $-\frac{7}{1}$ — отрицательные дроби.

Числа, отличающиеся только знаком, называют **противоположными.**

Например, числа $\left(+\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)$ — противоположные.

Одно из противоположных чисел положительно, другое — отрицательно. Исключением является число нуль — нуль противоположен самому себе: $0=+\frac{0}{n}=-\frac{0}{n}$, где n — любое натуральное число.

Если перед дробью (любого знака) поставить знак «+», то получится то же самое число; если поставить знак «−», то получится число, противоположное данной дроби. Например,

$$+\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}, \quad -\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}.$$

Введем понятие абсолютной величины или модуля дроби.

Модулем положительной дроби называют саму эту дробь.

Например, модуль дроби $\frac{5}{8}$ равен $\frac{5}{8}$, что записывают так:

$$\left|\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}.$$

Модулем отрицательной дроби называют противоположную ей (положительную) дробь.

Например, модуль дроби $-\frac{5}{8}$ равен $\frac{5}{8}$, что записывают так:

$$\left|-\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}.$$

Модуль нуля равен нулю: $|0|=0$.

Модули противоположных чисел равны. Например,

$$\left|\frac{5}{8}\right|=\left|-\frac{5}{8}\right|=\frac{5}{8}.$$

Удобно знак «$-$» записывать не перед дробью, а в числителе или знаменателе дроби. Например, верны равенства:

$$-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}, \quad -\frac{5}{7}=\frac{-5}{7}=\frac{5}{-7},$$

$$-\frac{13}{16}=\frac{-13}{16}=\frac{13}{-16}, \quad -\frac{0}{2}=\frac{-0}{2}=\frac{0}{-2}.$$

---

413. Запишите три отрицательные дроби.

414.° Какие числа называют противоположными? Приведите примеры.

415.° Какое число противоположно:

а) числу нуль,

б) положительному числу;

в) отрицательному числу?

416.° Что называют модулем:

а) положительной дроби;

б) отрицательной дроби;

в) нуля?

417.° Какие из дробей являются положительными, какие отрицательными:

$\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{0}{4}$; $-\frac{2}{7}$; $\frac{3}{1}$; $-\frac{0}{2}$?

418.° Назовите дроби, противоположные дробям:

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{9}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{7}$; $\frac{-4}{11}$.

419.° Какое число противоположно самому себе?

Упростите запись по *образцу* **(420—421):**

420. **а)** $|8|=8$; **б)** $|-7|=7$; **в)** $\left|\frac{1}{9}\right|=\frac{1}{9}$; **г)** $\left|\frac{-2}{3}\right|=\frac{2}{3}$; д) $|2|$;

е) $|-3|$; ж) $|0|$; з) $\left|\frac{1}{4}\right|$; и) $\left|-\frac{1}{5}\right|$; к) $\left|\frac{2}{7}\right|$.

421. а) $\left|\frac{-1}{4}\right|$; б) $\left|\frac{-2}{9}\right|$; в) $\left|\frac{-1}{8}\right|$; г) $\left|\frac{-8}{15}\right|$;

д) $\left|-\frac{3}{8}\right|$; е) $\left|-\frac{8}{9}\right|$; ж) $-\left|-\frac{1}{2}\right|$; з) $-\left|-\frac{1}{5}\right|$

422. Сравните:

а) $\left|\frac{2}{3}\right|$ и $\left|-\frac{2}{3}\right|$; б) $|-5|$ и $\left|-\frac{1}{2}\right|$; в) $\left|-\frac{1}{5}\right|$ и $\left|\frac{1}{4}\right|$.

423. Запишите дробь так, чтобы знак «$-$» стоял в числителе по *образцу*:

а) $-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}$; б) $-\frac{5}{7}$; в) $-\frac{7}{3}$; г) $-\frac{4}{9}$.

424. Запишите дробь так, чтобы знак «$-$» стоял в знаменателе по *образцу*:

а) $-\frac{3}{4}=\frac{3}{-4}$; б) $-\frac{6}{5}$; в) $-\frac{7}{8}$; г) $-\frac{8}{9}$.

425. Запишите дроби

$\frac{-2}{7}$, $\frac{-6}{11}$, $\frac{-2}{13}$, $\frac{5}{-7}$, $\frac{4}{-9}$, $\frac{12}{-7}$

так, чтобы знак «$-$» стоял перед чертой дроби.

426.° Равны ли дроби:

а) $-\frac{2}{3}$ и $\frac{-2}{3}$; б) $\frac{-5}{8}$ и $-\frac{5}{8}$; в) $\frac{4}{9}$ и $\frac{-4}{9}$; г) $-\frac{5}{7}$ и $\frac{5}{7}$?

427. Найдите модуль числа:

а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{-2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{5}{-9}$; д) 0; е) $-\frac{5}{4}$.

428. Сократите дроби: $\frac{8}{20}$; $\frac{35}{56}$; $\frac{42}{48}$; $\frac{764}{828}$; $\frac{792}{891}$.

429. Приведите дроби к знаменателю 48:

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{23}{24}$.

430. Постройте отрезок AB, равный 12 см, и точку C так, чтобы $AC=\frac{1}{6}AB$. С помощью циркуля постройте на отрезке AB точки M и N так, чтобы $AM=\frac{3}{6}AB$, $AN=\frac{5}{6}AB$.

3.2. Рациональные числа

Число, которое можно записать в виде $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа и q не равно нулю, называют рациональным числом или дробью.

Например, $\frac{2}{3}$, $\frac{-6}{5}$, $\frac{8}{-11}$ и $\frac{-7}{-7}$ — рациональные числа.

Запись $\frac{p}{q}$ читается так: «p, деленное на q».

Число p называют числителем, число q — знаменателем дроби $\frac{p}{q}$.

Некоторые дроби считают **равными**. Равенство дробей устанавливают при помощи **основного свойства дроби:**

Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же целое, не равное нулю число, то получится равная ей дробь:

$$\boxed{\frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n},} \qquad (1)$$

где p, q, n — целые числа, $q\neq0$, $n\neq0$.

Примеры: 1) $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot(-2)}{4\cdot(-2)}=\frac{-6}{-8}$; 2) $\frac{-5}{2}=\frac{(-5)\cdot3}{2\cdot3}=\frac{-15}{6}$;

3) $\frac{2}{-3}=\frac{2\cdot(-1)}{(-3)\cdot(-1)}=\frac{-2}{3}$.

Переход от дроби $\frac{p}{q}$ к дроби $\frac{p \cdot n}{q \cdot n}$ в равенстве (1) называют **приведением дроби к новому знаменателю**, а обратный переход называют **сокращением дроби:**

$$\boxed{\frac{p \cdot n}{q \cdot n}=\frac{p}{q}.} \qquad (2)$$

Равенство (2) означает, что если числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель n — целое, не равное нулю число, то дробь можно сократить на n. При этом получается дробь, равная данной.

Примеры: 1) $\frac{-12}{14}=\frac{(-6)\cdot 2}{7 \cdot 2}=\frac{-6}{7}$; 2) $\frac{-15}{-9}=\frac{(-3)\cdot 5}{(-3)\cdot 3}=\frac{5}{3}$.

Подчеркнем, что две дроби равны тогда и только тогда, когда одна из них может быть получена из другой сокращением на общий множитель ее числителя и знаменателя.

Можно сказать и так: две дроби равны тогда и только тогда, когда одна из них может быть получена из другой умножением ее числителя и знаменателя на одно и то же не равное нулю число.

Рациональное число $\frac{p}{q}$ есть:

а) положительная дробь, если p и q одного знака;

б) отрицательная дробь, если p и q разных знаков;

в) число нуль, если $p=0$.

Покажем это на примерах.

1) $\frac{3}{5}$ — положительная дробь;

$\frac{-7}{-8}=\frac{(-7)\cdot(-1)}{(-8)\cdot(-1)}=\frac{7}{8}$, т. е. $\frac{-7}{-8}$ — положительная дробь;

2) $\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$, т. е. $\frac{-3}{5}$ — отрицательная дробь;

$\frac{3}{-8}=\frac{-3}{8}=-\frac{3}{8}$, т. е. $\frac{3}{-8}$ — отрицательная дробь;

3) $\frac{0}{3}=0$; $\frac{0}{-5}=\frac{0\cdot(-1)}{(-5)\cdot(-1)}=\frac{0}{5}=0$, т. е. $\frac{0}{-5}$ — нуль.

Для любого целого числа p верно равенство:

$$\boxed{\frac{p}{1}=p.}$$

Оно означает, что **любое целое число является рациональным числом.**

Например, $\frac{-3}{1}=-\frac{3}{1}=-3$.

Пользуясь основным свойством дроби, можно любую дробь привести к положительному знаменателю.

Примеры: 1) $\frac{5}{-3}=\frac{5\cdot(-1)}{(-3)\cdot(-1)}=\frac{-5}{3}$;

2) $\frac{-6}{-7}=\frac{(-6)\cdot(-1)}{(-7)\cdot(-1)}=\frac{6}{7}$.

Следовательно, **любое рациональное число может быть записано в виде $\frac{p}{q}$, где q — натуральное, а p — целое число.**

431.° Какое число называют рациональным? Назовите несколько рациональных чисел.

432.° Является ли натуральное число рациональным?

433.° Является ли целое число рациональным?

434.° Является ли положительная дробь рациональным числом?

435. Сформулируйте основное свойство дроби. Приведите пример использования основного свойства дроби для приведения дроби к новому знаменателю.

436.° В каком случае дробь можно сократить? На основании какого свойства сокращают дроби? Приведите примеры.

437.° В каком случае дробь положительна? Отрицательна? Приведите примеры.

438.° Любую ли дробь можно привести к положительному знаменателю?

439. Приведите дробь к положительному знаменателю:

а) $\frac{1}{-2}$; б) $\frac{1}{-3}$; в) $\frac{-2}{-3}$; г) $\frac{-2}{-5}$; д) $\frac{7}{-4}$; е) $\frac{12}{-7}$.

440. Приведите отрицательные дроби $\frac{-1}{2}$ и $-\frac{1}{4}$ к знаменателю:

а) 8; б) 28; в) 36.

441. Приведите к знаменателю 60 дробь:

а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{-4}{5}$; г) $\frac{-11}{12}$; д) $\frac{13}{-15}$; е) $\frac{19}{-20}$.

442. Упростите запись рационального числа:

а) $\frac{-1}{-2}$; б) $\frac{-3}{-4}$; в) $\frac{-49}{56}$; г) $\frac{72}{-67}$;

д) $-\frac{81}{-72}$; е) $-\frac{96}{-143}$; ж) $-\frac{-15}{42}$; з) $\frac{-55}{-75}$;

и) $-\frac{-125}{625}$; к) $\frac{100}{-8}$; л) $\frac{32}{-512}$; м) $\frac{-32}{-128}$.

443. Сократите дробь, запишите результат в виде дроби с положительным знаменателем:

а) $\frac{-8}{-12}$; б) $\frac{-35}{21}$; в) $\frac{36}{-45}$; г) $\frac{45}{-63}$;

д) $-\frac{35}{77}$; е) $\frac{-96}{-128}$; ж) $\frac{-124}{-196}$; з) $\frac{252}{-444}$.

444. Найдите число x, для которого верно равенство:

а) $\frac{-1}{3}=\frac{x}{3}$; б) $\frac{-4}{5}=\frac{x}{20}$; в) $-\frac{2}{3}=\frac{x}{9}$;

г) $-\frac{5}{6}=\frac{x}{30}$; д) $-\frac{4}{5}=\frac{-20}{x}$; е) $-\frac{x}{3}=\frac{-12}{18}$.

Упростите запись **(445—446):**

445. а) $-\frac{-5}{7}$; б) $-\frac{4}{-3}$; в) $-\frac{-3}{7}$; г) $-\frac{9}{-10}$.

446. **а)** $-\left(\frac{-7}{9}\right)=-\frac{-7}{9}=\frac{-(-7)}{9}=\frac{7}{9}$; б) $-\left(-\frac{4}{9}\right)$;

в) $-\left(-\frac{-1}{3}\right)$; г) $-\left(-\frac{2}{-13}\right)$; д) $-\left(-\frac{-1}{-2}\right)$.

447. Равны ли рациональные числа:

а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{-8}{-32}$; б) $\frac{-75}{100}$ и $\frac{3}{-4}$; в) $\frac{24}{-40}$ и $\frac{-27}{45}$; г) $\frac{-77}{-88}$ и $\frac{63}{72}$?

448. Запишите в виде целого числа дробь:

а) $\frac{2}{1}$; б) $\frac{-13}{1}$; в) $\frac{0}{2}$; г) $\frac{-14}{7}$; д) $\frac{-32}{-4}$; е) $\frac{44}{-11}$.

449. Является ли рациональное число натуральным, целым:

а) $-\frac{17}{9}$; б) $\frac{37}{-48}$; в) $\frac{-15}{-5}$; г) $\frac{0}{-7}$;

д) $\frac{-17}{-1}$; е) $\frac{16}{-8}$; ж) $-\frac{-46}{23}$; з) $\frac{-20}{-30}$?

450. Среди рациональных чисел

$-\frac{3}{9}$, $\frac{-5}{-10}$, $\frac{4}{-8}$, $\frac{-25}{50}$, $\frac{0}{100}$, $\frac{17}{34}$, $\frac{0}{-72}$, $\frac{100}{-300}$

найдите равные.

451. Запишите три дроби с положительным знаменателем, равные числу:

а) 5; б) -2; в) -28; г) 0.

452. Является ли дробь положительной, отрицательной:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{-5}{9}$; в) $\frac{4}{-3}$; г) $\frac{0}{-1}$; д) $\frac{-6}{-8}$;

е) $-\frac{-1}{3}$; ж) $-\frac{7}{9}$; з) $\frac{0}{-4}$; и) $\frac{-9}{17}$; к) $\frac{-31}{-4}$?

453. Назовите и запишите дробь, противоположную дроби:

а) $-\frac{1}{5}$; б) $\frac{-1}{3}$; в) $\frac{4}{7}$; г) $-\frac{5}{6}$; д) $-\frac{7}{8}$; е) $\frac{-1}{-3}$.

454.*Какие знаки (одинаковые или разные) имеют числа m и n, если верно равенство:

а) $\left|\frac{m}{n}\right|=\frac{m}{n}$; б) $\left|\frac{m}{n}\right|=-\frac{m}{n}$?

455. Упростите выражение по *образцу*:

а) $\frac{-56:(-8)+8}{19\cdot(-5)+100}=\frac{7+8}{-95+100}=\frac{15}{5}=3$;

б) $\frac{-45-56}{49-251}$; в) $\frac{77-45}{45-65}$; г) $\frac{-48:6+8}{45\cdot7-400}$;

д) $\frac{12-3\cdot0}{3-45:5}$; е) $\frac{72:4-5\cdot8}{16\cdot3-8\cdot8}$; ж) $\frac{-49:7+3\cdot9}{6\cdot(-8)-7\cdot(-4)}$.

Сравните числа **(456—457)**:

456. а) 15 и -45; б) 79 и 0; в) -81 и 0;
г) 48 и -1000; д) -999 и -1; е) 46 и -46.

457. а) $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$; б) $\frac{49}{50}$ и $\frac{4}{5}$; в) $\frac{11}{20}$ и $\frac{17}{30}$;

г) $\frac{37}{452}$ и $\frac{207}{388}$; д) $\frac{456}{729}$ и $\frac{895}{891}$; е) $\frac{999}{1000}$ и $\frac{1000}{1001}$.

Вычислите **(458—459)**:

458. а) $7-(-8-15)$; б) $21-(38-43)$;
в) $178-(24-196)-257$; г) $281-(484-795)-1254$.

459. а) $3\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{4}\cdot1\frac{1}{31}:\left(2\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11}:\frac{75}{154}\right)$;

б) $\left(1\frac{1}{2}:2\frac{1}{4}\right):\left(8\frac{3}{4}:1\frac{1}{6}\right)\cdot22\frac{1}{2}$;

в) $\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{12}\right):\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{10}+\frac{47}{90}\right)\cdot\left(4\frac{1}{15}-3\frac{2}{3}\right)$.

3.3. Сравнение рациональных чисел

Любые две дроби можно привести к общему положительному знаменателю.

Например, приведем дроби $\frac{2}{-7}$ и $-\frac{3}{5}$ к общему положительному знаменателю:

$$\overset{-5/}{\frac{2}{-7}}=\frac{2\cdot(-5)}{(-7)\cdot(-5)}=\frac{-10}{35},\quad -\overset{7/}{\frac{3}{5}}=\frac{(-3)\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{-21}{35}.$$

Две дроби с общим положительным знаменателем равны, если равны их числители.

Из двух дробей с общим положительным знаменателем больше та, у которой числитель больше.

Таким образом, сравнение дробей сводится к сравнению целых чисел — числителей дробей с общим положительным знаменателем.

Пример 1. Сравним дроби: $\frac{-6}{7}$ и $\frac{-5}{7}$.

Решение. Так как $-6 < -5$, то $-\frac{6}{7} < \frac{-5}{7}$.

Чтобы сравнить две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему положительному знаменателю и сравнить полученные дроби.

Пример 2. Сравним дроби $\frac{5}{-8}$ и $-\frac{3}{4}$.

Решение. $\frac{5}{-8}=\frac{-5}{8}$, $-\frac{3}{4}=\frac{-3}{4}=\frac{(-3)\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{-6}{8}$. Так как $-5 > -6$, то $\frac{-5}{8} > \frac{-6}{8}$.

Поэтому

$$\frac{5}{-8} > -\frac{3}{4}.$$

Отметим, что из правила сравнения дробей следует, что:

1) любая положительная дробь больше нуля;

2) любая отрицательная дробь меньше нуля;

3) любая положительная дробь больше отрицательной;

4) две дроби равны тогда и только тогда, когда после приведения их к общему положительному знаменателю равны их числители.

460.° Как сравнивают две дроби:

а) с общим положительным знаменателем;

б) с разными знаменателями?

461.° Сформулируйте правило сравнения: положительной дроби с нулем; отрицательной дроби с нулем; положительной дроби с отрицательной.

462. Сравните числа:

а) $\frac{6}{7}$ и $\frac{8}{7}$; б) 1 и $\frac{7}{8}$; в) 1 и $\frac{9}{8}$; г) 2 и -3;

д) -1 и -2; е) -12 и -7; ж) $-\frac{1}{2}$ и 0; з) 0 и $\frac{-3}{4}$;

и) $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$; к) $-\frac{4}{5}$ и $-\frac{3}{5}$; л) $-\frac{1}{7}$ и $\frac{-3}{7}$; м) $-\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{-8}$.

463. Запишите в порядке возрастания числа:

$-\frac{1}{8}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{6}{8}$, $-\frac{2}{8}$, $-\frac{9}{8}$, -1, $-\frac{3}{8}$, $-\frac{4}{8}$.

464. Запишите в порядке убывания числа:

$-\frac{7}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{15}{4}$, $-\frac{3}{4}$, -2.

465. Найдите дробь, которая больше одной из данных дробей, но меньше другой:

а) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{4}{5}$; б) $-\frac{9}{10}$ и $-\frac{3}{10}$; в) $\frac{-12}{13}$ и $\frac{4}{-13}$;

г) $\frac{-8}{11}$ и $-\frac{5}{11}$; д) $-\frac{1}{8}$ и $-\frac{7}{8}$; е) $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{5}{7}$.

466. Сравните числа:

а) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{6}$ и $-\frac{4}{11}$;

г) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{3}{4}$; д) $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{7}{10}$; е) $-\frac{5}{9}$ и $-\frac{2}{3}$;

ж) $-\frac{11}{24}$ и $-\frac{1}{2}$; з) $-\frac{5}{28}$ и $-\frac{1}{7}$; и) $-\frac{25}{32}$ и $-\frac{5}{8}$;

к) $-\frac{9}{10}$ и $-\frac{14}{15}$; л) $-\frac{1}{4}$ и $-\frac{7}{8}$; м) $-\frac{13}{24}$ и $-\frac{17}{36}$.

467. Запишите дроби $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$ в порядке возрастания.

468. Запишите дроби $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{3}$ в порядке убывания.

469. Верно ли, что если $-\frac{4}{7} > -\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3} > -\frac{4}{5}$, то $-\frac{4}{7} > -\frac{4}{5}$?

470. Существуют ли дроби $\frac{p}{q}$, для которых верно неравенство $-\frac{2}{5} < \frac{p}{q} < -\frac{1}{5}$? Если существуют, то найдите три такие дроби.

471. Можно ли назвать 10 дробей, больших одной из данных дробей, но меньших другой:

а) $-\frac{39}{40}$ и $-\frac{1}{40}$; б) $-\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{4}$?

Можно ли назвать 100, 1000, 10 000 таких дробей?

472. Найдите дробь, которая больше одной из данных дробей, но меньше другой:

а) $-\frac{1}{5}$ и $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{5}{6}$ и $-\frac{2}{3}$; в) $-\frac{3}{8}$ и $-\frac{3}{4}$;

г) $-\frac{3}{20}$ и $-\frac{7}{30}$; д) $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{2}{9}$; е) $-\frac{10}{11}$ и $-\frac{19}{20}$.

473. Сравните числа:

а) $-\frac{1}{2}$ и -1; б) $-\frac{8}{8}$ и -1; в) $-\frac{9}{8}$ и -1; г) $-\frac{498}{497}$ и -1.

474.* Как можно сравнить дроби, не приводя их к общему положительному знаменателю, если числители этих дробей одинаковые положительные целые числа?

Выполните действия **(475—476)**: ●

475. а) $\frac{8}{9}+\frac{5}{9}$; б) $\frac{17}{25}-\frac{8}{25}$; в) $\frac{31}{32}+\frac{63}{64}$;

г) $\frac{23}{68}-\frac{5}{17}$; д) $\frac{50}{49}+\frac{15}{56}$; е) $\frac{71}{78}-\frac{17}{91}$.

476. а) $(-56)+17$; б) $42+(-29)$; в) $(-39)+(-57)$;
г) $(-48)+81$; д) $37+(-82)$; е) $(-68)+(-51)$.

477. На координатной оси отмечены точки 0 и 3. С помощью циркуля покажите на оси точки -3, 6, -6, 9, -9.

3.4. Сложение и вычитание дробей

Сумма дробей с общим положительным знаменателем есть дробь с тем же знаменателем и числителем, равным сумме числителей.

Примеры: 1) $\frac{-2}{11}+\frac{-3}{11}=\frac{-2+(-3)}{11}=\frac{-5}{11}=-\frac{5}{11}$;

2) $\frac{-2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{-2+3}{7}=\frac{1}{7}$.

Отметим, что **сумма противоположных дробей равна нулю.** Например, $\frac{3}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}+\frac{-3}{5}=\frac{3+(-3)}{5}=\frac{0}{5}=0$.

Разность двух дробей с общим положительным знаменателем есть дробь с тем же знаменателем и числителем, равным разности числителей уменьшаемого и вычитаемого.

Примеры: 3) $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3-4}{5}=\frac{-1}{5}=-\frac{1}{5}$;

4) $\frac{-3}{5}-\frac{-4}{5}=\frac{-3-(-4)}{5}=\frac{-3+4}{5}=\frac{1}{5}$.

Чтобы вычислить сумму (или разность) дробей с разными знаменателями, надо сначала привести их к общему положительному знаменателю.

Отметим, что вычисления будут более простыми, если в качестве общего положительного знаменателя взять наименьший общий положительный знаменатель данных дробей.

Примеры: 5) $\overset{3/}{\frac{3}{5}}-\frac{11}{15}=\frac{9}{15}-\frac{11}{15}=\frac{9-11}{15}=\frac{-2}{15}=-\frac{2}{15}$;

6) $-\overset{3/}{\frac{1}{30}}-\overset{2/}{\frac{-2}{45}}=\frac{-3}{90}-\frac{-4}{90}=\frac{-3-(-4)}{90}=\frac{-3+(+4)}{90}=\frac{1}{90}$;

7) $-\frac{3}{5}+\frac{2}{-7}=\overset{7/}{\frac{-3}{5}}+\overset{5/}{\frac{-2}{7}}=\frac{-21}{35}+\frac{-10}{35}=\frac{-31}{35}=-\frac{31}{35}$.

Отметим, что дроби любого знака $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ можно складывать и вычитать по формулам:

$$\boxed{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s+q\cdot r}{q\cdot s},} \qquad \boxed{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s-q\cdot r}{q\cdot s}.}$$

Например, $\frac{3}{5}-\frac{11}{15}=\frac{3\cdot15-5\cdot11}{5\cdot15}=\frac{45-55}{75}=-\frac{10}{75}=\frac{-2}{15}=-\frac{2}{15}$.

Подчеркнем, что, найдя наименьший общий знаменатель дробей, иногда можно намного упростить вычисления их суммы или разности, чем по этим формулам (см. примеры 5 и 6).

Разность дробей a и b равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому:

$$\boxed{a-b=a+(-b).}$$

○ Доказательство. Любые две дроби можно привести к общему знаменателю. Пусть $a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{r}{q}$. Тогда

$$a-b=\frac{p}{q}-\frac{r}{q}=\frac{p-r}{q}=\frac{p+(-r)}{q}=\frac{p}{q}+\frac{-r}{q}=\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{q}\right)=a+(-b). \bullet$$

Это правило позволяет упрощать вычисления. Например,

$$-\frac{9}{16}-\left(-\frac{1}{16}\right)=-\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{-9+1}{16}=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}.$$

Из правил сложения дробей следует, что их можно складывать по тем же правилам, что и целые числа, т. е. сначала определять знак суммы, потом выполнять действия с модулями. Это позволяет иногда упрощать вычисления. Например,

$$-\frac{2}{11}+\left(-\frac{3}{11}\right)=-\left(\frac{2}{11}+\frac{3}{11}\right)=-\frac{5}{11};$$

$$-\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=+\left(\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\right)=\frac{3}{7};$$

$$\frac{3}{11}+\left(-\frac{7}{11}\right)=-\left(\frac{7}{11}-\frac{3}{11}\right)=-\frac{4}{11}.$$

Можно еще сказать, что разность дробей a и b есть такое число $a-b$, которое в сумме с вычитаемым дает уменьшаемое:

$$(a-b)+b=a.$$

○ Доказательство. Приведем дроби к общему знаменателю: $a=\frac{p}{q}$, $b=\frac{r}{q}$. Тогда

$$(a-b)+b=\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{q}\right)+\frac{r}{q}=\frac{p-r}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p-r+r}{q}=\frac{p}{q}=a. \bullet$$

478.° Сформулируйте правила сложения и вычитания дробей с общим положительным знаменателем.

479.° Чему равна сумма противоположных дробей?

480.° Как вычислить сумму или разность дробей с разными знаменателями?

481. По каким формулам можно складывать и вычитать дроби?

Вычислите **(482—493)**:

482. а) $\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}$; б) $\frac{-1}{3}+\frac{-1}{3}$; в) $\frac{-1}{10}+\frac{-1}{10}$;

г) $\frac{-2}{3}+\frac{-1}{3}$; д) $\frac{-2}{7}+\frac{-5}{7}$; е) $\frac{-7}{12}+\frac{-1}{12}$.

483. а) $\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{5}+\frac{-3}{5}$;

г) $\frac{3}{7}+\frac{-4}{7}$; д) $\frac{8}{13}+\frac{-12}{13}$; е) $\frac{19}{25}+\frac{-24}{25}$.

484. а) $\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}$; б) $\frac{-5}{6}+\frac{5}{6}$; в) $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}$.

485. а) $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$; в) $\frac{2}{7}-\frac{5}{7}$;

г) $\frac{7}{12}-\frac{11}{12}$; д) $\frac{-8}{11}-\frac{3}{11}$; е) $-\frac{5}{17}-\frac{-10}{17}$.

486. а) $\frac{-2}{7}-\frac{-5}{7}$; б) $\frac{-4}{9}-\frac{-8}{9}$; в) $-\frac{1}{10}-\frac{-7}{10}$;

г) $-\frac{12}{19}-\frac{7}{19}$; д) $\frac{-4}{5}-\frac{-3}{5}$; е) $-\frac{1}{24}-\frac{11}{24}$.

487. а) $\frac{-1}{2}+\frac{-1}{4}$; б) $\frac{-1}{3}+\frac{1}{6}$; в) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$;

г) $\frac{1}{8}+\frac{-1}{4}$; д) $\frac{3}{10}+\frac{-7}{100}$; е) $-\frac{21}{100}+\frac{1}{10}$.

488. а) $-\frac{3}{5}-\frac{9}{10}$; б) $-\frac{15}{24}-\frac{3}{8}$; в) $\frac{-2}{3}-\frac{5}{6}$;

г) $-\frac{7}{6}-\frac{5}{24}$; д) $\frac{2}{5}-\frac{13}{50}$; е) $-\frac{50}{160}-\frac{9}{16}$.

489. а) $-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}$; б) $\frac{3}{10}-\frac{2}{15}$; в) $-\frac{2}{10}-\frac{6}{15}$;

г) $\frac{3}{8}-\frac{2}{9}$; д) $-\frac{5}{12}+\frac{4}{15}$; е) $\frac{2}{16}-\frac{-3}{39}$.

490. а) $\frac{5}{8}+\left(-\frac{9}{8}\right)$; б) $-\frac{3}{13}+\left(-\frac{8}{13}\right)$; в) $-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$;

г) $\frac{3}{8}+\left(-\frac{3}{4}\right)$; д) $-\frac{7}{15}+\left(-\frac{2}{3}\right)$; е) $-\frac{7}{8}-\frac{15}{16}$;

ж) $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)$; з) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$; и) $-\frac{2}{21}+\frac{3}{14}$.

491. а) $-\frac{9}{180}-\frac{7}{120}$; б) $-\frac{4}{210}+\frac{5}{140}$; в) $\frac{-7}{480}+\frac{8}{180}$.

492. а) $-\frac{7}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}$; б) $-\frac{1}{6}-\frac{5}{12}-\frac{7}{24}$;

в) $-\frac{3}{13}-\frac{5}{13}+\frac{3}{26}$; г) $\frac{9}{28}-\frac{4}{7}-\frac{1}{4}$.

493. а) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{20}$; б) $-\frac{3}{20}-\frac{7}{30}+\frac{2}{40}$;

в) $\frac{11}{60}-\frac{23}{30}-\frac{17}{20}$; г) $-\frac{7}{40}-\frac{-11}{70}-\frac{-13}{30}$.

494. Найдите число x, для которого верно равенство:

а) $x+\frac{1}{8}=-\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{7}+x=-\frac{3}{7}$; в) $x-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$;

г) $x-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$; д) $\frac{2}{3}-x=-\frac{1}{7}$; е) $\frac{1}{6}-x=-\frac{4}{9}$.

495. Найдите число, которое:

а) на $\frac{1}{2}$ больше числа $-\frac{1}{2}$; б) на $\frac{1}{4}$ меньше числа $\frac{1}{6}$.

496. Запишите разность дробей в виде равной ей суммы дробей:

а) $\frac{1}{3}-\frac{4}{3}$; б) $-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}$; в) $\frac{-4}{7}-\frac{-8}{7}$.

497. Вычислите, предварительно заменив разность дробей равной ей суммой:

а) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)$; б) $\frac{4}{9}-\left(-\frac{7}{9}\right)$; в) $-\frac{9}{16}-\left(-\frac{3}{8}\right)$;

г) $-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{8}\right)$; д) $-\frac{9}{10}-\left(-\frac{15}{16}\right)$; е) $\frac{25}{26}-\left(-\frac{11}{13}\right)$.

498. Сократите дробь:

а) $\frac{36\cdot(-112)}{126\cdot(-63)}$; б) $\frac{184\cdot(-49)}{84\cdot(-69)}$; в) $\frac{(-315)\cdot 57}{114\cdot(-108)}$;

г) $\frac{(-105)\cdot 84}{196\cdot 125}$; д) $\frac{(-111)\cdot(-9)}{78\cdot 74}$; е) $\frac{(-888)\cdot 55}{77\cdot 999}$.

Выполните действия **(499—501)**:

499. а) $75 \cdot (-64)$; б) $(-57) \cdot (-129)$; в) $(-144) \cdot 55$; г) $912 : (-48)$; д) $(-1596) : 57$; е) $(-2701) : (-37)$.

500. а) $161784 : (-321)$; б) $-2164320 : 432$; в) $-4101630 : (-507)$; г) $-1936980 : (-918)$.

501. а) $\frac{34}{35} : \frac{51}{55}$; б) $\frac{37}{38} \cdot \frac{57}{148}$; в) $\frac{54}{125} \cdot 35$; г) $\frac{115}{116} : 62$; д) $\frac{351}{625} \cdot \frac{250}{182}$; е) $99 : \frac{143}{120}$.

502. На координатном луче отмечены числа. С помощью циркуля отметьте на координатном луче число:
а) $a+3$ (рис. 47, *а*); б) $a+4$ (рис. 47, *б*).

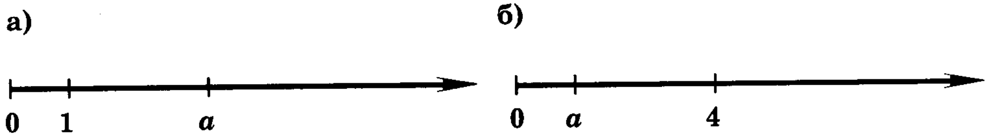


Рис. 47

503. Для чисел a и b выполняется равенство: $5-a=b$. С помощью циркуля отметьте на координатном луче число $a+b$ (рис. 48).

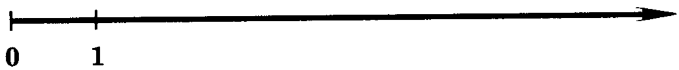


Рис. 48

504. Для чисел a и b выполняется равенство: $a-3=b$. С помощью циркуля отметьте на координатном луче число a (рис. 49).

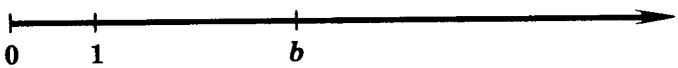


Рис. 49

505. На координатной оси отмечены точки с координатами: 0, 1, b (рис. 50). С помощью циркуля постройте точки с координатами: -1, $-b$, $b+1$, $b-1$, $1-b$, $-b-1$.

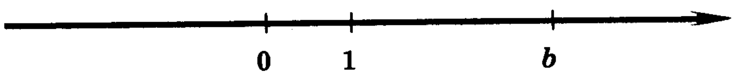


Рис. 50

3.5. Умножение и деление дробей

Дроби любого знака умножают и делят по тем же правилам, что и положительные дроби:

$$\boxed{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{p\cdot r}{q\cdot s},} \qquad \boxed{\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot r}, \text{ где } r\neq 0.}$$

Примеры: 1) $\frac{-3}{2}\cdot\frac{4}{-5}=\frac{(-3)\cdot 4}{2\cdot(-5)}=\frac{(-1)\cdot 3\cdot 4}{(-1)\cdot 2\cdot 5}=\frac{3\cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 5}=\frac{6}{5}$;

2) $(-5)\cdot\frac{2}{-3}=\frac{-5}{1}\cdot\frac{2}{-3}=\frac{(-5)\cdot 2}{1\cdot(-3)}=\frac{(-1)\cdot 5\cdot 2}{(-1)\cdot 3}=\frac{10}{3}$;

3) $\frac{-3}{2}:\frac{4}{5}=\frac{(-3)\cdot 5}{2\cdot 4}=\frac{-15}{8}$;

4) $\frac{7}{-8}:(-3)=\frac{7}{-8}:\frac{-3}{1}=\frac{7\cdot 1}{(-8)\cdot(-3)}=\frac{7}{24}$.

Отметим равенство, которое легко получается на основании правила деления:

$$\boxed{p:q=\frac{p}{q},}$$

где p и q целые числа ($q\neq 0$).

Доказательство. $p:q=\frac{p}{1}:\frac{q}{1}=\frac{p\cdot 1}{1\cdot q}=\frac{p}{q}$.

Таким образом, **дробь $\frac{p}{q}$ можно рассматривать как частное от деления ее числителя p на знаменатель q.**

Например, $\frac{2}{3}=2:3$; $-2:5=\frac{-2}{5}$.

Чтобы умножить дробь на целое число, можно ее числитель умножить на это число.

Доказательство. $\frac{p}{q}\cdot r=\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{1}=\frac{p\cdot r}{q\cdot 1}=\frac{p\cdot r}{q}$.

Примеры: $\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 1}=\frac{6}{5}$;

$(-7)\cdot\frac{1}{4}=\frac{-7}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{(-7)\cdot 1}{4}=\frac{-7}{4}$.

Эти вычисления обычно записывают короче:

$$\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{2\cdot 3}{5}=\frac{6}{5}; \qquad (-7)\cdot\frac{1}{4}=\frac{(-7)\cdot 1}{4}=\frac{-7}{4}.$$

Чтобы разделить дробь на целое число, не равное нулю, можно знаменатель дроби умножить на это число.

Доказательство. $\frac{p}{q}:r=\frac{p}{q}:\frac{r}{1}=\frac{p\cdot 1}{q\cdot r}=\frac{p}{q\cdot r}$.

Например, $\frac{-7}{4}:3=\frac{-7}{4}:\frac{3}{1}=\frac{(-7)\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{-7}{12}$, или короче:

$$\frac{-7}{4}:3=\frac{-7}{4\cdot 3}=\frac{-7}{12}.$$

Числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{q}{p}$, где p и q не равны нулю, называют взаимно обратными. Дробь $\frac{p}{q}$ называют обратной дроби $\frac{q}{p}$.

Например, дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$, $\frac{-7}{8}$ и $\frac{8}{-7}$, $\frac{1}{-5}$ и $\frac{-5}{1}$ — взаимно обратные числа.

Произведение взаимно обратных чисел равно 1.

Доказательство. $\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p}=\frac{p\cdot q}{q\cdot p}=\frac{1}{1}=1$.

Чтобы одну дробь разделить на другую, отличную от нуля, можно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

Например, $\frac{5}{7}:\frac{-2}{3}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{-2}$.

Для любой дроби $a=\frac{p}{q}$ верно равенство $(-1)\cdot a=-a$.

Доказательство.

$$(-1)\cdot a=(-1)\cdot\frac{p}{q}=\frac{(-1)\cdot p}{q}=\frac{-p}{q}=-\frac{p}{q}=-a.$$

Отметим, что определением степени с натуральным показателем можно пользоваться и для дробей любого знака.

Примеры: 1) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{-2}{3}\right)^2=\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\cdot(-2)}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}$;

2) $\left(-\frac{5}{4}\right)^1=-\frac{5}{4}$.

Из правил умножения и деления дробей любого знака следует, что их можно умножать и делить по тем же правилам, что и целые числа, т. е. сначала определять знак результата, а потом выполнять действия с модулями. Например,

$$-\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=+\frac{3\cdot 2}{8\cdot 5}=\frac{3}{20};$$

$$\frac{8}{9}:\left(-\frac{4}{27}\right)=-\frac{8\cdot 27}{9\cdot 4}=-\frac{6}{1}=-6.$$

506.°По каким правилам умножают и делят дроби любого знака?

507.°Как умножить дробь на целое число?

508.°Как разделить дробь на целое число, не равное нулю?

509.°Какие числа называют взаимно обратными?

Сократите дробь **(510 – 511)**:

510. а) $\frac{(-1)\cdot 3}{6\cdot(-4)}$; б) $\frac{(-3)\cdot 4}{6\cdot(-5)}$; в) $\frac{(-4)\cdot 10}{(-30)\cdot 14}$;

г) $\frac{(-8)\cdot 18}{(-28)\cdot 6}$; д) $\frac{(-12)\cdot(-5)}{(-21)\cdot 10}$; е) $\frac{(-75)\cdot(-24)}{(-32)\cdot(-100)}$.

511. а) $\frac{-3\cdot 8\cdot(-6)}{18\cdot(-4)}$; б) $\frac{-7\cdot 16}{-14\cdot(-2)\cdot(-10)}$; в) $\frac{-2\cdot(-3)\cdot(-6)}{-3\cdot(-8)\cdot(-10)}$;

г) $\frac{-96\cdot(-125)}{-75\cdot(-128)}$; д) $\frac{56\cdot(-77)}{-121\cdot(-49)}$; е) $\frac{-128\cdot(-92)}{-256\cdot(-48)}$.

512. Вычислите произведение по *образцу*:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{-1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3};$$

а) $\frac{-3}{7}\cdot\frac{5}{9}$; б) $\frac{-3}{8}\cdot\frac{-4}{5}$; в) $\frac{-9}{10}\cdot\frac{-1}{-2}$;

г) $\frac{-7}{2}\cdot\frac{4}{-35}$; д) $\frac{-5}{6}\cdot\frac{3}{10}$; е) $\frac{-7}{32}\cdot\frac{4}{-21}$;

ж) $-\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{75}{2}\right)$; з) $\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)$; и) $-\frac{18}{5}\cdot\left(-\frac{4}{81}\right)$.

Вычислите **(513 – 514):**

513. а) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$; в) $-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)$;

г) $-\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$; д) $\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$; е) $-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}$.

514. а) $-\frac{1}{3}\cdot 2$; б) $7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $-4\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$;

г) $\frac{3}{4}\cdot\left(-8\right)$; д) $\frac{25}{28}\cdot\left(-14\right)$; е) $-12\cdot\left(-\frac{13}{24}\right)$.

515. Запишите частное в виде дроби с положительным знаменателем, сократите полученную дробь:

а) $-2:6$; б) $-5:15$; в) $-10:(-20)$; г) $-4:(-16)$.

516. Являются ли числа взаимно обратными:

а) $\frac{-1}{2}$ и $-\frac{4}{2}$; б) $\frac{2}{-3}$ и $\frac{3}{2}$; в) $-\frac{1}{4}$ и -4;

г) $-\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{-5}$; д) -2 и $\frac{-1}{2}$; е) -1 и 1?

517. Назовите делимое и делитель, найдите дробь, обратную делителю, замените деление умножением на дробь, обратную делителю:

а) $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}$; б) $-\frac{4}{5}:\frac{3}{8}$; в) $-4:\frac{-2}{3}$; г) $-\frac{3}{7}:(-9)$.

Вычислите **(518 – 523):**

518. а) $\frac{-3}{5}:\frac{5}{-9}$; б) $\frac{16}{-25}:\frac{8}{-15}$; в) $\frac{9}{-10}:\frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{3}:\frac{6}{-7}$.

519. а) $-\frac{3}{7}:\frac{5}{6}$; б) $\frac{16}{-25}:\left(-\frac{8}{15}\right)$; в) $-\frac{9}{20}:\left(-\frac{18}{25}\right)$;

г) $\frac{28}{63}:\left(-\frac{9}{7}\right)$; д) $-\frac{15}{16}:\left(-\frac{10}{24}\right)$; е) $-\frac{15}{17}:\frac{25}{34}$.

520. а) $\frac{32}{75}:\left(-\frac{48}{25}\right)$; б) $-\frac{38}{75}:\left(-\frac{19}{100}\right)$; в) $-\frac{32}{77}:\left(-\frac{64}{55}\right)$;

г) $-\frac{125}{196}:\frac{50}{52}$; д) $\frac{228}{245}:\left(-\frac{57}{125}\right)$; е) $-\frac{132}{1000}:\left(-\frac{143}{1000}\right)$.

521. а) $-\frac{1}{2}:2$; б) $-\frac{1}{3}:2$; в) $-\frac{2}{5}:(-3)$;

г) $\frac{3}{7}:(-9)$; д) $-4:\frac{1}{2}$; е) $(-3):\left(-\frac{1}{2}\right)$;

ж) $5:\left(-\frac{3}{10}\right)$; з) $-8:\frac{4}{5}$; и) $-\frac{8}{9}:(-4)$.

522. а) $48:\left(-\frac{1}{2}\right)$; б) $-55:\left(-\frac{2}{5}\right)$; в) $-72:\frac{36}{37}$;

г) $\left(-\frac{16}{35}\right):64$; д) $-\frac{12}{13}:24$; е) $\frac{15}{32}:(-20)$.

523. а) $-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$; б) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)$; в) $-\frac{3}{7}:\left(-\frac{4}{5}\right)$;

г) $\frac{3}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)$; д) $-\frac{15}{16}\cdot\left(-\frac{48}{25}\right)$; е) $-\frac{5}{3}:\frac{25}{27}$;

ж) $-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$; з) $-\frac{2}{3}:\left(-\frac{4}{5}\right)$; и) $\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)$.

524. Найдите число x, для которого верно равенство:

а) $x\cdot\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}$; б) $-\frac{2}{3}\cdot x=\frac{4}{7}$;

в) $x:\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$; г) $\frac{2}{7}:x=-\frac{22}{21}$.

525. Вычислите:

а) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3$; б) $\left(\frac{3}{-4}\right)^2$; в) $\left(\frac{1}{-10}\right)^3$;

г) $\left(\frac{-5}{6}\right)^2$; д) $\left(-\frac{6}{7}\right)^2$; е) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$;

ж) $\left(-\frac{3}{10}\right)^4$; з) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; и) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

526. Положительным или отрицательным числом является степень отрицательной дроби:

а) с четным показателем степени;

б) с нечетным показателем степени?

Определите порядок действий, вычислите **(527 – 529)**:

527. а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$;

б) $\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$;

в) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{9}$;

г) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

528. а) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2$;

б) $-\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{7}-\left(-\frac{1}{7}\right)^2$;

в) $-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{25}$;

г) $\frac{3}{10}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$.

529. а) $-\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{18}{25}\right)-\frac{14}{27}\cdot\left(-\frac{18}{35}\right)$;

б) $-\frac{27}{20}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)-\frac{5}{24}\cdot\left(-\frac{22}{5}\right)$;

в) $\frac{21}{20}\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)+\frac{7}{72}\cdot\left(-\frac{36}{5}\right)$;

г) $-\frac{36}{60}\cdot\left(-\frac{5}{18}\right)-\left(-\frac{21}{56}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Вычислите рациональным способом **(530 – 532)**:

530. а) $80\cdot359\cdot(-125)$;

б) $457+985-57$;

в) $45\cdot(-39)+55\cdot(-39)$;

г) $76\cdot45-26\cdot45$;

д) $157\cdot(-13)-17\cdot(-13)$;

е) $(-124)\cdot35+24\cdot35$.

531. а) $\frac{4}{15}+\frac{5}{36}+\frac{11}{15}+\frac{31}{36}$;

б) $\frac{7}{25}+\frac{32}{33}-\frac{7}{25}$;

в) $\frac{39}{40}\cdot\frac{124}{125}:\frac{124}{125}$;

г) $\frac{4}{35}\cdot\frac{17}{18}+\frac{17}{18}\cdot\frac{31}{35}$;

д) $\frac{45}{46}\cdot\frac{49}{51}-\frac{45}{46}\cdot\frac{3}{51}$;

е) $\frac{72}{73}\cdot\frac{34}{65}+\frac{72}{73}\cdot\frac{39}{65}$.

532. а) $\frac{23\cdot35+38\cdot35}{17\cdot61+18\cdot61}$;

б) $\frac{49\cdot99+28\cdot99}{12\cdot154+21\cdot154}$;

в) $\frac{75\cdot27+75\cdot37}{37\cdot48-12\cdot48}$;

г) $\frac{679\cdot846+679\cdot54}{679\cdot846-679\cdot46}$.

3.6. Законы сложения и умножения

Для рациональных чисел a, b, c справедливы известные нам законы арифметических действий:

1) переместительный закон сложения: $a+b=b+a$;
2) сочетательный закон сложения: $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) переместительный закон умножения: $a \cdot b=b \cdot a$;
4) сочетательный закон умножения: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$;
5) распределительный закон: $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$.

Доказательство любого из этих законов можно провести, опираясь на соответствующие законы для целых чисел. Докажем, например, распределительный закон.

○ Доказательство. Так как дроби a и b всегда можно привести к общему положительному знаменателю, то пусть

$$a=\frac{p}{q},\ b=\frac{r}{q},\ c=\frac{s}{t}.$$

Тогда $(a+b) \cdot c=\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{q}\right) \cdot \frac{s}{t}=\frac{p+r}{q} \cdot \frac{s}{t}=\frac{(p+r) \cdot s}{q \cdot t}=\frac{p \cdot s+r \cdot s}{q \cdot t}=$
$=\frac{p \cdot s}{q \cdot t}+\frac{r \cdot s}{q \cdot t}=\frac{p}{q} \cdot \frac{s}{t}+\frac{r}{q} \cdot \frac{s}{t}=a \cdot c+b \cdot c.$ ●

Из законов арифметических действий следует, что все правила вычислений, сформулированные для целых чисел, справедливы и для рациональных чисел (правила раскрытия скобок и заключения в скобки, правила определения знака произведения и частного и т. п.).

Применение законов сложения и умножения иногда позволяет упростить вычисления.

Например,

1) $\frac{8}{15}-\left(\frac{7}{13}+\frac{8}{15}\right)=\frac{8}{15}-\frac{7}{13}-\frac{8}{15}=-\frac{7}{13}+\left(\frac{8}{15}-\frac{8}{15}\right)=-\frac{7}{13}$;

2) $\frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)+\frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{4}{9}+\left(-\frac{5}{9}\right)\right)=\frac{3}{11} \cdot (-1)=-\frac{3}{11}$.

533.° Для рациональных чисел a, b и c запишите и сформулируйте:

а) переместительный закон сложения;

б) сочетательный закон сложения;

в) переместительный закон умножения;
г) сочетательный закон умножения;
д) распределительный закон.

Вычислите **(534 – 538)**:

534. а) $-\frac{7}{25}-\frac{11}{25}-\frac{2}{25}$; б) $-\frac{1}{72}-\frac{17}{72}-\frac{18}{72}$;

в) $-\frac{19}{55}-\frac{18}{55}+\frac{4}{55}$; г) $\frac{25}{64}-\frac{17}{64}-\frac{15}{64}$.

535. а) $-\frac{1}{5}+\frac{6}{25}-\frac{8}{25}$; б) $-\frac{1}{7}+\frac{2}{21}-\frac{3}{7}$;

в) $-\frac{8}{49}-\frac{5}{7}-\frac{9}{49}$; г) $\frac{7}{10}-\frac{4}{15}-\frac{11}{30}$.

536. а) $-\frac{33}{80}+\left(\frac{3}{16}-\frac{39}{80}\right)$; б) $\frac{2}{45}+\left(-\frac{3}{45}+\frac{7}{9}\right)$;

в) $\frac{7}{15}-\left(\frac{4}{15}-\frac{1}{5}\right)$; г) $-\frac{5}{16}-\left(\frac{1}{16}-\frac{7}{8}\right)$;

д) $-\frac{1}{27}+\left(\frac{7}{9}-\frac{2}{3}\right)$; е) $\left(-\frac{2}{15}-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{10}$;

ж) $\left(-\frac{2}{15}+\frac{4}{5}\right)-\frac{3}{10}$; з) $-\left(\frac{5}{8}-\frac{5}{12}\right)+\frac{1}{24}$.

537. а) $\frac{3}{8}-\frac{2}{7}+\frac{5}{8}-\frac{5}{7}$; б) $\frac{11}{14}-\frac{7}{10}-\frac{21}{100}-\frac{13}{14}$;

в) $-\frac{12}{19}-\frac{15}{26}+\frac{3}{13}+\frac{9}{19}$; г) $\frac{2}{7}-\frac{5}{9}-\frac{4}{9}-\frac{4}{7}$.

538. а) $-2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)$;

в) $-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)$; г) $\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

539.° Определите знак произведения:

а) $(-1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{13}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\left(\frac{-7}{-9}\right)$;

в) $\left(-\frac{-8}{9}\right)\cdot\left(-\frac{5}{-9}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$; г) $\left(-\frac{-1}{-5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-8}{7}\right)$.

540. Вычислите:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4}$; б) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$.

541. Сколько отрицательных множителей может содержать произведение, чтобы оно было: а) положительным; б) отрицательным?

542. а) Произведение пяти множителей положительное число. Можно ли утверждать, что все множители положительные числа?

б) Произведение четырех множителей положительное число. Можно ли утверждать, что все множители положительные числа?

543.*Сформулируйте и докажите свойства деления, которые выражаются следующими равенствами:
а) $a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$;
б) $a:b=(a:n):(b:n)$;
в) $(a+b):n=a:n+b:n$, где b и n не равны нулю.

Вычислите **(544 – 546):**

544. а) $-\frac{3}{4}:\frac{5}{6}+\frac{15}{16}\cdot\frac{2}{5}-1:\frac{1}{9}$;

б) $2:\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{3}{5}:2-\frac{3}{2}:6+6:\frac{3}{2}$;

в) $-\frac{11}{4}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{25}{8}\right)$;

г) $\left(\frac{2}{15}+\frac{19}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-\left(1:\frac{9}{4}\right)\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)$.

545. а) $\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{24}-\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{24}$; б) $\frac{3}{25}\cdot\left(-\frac{5}{49}\right)+\frac{22}{25}\cdot\left(-\frac{5}{49}\right)$.

546. а) $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$;

б) $-\frac{10}{11}\cdot\left(-\frac{11}{12}\right)\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{13}{14}\right)\cdot\left(-\frac{14}{15}\right)$.

3.7. Смешанные дроби произвольного знака

Напомним, что для положительных неправильных дробей есть и другая форма записи: в виде смешанной дроби.

Например, $\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$, $\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$.

Если перед положительной смешанной дробью поставить знак «+», то получим то же самое число, так как не изменится равная ей обыкновенная неправильная дробь, если перед ней поставить знак «+».

Например, $+2\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$.

Если перед положительной смешанной дробью поставить знак «−», то получим противоположную ей отрицательную смешанную дробь.

Например, $-\left(2\frac{1}{2}\right)$ и $2\frac{1}{2}$ — противоположные числа.

Положительная смешанная дробь есть сумма натурального числа и правильной дроби. Поэтому, поставив знак «−» перед смешанной дробью, мы ставим его перед суммой двух чисел.

Например, $-\left(2\frac{1}{2}\right)=-\left(2+\frac{1}{2}\right)$.

Для упрощения записей скобки в выражениях вида $-\left(2\frac{1}{2}\right)$ не пишут, т. е. верно равенство: $-\left(2\frac{1}{2}\right)=-2\frac{1}{2}$.

Рассмотрим *примеры* вычислений с отрицательными смешанными дробями:

1) $-2\frac{1}{4}+\left(-1\frac{1}{4}\right)=-\left(2\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}\right)=-\left(3+\frac{2}{4}\right)=-3\frac{1}{2}$;

2) $5\frac{1}{3}-7\frac{2}{3}=-\left(7\frac{2}{3}-5\frac{1}{3}\right)=-\left(2\frac{1}{3}\right)=-2\frac{1}{3}$;

3) $1\frac{1}{2}-5\frac{1}{3}=-\left(5\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}\right)=-\left(5\frac{2}{6}-1\frac{3}{6}\right)=-\left(4\frac{2}{6}-\frac{3}{6}\right)=$

$=-\left(3+\frac{8}{6}-\frac{3}{6}\right)=-\left(3+\frac{5}{6}\right)=-3\frac{5}{6}$;

4) $1\frac{1}{5}\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)=-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{15}{4}\right)=-\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{2}{\cancel{4}}}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2};$

5) $-3\frac{1}{2}:5\frac{1}{4}=-\left(\frac{7}{2}:\frac{21}{4}\right)=-\frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\underset{3}{\cancel{21}}}=-\frac{2}{3};$

6) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}=-3\frac{3}{8}.$

---

547. Представьте отрицательную неправильную дробь в виде отрицательной смешанной дроби:

а) $-\frac{4}{3}$; б) $-\frac{13}{5}$; в) $-\frac{41}{15}$; г) $-\frac{45}{16}$.

548. Запишите частное в виде обыкновенной или смешанной дроби:

а) $-17:(-18)$; б) $13:(-25)$;
в) $-19:(-5)$; г) $29:(-15)$.

549. Сравните числа:

а) $-\frac{1}{2}$ и $-1\frac{1}{2}$; б) $-\frac{3}{2}$ и $-1\frac{1}{4}$;
в) $-1\frac{1}{5}$ и $-1\frac{1}{6}$; г) $-\frac{12}{11}$ и $-1\frac{1}{13}$.

Вычислите **(550 – 554):**

550. а) $-3\frac{2}{5}+\left(-1\frac{1}{5}\right)$; б) $-7\frac{1}{3}+\left(-1\frac{2}{3}\right)$;
в) $-12\frac{5}{7}+\left(-4\frac{4}{7}\right)$; г) $-3\frac{8}{19}+\left(-1\frac{11}{19}\right)$;
д) $-4\frac{2}{3}+\left(-1\frac{1}{3}\right)$; е) $\left(-8\frac{2}{3}\right)+\left(-9\frac{2}{3}\right)$.

551. а) $18\frac{5}{9}+\left(-22\frac{2}{9}\right)$; б) $25\frac{3}{4}+\left(-51\frac{1}{4}\right)$;

в) $-6\frac{2}{9}+1\frac{2}{3}$; г) $7\frac{1}{12}+\left(-8\frac{3}{4}\right)$;

д) $18\frac{5}{6}+\left(-7\frac{1}{2}\right)$; е) $2\frac{1}{5}+\left(-\frac{4}{15}\right)$.

552. а) $-3-2\frac{1}{5}$; б) $-8+\frac{2}{13}$; в) $-7\frac{1}{3}-4$; г) $\frac{4}{17}-15$.

553. а) $1\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}$; б) $7\frac{2}{5}-\left(-1\frac{1}{5}\right)$; в) $-6\frac{3}{7}+1\frac{2}{7}$;

г) $7\frac{2}{9}-9\frac{8}{9}$; д) $4\frac{1}{2}-8\frac{1}{3}$; е) $6\frac{9}{10}-12\frac{1}{100}$;

ж) $-4\frac{2}{5}-1\frac{1}{2}$; з) $-5\frac{1}{3}-8\frac{2}{9}$; и) $-2\frac{1}{5}-14\frac{1}{10}$.

554. а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-2\frac{1}{3}$; б) $\frac{7}{9}-\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}-1$.

555. Вычислите удобным способом по *образцу*:

а) $\mathbf{-4\frac{1}{2}+5\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=-4\frac{1}{2}+\left(5\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\right)=-4\frac{1}{2}+6=6-4\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}}$;

б) $-1\frac{1}{3}+8\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; в) $3\frac{2}{5}-7\frac{1}{2}+2\frac{3}{5}$;

г) $\frac{-5}{9}+2\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}$; д) $\frac{7}{15}-2-\frac{1}{5}$.

556. Упростите выражение, раскрывая скобки по *образцу*:

а) $\mathbf{7\frac{1}{2}+\left(3\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}\right)=7\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}=5+3\frac{2}{3}=8\frac{2}{3}}$;

б) $\mathbf{8\frac{3}{5}-\left(7\frac{1}{3}-11\frac{2}{5}\right)=8\frac{3}{5}-7\frac{1}{3}+11\frac{2}{5}=20-7\frac{1}{3}=12\frac{2}{3}}$;

в) $\frac{5}{12}+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{12}\right)$; г) $2-\left(\frac{2}{5}-7\frac{1}{2}\right)$;

д) $4\frac{2}{7}-\left(7\frac{1}{2}+4\frac{2}{7}\right)$; е) $9\frac{7}{9}-\left(2\frac{1}{2}-\frac{2}{9}\right)$.

Вычислите **(557 – 560)**:

557. а) $2\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{-75}$; б) $1\frac{1}{3}\cdot\frac{-9}{16}$; в) $3\frac{1}{3}\cdot\frac{-7}{-100}$;

г) $\frac{-5}{9}\cdot 4\frac{1}{2}$; д) $-\frac{3}{5}\cdot 1\frac{1}{4}$; е) $3\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{24}{39}\right)$;

ж) $-\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{5}$; з) $2\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{14}{15}\right)$; и) $3\frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)$.

558. а) $-\frac{1}{3}\cdot(-1)$; б) $-1\cdot\frac{3}{5}$; в) $-1\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$;

г) $-3\frac{1}{5}\cdot(-1)$; д) $-2\cdot\frac{3}{4}$; е) $-1\frac{1}{2}\cdot(-4)$;

ж) $-5\cdot\frac{-3}{10}$; з) $-9\cdot\left(-1\frac{1}{6}\right)$; и) $-8\cdot\left(-1\frac{1}{4}\right)$.

559. а) $\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{9}{10}$; б) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 3\frac{1}{2}$;

в) $\left(-5\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{32}{33}\right)$; г) $4\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{24}{25}\right)$.

560. а) $(-5)\cdot\frac{2}{3}$; б) $7\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$; в) $(-3)\cdot\left(-1\frac{1}{4}\right)$;

г) $\left(-2\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{7}\right)$; д) $\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot 2\frac{2}{5}$; е) $4\frac{1}{2}\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)$.

561. Вычислите, предварительно указав порядок действий:

а) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(5\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\cdot\frac{7}{9}$;

в) $\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{9}{2}\cdot\left(-1\frac{1}{5}\right)\right)\cdot(-2)$; г) $\left(3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}\right)$.

562. Вычислите:

а) $2\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{9}{7}$; б) $\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot 2\frac{4}{17}\cdot\left(-\frac{9}{8}\right)$;

в) $2\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$; г) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(2\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\right)\right)$;

д) $5\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{4}\right)$; е) $4\frac{1}{5}\cdot\left(3\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\right)$.

563. Докажите, что:

а) $\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{8}{9}\cdot1\frac{3}{4}>\frac{2}{-3}\cdot2\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$;

б) $\left(\frac{7}{12}-\frac{7}{18}\right)\cdot\left(-\frac{6}{7}\right)<\left(-\frac{25}{36}\right):\frac{5}{-12}\cdot\frac{-1}{11}$.

564. Не проводя всех вычислений, сравните результат с нулем, а затем вычислите:

а) $5\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$; б) $\frac{-3}{7}\cdot2\frac{1}{3}$;

в) $\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{-8}{5}$; г) $\frac{-8}{-9}\cdot\frac{-3}{-7}\cdot\frac{-7}{-8}$;

д) $\left(-\frac{1}{2}\right):(-7):(-3)$; е) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$.

565. Определите, значение какого выражения больше. Постарайтесь выполнить задание без вычислений:

а) $4\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{19}\right)$ или $5\frac{7}{9}:\left(-\frac{4}{17}\right):\frac{8}{13}$;

б) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$ или $\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{3}$;

в) $\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-2\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{5}\right)$ или $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{1}{100}\right)$?

566. Вычислите степень, предварительно указав основание и показатель степени:

а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; в) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; г) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

567. Сравните с нулем, затем вычислите:

а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$; в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; г) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$.

Вычислите **(568 – 571):**

568. а) $3\frac{2}{3}:\frac{-11}{12}$; б) $\frac{8}{15}:\frac{16}{-25}$;

в) $\frac{-7}{9}:2\frac{1}{3}$; г) $\frac{-9}{-16}:1\frac{13}{32}$;

д) $-1\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$; е) $\frac{7}{8}:\left(-1\frac{5}{8}\right)$;

ж) $-\frac{4}{5}:\left(-1\frac{1}{5}\right)$; з) $-\frac{4}{3}:\left(-1\frac{5}{6}\right)$;

и) $4:\left(-1\frac{1}{3}\right)$; к) $\left(-2\frac{2}{5}\right):10$;

л) $-6:3\frac{3}{5}$; м) $-2\frac{5}{7}:(-38)$.

569. а) $1\frac{1}{2}:\left(-1\frac{1}{6}\right)$; б) $-2\frac{1}{3}:\left(-1\frac{5}{6}\right)$;

в) $-1\frac{1}{3}:2\frac{7}{8}$; г) $-2\frac{1}{8}:\left(-3\frac{1}{16}\right)$.

570. а) $7\frac{2}{9}\cdot 8\frac{2}{3}-7\frac{2}{9}\cdot 6\frac{2}{3}$; б) $12\frac{35}{44}\cdot 4\frac{1}{10}-8\frac{35}{44}\cdot 4\frac{1}{10}$;

в) $7\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{5}+7\frac{1}{3}\cdot 1\frac{4}{5}$; г) $\left(-3\frac{1}{9}\right)\cdot 7\frac{4}{7}+\left(-3\frac{1}{9}\right)\cdot\left(-2\frac{3}{7}\right)$;

д) $2\frac{6}{7}\cdot 4\frac{2}{5}-2\frac{6}{7}\cdot 4$; е) $\left(-2\frac{3}{7}\right)\cdot(-5)+2\frac{3}{7}\cdot\left(-2\frac{2}{3}\right)$.

571. а) $7\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)-17\frac{29}{30}$;

б) $\left(-2\frac{13}{25}\right):\left(-2\frac{7}{10}\right)-17\frac{25}{47}:\left(-17\frac{25}{47}\right)-4\frac{3}{5}$.

3.8. Изображение рациональных чисел на координатной оси

На координатной оси можно изобразить не только целые, но и рациональные числа. Например, числу $\frac{1}{2}$ соответствует точка положительной координатной полуоси, находящаяся от точки 0 на расстоянии $\frac{1}{2}$ единичного отрезка. А числу $-\frac{1}{2}$ соответствует точка отрицательной координатной полуоси, находящаяся от точки 0 на расстоянии $\frac{1}{2}$ единичного отрезка (рис. 51).

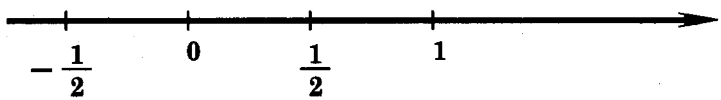


Рис. 51

Рациональному числу $\frac{p}{q}$ на координатной оси соответствует точка, находящаяся на расстоянии $\left|\frac{p}{q}\right|$ от точки 0 на положительной полуоси, если $\frac{p}{q} > 0$, и на отрицательной полуоси, если $\frac{p}{q} < 0$. Эту точку называют точкой $\frac{p}{q}$ или точкой с координатой $\frac{p}{q}$.

• *Пример 1.* Изобразим на координатной оси число $-\frac{2}{5}$.

Так как $-\frac{2}{5} < 0$ и $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$, то точка с координатой $-\frac{2}{5}$ находится на отрицательной полуоси, на расстоянии $\frac{2}{5}$ единичного отрезка от точки 0 (рис. 52).

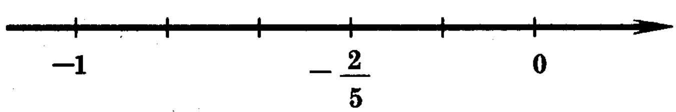


Рис. 52

Пример 2. Изобразим на координатной оси число $\frac{5}{2}$ или, что то же самое, число $2\frac{1}{2}$.

Так как $\frac{5}{2} > 0$ и $\left|\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}$, то точка к координатой $\frac{5}{2}$ находится на положительной полуоси, на расстоянии $\frac{5}{2}$ единичного отрезка от точки 0 (рис. 53).

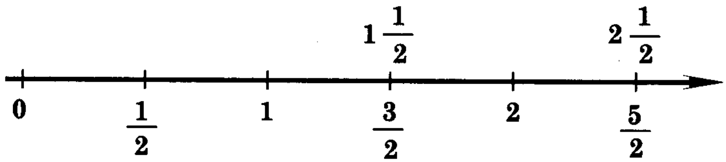


Рис. 53

Пример 3. Изобразим на координатной оси число $-\frac{5}{4}$ или, что то же самое, число $-1\frac{1}{4}$.

Так как $-\frac{5}{4} < 0$ и $\left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$, то точка с координатой $-\frac{5}{4}$ находится на отрицательной полуоси, на расстоянии $\frac{5}{4}$ единичного отрезка от точки 0 (рис. 54).

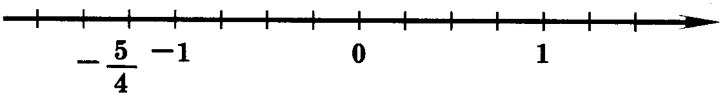


Рис. 54

Точки, изображающие рациональные числа на координатной оси, называют рациональными точками или точками с рациональными координатами.

Если a и b — рациональные числа и $a < b$, то:

1) точка b находится на координатной оси правее точки a;
2) расстояние между точками a и b равно $b - a$;
3) точка $\frac{a+b}{2}$ есть середина отрезка, соединяющего точки a и b (рис. 55).

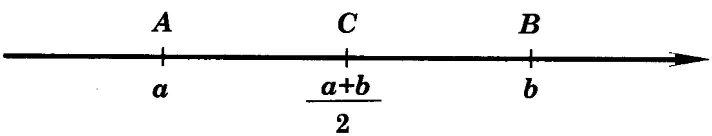


Рис. 55

В самом деле, чтобы вычислить координату точки C — середины отрезка AB, надо к числу a прибавить половину длины отрезка AB:

$$a+\frac{b-a}{2}=\frac{2a}{2}+\frac{b-a}{2}=\frac{2a+b-a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

Например, пусть даны точки $A\left(-\frac{2}{5}\right)$ и $B\left(\frac{4}{5}\right)$. Тогда:

1) $-\frac{2}{5}<\frac{4}{5}$, значит, точка B находится правее точки A на координатной оси;

2) $AB=\frac{4}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$;

3) середина отрезка AB имеет координату:

$$\frac{-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}}{2}=\left(-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right):2=\frac{2}{5}:2=\frac{2}{5\cdot 2}=\frac{1}{5}.$$

Так как для любых рациональных чисел a и b число $\frac{a+b}{2}$ тоже рациональное, то между любыми рациональными точками на оси существует еще хотя бы одна рациональная точка.

Число $\frac{a+b}{2}$ называют **средним арифметическим** чисел a и b.

Например, среднее арифметическое чисел -5 и 7 равно

$$\frac{-5+7}{2}=1.$$

Средним арифметическим нескольких чисел называют частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Например, среднее арифметическое чисел 1, 3, 7 равно

$$\frac{1+3+7}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}.$$

572.°Где на координатной оси расположены точки, изображающие:

а) положительные дроби; б) отрицательные дроби?

573.°Если a и b — рациональные числа и $a<b$, то:

а) как расположены на координатной оси точки a и b?

б) как найти расстояние между точками a и b координатной оси?

в) как найти координату середины отрезка между точками a и b координатной оси?

574.° Что называют средним арифметическим нескольких чисел? Приведите пример.

575. Изобразите на координатной оси (единичный отрезок 8 см) числа:

$$0,\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{8},\ \frac{11}{8},\ \frac{12}{8}.$$

576. Изобразите на координатной оси точки:

$$0,\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{8}{6},\ \frac{9}{6},\ \frac{10}{6},\ \frac{11}{6},\ \frac{12}{6}.$$

Какой единичный отрезок удобно взять?

577. Выберите удобный единичный отрезок и отметьте на координатной оси точки:

а) $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2}$; б) $0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 2,\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4}$.

578. Изобразите на координатной оси точки:

$$A\left(\frac{1}{2}\right),\ B\ (2),\ C\left(2\frac{3}{4}\right).$$

Найдите длины отрезков AB, BC, AC.

579. Изобразите на координатной оси с единичным отрезком 4 см точки:

а) $0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ 1,\ 1\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{5}{8}$;

б) $-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{4},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{4}{4}$.

580. Выберите удобный единичный отрезок и изобразите на координатной оси точки:

а) $-1\frac{1}{2};\ -2\frac{1}{2};\ -3\frac{1}{2};\ -4\frac{1}{2}$;

б) $-\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ -1\frac{1}{3};\ -1\frac{2}{3};\ -2\frac{1}{3};\ -2\frac{2}{3}$.

581. На координатной оси отметьте точку:

а) $A\left(-2\frac{1}{4}\right)$; б) $B\left(-1\frac{1}{5}\right)$; в) $C\left(-3\frac{1}{2}\right)$; г) $D\left(-4\frac{1}{2}\right)$.

582. Найдите координату середины отрезка, соединяющего точки:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$; в) $2\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{8}$; г) $3\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{4}$.

583. Даны точки $A\ (2)$ и $B\left(2\frac{1}{2}\right)$. Найдите координату точки C — середины отрезка AB, координату точки D — середины отрезка CB, координату точки E — середины отрезка CD. Изобразите эти точки на координатной оси.

584.* Найдите координату точки B по координатам точки A и точки C — середины отрезка AB.

а) $A\,(2)$, $C\,(5)$; б) $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $C\ (3)$; в) $A\left(\frac{1}{4}\right)$, $C\left(\frac{2}{3}\right)$.

585.* Найдите координаты точек, делящих отрезок AB на три равные части, если:

а) $A\,(5)$, $B\left(9\frac{1}{2}\right)$; б) $A\left(\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{2}{9}\right)$; в) $A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B\left(3\frac{1}{6}\right)$.

586. Определите расстояние между точками:

а) $A\left(-3\frac{1}{2}\right)$ и $B\,(2)$; б) $A\,(-4)$ и $B\left(-2\frac{1}{2}\right)$;

в) $A\left(-3\frac{1}{4}\right)$ и $B\left(-4\frac{1}{8}\right)$; г) $A\left(-4\frac{7}{8}\right)$ и $B\left(-6\frac{1}{2}\right)$.

Найдите среднее арифметическое чисел **(587 – 588):**

587. а) 4 и 6; б) $\frac{1}{2}$ и 3; в) $\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{8}$; г) $2\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

588. а) $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{4}$ и $-\frac{3}{5}$; в) -16 и -8; г) -16 и 8.

589. Определите координату середины отрезка AB, если:

а) $A\,(-4)$, $B\,(-1)$; б) $A\,(-8)$, $B\,(3)$;

в) $A\left(-\frac{7}{10}\right)$, $B\left(-\frac{1}{10}\right)$; г) $A\left(-\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{6}\right)$.

590. Точка C — середина отрезка AB. Определите координату точки B, если:

а) $A(-2)$, $C\,(1)$; б) $A\,(-5)$, $C\,(-1)$;

в) $A\left(-\frac{3}{10}\right)$; $C\left(\frac{9}{10}\right)$; г) $A\,(0)$, $C\left(\frac{12}{13}\right)$.

591. Найдите среднее арифметическое чисел:

а) 1, 3, 4; б) −5, 8, 13;
в) 10, 12, 14, 16; г) −19, −9, 1, 11.

592.*На координатной оси отмечены точки с координатами: 0, a, b. С помощью циркуля постройте точки с координатами: $-a$, $-b$, $a+b$, $a-b$, $b-a$, $-a-b$ (рис. 56).

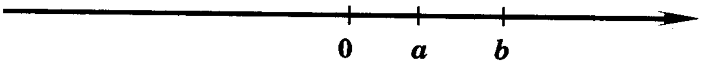


Рис. 56

593.*На рисунке 57 указаны координаты точек A и B. Найдите координату точки C.

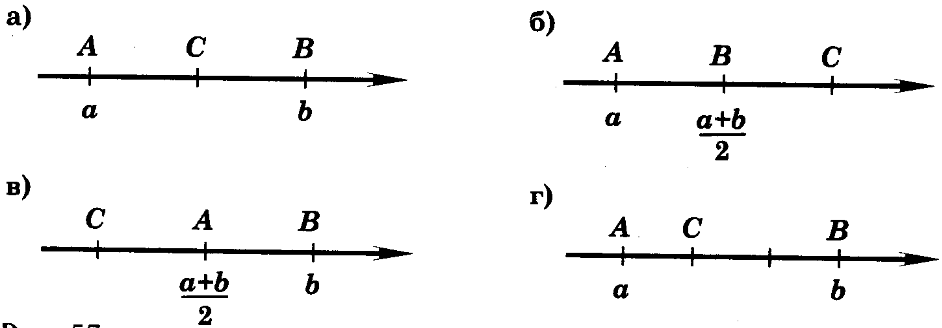


Рис. 57

594. Определите координаты точек, делящих отрезок AB на четыре равные части:

а) $A\left(2\frac{2}{8}\right)$, $B(4)$; б) $A\left(-\frac{5}{7}\right)$, $B\left(\frac{1}{7}\right)$.

595. а) Среднее арифметическое чисел $4\frac{1}{3}$ и a равно $2\frac{1}{2}$. Найдите число a.

б) Среднее арифметическое чисел a и $-\frac{1}{3}$ равно $\frac{5}{6}$. Найдите число a.

596. Отрезок, соединяющий точки 0 и 1 на координатной оси, разделили пополам — получили два отрезка. Правый отрезок разделили пополам — получили еще два отрезка. Правый из них разделили пополам и т. д. Запишите координаты пяти первых полученных таким образом точек. Определите без вычислений координаты следующих пяти таких точек.

3.9. Буквенные выражения

Если в числовом выражении некоторые (или все) числа заменить буквами (разные числа — разными буквами), то получится **буквенное выражение**.

Например, если в числовом выражении $2+3$ заменить число 2 на букву a, число 3 на букву b, то получится буквенное выражение $a+b$.

Мы уже пользовались буквенными выражениями. Произвольные натуральные числа мы обозначали буквами $a, b, \ldots$, произвольное рациональное число мы обозначали $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа ($q \neq 0$).

Если в буквенном выражении $3 \cdot a - 7$ вместо a подставить число, например 3, то получится числовое выражение $3 \cdot 3 - 7$, равное числу 2. Это число называют **значением буквенного выражения** $3 \cdot a - 7$ при $a=3$.

Пример 1. Найдем значение буквенного выражения $7 \cdot x + 2 \cdot x$ при $x=-2$.

Решение. $7 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) = -14 - 4 = -18$.

В буквенных выражениях обычно не пишут знак умножения $(\cdot)$ между числами и буквами. Поэтому считают, например, что $8 \cdot y = 8y$.

Буквенные выражения применяют для записи **формул**. Формула — это запись математических и других законов с помощью буквенных выражений. Некоторыми формулами мы уже пользовались. Например:

1) $P=2(a+b)$ — формула периметра прямоугольника, где a и b — стороны прямоугольника;

2) $S=ab$ — формула площади прямоугольника, где a и b — стороны прямоугольника;

3) $V=abc$ — формула объема прямоугольного параллелепипеда, где a, b и c — его стороны (длина, ширина и высота);

4) $s=vt$ — формула пути равномерного движения по прямой, где v — скорость, t — время движения;

5) $P=4a$ — формула периметра квадрата, где a — сторона квадрата;

6) $S=a^2$ — формула площади квадрата, где a — сторона квадрата.

597. В числовом выражении:

а) $7 \cdot 5 - 1$;   б) $2 \cdot 5 - 5 : 3$

замените число 5 буквой a. Запишите полученное буквенное выражение.

598. Приведите примеры буквенных выражений.

599. Подставьте вместо буквы a в буквенное выражение $a + 3$ число:

а) 5;   б) 3;   в) 1;   г) 0;   д) -1;   е) -3.

600.° Найдите значение буквенного выражения $7 + x$ при x, равном:

а) 0;   б) 3;   в) -1;   г) -4;   д) -7;   е) -10.

601.° Выражение $a + 2$ — это сумма чисел a и 2, выражение $3 - x$ — это разность чисел 3 и x. Прочитайте буквенные выражения:

а) $5 + a$;   б) $7 - a$;   в) $4 - x$;   г) $a + 12$;
д) $2a$;   е) $7b$;   ж) $-3a$;   з) $a + (-3)$.

602. Вычислите значение буквенного выражения по *образцу*:

а) $10 - 4x$ при $x = -5$.
Решение. При $x = -5$
$10 - 4x = 10 - 4 \cdot (-5) = 10 + 20 = 30$.

б) $2x + 1$ при $x = 5$;   в) $6 + 8x$ при $x = -1$;
г) $5 - 4a$ при $a = 2$;   д) $3 - 7b$ при $b = -2$.

Найдите значение числового выражения **(603—604)**:

603. а) $a + b$ при $a = 1$, $b = 3$;
б) $a - b$ при $a = -2$, $b = 4$;
в) $2x - y$ при $x = 5$, $y = 6$;
г) $3x - 2y$ при $x = -1$, $y = -4$.

604. а) ab при $a = \frac{3}{4}$, $b = 1\frac{3}{5}$;

б) $2(a + b)$ при $a = \frac{3}{10}$, $b = 1\frac{1}{2}$;

в) abc при $a = \frac{1}{3}$, $b = 1\frac{1}{2}$, $c = 2$.

Найдите значение каждого буквенного выражения при указанных значениях x **(605 – 606)**:

605.

x	1	3	0	-1	-5	$\frac{1}{3}$
$x-1$						
$2x+1$						
$3-3x$						
$1+\frac{1}{2}x$						

606.

x	1	2	5	0	-2	-4
$2x$						
x^2						

607. Стороны прямоугольника a и b. Запишите формулу периметра прямоугольника. Вычислите периметр при:

а) $a=2$ см, $b=3$ см; б) $a=7$ см, $b=9$ см;

в) $a=1\frac{1}{5}$ см, $b=3\frac{4}{5}$ см; г) $a=2\frac{1}{2}$ см, $b=3\frac{1}{4}$ см.

608. Стороны прямоугольника a и b. Запишите формулу площади прямоугольника. Вычислите площадь при:

а) $a=2$ см, $b=7$ см; б) $a=4$ см, $b=5$ см;

в) $a=3\frac{1}{2}$ см, $b=2\frac{2}{5}$ см; г) $a=3\frac{1}{5}$ см, $b=1\frac{1}{4}$ см.

609. Сторона квадрата a. Запишите формулы периметра и площади квадрата. Вычислите периметр и площадь квадрата при:

а) $a=3$ см; б) $a=8$ см; в) $a=10$ см;

г) $a=\frac{1}{2}$ дм; д) $a=3\frac{1}{2}$ см; е) $a=2\frac{3}{4}$ см.

610. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда a, b, c. Запишите формулу объема прямоугольного параллелепипеда. Вычислите объем при:

а) $a=2$ см, $b=3$ см, $c=5$ см;

б) $a=\frac{2}{5}$ см, $b=4$ см, $c=5$ см.

611. Ребро куба a. Запишите формулу объема куба. Вычислите объем при:

а) $a=4$ см;
б) $a=5$ см;
в) $a=10$ см.

612. Составьте буквенное выражение для вычисления площади S фигуры (рис. 58).

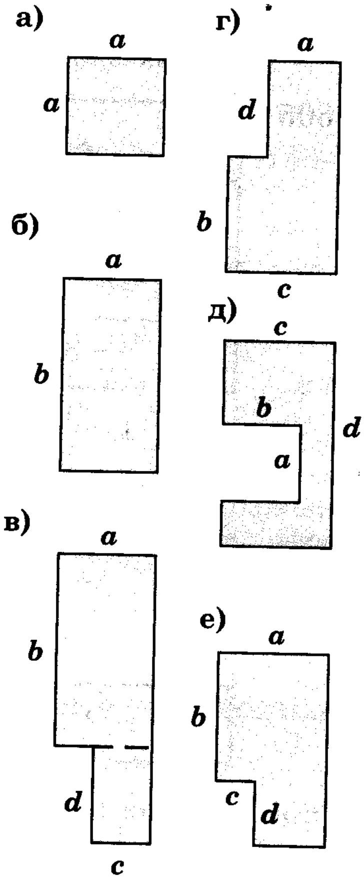


Рис. 58

Решите задачу, составляя числовое выражение **(613 – 615):**

613. а) Купили 7 тетрадей по 50 к. и 2 ручки по 3 р. Сколько заплатили?

б) Купили 4 линейки по 40 к. и 3 угольника по 80 к. Сколько сдачи получили с 5 р.?

614. а) Турист ехал 2 ч на поезде со скоростью 60 км/ч и шел пешком 3 ч со скоростью 5 км/ч. Какое расстояние преодолел турист за 5 ч?

б) Длина маршрута 400 км. Турист ехал 4 ч поездом со скоростью 65 км/ч и 2 ч автобусом со скоростью 60 км/ч. За сколько часов он пройдет остаток пути пешком, если будет идти со скоростью 5 км/ч?

615.* а) В бригаде 8 маляров, каждый за 2 ч может покрасить 1 окно. За сколько часов бригада покрасит 24 окна?

б) Бригаде из 8 маляров нужно покрасить 40 окон. Каждый маляр за 2 ч может покрасить 1 окно. Сколько окон останется покрасить через 8 ч работы бригады?

3.10. Подобные слагаемые

Для любых чисел a, b и c верны равенства:

$$a+b=b+a, \tag{1}$$
$$(a+b)+c=a+(b+c), \tag{2}$$
$$ab=ba, \tag{3}$$
$$(ab)c=a(bc), \tag{4}$$
$$a(b+c)=ab+ac, \tag{5}$$
$$a+0=a, \tag{6}$$
$$a+(-a)=0, \tag{7}$$
$$a-b=a+(-b), \tag{8}$$
$$a\cdot 1=a, \tag{9}$$
$$a\cdot(-1)=-a, \tag{10}$$
$$a\cdot 0=0. \tag{11}$$

С помощью этих равенств можно упрощать буквенные выражения. Например, $7x+3x-5x=(7+3-5)x=5x$.

Слагаемые $7x$, $3x, -5x$ содержат одинаковые буквенные множители. Такие слагаемые называют **подобными**. Числовой множитель в произведении вида $7x$ называют **коэффициентом**.

Пользуясь распределительным законом, можно упрощать выражения, содержащие подобные слагаемые. Например, упростим выражения:

$$5a-4a=(5-4)a=1\cdot a=a;$$
$$9a-13a+a=(9-13+1)a=-3a;$$
$$7a-a-6a=(7-1-6)a=0\cdot a=0;$$
$$x-6x=(1-6)x=(-5)\cdot x=-5x.$$

Такое упрощение выражений называют **приведением подобных слагаемых.** Чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и полученное число умножить на общий буквенный множитель.

В простых случаях промежуточные вычисления опускают, например, пишут: $5a-4a=a$; $a-13a=-12a$.

Если слагаемых больше двух, то при приведении подобных слагаемых бывает полезно группировать отдельно слагаемые с коэффициентами разных знаков.

Например, $\underline{2a}-4a-a+\underline{9a}-6a+\underline{8a}=$
$=(2+9+8)a-(4+1+6)a=$
$=19a-11a=(19-11)a=8a.$

616. Составьте сумму, содержащую подобные слагаемые. Приведите подобные слагаемые.

617. Запишите все произведения, получающиеся изменением порядка множителей:

а) $x \cdot 6$; б) $ab \cdot 2$; в) xby; г) $-2a$.

618.° Назовите коэффициент буквенного выражения:

а) $12a$; б) $-15x$; в) x; г) $-a$.

619. Упростите буквенное выражение, назовите его коэффициент:

а) $1 \cdot a$; б) $(-1) \cdot x$; в) $0 \cdot x$; г) $5 \cdot 2a$;
д) $2 \cdot x \cdot 3$; е) $3a \cdot 4$; ж) $b \cdot 2 \cdot 4$; з) $4 \cdot (-2a)$.

620.° Назовите слагаемые, отличающиеся только коэффициентом:

а) $2a+7+3a-1$; б) $3x-y-4x+x+2y$.

Как называют такие слагаемые?

Приведите подобные слагаемые **(621—623)**:

621. а) $2a+3a$; б) $3x+5x$; в) $12y-7y$; г) $7b-4b$;
д) $x-8x$; е) $a-12a$; ж) $-b-6b$; з) $-7x-13x$.

622. а) $5a+3a+4a$; б) $x+3x+2x$; в) $7y-6y+y$;
г) $4b-5b-2b$; д) $4x-8x-x$; е) $3a-2a-a$.

623. а) $3a-2+5a$; б) $8x-12-x$; в) $4-8y+13y$;
г) $-3-15b-4$; д) $12x-4-1$; е) $a-8-5$.

624. Упростите буквенное выражение и найдите его значение:

а) $a+4a-1$ при $a=2$; б) $x-6x+4$ при $x=-2$.

Приведите подобные слагаемые **(625 — 627)**:

625. а) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x$; б) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x$; в) $1\frac{1}{2}a+a$; г) $1\frac{1}{3}x-x$;

д) $\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}x$; е) $\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x$; ж) $2\frac{1}{2}a-a$; з) $3\frac{1}{2}x-4x$.

626. а) $8-(3a-5)$; б) $4x+(3x-6)$; в) $4x-(3x-5)$;
г) $3a+(a-12)$; д) $-x-(-4x+6)$; е) $x-(-3x-5)$.

627. а) $2a-(3+4a)+(5-7a-7)+4a$;
б) $3x-(8y-12x+y)-6x-(7x-13)$.

Решите задачу, составляя буквенное выражение **(628 – 629):**

628. а) Книга стоит x р. Сколько стоят 8 таких книг?

б) Купили 10 тетрадей по x р. и 3 ручки по 3 р. Сколько заплатили?

в) Купили x линеек по 40 к. и 4 тетради по 50 к. Сколько сдачи получили с 5 р.?

629. а) Турист ехал x ч на поезде со скоростью 50 км/ч и шел пешком 2 ч со скоростью 4 км/ч. Какое расстояние преодолел турист за все время?

б) Длина маршрута 400 км. Турист ехал 4 ч поездом со скоростью x км/ч и 3 ч автобусом со скоростью 70 км/ч. За сколько часов он пройдет остаток пути пешком, если будет идти со скоростью 4 км/ч?

630.*Через одну трубу можно наполнить бассейн за a мин, а через другую — за b мин. Через сколько минут наполнится бассейн, если открыть обе трубы?

Составьте буквенное выражение для получения ответа, найдите его значение при:

а) $a=30$, $b=20$; б) $a=70$, $b=30$; в) $a=60$, $b=90$.

Составьте буквенное выражение для решения задачи **(631 – 632):**

631. Сестра нашла x грибов, а брат в 2 раза больше. Сколько грибов нашел брат? Сколько грибов они нашли вместе?

632. а) На решение примеров Вася затратил x мин, а на решение задачи на 10 мин больше. Сколько минут Вася затратил на все задание?

б) В классе x девочек, а мальчиков на 4 меньше, чем девочек. Сколько всего учащихся в классе?

633. Докажите, что если из суммы двух чисел вычесть их разность, то получится удвоенное меньшее число, т. е. для любых чисел a и b ($a > b$) верно равенство:

$$(a+b)-(a-b)=2b.$$

634. Докажите, что для любых чисел a и b ($a > b$) верно равенство:

$$(a+b)+(a-b)=2a.$$

Сформулируйте доказанное свойство суммы и разности двух чисел в виде правила.

635. В старину для решения задач пользовались такими правилами: чтобы по сумме и разности двух чисел найти большее число, надо к полусумме двух чисел прибавить их полуразность; чтобы найти меньшее число, надо из полусуммы двух чисел вычесть их полуразность. Докажите равенства:

а) $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a;$

б) $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b.$

636. а) Сумма двух чисел равна 37, а разность 13. Найдите эти числа.

б) Сумма двух чисел равна 48, а разность 12. Найдите эти числа.

637. Найдите числа, сумма и разность которых равны соответственно:

а) 49 и 17; б) 72 и 48;
в) 57 и 39; г) 38 и 2.

638. а) Сумма двух чисел равна 304, одно из них больше другого на 50. Найдите эти числа.

б) Сумма двух чисел 760. Одно меньше другого на 98. Найдите эти числа.

639. Если собственную скорость лодки обозначить x км/ч, а скорость течения y км/ч, то что можно найти, вычислив $x+y$; $x-y$?

640. Если скорость лодки по течению x км/ч, а скорость течения y км/ч, то что такое $x-y$; $x-2y$?

641. Если скорость лодки против течения x км/ч, а скорость течения y км/ч, то что такое $x+y$; $x+2y$?

Обозначьте одну из неизвестных величин через x и выразите через x ответ на вопрос задачи **(642 – 645):**

642. а) Когда Маша прочитала несколько страниц книги, то ей осталось прочитать на 40 страниц больше, чем она уже прочитала. Сколько страниц в книге?

б) Когда было пройдено несколько километров, то осталось пройти на 10 км меньше, чем уже пройдено. Определите все расстояние.

в) В многоэтажном доме двухкомнатных квартир в 3 раза больше, чем однокомнатных. Сколько всего в этом доме двухкомнатных и однокомнатных квартир?

г) В некотором поселке имеются только одноэтажные и двухэтажные дома. Причем двухэтажных домов в 10 раз меньше, чем одноэтажных. Сколько всего домов в этом поселке?

643. В вазе лежало 15 яблок. Даша угостила трех подруг, дав всем яблок поровну. Сколько яблок осталось в вазе?

644. а) Папа в 3 раза старше сына. На сколько лет сын младше папы?

б) Дочь в 4 раза младше мамы. На сколько лет мама старше своей дочери?

в) Папа на 28 лет старше сына. Во сколько раз он старше сына?

г) Мама на 24 года старше дочери. Во сколько раз она старше дочери?

645. а) Ученик задумал число, увеличил его в 3 раза и уменьшил результат на 5. Какое число он получил?

б) Ученик задумал число, уменьшил его на 3 и увеличил результат в 5 раз. Какое число он получил?

3.11. Уравнения

Если известно, что сумма числа x и числа 5 равна 8 и требуется определить, какое число обозначено буквой x, то говорят, что надо **решить уравнение** $x+5=8$.

Корнем уравнения называют такое число, при подстановке которого в уравнение вместо x получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни.

Пример 1. Решим уравнение $x+5=8$.

Решение. В левой части уравнения записано число $x+5$, а в правой равное ему число 8. Равенство не изменится, если правую и левую часть уравнения уменьшить на 5:

$$x+5=8,$$
$$x=8-5,$$
$$x=3.$$

Ответ: 3.

Обычно в таком случае говорят, что число 5 перенесли в правую часть уравнения с противоположным знаком.

Пример 2. Решим уравнение $x-2=5$.

Решение. Перенесем (-2) в правую часть уравнения с противоположным знаком:

$$x=5+2,$$
$$x=7.$$

Ответ: 7.

Пример 3. Решим уравнение $3x=4$.

Решение. Произведение чисел 3 и x равно 4, значит,

$$x=4:3,$$
$$x=1\frac{1}{3}.$$

Ответ: $1\frac{1}{3}$.

Пример 4. Решим уравнение $3-\frac{1}{2}x=5$.

Решение. 1) Перенесем число 3 в правую часть уравнения с противоположным знаком.

2) Найдем неизвестный множитель x, разделив 2 на $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Ответ: -4.

$$-\frac{1}{2}x=5-3,$$
$$-\frac{1}{2}x=2,$$
$$x=2:\left(-\frac{1}{2}\right),$$
$$x=-4.$$

646. Является ли число 2 корнем уравнения:

а) $x-2=0$; б) $x+4=0$; в) $2x=4$;
г) $3x-4=x$; д) $x+3=2x+1$; е) $3x+4=6x-2$?

Решите уравнение **(647 – 649)**:

647. а) $x-2=0$; б) $x+4=0$; в) $100+x=0$;
г) $x-5=6$; д) $x+2=5$; е) $x-11=-7$;
ж) $12+x=17$; з) $x+7=7$; и) $x-6=6$.

648. а) $5+x=3$; б) $-7+x=-2$; в) $x+3=-6$;
г) $12+x=-8$; д) $x+18=18$; е) $-13+x=-5$;
ж) $x-\frac{1}{5}=2$; з) $x-2=\frac{1}{2}$; и) $x-4=1\frac{1}{3}$.

649. а) $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; б) $x-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$; в) $x-\frac{1}{18}=\frac{1}{12}$;
г) $x-1=-\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{7}+x=11$; е) $1\frac{1}{5}+x=1$;
ж) $x-6\frac{1}{3}=-3\frac{2}{3}$; з) $\frac{7}{9}+x=2\frac{1}{2}$; и) $x-2\frac{1}{2}=-1\frac{3}{5}$.

Решите уравнение по *образцу* **(650 – 652)**:

650. **а)** $\mathbf{-72x=44}$,

$\mathbf{x=44:(-72)}$,

$\mathbf{x=-\frac{\overset{11}{\cancel{44}}}{\underset{18}{\cancel{72}}}}$,

$\mathbf{x=-\frac{11}{18}}$;

б) $2x=4$; в) $6x=24$; г) $7x=-14$;
д) $-5x=100$; е) $-2x=-8$; ж) $12x=-36$.

651. а) $3x=2$; б) $6x=-7$; в) $-2x=-13$;
г) $2x=0$; д) $-5x=0$; е) $-x=2$;
ж) $-x=0$; з) $-x=-5$; и) $-x=1$.

652. а) $2x=\frac{1}{2}$; б) $3x=-\frac{1}{4}$; в) $-2x=\frac{1}{4}$;
г) $\frac{1}{2}x=3$; д) $\frac{3}{4}x=1$; е) $-\frac{1}{3}x=-3$;
ж) $-\frac{2}{7}x=0$; з) $-4x=\frac{8}{25}$; и) $2x=1\frac{1}{3}$.

Решите уравнение по *образцу* **(653 – 657):**

653. **а)** $\mathbf{3x+4=5x-7,}$
$\mathbf{3x-5x=-7-4,}$
$\mathbf{-2x=-11,}$
$\mathbf{x=-11:(-2),}$
$\mathbf{x=5\frac{1}{2}.}$

Ответ: $\mathbf{5\frac{1}{2}.}$

б) $2x-6=0$;
в) $12+3x=0$;
г) $-x+7=0$;
д) $15-3x=0$;
е) $3x+1=7$;
ж) $5-2x=1$;
з) $5x-2=1$.

654. а) $3x+2x=10$;
б) $5x+x=6$;
в) $4x+2x-7=5$;
г) $7x+x+3=19$;
д) $5=4x-3x$;
е) $8=3x-x$;
ж) $3x-1=2x$;
з) $3x-6=x$.

655. а) $x+3=3x-7$;
б) $3-x=1+x$;
в) $7x+2=3x-10$;
г) $5x-8=3x-8$;
д) $\frac{1}{2}x-3=2-\frac{1}{3}x$;
е) $5x-2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}x$;
ж) $\frac{2}{5}x-1=\frac{3}{4}x-6$;
з) $2x-\frac{3}{5}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$.

656. **а)** $\mathbf{3(x+4)=5x-7,}$
$\mathbf{3x+12=5x-7,}$
$\mathbf{3x-5x=-7-12,}$
$\mathbf{-2x=-19,}$
$\mathbf{x=-19:(-2),}$
$\mathbf{x=9\frac{1}{2}.}$

Ответ: $\mathbf{x=9\frac{1}{2}.}$

б) $2\ (x-5)=9$;
в) $12+3(x-1)=0$;
г) $-(x+8)=3$;
д) $1-5(2-3x)=6$;
е) $7-3(x+1)=6$;
ж) $5-2(3-x)=11$;
з) $2x-(7+x)=2$.

657. а) $3(x+2)-x=10$;
б) $8=3(x-4)-x$;
в) $4x+3(x-7)=5$;
г) $3(x-1)+x=2x$;
д) $5-x=4(x-3)$;
е) $5(x+4)+x=6$;
ж) $7-(2x+3)=9$;
з) $3(x-7)-6x=-x$;
и) $\frac{1}{2}(x-4)+3x=5$;
к) $2\left(x+\frac{3}{5}\right)-x=3\frac{1}{5}$;
л) $5x-\left(\frac{1}{2}x+9\right)=18$;
м) $-2x\left(\frac{1}{3}x+7\right)=-21$.

3.12. Решение задач с помощью уравнений

С помощью уравнений можно решать многие задачи. Для этого нужно:

1) неизвестную величину обозначить буквой;
2) используя условия задачи, составить уравнение;
3) решить составленное уравнение;
4) ответить на вопрос задачи;
5) проверить ответ.

Задача 1. Ученик задумал число, увеличил его в 2 раза, прибавил 3 и получил 7. Какое число он задумал?

Решение. Пусть ученик задумал число x, увеличил его в 2 раза и получил $2x$, прибавил 3 и получил $2x+3$, что по условию задачи равно 7. Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned}
&2x+3=7,\\
&2x=7-3,\\
&2x=4,\\
&x=4:2,\\
&x=2.
\end{aligned}$$

Ответ: Ученик задумал число 2.

Задача 2. В классе 37 учащихся, причем мальчиков на 5 больше, чем девочек. Сколько девочек в классе?

Решение. Пусть в классе x девочек, тогда мальчиков $(x+5)$. Всего в классе 37 учащихся. Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned}
&x+(x+5)=37,\\
&2x+5=37,\\
&2x=37-5,\\
&2x=32,\\
&x=32:2,\\
&x=16.
\end{aligned}$$

Ответ: В классе 16 девочек.

Задача 3. У брата и сестры было поровну денег. Брат купил 3 одинаковые ручки и у него осталось 30 к. Сестра купила 2 такие же ручки и у нее осталось 1 р. 80 к. Сколько стоит ручка?

Решение. Пусть ручка стоит x к. Тогда у брата было $(3x+30)$ к., а у сестры было $(2x+180)$ к. По условию задачи у них было поровну денег. Составим уравнение и решим его:

$$3x+30=2x+180,$$
$$3x-2x=180-30,$$
$$x=150.$$

Ответ: Ручка стоит 1 р. 50 к.

Задача 4. Найдите число, $\frac{4}{5}$ которого равны 12.

Решение. Обозначим неизвестное число через x. Тогда $\frac{4}{5}$ этого числа равны $\frac{4}{5}x$, или 12. Составим уравнение и решим его:

$$\frac{4}{5}x=12,$$
$$x=12:\frac{4}{5},$$
$$x=15.$$

Ответ: 15 — неизвестное число.

---

658. Обозначьте неизвестное число буквой и составьте уравнение по условию задачи:

а) Задумали число, прибавили к нему 8 и получили 33.

б) Задумали число, умножили его на 4 и получили 52.

в) Задумали число, умножили его на 7, к произведению прибавили 12 и получили 26.

г) Задумали число, вычли из него 4, умножили разность на 5 и получили 35.

659. Одно число на 6 больше другого, а их сумма равна 18. Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой:

а) меньшее число; б) большее число.

660. Одно число на 4 меньше другого, а их сумма равна 22. Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой:

а) меньшее число; б) большее число.

661. Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой одно из неизвестных чисел и решите его:

а) Одно число в 5 раз больше другого, а их сумма равна 42.

б) Одно число в 3 раза меньше другого, а их сумма равна 28.

в) Одно число в 4 раза больше другого, а их разность равна 39.

г) Одно число в 7 раз меньше другого, а их разность равна 54.

662. а) Брат нашел в 3 раза больше белых грибов, чем сестра. Всего они нашли 24 белых гриба. Сколько белых грибов нашел брат и сколько сестра?

б) На двух полках 63 книги, причем на одной в 2 раза меньше книг, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?

663. а) В книжке 60 страниц. Прочитали в 2 раза больше страниц, чем осталось прочитать. Сколько страниц осталось прочитать?

б) На автомобильной стоянке стоит 72 автомобиля, причем легковых автомобилей в 7 раз больше, чем грузовых. Сколько грузовых автомобилей на автостоянке?

664. а) У хозяйки было 20 кур и цыплят. Кур было в 4 раза меньше, чем цыплят. Сколько цыплят было у хозяйки?

б) У хозяйки было 16 уток и утят. Уток было в 3 раза меньше, чем утят. Сколько утят было у хозяйки?

665. а) Кусок полотна в 124 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 12 м больше, чем другой. По сколько метров полотна будет в каждой части?

б) Кусок лески длиной 16 м надо разрезать на две части так, чтобы длина одной части была на 1 м больше, чем другой. По сколько метров лески будет в каждой части?

666. а) В школу привезли 690 столов и стульев. Стульев было на 230 больше, чем столов. Сколько столов и стульев в отдельности привезли в школу?

б) В соревнованиях по лыжам участвовали 53 человека. Девочек было на 17 меньше, чем мальчиков. Сколько мальчиков и девочек в отдельности участвовало в соревнованиях?

667. Двое должны поделить между собою 15 р. так, чтобы одному досталось на 4 р. больше, чем другому. Сколько достанется каждому?

668. а) За конфеты заплатили в 3 раза больше, или на 6 р. больше, чем за печенье. Сколько заплатили за печенье?

б) За тетради заплатили в 4 раза больше, или на 7 р. 20 к. больше, чем за линейки. Сколько заплатили за линейки?

669. а) Папа в 8 раз старше дочери, а дочь на 28 лет младше папы. Сколько лет папе?

б) Мама в 6 раз старше сына, а сын на 25 лет младше мамы. Сколько лет маме?

670. На солнышке грелись несколько кошек. У них вместе лап на 10 больше, чем ушей. Сколько кошек грелось на солнышке?

671. Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, а каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?

672. В хозяйстве имеются куры и овцы. Сколько тех и других, если известно, что у них всех вместе:

а) 19 голов и 46 ног; б) 30 голов и 74 ноги.

673. У пятнадцати треугольников и четырехугольников 53 угла. Сколько треугольников и четырехугольников в отдельности?

674. а) Сумму в 74 р. заплатили девятнадцатью монетами по 2 р. и 5 р. Сколько было монет по 2 р.?

б) *Старинная задача.* Если разменять 27 рублей на гривенники и двугривенные[1] так, чтобы всех монет было 170, то сколько будет гривенников и двугривенных?

675. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Спросил некто учителя:

— Сколько имеешь учеников у себя в учении, ибо хочу отдать тебе в учение своего сына?

Учитель же отвечал ему:

— Если придет ко мне еще столько, сколько имею, да еще половина и еще четверть и еще твой сын, то будет у меня 100 учеников.

Сколько учеников было у учителя?

676. *Старинная задача (Греция).*

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

[1] Гривенник и двугривенный — старинные названия монет в 10 и 20 к.

3.13. Исторические сведения

Одно из значений латинского слова *ratio* — отношение двух чисел. Отсюда понятно определение: рациональным называют число, которое может быть представлено как отношение двух целых чисел.

Как известно, к понятию положительной дроби как отношению двух натуральных чисел математики пришли очень давно.

К признанию отрицательных дробей как чисел математики подходили очень долго. Нуль, в начале означавший лишь отсутствие числа, стал рассматриваться как число только после введения отрицательных чисел. Как уже отмечалось в главе «Целые числа», современное истолкование рациональных чисел, основанное на откладывании отрезков на координатной оси вправо или влево от начальной точки (от нуля), было дано лишь в XVII веке.

Множество всех рациональных чисел обладает следующим замечательным свойством: любая арифметическая операция (сложение, умножение, вычитание и деление, за исключением деления на нуль) не выводит за пределы этого множества. Иными словами, результат применения любой такой операции к двум рациональным числам дает также рациональное число. В таких случаях говорят, что множество замкнуто относительно всех этих операций. Обратим внимание, что ни одно из рассмотренных ранее множеств чисел (натуральных, целых, положительных рациональных) не обладало таким свойством.

Изучение свойств множеств, замкнутых относительно заданных операций, привело к созданию области математики, носящей название «Теория групп». Эта теория применяется в различных разделах науки: кристаллографии, геометрии, физике, механике и т. д.

3.14. Занимательные задачи

677. а) Рыба весит 5 кг и еще полрыбы. Сколько весит рыба?
б) Книга стоит 3 р. и еще полкниги. Сколько стоит книга?

678.*Один автолюбитель рассказывал: «Я отправился путешествовать на «Москвиче», имея одно запасное колесо. Время от времени я заменял колеса, и оказалось, что первое колесо проехало 1000 км, второе — 900 км, третье — 800 км, четвертое — 700 км и пятое — 600 км». Сколько километров проехал автомобиль?

Может ли автомобилист так менять колеса, чтобы первое колесо проехало 1400 км, второе — 1200 км, третье — 1000 км, четвертое — 800 км и пятое — 600 км?

679. Среди математиков каждый седьмой философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

680. Восемь подружек решили обменяться фотографиями так, чтобы у каждой из них оказались фотографии остальных подруг. Сколько фотографий для этого потребуется?

681. В нашем классе каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. Сколько учащихся в нашем классе, если мальчиков на 5 больше, чем девочек?

682. В первенстве по футболу принимают участие 8 команд. Каждая команда играет с каждой по одному разу. За выигрыш команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Какая наибольшая и какая наименьшая разница очков может быть между первым и последним местом, если известно, что первое место заняла одна команда и последнее место заняла одна команда?

683. Большая коробка конфет в 2 раза дороже маленькой. Хотят купить 3 большие коробки и 2 маленькие, но если купить 2 большие коробки и 3 маленькие коробки, то покупка будет дешевле на 15 р. Сколько стоит каждая коробка конфет?

684. Один экскаватор может вырыть траншею за 30 ч, другой — за 20 ч. Первый проработал 9 ч, потом второй закончил работу. За сколько часов была выполнена работа?

685.* *Старинная задача (Индия, XI в.).*

Есть кадамба цветок,
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла
Вся в цвету сименгда
И на ней третья часть поместилась.
Разность их ты найди,
Ее трижды сложи
И тех пчел на Кутай посади.

Лишь одна не нашла
Себе места нигде
Все летала то взад, то вперед и везде
Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здесь собралось.

686.**Старинная задача (Армения, VII в.).* Один купец прошел через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества, во втором городе половину и треть [с того, что осталось], и в третьем городе снова взыскали половину и треть [с того, что у него было]; и когда он прибыл домой, у него осталось 11 дахеканов [денежных единиц]. Итак, узнай, сколько всего дахеканов было вначале у купца.

687.**Из Акмимского папируса (VI в.).* Некто взял из сокровищницы $\frac{1}{13}$. Другой взял $\frac{1}{17}$ из того, что осталось. Оставил же в сокровищнице 150. Мы хотим узнать, сколько было в сокровищнице первоначально.

688.**Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некто пришел в ряд, купил игрушек для малых ребят: за первую игрушку заплатил $\frac{1}{5}$ часть всех своих денег, за другую $\frac{3}{7}$ остатка от первой покупки, за третью игрушку заплатил $\frac{3}{5}$ остатка от второй покупки, а по приезде в дом нашел остальных в кошельке денег 1 р. 92 к. Спрашивается, сколько в кошельке денег было и сколько за которую игрушку денег заплачено.

689. *Старинная задача.* Для перевозки 25 зеркал нанят извозчик с условием заплатить ему по 1 р. 50 к. за доставку каждого зеркала в целости и вычесть с него по 5 р. за каждое разбитое им зеркало. На дороге извозчик действительно разбил несколько зеркал и за перевозку получил только 18 р. Сколько зеркал он доставил в целости?

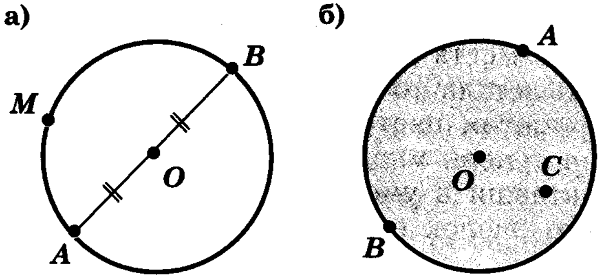


Рис. 59

690. Если точка O середина отрезка AB, то говорят, что точки A и B **симметричны относительно точки** O, называемой **центром симметрии.** Центр симметрии симметричен сам себе. Концы диаметра окружности симметричны относительно центра окружности (рис. 59, *а*), так как точка O лежит на отрезке AB и $AO = OB$.
Постройте окружность с центром O, отметьте на ней точку M. Постройте точку N, симметричную точке M относительно точки O.

691. Постройте круг с центром O и отметьте точки A, B и C (рис. 59, *б*). Постройте точки, симметричные точкам A, B и C относительно точки O.

692. Фигуру, каждая точка которой имеет симметричную относительно центра O точку этой же фигуры, называют **симметричной относительно центра** O. Объясните, почему окружность с центром O, круг с центром O, кольцо с центром O (рис. 60) симметричны относительно центра O.

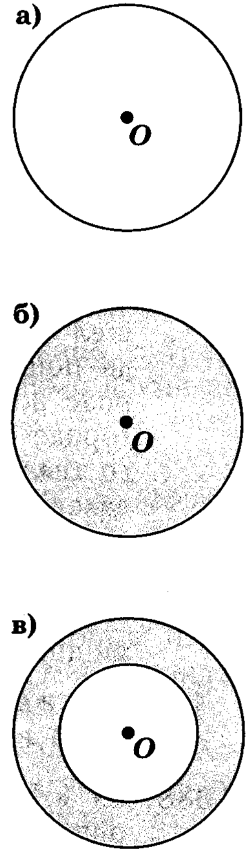


Рис. 60

693. Верно ли, что квадрат симметричен относительно точки O (рис. 61)? Какая точка квадрата симметрична точке A; B; C; D; O?

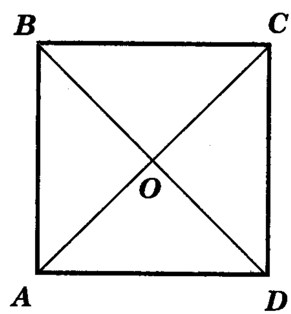


Рис. 61

694.*Известно, что симметричные фигуры равны. Докажите, что прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника, делит его на две равные части.

Рис. 62

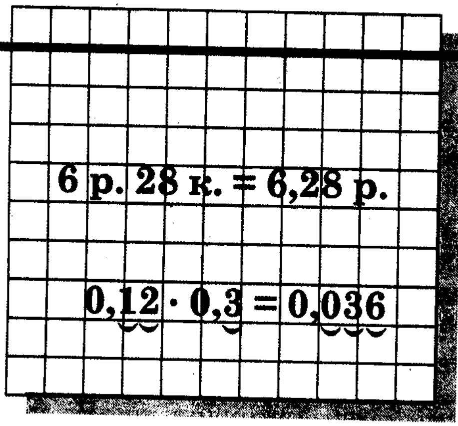
695.*Вороне как-то бог послал кусочек сыра... Предположим, что, в отличие от героини известной басни, наша Ворона захотела разделить сыр поровну с Лисицей. Как она должна поступить, если кусок сыра имеет форму прямоугольника с аккуратной круглой дыркой (рис. 62), толщина куска сыра во всех местах одна и та же, резать сыр разрешается по прямой?

696.*Первый мастер шьет шубу за 5 дней, а второй — за 3 дня. Как распределить между ними заказ на пошив 9 шуб, чтобы каждый сшил целое число шуб и заказ был выполнен в кратчайший срок?

697.*Лиса Алиса, Кот Базилио и Буратино откопали на Поле чудес кувшин с золотыми. Лиса Алиса хотела взять себе треть всех золотых и половину остатка дать Коту Базилио. Кот Базилио хотел взять себе половину всех золотых и треть остатка дать Лисе Алисе. На каком варианте дележа они остановились, Буратино не помнит, но он точно знает, что ему досталось 5 золотых. Сколько золотых было в кувшине?

698.*Имея полный бак топлива, рыбак может проплыть на моторной лодке 20 км против течения или 30 км по течению реки. На какое наибольшее расстояние он может отплыть по реке при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь?

699.*Остап Бендер купил для «Антилопы-Гну» 4 новых колеса. Адам Козлевич знает, что передние колеса автомобиля изнашиваются через 12 тыс. км пробега, а задние — через 8 тыс. км пробега. Какой наибольший путь может проехать «Антилопа-Гну», если Адам Козлевич догадается вовремя поменять задние колеса с передними?



ГЛАВА IV

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

4.1. Понятие положительной десятичной дроби

Дроби, у которых знаменатель является степенью числа 10, часто записывают в более простой форме, не записывая знаменатель, а отделяя целые и дробные части друг от друга запятой (при этом считают, что целая часть правильной дроби равна 0). Например,

$$\frac{27}{10}=2\frac{7}{10}=2{,}7;\quad \frac{717}{100}=7\frac{17}{100}=7{,}17;\quad \frac{111}{1000}=0{,}111.$$

Записанные в такой форме дроби называют **десятичными дробями**, т. е. записи $2\frac{7}{10}$ и 2,7 — разные формы записи одного и того же числа: первая — в виде смешанной дроби, вторая — в виде десятичной дроби. Пока будем рассматривать только положительные десятичные дроби.

Напомним, что в десятичной системе счисления значение каждой цифры зависит от разряда (позиции), в котором она записана. При этом единицы соседних разрядов отличаются в 10 раз. Например, десяток в 10 раз меньше сотни, единица в 10 раз меньше десятка.

Первый разряд после запятой называют **разрядом десятых.** Например, число 2,7 состоит из 2 целых и 7 десятых — читают «две целых семь десятых».

Второй разряд после запятой называют **разрядом сотых**. Например, дробь 0,35 читают «нуль целых тридцать пять сотых». Число 0,35 состоит из 0 целых 3 десятых и 5 сотых.

Чтобы лучше понять правила записи и чтения десятичных дробей, рассмотрим таблицу разрядов и приведенные в ней примеры записи чисел:

Обыкновенная (смешанная) дробь	Десятичная дробь											
	Целая часть				,	Дробная часть						
	...	сотни	десятки	единицы		десятые	сотые	тысячные	десятитысячные	стотысячные	миллионные	...
$2\frac{7}{10}$				2	,	7						
$\frac{35}{100}$				0	,	3	5					
$\frac{19}{1000}$				0	,	0	1	9				
$6\frac{701}{10000}$				6	,	0	7	0	1			

Для записи числа $\frac{19}{1000}$ в виде десятичной дроби нужно учесть, что $\frac{19}{1000} = \frac{10+9}{1000} = \frac{10}{1000} + \frac{9}{1000} = \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{9}{1000}$, т. е. число содержит 0 десятых, 1 сотую, 9 тысячных:

$$\frac{19}{1000} = 0{,}019.$$

Как видим, после запятой в записи десятичной дроби получается столько цифр, сколько нулей содержит знаменатель соответствующей ей обыкновенной дроби. Например,

$$\frac{13}{1\underline{00}} = 0{,}\underline{13}\,; \qquad 12\frac{7}{1\underline{000}} = 12{,}\underline{007}; \qquad \frac{135}{1\underline{0000}} = 0{,}\underline{0135}.$$

2 нуля 2 цифры   3 нуля 3 цифры   4 нуля 4 цифры

700. Запишите обыкновенные и смешанные дроби в виде десятичных и прочитайте полученные записи:

а) $3\frac{1}{10}$, $2\frac{7}{10}$, $15\frac{4}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{10}$;

б) $5\frac{12}{100}$, $7\frac{20}{100}$, $6\frac{91}{100}$, $\frac{13}{100}$, $\frac{85}{100}$;

в) $5\frac{135}{1000}$, $17\frac{399}{1000}$, $8\frac{999}{1000}$, $\frac{777}{1000}$, $\frac{123}{1000}$;

г) $4\frac{8899}{10000}$, $1\frac{5678}{10000}$, $\frac{1234}{10000}$, $\frac{6969}{10000}$.

701. Прочитайте дроби, запишите их в виде обыкновенных или смешанных дробей:

а) 3,2; 7,3; 3,5; 0,1; 0,9;
б) 7,12; 9,23; 10,34; 0,45; 0,56;
в) 12,333; 16,596; 0,887; 0,379; 0,111;
г) 2,1111; 5,1995; 4,1996; 0,1997; 0,1998.

702. Запишите обыкновенные и смешанные дроби в виде десятичных и прочитайте полученные записи:

а) $4\frac{1}{100}$, $215\frac{3}{100}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{2}{100}$;

б) $3\frac{1}{1000}$, $7\frac{12}{1000}$, $\frac{8}{1000}$, $\frac{81}{1000}$;

в) $6\frac{5}{10000}$, $2\frac{13}{10000}$, $\frac{356}{10000}$, $\frac{679}{10000}$;

г) $7\frac{7}{100000}$, $100\frac{46}{100000}$, $\frac{627}{100000}$, $\frac{1111}{100000}$.

703.° Прочитайте дроби:

а) 5,05; 7,01; 12,07; 0,01; 0,09;
б) 19,004; 6,016; 8,008; 0,001; 0,022;
в) 13,0007; 2,0089; 16,0999; 0,0001; 0,0022;
г) 31,00009; 7,00099; 0,00001; 0,00666.

704.° Прочитайте дроби, назовите их целые части, назовите цифры разрядов десятых, сотых и т. д.

а) 16,789; 0,1234; 100,56789;
б) 0,023; 7,00526; 0,00017.

705. Запишите в виде десятичной дроби по *образцу*:

а) $\mathbf{\frac{18}{30}=\frac{3\cdot6}{3\cdot10}=\frac{6}{10}=0{,}6;}$ б) $\frac{27}{90}$, $\frac{24}{120}$, $\frac{24}{40}$, $\frac{48}{60}$;

в) $\frac{15}{500}$, $\frac{160}{4000}$, $\frac{36}{900}$, $\frac{140}{700}$; г) $\frac{11}{11000}$, $\frac{81}{3000}$, $\frac{144}{40000}$, $\frac{8888}{400000}$.

706. Запишите в виде десятичной дроби по *образцу*:

а) $\mathbf{\frac{1}{4}=\frac{1\cdot25}{4\cdot25}=\frac{25}{100}=0{,}25;}$ б) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$;

в) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$; г) $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{21}{50}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{9}{200}$;

д) $\frac{16}{10}$, $\frac{324}{100}$, $\frac{99}{10}$, $\frac{1234}{1000}$; е) $\frac{168}{40}$, $\frac{328}{80}$, $\frac{9999}{900}$, $\frac{1648}{160}$;

ж) $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{17}{4}$, $\frac{39}{25}$; з) $\frac{13}{20}$, $\frac{14}{20}$, $\frac{14}{700}$, $\frac{35}{500}$, $\frac{36}{500}$.

707. Выразите в метрах и дециметрах по *образцу:*

а) 3,2 м = 3 м 2 дм; б) 4,9 м; в) 6,1 м.

708. Выразите в метрах и сантиметрах:

а) 3,12 м; б) 8,54 м; в) 6,02 м; г) 6,2 м.

709. Выразите в рублях и копейках по *образцу*:

а) 3,45 р. = 3 р. 45 к.; б) 3,56 р.; в) 5,6 р.;
г) 6,05 р.; д) 6,1 р.; е) 0,25 р.

710. Выразите в килограммах и граммах:

а) 8,537 кг; б) 8,037 кг; в) 8,007 кг;
г) 8,530 кг; д) 8,500 кг; е) 8,03 кг.

711. Выразите в тоннах и килограммах:

а) 0,435 т; б) 4,350 т; в) 5,024 т;
г) 6,030 т; д) 7,008 т; е) 7,800 т.

712. Запишите величину, используя десятичные дроби:

а) 23 см 2 мм = $\mathbf{23\frac{2}{10}}$ см = 23,2 см;

б) 5 м 6 дм; в) 7 м 54 см; г) 8 м 4 см;
д) 11 ц 52 кг; е) 11 ц 50 кг; ж) 11 ц 5 кг;
з) 5 р. 48 к.; и) 5 р. 50 к.; к) 3 р. 5 к.

713. Запишите в виде неправильной дроби:

а) 12,3; б) 1,23; в) 10,123;
г) 987,6; д) 98,76; е) 9,876;
ж) 2,2222; з) 22,222; и) 222,22.

714. Выполните действия, предварительно записав десятичные дроби в виде обыкновенных дробей:

а) $8{,}23+3{,}56$; б) $7{,}39-6{,}27$; в) $0{,}3\cdot 0{,}2$;
г) $1{,}3\cdot 0{,}02$; д) $4{,}62:2$; е) $4{,}62:0{,}2$.

4.2. Сравнение положительных десятичных дробей

В дробной части десятичной дроби можно приписать справа нули — получится дробь, равная данной.

Например, $0{,}2=0{,}20=0{,}200=$ ... потому, что

$$0{,}2=\frac{2}{10}=\frac{20}{100}=\frac{200}{1000}=\ldots .$$

Если в дробной части десятичной дроби имеются справа нули, то их можно отбросить — получится дробь, равная данной.

Например, $8{,}3600=8{,}36$, так как

$$8{,}3600=8\frac{3600}{10000}=8\frac{36}{100}=8{,}36.$$

Натуральное число можно записать в виде равной ему десятичной дроби.

Например, $7=7{,}0=7{,}00=7{,}000=\ldots$, так как

$$7=7\frac{0}{10}=7\frac{0}{100}=7\frac{0}{1000}=\ldots .$$

Отметим, что $0=0{,}0=0{,}00=0{,}000=\ldots$.

На практике нули справа после запятой сохраняют в тех случаях, когда нужно подчеркнуть точность измерения.

Например, если в результате измерения длины отрезка с точностью до сантиметра получили 3 м 0 см, то пишут 3,00 м.

Из двух десятичных положительных дробей больше та, у которой целая часть больше; при равенстве целых частей — больше та дробь, у которой цифра разряда десятых больше; при равенстве целых частей и цифр разряда десятых — больше та дробь, у которой цифра разряда сотых больше и т. д.

Например, $3{,}5>2{,}5$, так как целая часть первой дроби больше целой части второй дроби; $0{,}5>0{,}38$, так как целые части дробей равны, но цифра разряда десятых первой дроби больше чем цифра разряда десятых второй дроби[1].

[1] Когда говорят, что цифры равны (или одна цифра больше другой), то имеют в виду, что соответствующие им числа равны (или одно число больше другого).

715. Что получится, если у десятичной дроби в дробной части приписать справа нули? Приведите примеры.

716. Что получится, если у десятичной дроби в дробной части отбросить справа нули? Приведите примеры.

717. Какая из двух положительных десятичных дробей больше? Приведите примеры.

718. Уравняйте число цифр после запятой у дробей:

а) 1,2; 3,51; 0,123;
б) 0,6; 3,02; 7,125; 0,48007;
в) 6,23; 7,5; 8,2001; 9,00007.

719.° Сколько десятых, сотых, тысячных содержит дробь:

а) 1,235; б) 1,27; в) 3,51; г) 0,5?

720. Какая из дробей больше:

а) 6,35 или 5,19; б) 7,48 или 7,51;
в) 2,52 или 2,53; г) 17,49 или 17,5?

721. Используя знаки «=» и «≠» сравните дроби:

а) 7,5 и 7,50; б) 8,5 и 9,1; в) 0,48 и 0,4;
г) 0,25 и 0,2500; д) 7,48 и 7,481; е) 3,1 и 2,99.

Используя знаки «>» и «<», сравните дроби **(722 – 724)**:

722. а) 3,59 и 7,1; б) 6,28 и 6,9;
в) 0,4 и 0,51; г) 72,7 и 7,27;
д) 4,1234 и 4,1231; е) 12,39 и 1,2399.

723. а) 2,078 и 2,780; б) 3,205 и 3,025;
в) 7,250 и 7,205; г) 4,290 и 4,295;
д) 12,4 и 12,41; е) 15,129 и 15,1.

724. а) 6,92 и 6,9; б) 1,2 и 1,1999;
в) 72,39 и 7,2399; г) 0,48 и 0,47111.

Укажите число, большее одного из данных чисел, но меньшее другого **(725 – 727)**:

725. а) 4000 и 5000; б) 4200 и 4300;
в) 4250 и 4260; г) 4290 и 4300.

726. а) 0,600 и 0,700; б) 0,650 и 0,660;
в) 0,650 и 0,655; г) 0,655 и 0,660.

727. а) 0,6 и 0,7; б) 0,48 и 0,49;
в) 0,65 и 0,66; г) 0,325 и 0,326.

728. Расположите дроби в порядке возрастания:
а) 0,8; 1,17; 0,789; 1,7; б) 3,5; 0,35; 3,35; 0,335.

729. Расположите дроби в порядке убывания:
а) 7,4; 6,98; 7,199; 6,899; б) 0,449; 0,49; 0,5; 0,499.

730. Изобразите на координатной прямой числа:
а) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0;
б) 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0.

731. В каком порядке (слева направо) на координатной прямой расположены точки:
а) $A(1{,}2)$, $B(0{,}2)$, $C(1{,}13)$; б) $M(7{,}48)$, $N(4{,}78)$, $K(7{,}8)$?

732. Запишите величины с помощью десятичных дробей и сравните их:
а) 7 кг 485 г и 6 кг 90 г; б) 5 м 48 см и 5 м 40 см;
в) 7 км 740 м и 7 км 74 м; г) 8 т 5 кг и 8 т 500 кг.

733. Запишите в метрах и сантиметрах:
а) 6,79 м; 12,48 м; 16,06 м; 16,60 м;
б) 19,01 м; 7,40 м; 7,4 м; 8,1 м.

734. Запишите в тоннах и килограммах:
а) 3,569 т; 6,760 т; 6,700 т; 6,070 т;
б) 6,007 т; 4,480 т; 4,48 т; 9,4 т.

4.3. Сложение и вычитание десятичных дробей

Сложение положительных десятичных дробей производится так же, как и сложение натуральных чисел. Поясним это на примерах.

Пример 1. Сложим числа 2,35 и 7,561.

Решение.

$$2{,}35+7{,}561=2{,}350+7{,}561=\frac{2350}{1000}+\frac{7561}{1000}=\frac{2350+7561}{1000}=\frac{9911}{1000}=9{,}911.$$

Как видим, сложение десятичных дробей сводится к сложению натуральных чисел. Поэтому сложим данные числа столбиком, подписывая цифры соответствующих разрядов друг под другом и рассуждая следующим образом:

$$\begin{array}{r} 2{,}350 \\ +\,7{,}561 \\ \hline 9{,}911 \end{array}$$

0 тысячных +1 тысячная =1 тысячная. Пишем (под чертой) в разряде тысячных цифру 1.

5 сотых +6 сотых =11 сотых =1 десятая +1 сотая. Пишем в разряде сотых цифру 1 и запоминаем 1 десятую.

1 десятая +3 десятых +5 десятых =9 десятых. Пишем в разряде десятых цифру 9.

2 единицы +7 единиц =9 единиц. Пишем в разряде единиц цифру 9. Получаем ответ: 9,911.

Вычитание десятичных дробей производится так же, как и вычитание натуральных чисел. Пока мы рассматриваем вычитание из большего положительного числа меньшего.

Пример 2. Вычислим разность 3,51−2,387.

Решение. Учитывая, что 3,51−2,387=3,510−2,387, проведем вычитание столбиком, подписывая цифры соответствующих разрядов друг под другом и рассуждая следующим образом:

$$\begin{array}{r} 3{,}510 \\ -\,2{,}387 \\ \hline 1{,}123 \end{array}$$

Из 0 тысячных вычесть 7 тысячных (чтобы получить неотрицательное число) нельзя. Занимаем в уменьшаемом одну сотую и раздробляем ее в 10 тысячных. Тогда 10 тысячных − 7 тысячных = =3 тысячных. Пишем в разряде тысячных цифру 3.

Из 0 сотых вычесть 8 сотых (чтобы получилось неотрицательное число) нельзя. Занимаем в уменьшаемом одну десятую и раздробляем ее в 10 сотых. Тогда 10 сотых − 8 сотых= =2 сотых. Пишем в разряде сотых цифру 2.

4 десятых −3 десятых =1 десятая. Пишем в разряде десятых цифру 1.

3 единицы −2 единицы =1 единица. Пишем в разряде единиц цифру 1. Получаем ответ: 1,123.

При сложении и вычитании любых десятичных дробей поступают так же, как в примерах 1 и 2. А именно, сначала у дробей уравнивают число цифр после запятой, затем их складывают или вычитают столбиком как натуральные числа. В ответе ставят запятую под запятой.

Для десятичных дробей выполняются переместительный и сочетательный законы сложения, так как эти законы выполняются для равных им обыкновенных дробей. Это позволяет в сумме нескольких слагаемых переставлять слагаемые и заключать их в скобки любым образом и опускать скобки по тем же правилам, как и для обыкновенных дробей.

Вычислите **(735 – 737):**

735. а) $1{,}5+2{,}3$; б) $3{,}7+1{,}4$;
в) $12{,}3+1{,}23$; г) $7{,}84+8{,}9$.
д) $125{,}34+12{,}534$; е) $7{,}53+8{,}624$.

736. а) $6{,}48-2{,}35$; б) $7{,}26-3{,}19$; в) $2{,}528-1{,}9$;
г) $7{,}2-3{,}148$; д) $6{,}98-3{,}99$; е) $7{,}25-3{,}261$.

737. а) $38+0{,}56$; б) $7{,}39+11$; в) $0{,}736+25$;
г) $8{,}248-6$; д) $7{,}2-1{,}899$; е) $5-3{,}78$.

Вычислите, используя группировку слагаемых **(738 – 739):**

738. а) $7{,}48+3{,}19+1{,}12+6{,}81$;
б) $6{,}2+7{,}49+1{,}8+1{,}29$;
в) $16{,}28+5{,}395-1{,}18-4{,}305$;
г) $7{,}358+8{,}24-6{,}458-2{,}84$.

739. а) $5{,}236+(4{,}664-2{,}6)$;
б) $4{,}756-(2{,}395-1{,}244)$;
в) $14{,}529+(2{,}461-1{,}8)$;
г) $9{,}75-(3{,}65+1{,}999)$.

740. Заменив десятичную дробь обыкновенной, вычислите:
а) $2{,}5+3\frac{1}{2}$; б) $7\frac{3}{4}-2{,}25$; в) $0{,}2\cdot 3$;
г) $4{,}8:4$; д) $6:0{,}6$; е) $12:0{,}3$.

741. Заменив обыкновенную дробь десятичной, вычислите:
а) $\frac{1}{10}+2{,}5$; б) $7\frac{3}{100}-2{,}15$; в) $4{,}12-1\frac{1}{5}$;
г) $9{,}1+3\frac{1}{2}$; д) $17{,}3-9\frac{1}{4}$; е) $6{,}09+2\frac{1}{25}$.

742. Вычислите периметр прямоугольника, если:
а) его ширина равна 2,3 см, а длина на 1,9 см больше;
б) его ширина равна 2,48 дм, а длина на 1,6 дм больше;
в) его длина равна 12,1 см, а ширина на 4,8 см меньше;
г) его длина равна 18 дм, а ширина на 4,7 дм меньше.

743. Вычислите:
а) 1,2 дм + 1,2 см = 1,2 дм + 0,12 дм = 1,32 дм;
б) 16 см + 4,35 дм; в) 7,35 м + 4,9 дм;
г) 2 · 4,8 дм; д) 4,8 дм : 2;
е) 12,3 дм – 42 см; ж) 34 дм – 34 см.

744. Вычислите периметр треугольника, имеющего стороны:

а) 490 мм, 48 см, 4,7 дм;
б) 23 мм, 3,4 см, 0,48 дм;
в) 3,5 см, 0,38 дм, 0,041 м.

745. В квартире две комнаты. Одна комната имеет площадь 16,3 м^2, а вторая на 1,9 м^2 меньше. Какова площадь двух комнат?

746. В квартире три комнаты общей площадью 44,8 м^2. Одна комната имеет площадь 11,3 м^2, вторая на 3,5 м^2 больше. Найдите площадь третьей комнаты.

747. Щенок весит 2,5 кг, а котенок на 2,1 кг меньше. Сколько весят котенок и щенок вместе?

748. Турист проехал на автобусе 48,4 км — это на 25,8 км больше, чем он прошел пешком. Какое расстояние турист преодолел на автобусе и пешком?

749. Боря собрал 12,6 кг яблок — это на 2,8 больше, чем собрал Алеша, и на 1,4 кг меньше, чем собрал Сережа. Сколько килограммов яблок собрали мальчики вместе?

750. В кассе была некоторая сумма денег. Поступило в кассу 480,5 р., а выдано из кассы 538,1 р. После чего в кассе осталось 1230,8 р. Сколько денег было в кассе первоначально?

751. Скорость течения реки 4,2 км/ч, а собственная скорость лодки 7,5 км/ч. Определите скорость лодки по течению и против течения.

752. Скорость катера по течению 22,5 км/ч, а против течения 18,5 км/ч. Какова собственная скорость катера?

4.4. Перенос запятой в положительной десятичной дроби

Чтобы десятичную дробь увеличить в 10, 100, 1000 и т. д. раз, т. е. умножить на 10, 100, 1000 и т. д., надо в записи дроби перенести запятую вправо на 1, 2, 3 и т. д. цифры, приписав при необходимости нули справа.

Примеры: 1) Увеличив дробь 35,783 в 10 раз, получим дробь 357,83, так как $35{,}783 \cdot 10 = \frac{35783}{1000} \cdot 10 = \frac{35783}{100} = 357{,}83$. Таким образом, увеличение дроби в 10 раз привело к переносу запятой на 1 цифру вправо.

2) Перенеся запятую в дроби 35,783 на 2 цифры вправо, получим дробь 3578,3, в 100 раз большую данной дроби 35,783. В самом деле, $3578{,}3=\frac{35783}{10}=\frac{35783}{1000}\cdot 100=35{,}783\cdot 100$.

3) Если учесть, что $35{,}783=35{,}78300$, то, перенеся запятую в дроби 35,783 на 5 цифр вправо, получим число 3 578 300 в 100 000, или в 10^5, раз большее первоначальной дроби.

Таким образом, перенося запятую в записи дроби на 1, 2 и т.д. цифры вправо, мы увеличиваем эту дробь соответственно в 10, 100 и т. д. раз.

Чтобы уменьшить десятичную дробь в 10, 100, 1000 и т. д. раз, надо в записи дроби перенести запятую влево соответственно на 1, 2, 3 и т. д. цифры, приписав при необходимости нули слева.

Примеры: 1) Дробь 3,5783 в 10 раз меньше дроби 35,783. Первая дробь получена из второй переносом запятой влево на 1 цифру.

2) Если в данной дроби 35,783 перенести запятую на 2 цифры влево, то получим дробь 0,35783, которая в 100 раз ($100=10^2$) меньше данной.

Таким образом, перенося запятую в записи десятичной дроби на 1, 2 и т. д. цифры влево, мы уменьшаем эту дробь соответственно в 10, 100 и т. д. раз.

753.° В какую сторону и на сколько цифр надо перенести запятую, чтобы увеличить десятичную дробь:

а) в 10 раз; б) в 100 раз; в) в 1000 раз?

754.° В какую сторону и на сколько цифр надо перенести запятую, чтобы уменьшить десятичную дробь:

а) в 100 раз; б) в 1000 раз; в) в 10 000 раз?

755.° а) Как изменится дробь, если в ее десятичной записи запятую перенести на 3 цифры вправо? На 3 цифры влево?

756.° Как изменится дробь, если:

а) запятую в ее десятичной записи перенести сначала на 2 цифры вправо, а затем на 3 цифры влево;

б) запятую в ее десятичной записи перенести сначала на 3 цифры влево, а затем на 2 цифры вправо?

757.°Как изменится положение запятой в записи десятичной дроби, если эту дробь:

а) сначала увеличить в 10 раз, потом еще в 100 раз;

б) сначала увеличить в 10 раз, а потом уменьшить в 100 раз;

в) сначала уменьшить в 10 раз, потом еще в 100 раз;

г) сначала уменьшить в 10 раз, а потом увеличить в 100 раз?

758.°Какое число больше и во сколько раз:

а) 32,549 или 325,49; б) 2,7543 или 2754,3;
в) 47,58 или 4,758; г) 123,45 или 1,2345?

759.°Какое число меньше и во сколько раз:

а) 0,4853 или 4853; б) 0,296 или 0,00296;
в) 480 или 0,48; г) 200 или 0,02?

760.°Увеличьте следующие дроби в 10, 100, 1000 раз:

а) 7,3459; б) 8,279; в) 9,13; г) 7,2.

761. Выразите в сантиметрах по *образцу*:

а) 4,25 дм = 42,5 см; б) 4,2 мм = 0,42 см;
в) 5,21 дм; г) 3,2 дм; д) 13,2 мм; е) 2,1 мм.

762. Выразите в дециметрах:

а) 4,84 м; б) 3,5 м; в) 396,7 см; г) 2,5 см.

763. Выразите в метрах:

а) 15,6 дм; б) 3,4 дм; в) 0,5265 км; г) 1,4356 км.

764. Выразите в килограммах:

а) 1,246 ц; б) 12,46 ц; в) 124,6 ц; г) 15 ц;
д) 1,5245 т; е) 15,245 т; ж) 152,45 т; з) 0,0485 т;
и) 7548 г; к) 238 г; л) 45 г; м) 5 г.

765.*Выразите в квадратных километрах (км^2):

а) 1245 га; б) 125 га; в) 1256 га; г) 145 га.

766.*Выразите в квадратных сантиметрах (см^2):

а) 3,548 дм^2; б) 3,9 дм^2; в) 635 мм^2; г) 23 мм^2.

767.*Выразите в кубических метрах (м^3):

а) 4754 дм^3; б) 723 дм^3; в) 35 дм^3; г) 7 дм^3.

768.*Выразите в кубических миллиметрах (мм^3):

а) 0,3574 см^3; б) 2,3915 см^3; в) 7,29 см^3; г) 4,325 см^3.

4.5. Умножение положительных десятичных дробей

Десятичная форма записи дробей позволяет умножать их практически по тем же правилам, по которым умножают натуральные числа. Отличие заключается в том, что необходимо определять место запятой в полученном произведении. Поясним сказанное.

Пример 1. Вычислим произведение $2{,}5 \cdot 1{,}02$.

Решение. Перенесем запятую в первом множителе на 1 цифру вправо, а во втором на 2 цифры вправо. Тем самым первый множитель увеличится в 10 раз, второй в $10^2 = 100$ раз, а произведение в $10 \cdot 100 = 1000$ раз.

Вычислим произведение натуральных чисел 25 и 102:

$$25 \cdot 102 = 2550.$$

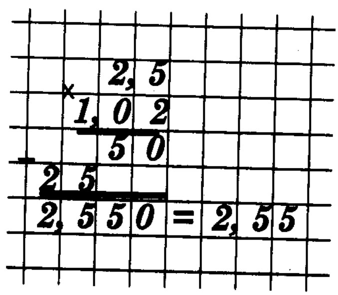
Это число в 1000 раз больше, чем требуемое произведение. Поэтому необходимо число 2550 уменьшить в $1000 = 10^3$ раз — т. е. перенести в этом числе запятую влево на 3 цифры. Таким образом,

$$2{,}5 \cdot 1{,}02 = 2{,}550 = 2{,}55.$$

Можно рассуждать по-другому, применяя правило умножения обыкновенных дробей:

$$2{,}5 \cdot 1{,}02 = \frac{25}{10} \cdot \frac{102}{100} = \frac{25 \cdot 102}{10 \cdot 100} = \frac{2550}{1000} = 2{,}550 = 2{,}55.$$

Таким образом, **чтобы перемножить две десятичные дроби, достаточно перемножить их как натуральные числа, не обращая внимания на запятые, а в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их было после запятых в обоих множителях вместе.**



Для десятичных дробей справедливы переместительный и сочетательный законы умножения, а также распределительный закон, потому что эти законы верны для равных им обыкновенных дробей. Эти законы применяются для упрощения вычислений.

Например, вычислим, используя законы:

$$0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 1{,}1 - 8{,}1 \cdot 0{,}12 + 7{,}1 \cdot 0{,}12 =$$
$$= 0{,}2 \cdot (0{,}9 + 1{,}1) - 0{,}12 \cdot (8{,}1 - 7{,}1) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 2 - 0{,}12 \cdot 1 = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28.$$

769.° Сформулируйте правило умножения двух десятичных дробей.

Вычислите произведение **(770 – 775)**:

770. а) $0{,}02 \cdot 10$; б) $3{,}2 \cdot 100$; в) $0{,}3 \cdot 1000$; г) $2{,}39 \cdot 1000$; д) $0{,}041 \cdot 100$; е) $0{,}0005 \cdot 1000$.

771. а) $2{,}4 \cdot 2$; б) $3{,}1 \cdot 3$; в) $0{,}5 \cdot 2$; г) $2{,}5 \cdot 4$; д) $1{,}25 \cdot 8$; е) $0{,}072 \cdot 2$; ж) $5{,}2 \cdot 0{,}4$; з) $7{,}1 \cdot 0{,}9$; и) $0{,}08 \cdot 0{,}13$.

772. а) $6{,}5 \cdot 0{,}004$; б) $0{,}09 \cdot 0{,}18$; в) $7{,}6 \cdot 0{,}005$; г) $0{,}048 \cdot 0{,}09$; д) $0{,}7 \cdot 0{,}0085$; е) $0{,}009 \cdot 0{,}78$; ж) $80{,}8 \cdot 0{,}7$; з) $0{,}09 \cdot 5{,}007$; и) $0{,}6 \cdot 3{,}054$.

773. а) $3{,}59 \cdot 0{,}1$; б) $2{,}3 \cdot 0{,}1$; в) $0{,}0235 \cdot 0{,}1$; г) $63{,}2 \cdot 0{,}01$; д) $3{,}5 \cdot 0{,}01$; е) $2{,}32 \cdot 0{,}01$; ж) $723{,}1 \cdot 0{,}001$; з) $79{,}4 \cdot 0{,}001$; и) $3{,}8 \cdot 0{,}001$.

774. а) $4{,}381 \cdot 0{,}2$; б) $7{,}713 \cdot 0{,}8$; в) $0{,}07 \cdot 620{,}4$; г) $0{,}2569 \cdot 0{,}6$; д) $0{,}3 \cdot 2{,}451$; е) $67{,}19 \cdot 0{,}05$; ж) $42{,}25 \cdot 0{,}4$; з) $362{,}5 \cdot 0{,}8$; и) $512{,}5 \cdot 0{,}08$.

775. а) $2{,}3 \cdot 1{,}1$; б) $4{,}3 \cdot 1{,}2$; в) $0{,}22 \cdot 3{,}3$; г) $53 \cdot 0{,}31$; д) $0{,}68 \cdot 61$; е) $0{,}72 \cdot 0{,}015$; ж) $4{,}35 \cdot 2{,}2$; з) $3{,}2 \cdot 0{,}25$; и) $0{,}084 \cdot 0{,}55$.

776. Вычислите наиболее простым способом:

а) $0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 4$; б) $0{,}2 \cdot 0{,}13 \cdot 50$ в) $0{,}8 \cdot 0{,}11 \cdot 1{,}25$; г) $0{,}125 \cdot 3 \cdot 0{,}8$; д) $0{,}5 \cdot 7{,}3 \cdot 2{,}2$; е) $0{,}25 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}6$.

Вычислите **(777 – 781)**:

777. а) $2{,}4 \cdot 4{,}8 + 2{,}6 \cdot 4{,}8$; б) $30{,}5 \cdot 20{,}3 - 30{,}5 \cdot 0{,}3$; в) $5{,}1 \cdot 1{,}8 - 1{,}8$; г) $4{,}9 \cdot 6{,}2 + 6{,}2$.

778. а) $0{,}1 \cdot 0{,}1$; б) $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$; в) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$; г) $0{,}05 \cdot 0{,}05$; д) $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6$; е) $0{,}08 \cdot 0{,}08$; ж) $(0{,}5 + 0{,}2)^2$; з) $(0{,}7 + 0{,}3)^3$; и) $(0{,}9 - 0{,}4)^3$; к) $0{,}8 + (1{,}1)^2$; л) $1{,}2^2 - 1{,}2$; м) $1{,}5^2 - 0{,}25$.

779. а) $9{,}51 \cdot 18$; б) $66{,}3 \cdot 26$; в) $8{,}47 \cdot 0{,}64$; г) $7{,}3 \cdot 5{,}42$; д) $0{,}85 \cdot 2{,}06$; е) $8{,}07 \cdot 0{,}016$.

780. а) $3{,}32\cdot 0{,}101$; б) $3{,}02\cdot 6{,}48$;
в) $3{,}21\cdot 0{,}562$; г) $95{,}5\cdot 3{,}17$;
д) $0{,}861\cdot 0{,}242$; е) $0{,}999\cdot 0{,}732$.

781. а) $7{,}668\cdot 24-9{,}68$; б) $35{,}22+45{,}83\cdot 2{,}6$;
в) $5{,}306\cdot 42+5{,}36\cdot 82$; г) $1{,}654\cdot 3{,}4+6{,}4\cdot 9{,}5$;
д) $2{,}4\cdot 98+4{,}8$; е) $35{,}4\cdot 1{,}99+35{,}4$;
ж) $3{,}2\cdot 103-9{,}6$; з) $1{,}22\cdot 97+3{,}66$.

782. Известно, что $8\cdot 125=1000$. Вычислите:
а) $8\cdot 12{,}5$; б) $0{,}08\cdot 125$;
в) $0{,}8\cdot 12{,}5$; г) $8\cdot 0{,}125$;
д) $0{,}8\cdot 1{,}25$; е) $0{,}08\cdot 12{,}5$.

783. Пешеход идет со скоростью 4,4 км/ч. Какой путь он пройдет за:
а) 2 ч; б) 0,5 ч; в) 1,5 ч?

784. Собственная скорость моторной лодки 12,6 км/ч, а скорость течения реки 1,8 км/ч. Какой путь пройдет лодка по течению и против течения за:
а) 3 ч; б) 2,5 ч; в) 0,5 ч?

785. Вычислите площадь прямоугольника со сторонами a и b:
а) $a=3{,}6$ см, $b=4$ см; б) $a=5$ дм, $b=3{,}13$ дм;
в) $a=3{,}12$ дм, $b=3{,}5$ дм; г) $a=6{,}25$ м, $b=1{,}6$ м.

786. Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, длина, ширина, высота которого a, b, c:
а) $a=4{,}5$ см, $b=2{,}3$ см, $c=10$ см;
б) $a=3{,}2$ дм, $b=1{,}5$ дм, $c=2{,}5$ дм;
в) $a=12$ см, $b=2{,}5$ дм, $c=10$ см.

787. Масса 1 м^3 воздуха 1,29 кг. Определите массу воздуха в вашем классе.

788. Масса 1 см^3 алюминия 2,7 г, масса 1 см^3 свинца 11,3 г. Какой кубик тяжелее — алюминиевый с ребром 3 см или свинцовый с ребром 2 см?

789. Использование 1 т макулатуры позволяет получить 0,7 т бумаги и заменить при этом 4,4 м^3 древесины. Сколько бумаги можно получить из 7,5 т макулатуры? Сколько при этом экономится древесины?

4.6. Деление положительных десятичных дробей

Вычисление частного двух положительных десятичных дробей можно свести к вычислению частного равных им обыкновенных дробей. Поясним это на примерах.

Пример 1. Найдем частное 0,4:0,3.

Применяя правило деления обыкновенных дробей, имеем:

$$0{,}4:0{,}3=\frac{4}{10}:\frac{3}{10}=\frac{4\cdot 10}{10\cdot 3}=\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найдем частное 0,072:0,4.

Применяя правило деления обыкновенных дробей, имеем:

$$0{,}072:0{,}4=\frac{72}{1000}:\frac{4}{10}=\frac{72\cdot 10}{1000\cdot 4}=\frac{18}{100}.$$

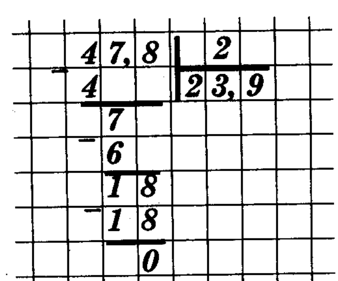
Таким образом, частное двух десятичных дробей всегда можно записать в виде обыкновенной дроби. Заметим, что во втором примере частное можно записать еще и в виде десятичной дроби 0,18. Поскольку не любая обыкновенная дробь может быть записана как десятичная, то **не всегда частное десятичных дробей есть десятичная дробь.**

В этом пункте будет рассмотрено в основном деление десятичных дробей лишь в тех случаях, когда их частное есть натуральное число или десятичная дробь. Другие случаи будут рассмотрены в следующей главе.

Будем делить десятичные дроби уголком практически по тем же правилам, что и при делении натуральных чисел. Рассмотрим сначала деление десятичной дроби на натуральное число.

Пример 3. Найдем частное 47,8:2.

Разделим 47,8 на 2, рассуждая следующим образом: сначала 4 десятка делим на 2, получаем 2 десятка. Затем 7 единиц делим на 2, получаем 3 единицы и остаток 1. Деление целой части закончено — в частном ставим запятую. Теперь 1 единицу раздробляем в 10 десятых, сносим 8 десятых и 18 десятых делим на 2, получаем 9 десятых. Так как остаток равен нулю, то деление закончено.

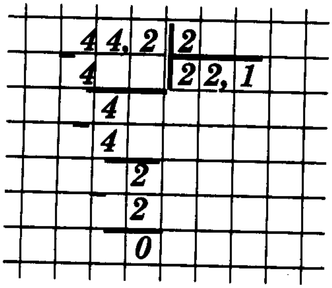


Итак, получен ответ:

$$47{,}8:2=23{,}9.$$

Этот пример подтверждает правильность следующего правила: **Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натуральных чисел, но после окончания деления целой части десятичной дроби надо в частном поставить запятую.**

Теперь рассмотрим деление десятичной дроби на десятичную дробь.



Пример 4. Вычислим частное 4,42:0,2.

Так как в делителе одна цифра после запятой, то достаточно перенести запятые в делимом и делителе на 1 цифру вправо. Тем самым и делимое, и делитель увеличиваются в 10 раз. Поэтому частное не изменится, а делитель будет натуральным числом.

Итак, 4,42:0,2 = 44,2:2.

Можно рассуждать и таким образом:

$$4{,}42:0{,}2=\frac{4{,}42}{0{,}2}=\frac{4{,}42\cdot 10}{0{,}2\cdot 10}=\frac{44{,}2}{2}.$$

Дальше деление выполняется уголком.

Пример 5. Вычислим частное 3,15:0,25.

Так как в делителе две цифры после запятой, то перенесем запятые в делимом и делителе на 2 цифры вправо, т. е. умножим делимое и делитель на 100:

$$3{,}15:0{,}25=315:25.$$

Выполним деление уголком. После того как закончилось деление целой части (рис. 63, *а*), ставим в делимом запятую и приписываем 0 десятых, в частном тоже ставим запятую, сносим 0 и продолжаем деление (рис. 63, *б*).

Эти примеры подтверждают правило: **чтобы разделить десятичную дробь на десятичную дробь, надо в делимом и в делителе перенести запятую на столько цифр вправо, сколько их после запятой в делителе, и затем выполнить деление на натуральное число.**

В приведенных примерах частное двух десятичных дробей выражалось конечной десятичной дробью, но так случается не всегда, поэтому, чтобы получить точный ответ, надо, как уже отмечалось, перейти к делению обыкновенных дробей (см. пример 1).

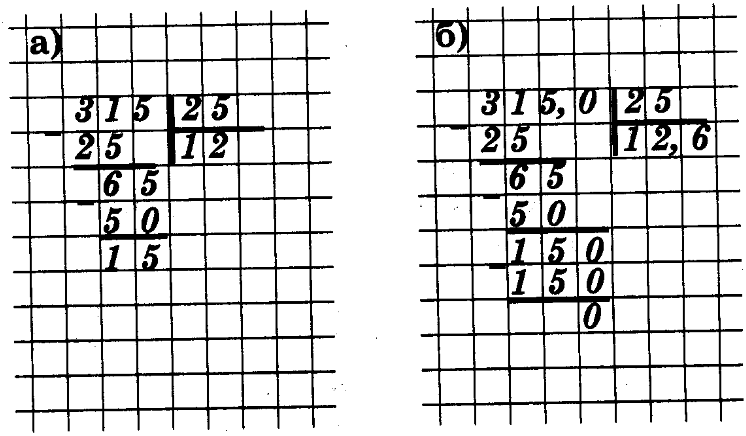


Рис. 63

790. Выразите частное в виде обыкновенной дроби:
а) 3:0,7; б) 3,5:1,2; в) 1,25:1,4.

791.°По какому правилу делят десятичную дробь на натуральное число?

792.°По какому правилу делят десятичные дроби?

793.°Всегда ли при делении десятичных дробей частное будет конечной десятичной дробью? Приведите примеры.

Вычислите **(794 – 797):**

794. а) 12,5:10; б) 72,6:100; в) 173,56:100;
г) 0,3:100; д) 0,73:1000; е) 1,664:10 000.

795. а) 783:10; б) 988:100; в) 54 000:10 000;
г) 7800:1000; д) 3:1000; е) 5:100 000.

796. а) 3,6:3; б) 75,5:5; в) 1,24:4;
г) 2,53:11; д) 7,81:11; е) 13,2:24.

797. а) 0,48:8; б) 0,84:21; в) 0,001:5;
г) 0,002:4; д) 0,125:25; е) 0,0625:25.

798. Выполните деление и проверьте полученный результат:
а) 3,1:0,1; б) 7,21:0,01; в) 6,3571:0,01;
г) 4,729:0,001; д) 4,29:0,1; е) 7,1:0,001.

Вычислите **(799 – 800):**

799. а) 6:0,1; б) 7:0,001; в) 8:0,001;
г) 35:0,1; д) 49:0,01; е) 56:0,001.

800. а) 1:0,2; б) 1:0,25; в) 1:0,125;
г) 1:0,4; д) 1:0,8; е) 1:0,5.

801.° Как изменится частное, если:
а) делимое увеличить в 5 раз;
б) делитель увеличить в 3 раза;
в) делимое и делитель увеличить в одинаковое число раз?

Вычислите **(802 – 803):**

802. а) 48:4,8; б) 536:5,36; в) 921:92,1;
г) 39:0,39; д) 4:0,4; е) 999:99,9.

803. а) 53,6:5,36; б) 5,36:0,01; в) 72,34:7,234;
г) 7,234:0,01; д) 372,9:3,729; е) 3,729:0,1.

Выполните действие, проверьте результат **(804 – 805):**

804. а) 4:0,5; б) 3:0,2; в) 2:0,02;
г) 14:0,07; д) 12:0,004; е) 10:0,005.

805. а) 7,6:0,2; б) 6,3:0,3; в) 0,64:3,2;
г) 0,49:0,7; д) 0,01:0,05; е) 0,004:0,8.

Вычислите **(806 – 809):**

806. а) 0,21:0,84; б) 0,19:0,095; в) 3,76:0,4;
г) 7,05:1,5; д) 3,5:0,4; е) 25,9:3,7.

807. а) 1,75:1,4; б) 18,4:7,36; в) 16,92:4,23;
г) 86,1:2,46; д) 21,875:3,125; е) 183,96:5,256.

808. а) 0,25:4+15,3:5+12,4:8+0,15:3;
б) 96,7:10+0,045:5+140,4:12+1,53:15.

809. а) 4,912:16+(18,305:7+0,0368:4);
б) 72,492:12+78,156:36−120,03:15;
в) 1,35:2,7+6,02−5,9+0,4:2,5·(4,2−0,075);
г) 4,3−3,5+1,44:3,6+3,6:1,44·(0,1−0,02).

810. Сколько сотых содержится в числе:
а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{3}$; д) $\frac{1}{9}$?

811. Не выполняя вычислений, сравните:
а) 19,95·199,6 и 1,995·1996;
б) 19,96·1,997 и 199,6·19,97;
в) 199,7·199,8 и 1,997·1,998;
г) 1,998·199,9 и 1,998·1999.

812. Вычислите:

а) $\frac{12,3\cdot 3,21}{1,23\cdot 32,1}$; б) $\frac{0,123\cdot 321}{1,23\cdot 3,21}$; в) $\frac{12,3\cdot 3,21}{1,23\cdot 3,21}$; г) $\frac{0,123\cdot 0,321}{1,23\cdot 3,21}$.

813. На прямолинейном участке железнодорожного пути уложены рельсы длиной 12,5 м. Сколько рельсов уложено на 1 км пути?

814. Слон тяжелее бегемота на 0,7 т, а их общая масса 8,3 т. Какова масса каждого животного?

815. Вычислите скорость движения пешехода, который:
а) за 2,4 ч прошел 10,8 км; б) за 1,8 ч прошел 9,9 км.

816. На производство 1 т бумаги расходуется 250 т воды. Это в 12,5 раз больше, чем расходуется на производство 1 т стали, и в 6 раз меньше, чем на производство 1 т аммиака. Сколько тонн воды расходуется на производство 1 т стали? 1 т аммиака?

817. Площадь первой комнаты на 5,2 м^2 больше площади второй комнаты, а сумма их площадей 34,8 м^2. Определите площадь каждой комнаты.

818. Расстояние между двумя пунктами 14,4 км. Пешеход прошел в 2 раза больше, чем ему осталось пройти. Сколько километров прошел пешеход?

819. На 66,5 р. купили 4 пачки печенья и 3 коробки конфет. Каждая коробка конфет стоила в 5 раз дороже пачки печенья. Сколько стоила коробка конфет?

820. Вычислите рациональным способом:
а) $13,7\cdot 2,2-5,9\cdot 2,2+7,8^2$;
б) $2,62\cdot 13,58+3,8\cdot 13,58+6,42^2$.

821. Вычислите:

а) $\frac{1,476+2,08\cdot 4,05}{49,938:24,36-0,25}$; б) $\frac{4,58+6,275:1,25}{49,533:16,5-2,522}$.

Вычислите **(822 — 824):**

822. а) $\frac{1}{2}+0,5$; б) $\frac{1}{4}+0,3$; в) $\frac{2}{5}-0,4$;
г) $\frac{3}{4}-0,25$; д) $\frac{7}{25}+0,13$; е) $\frac{6}{25}-0,02$.

823. а) $1\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}\cdot 0{,}2$;   б) $1\frac{1}{5}:1{,}6-\frac{4}{5}\cdot 0{,}125$;

в) $4\frac{1}{2}\cdot 0{,}4:0{,}15\cdot 1\frac{2}{3}$;   г) $3\frac{1}{3}\cdot 0{,}3+19:0{,}5\cdot\frac{1}{4}$.

824. а) $\left(1\frac{3}{8}+1\frac{3}{4}-0{,}411\right):0{,}59$;   б) $\left(6\frac{7}{15}-1{,}4\right):\left(2\frac{4}{5}+1{,}2\right)$;

в) $12{,}8\cdot\frac{1}{4}:\left(\frac{3}{4}-0{,}125\right)$;   г) $1\frac{17}{18}\cdot\left(3\frac{1}{4}-2{,}95\right):3{,}5$.

825. Решите уравнение:

а) $x-3\frac{1}{2}=6{,}1$;   б) $2{,}5x+6{,}3=7\frac{1}{3}$;

в) $2\frac{2}{3}x-5{,}1=3{,}7$;   г) $1{,}5x+3\frac{1}{3}=2{,}5$.

826. Решите пропорцию:

а) $\frac{x}{4{,}9}=\frac{0{,}5}{2{,}1}$;   б) $\frac{1{,}8}{x}=\frac{0{,}36}{3{,}2}$;   в) $\frac{2{,}7}{25}=\frac{x}{1{,}25}$;

г) $x:4{,}2=\frac{1}{2}:6{,}3$;   д) $x:3{,}8=\frac{4}{7}:1{,}9$;

е) $2{,}5:x=3\frac{1}{3}:1{,}2$;   ж) $2\frac{1}{3}:x=3{,}5:1{,}7$.

4.7. Десятичные дроби и проценты

Как известно, процентом называют одну сотую часть числа:

$$\boxed{1\%=0{,}01}$$

Задачи двух основных типов на нахождение процентов данного числа и числа по его процентам можно решать, используя умножение и деление на десятичную дробь.

Задача 1. Найти 13% от 60 м.

Решение. 13% от 60 м равны $\frac{13}{100}$, или 0,13 от 60 м, поэтому $60\cdot 0{,}13=7{,}8$ (м).

Ответ: 7,8 м.

Задача 2. Найти число, 35% которого равны 700.

Решение. Число 700 составляет 35%, или $\frac{35}{100}$, или 0,35 от неизвестного числа. Найдем это число:

$$700:0,35=2000.$$

Ответ: 2000.

Задача 3. Из 60 посаженных семян взошли 54. Определите процент всхожести семян.

Решение. 54 от 60 составляет $\frac{54}{60}$, или $\frac{54\cdot 100}{60}=90\ (\%)$.

Ответ: 90 %.

---

827. Найдите 27% числа:
а) 200; б) 290; в) 45; г) 38.

828. Найдите число, 27% которого равны:
а) 540; б) 300; в) 243; г) 2727.

829. Сколько процентов числа 350 составляет число:
а) 35; б) 385; в) 315; г) 679?

830. Масса сушеных яблок составляет 25% массы свежих. Сколько сушеных яблок получили из: 200 кг; 360 кг; 4,5 т свежих? Сколько процентов массы свежих яблок теряется при сушке?

831. Виноград при сушке теряет 65% своей массы. Сколько изюма (сушеного винограда) получится из 400 кг; 350 кг; 1,8 т свежего винограда?

832. Трава при сушке теряет 85% своей массы.
а) Сколько сена получится из 600 кг; 1500 кг; 11,8 т свежей травы?
б) Сколько травы надо накосить, чтобы насушить 1500 кг; 3300 кг; 3,6 т сена?

833. Что больше:
а) 45% от 72 или 72% от 45; б) 38% от 80 или 60% от 45?

834. Товар стоил 150 р. Его цена повысилась на 12%. Сколько теперь стоит этот товар?

835. Увеличьте число:

а) 80 на 20%;
б) 480 на 25%;
в) 50 на 10%;
г) 25 на 100%.

836. Уменьшите число:

а) 60 на 10%;
б) 500 на 28%;
в) 90 на 50%;
г) 125 на 40%.

837.° Можно ли цену товара уменьшить на 101%?

4.8.* Сложные задачи на проценты

Для решения более сложных задач на проценты полезно освоить увеличение и уменьшение числа на заданное число процентов с помощью умножения на десятичную дробь. Рассмотрим задачу на так называемые сложные проценты или проценты на проценты.

Задача 1. Цену товара увеличили на 10%, затем еще на 10%. На сколько процентов увеличили цену товара за 2 раза?

Иногда при решении этой задачи дают ответ «20%». Чтобы убедиться, что он неверен, рассмотрим пример. Пусть первоначальная цена товара 100 р. После первого увеличения цены она составит:

$$100+100\cdot 0{,}1=100+10=110 \text{ (р.)}.$$

Во второй раз на 10% увеличивается не 100, а 110 р., поэтому цена увеличивается не на 10, а на 11 р.:

$$110+110\cdot 0{,}1=110+11=121 \text{ (р.)}.$$

121 р. больше 100 р. на 21 р., что составляет 21% от первоначальной цены.

Теперь решим задачу для произвольной цены товара. Пусть первоначальная цена товара составляет a руб. Увеличим ее на 10%:

$$a+0{,}10a=1{,}10a.$$

Как видим, чтобы увеличить цену на 10%, можно умножить ее на 1,10. Увеличим вторую цену еще на 10%:

$$1{,}1a\cdot 1{,}1=1{,}21a.$$

В результате двух изменений цена увеличилась на $1,21a-a=0,21a$, что составляет 21% от a. Итак, за два раза цена увеличилась на 21%.

Заметим, что для решения таких задач важно понимать, что если, например, первое число больше второго в 1,21 раза, то первое число на 0,21, или на 21%, больше второго.

Задача 2. Банк платит доход в размере 4% в месяц от величины вклада. На счет положили 300 р., доход начисляют каждый месяц. Вычислите величину вклада через:

а) 1 месяц; б) 2 месяца; в) 3 месяца.

Решение. а) Через 1 месяц вложенная сумма обратится в

$$300+300\cdot 0,04=300\cdot 1,04=312 \text{ (р.)}.$$

б) За второй месяц 312 р. увеличатся в 1,04 раза: $312\cdot 1,04=324,48$ (р.). Тот же результат можно получить иначе:

$$300\cdot 1,04^2=324,48 \text{ (р.)}.$$

в) Через 3 месяца первоначальный вклад увеличится в $1,04^3$ раза и составит

$$300\cdot 1,04^3=337,4592 \text{ (р.)}.$$

Заметим, что величина вклада за 3 месяца увеличивается более чем на $3\cdot 4=12$ процентов. Действительно, при увеличении вклада на 12% получилось бы

$$300\cdot 1,12=336 \text{ (р.)},$$

что меньше, чем 337,4592 р.

838. Число 200 увеличили на 20%, полученный результат уменьшили на 20%. Получится ли в результате число 200? Какое число получится?

839. а) Число a увеличили на 20%, полученное число увеличили еще на 20%. Во сколько раз увеличилось число a? На сколько процентов увеличилось число a за два раза?

б) Цену товара уменьшили на 10%, полученную цену уменьшили еще на 10%. На сколько процентов уменьшили цену товара за 2 раза?

840. а) Число a больше числа b в 1,25 раза; в 1,32 раза; в 1,5 раза. На сколько процентов число a больше числа b?
б) Число a больше числа b на 25%; на 48%; на 60%. Во сколько раз число a больше числа b?

841. Число увеличили на 10%, результат уменьшили на 10%. Какое получилось число — большее или меньшее первоначального и на сколько процентов?

842.* Обломов похудел на 25%, потом прибавил в весе на 20%, похудел на 10%, потом прибавил в весе на 20%. Прибавил Обломов в весе или похудел?

843.* Служащая банка объяснила клиенту, что вложенная им сумма за год увеличится на 300%, т. е. в 3 раза. В чем ошиблась служащая и как нужно исправить сказанное, если процент годовых указан верно?

844.* Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилась его площадь? Зависит ли результат от того, какую пару сторон увеличили на 10%?

845.* а) Все стороны прямоугольника увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилась его площадь?
б) Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 20%, две другие — уменьшили на 20%. Как изменилась площадь прямоугольника?

846.* Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 20%, две другие — уменьшили на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь прямоугольника?

847.* Длину прямоугольника уменьшили на 20%. На сколько процентов надо увеличить ширину прямоугольника, чтобы его площадь не изменилась?

Решение. Пусть длина прямоугольника a, ширина b. Длина стала равна $0{,}8a=\frac{4}{5}a$. Чтобы площадь $a \cdot b$ не изменилась, надо длину $\frac{4}{5}a$ умножить на ширину $\frac{5}{4}b=1{,}25b$, т. е. надо увеличить ширину на 25%.

Ответ: на 25%.

848.* В драмкружке число мальчиков составляет 80% от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек от числа мальчиков в этом кружке?

Решение. *I способ.* Число мальчиков составляет 80% от числа девочек (100%). Определим, сколько процентов составляет 100% от 80%:

$$\frac{100}{80}=\frac{100\cdot 100}{80}\%=125\%.$$

II способ. Число мальчиков (m) составляет 80% от числа девочек (d), значит, $m=0{,}8d$. Отсюда $d=1{,}25m$, т. е. число девочек составляет 125% от числа мальчиков.

Ответ: 125%.

849. Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на срочном депозите в течение года выплачивал доход из расчета 150% от вложенной суммы; в течение полугода — 130% годовых, в течение трех месяцев — 120% годовых. Каким образом за год на условиях Сбербанка можно было получить наибольший доход на 100 000 р.? Каков этот наибольший доход?

850.*Компания X выплачивает доход по своим акциям ежегодно из расчета 40% годовых. Компания Y выплачивает доход по акциям 1 раз в полгода из того же расчета. В акции какой компании выгоднее вложить деньги на 1 год?

851.*Сколько граммов воды нужно добавить к 600 г раствора, содержащего 15% соли, чтобы получился 10%-ный раствор соли?

852. Сколько граммов воды нужно добавить к 120 г раствора, в котором содержится 30% сахара, чтобы получить раствор, содержащий 20% сахара?

853.*Кусок сплава массой 700 г, содержащий 80% олова, сплавили с куском олова весом 300 г. Определите процентное содержание олова в полученном сплаве.

854.*Имеется 500 г 40%-ного раствора кислоты. Сколько воды требуется добавить, чтобы получился 25%-ный раствор кислоты?

855.*В первый день рабочий перевыполнил дневное задание на 2%, во второй день он перевыполнил дневное задание на 4%. На сколько процентов рабочий перевыполнил задание двух дней?

856.*В спортивной секции девочки составляют 60% числа мальчиков. Сколько процентов числа всех участников секции составляют девочки?

4.9. Десятичные дроби любого знака

Напомним, что десятичная дробь — другая форма записи обыкновенной дроби.

Любое свойство обыкновенных дробей переносится на десятичные дроби.

В частности, если перед положительной десятичной дробью поставить знак «+», то получится равная ей дробь, потому что если поставить знак «+» перед равной ей обыкновенной дробью, то это не изменяет ее.

Например, $2{,}78=+2{,}78$; $\quad 3{,}99=+3{,}99$.

Если перед положительной десятичной дробью поставить знак «−», то получим другую — противоположную ей отрицательную дробь.

Например, $0{,}9=\frac{9}{10}$, $\qquad -0{,}9=-\frac{9}{10}$;

$$2{,}71=2\frac{71}{100}, \qquad -2{,}71=-2\frac{71}{100}.$$

Все арифметические действия с десятичными дробями любого знака проводятся так же, как действия с целыми числами: сначала надо определить знак результата действия, а потом произвести соответствующее действие над положительными десятичными дробями — их модулями. Например,

$$3{,}2+(-3{,}4)=-(3{,}4-3{,}2)=-0{,}2;$$
$$5{,}8-8{,}9=-(8{,}9-5{,}8)=-3{,}1;$$
$$7{,}8\cdot(-0{,}5)=-(7{,}8\cdot 0{,}5)=-3{,}9;$$
$$(-4{,}2):(-0{,}6)=+(4{,}2:0{,}6)=42:6=7.$$

Вычислите **(857 — 863)**:

857. а) $2{,}1+(-3{,}5)$; б) $(-4{,}9)+(-1{,}3)$;
в) $4{,}8-(9{,}9)$; г) $6{,}2-(-1{,}7)$;
д) $-7{,}9-(-1{,}8)$; е) $-1{,}2-3{,}5$.

858. а) $1{,}56+(-8{,}28)$; б) $-7{,}53-6{,}48$;
в) $-13{,}75-5$; г) $12{,}51-17{,}23$;
д) $12{,}285-13{,}999$; е) $13{,}4-17{,}48$.

859. а) $(-1{,}2)\cdot 5$; б) $(-4{,}9):7$;
в) $(-6{,}4):(-0{,}8)$; г) $72:(-0{,}6)$;
д) $(-4{,}8):0{,}16$; е) $(-1{,}28):(-6{,}4)$.

860. а) $4{,}16-5{,}1\cdot3{,}2$; б) $7{,}39-1{,}21:1{,}1$;
в) $(-44{,}44):11+1{,}1$; г) $(-6{,}25):2{,}5+2{,}5$;
д) $0{,}48:1{,}6-4{,}8$; е) $12{,}5\cdot(-4):(-2)$.

861. а) $44:(-2{,}5)-6\cdot(4{,}3\cdot0{,}8-3{,}7)$;
б) $(-11{,}2:(-2{,}8)-3{,}6+2{,}4):(-0{,}4)$;
в) $-3{,}6\cdot(-0{,}5)-(-3{,}2+0{,}8)\cdot1{,}05$.

862. а) $(4{,}28+3{,}6\cdot(-0{,}85)):(-0{,}4)$;
б) $7{,}68-6{,}4:(-1{,}2-0{,}4)$;
в) $(4{,}7+2{,}3)\cdot(-3{,}5)-8{,}7+0{,}3$.

863. а) $(0{,}05-2{,}2+0{,}53):1{,}8+0{,}4$;
б) $0{,}2\cdot(0{,}4-1{,}08+0{,}15)+0{,}2$;
в) $(0{,}4\cdot0{,}01-0{,}01):0{,}25-0{,}231$;
г) $-0{,}8+4{,}2\cdot(0{,}002:0{,}04-4{,}1)$.

864. Решите уравнение:
а) $0{,}4x=3$; б) $2x=1{,}8$; в) $0{,}3x=-2{,}7$;
г) $1{,}5x=-10{,}5$; д) $-0{,}002x=25$; е) $-1{,}4x=2{,}842$.

Вычислите **(865 – 867)**:

865. а) $(654{,}84:32{,}1-35{,}568:3{,}42):2{,}5$;
б) $(3{,}17+25{,}9632:4{,}32):(74{,}358:24{,}3)$;
в) $(2763{,}36:30{,}4+70{,}7):(714{,}07:7{,}07)$.

866. а) $\left(2{,}75:3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}:1{,}75\right)\cdot3\frac{2}{21}$;

б) $\left(3{,}24:\frac{9}{7}-3\frac{1}{5}:1\frac{1}{3}\right):0{,}9$;

в) $(-4{,}5)\cdot5\frac{1}{3}+(-5{,}5)\cdot5\frac{1}{3}$;

г) $3\frac{1}{7}\cdot7{,}425+(-6{,}425)\cdot3\frac{1}{7}$.

867*. а) $\dfrac{0{,}125\cdot5}{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot7\frac{7}{8}}$; б) $\dfrac{\left(\frac{21}{40}-\frac{19}{24}\right)\cdot0{,}7+0{,}04}{0{,}675\cdot3{,}4-2{,}02}$;

в) $\dfrac{\left(13{,}25-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot230{,}04+46{,}75}{\left(1\frac{3}{7}+3\frac{1}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}$.

4.10. Приближение десятичных дробей

Если число a_1 мало отличается от числа a, то пишут

$$a \approx a_1$$

и говорят, что число a приближенно равно числу a_1 или что a_1 есть приближение числа a. Знак $\approx$ есть знак **приближенного равенства.**

Если при этом $a_1 < a$, то a_1 называют **приближением a с недостатком (или приближением снизу).** Если же $a_1 > a$, то a_1 называют **приближением a с избытком (или приближением сверху).**

Если случится, что $a_1 = a$, то a_1 можно назвать как приближением a снизу, так и сверху.

Десятичные дроби с большим числом знаков приближают конечными десятичными дробями с меньшим числом знаков. Сама конструкция десятичной дроби подсказывает, как эти приближения подбирать.

Рассмотрим пример. Пусть $a = 2{,}32825$.

Оборвем эту дробь на цифре второго разряда после запятой. Получим число 2,32, меньшее, чем a.

Если у числа 2,32 увеличить цифру разряда сотых на единицу, то получим число 2,33, уже большее, чем a.

Таким образом, $2{,}32 < a < 2{,}33$, поэтому 2,32 есть приближение числа a снизу, а 2,33 есть его же приближение сверху. Пишут при этом

$$a \approx 2{,}32, \quad a \approx 2{,}33$$

и говорят: «2,32 есть приближение числа a с точностью до одной сотой с недостатком (снизу); 2,33 есть приближение числа a с точностью до одной сотой с избытком (сверху)».

Вместо слов «с точностью до одной сотой» говорят еще «с точностью до единицы второго разряда после запятой».

Так как третья цифра после запятой у числа a больше 5, то оно ближе к 2,33, чем к 2,32. Поэтому говорят, что 2,33 есть **приближение** a с точностью до сотой **с округлением.**

Рассуждая аналогично, получим, что

$$2{,}328 < a < 2{,}329,$$
$$a \approx 2{,}328, \quad a \approx 2{,}329,$$

где 2,328 есть приближение a с точностью до одной тысячной снизу и в то же время с округлением. Это следует из того, что цифра четвертого разряда после запятой меньше 5, поэтому a ближе к 2,328, чем к 2,329.

2,329 есть приближение a с точностью до 0,001 сверху.

Аналогично $2{,}3282 < a < 2{,}3283$. Теперь число a находится в точности посредине между приближениями снизу и сверху. Таким образом, 2,3283 есть приближение a с точностью до 4-го знака после запятой сверху и в то же время с округлением.

Подобным образом для числа $b = -2{,}32829$ имеют место неравенства $-2{,}33 < b < -2{,}32$, откуда $b \approx -2{,}33$, $b \approx -2{,}32$ и при этом $-2{,}33$ есть приближение b с точностью до 0,01 снизу и в то же время с округлением; $-2{,}32$ есть приближение числа b с точностью до 0,01 сверху.

Введем понятие **значащей цифры** десятичной дроби.

Значащей цифрой десятичной дроби называют ее первую (слева направо) отличную от нуля цифру, а также все следующие за ней цифры.

Например,

в числе 235000 все цифры значащие;

в числе 0,302 цифры, стоящие после запятой, значащие;

в числе 0,003004 цифры, начиная с цифры 3, значащие.

Округлить число с точностью, например, до третьей значащей цифры — это значит округлить его до того разряда, где находится третья значащая цифра, заменив следующие цифры нулями. Приведенные ниже округления произведены с точностью до третьей значащей цифры:

$$3{,}7523 \approx 3{,}7500 = 3{,}75;$$
$$-0{,}010278 \approx -0{,}010300 = -0{,}0103;$$
$$0{,}035021 \approx 0{,}035000 = 0{,}0350;$$
$$-0{,}02339 \approx -0{,}0234;$$
$$2365780 \approx 2370000 = 2{,}37 \cdot 10^6;$$
$$235000 \approx 235000 = 2{,}35 \cdot 10^5.$$

868.°Что показывает знак $\approx$? Как читают запись $a \approx a_1$?

869.°Назовите приближение числа 0,2638:

а) с недостатком с точностью до одной десятой;

б) с избытком с точностью до одной сотой;

в) с округлением с точностью до одной тысячной.

870.°Какие цифры называют значащими в записи числа в виде десятичной дроби?

871.° Что значит округлить число с точностью до второй значащей цифры?

872. Найдите приближение числа a с недостатком с точностью до единицы третьего разряда после запятой:

а) $a=0,3456$; б) $a=0,76543$;
в) $a=0,02325$; г) $a=-0,34354$.

873. Найдите приближение числа a с избытком с точностью до единицы второго разряда после запятой:

а) $a=1,2345$; б) $a=3,56789$;
в) $a=2,577$; г) $a=2,555$.

874. Округлите число a с точностью до одной сотой:

а) $a=1,24851$; б) $a=1,24158$;
в) $a=-7,02303$; г) $a=0,12528$.

875. Округлите число a с точностью до 0,001:

а) $a=8,91011...$; б) $a=-8,91011...$;
в) $a=0,2626$; г) $a=0,6265$.

876. Подчеркните значащие цифры числа:

а) 3,52; б) 0,352; в) 0,03520; г) 7,405;
д) 4,203; е) 0,005; ж) 0,0420; з) 7,0003;
и) 10,0050; к) 6,700; л) 0,00067; м) 0,0100.

877. Округлите число 1995,1996:

а) до десятых; б) до сотых; в) до тысячных;
г) до единиц; д) до десятков; е) до сотен.

878. Округлите число 1039,9301 до семи; шести; пяти; четырех; трех значащих цифр.

4.11. Приближение суммы, разности, произведения и частного двух чисел

Сумма (разность, произведение, частное) двух чисел считается приближенно равной сумме (разности, произведению, частному) их приближений.

Чтобы правильно приближенно складывать, вычитать, умножать и делить числа, надо правильно их округлять. Как это делать мы поясним на примерах.

Чтобы вычислить приближенно сумму (или разность) двух чисел, надо округлить эти числа с одинаковой точностью, на-

пример до одной сотой, затем сложить (или вычесть) полученные приближения.

Пример 1. Найдем приближенно сумму и разность чисел

$$a=23{,}1834567 \text{ и } b=-4{,}2375,$$

округлив их с точностью до одной сотой.

Решение. Округляя эти числа с точностью до одной сотой, находим, что $a \approx 23{,}18$, $b \approx -4{,}24$. Откуда и получаем ответ:

$$a+b \approx 18{,}94; \ a-b \approx 27{,}42.$$

Отметим, что аналогично выполняют сложение и вычитание чисел, округленных с точностью до одной десятой, одной тысячной, до десятков, до тысяч и т. д.

Сформулируем правило приближенного умножения и деления чисел, округленных с точностью до третьей значащей цифры (аналогично выполняют приближенное умножение и деление чисел, округленных с точностью до первой, второй и т. д. значащей цифры).

Чтобы вычислить приближенно произведение (или частное) двух чисел, надо округлить эти числа с точностью до одной и той же значащей цифры (например, до третьей значащей цифры), перемножить (или разделить) полученные приближения и результат округлить до той же (третьей) значащей цифры.

Пример 2. Пусть $a=135{,}78665$, $b=0{,}0068751$.

Вычислим $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ приближенно, округляя числа a и b с точностью до третьей значащей цифры.

Решение. Округлив с точностью до третьей значащей цифры, имеем:

$$a \approx 136, \ b \approx 0{,}00688,$$

тогда

$$a \cdot b \approx 136 \cdot 0{,}00688 = 0{,}93568 \approx 0{,}936;$$

$$\frac{a}{b} \approx \frac{136}{0{,}00688} = \frac{13600000}{688} = 19767{,}4\ldots \approx 19800 = 1{,}98 \cdot 10^4;$$

$$\frac{b}{a} \approx \frac{0{,}00688}{136} = 0{,}00005058\ldots \approx 0{,}0000506.$$

Ответ: $a \cdot b \approx 0{,}936$; $\frac{a}{b} \approx 1{,}98 \cdot 10^4$; $\frac{b}{a} \approx 0{,}0000506$.

○ Замечание. Точность вычислений находится в противоречии с простотой вычислений. Бóльшая точность связана с употреблением бо́льшего количества цифр, меньшая — требует меньшего количества цифр.

Чем с бо́льшим количеством цифр брать приближения двух чисел, тем ближе будет сумма (разность, произведение, частное) этих приближений к сумме (разности, произведению, частному) этих чисел.

Например, пусть дано число $a=1,445$ и требуется вычислить его квадрат.

Если округлим число и результат до первой значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1 \cdot 1 = 1$, что отличается от точного результата (2,088025) примерно на 52%.

Если округлим число и результат до второй значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1,4 \cdot 1,4 = 1,96 \approx 2,0$, что отличается от точного результата примерно на 4,2%.

Если же округлим число и результат до третьей значащей цифры, то получим $a^2 \approx 1,45 \cdot 1,45 = 2,1025 \approx 2,10$, что отличается от точного результата меньше, чем на 0,6%. ●

879.° Сформулируйте правило приближенного сложения двух чисел, заданных десятичными дробями и округленных с точностью до одной тысячной.

880.° Сформулируйте правило приближенного вычитания двух чисел, заданных десятичными дробями и округленных с точностью до одной десятой.

881.° Сформулируйте правило приближенного умножения чисел, заданных десятичными дробями и округленных с точностью до третьей значащей цифры.

882.° Сформулируйте правило приближенного деления чисел, заданных десятичными дробями и округленных с точностью до четвертой значащей цифры.

883. Округлите числа a и b с точностью до 0,1 и вычислите приближенно их сумму $a+b$ и разность $a-b$:

а) $a=3,28$, $b=0,11$; б) $a=-1,256$, $b=2,555$;
в) $a=0,010010$, $b=0,2$; г) $a=2,7235$, $b=-3,42426$;
д) $a=-7,17$, $b=-0,33$.

884. Округлите числа a и b с точностью до 0,01 и вычислите приближенно их сумму $a+b$ и разность $a-b$:

а) $a=1{,}4545$, $b=-1{,}2$;
б) $a=2{,}1264$, $b=-3{,}1145$;
в) $a=-5{,}777$, $b=2{,}536$;
г) $a=0{,}56$, $b=-3{,}573$;
д) $a=-12{,}454$, $b=10{,}111$.

885. Округлив числа a и b с точностью до третьей значащей цифры, вычислите приближенно их произведение $a \cdot b$ и частное $a:b$:

а) $a=-2{,}435$, $b=1{,}923$;
б) $a=2{,}1456$, $b=0{,}78788$;
в) $a=-2{,}1311$, $b=-0{,}009293$;
г) $a=0{,}03531$, $b=357{,}693$.

886. Округлив числа a и b с точностью до второй значащей цифры, вычислите приближенно их произведение $a \cdot b$ и частное $a:b$:

а) $a=0{,}253$, $b=0{,}75$;
б) $a=3{,}5781$, $b=-0{,}00494$;
в) $a=-0{,}00045$, $b=-0{,}00593$;
г) $a=382{,}231$, $b=0{,}002434$.

4.12.* Вычисления с помощью калькулятора

Мы уже писали о том, что с помощью калькулятора можно выполнять вычисления с целыми числами.

С помощью калькулятора можно выполнять вычисления и с десятичными дробями. Для ввода запятой используют клавишу $\boxed{.}$.

Например, дробь 3,15 вводят в калькулятор, нажимая на клавиши

$$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{5}.$$

Дробь 0,135 можно ввести так:

$$\boxed{0}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}, \text{ или короче } \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}.$$

При этом с нажатием клавиши $\boxed{.}$ вводится и целая часть дроби (0).

Действия с десятичными дробями выполняются так же, как действия с натуральными числами.

Пример 1. Вычислим сумму $3,15+2,488$.
Нажимая на клавиши

$$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{.}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{8}\ \boxed{=},$$

получим ответ: 5,638.

Пример 2. Вычислим разность $0,135-0,048$.
Нажимая на клавиши

$$\boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{-}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{=},$$

получим ответ: 0,087.

Пример 3. Вычислим произведение $0,24\cdot 1,5$.
Нажимая на клавиши

$$\boxed{.}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{5}\ \boxed{=},$$

получим ответ: 0,36.

Пример 4. Вычислим частное $48,96:0,12$.
Нажимая на клавиши

$$\boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{.}\ \boxed{9}\ \boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{=},$$

получим ответ: 408.

Пример 5. Выразим дробь $\frac{561}{374}$ в виде десятичной дроби.

Так как дробь $\frac{561}{374}$ равна частному $561:374$, то выполним вычисления, нажимая на клавиши:

$$\boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{=},$$

получим ответ: 1,5.

Пример 6. Выразим дробь $\frac{1}{3}$ в виде десятичной дроби.

Нажмем на клавиши:

$$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}.$$

На табло получится лишь приближенный результат: 0,3333333. В том, что ответ приближенный, легко убедиться, выполнив умножение: $0,3333333\cdot 3=0,9999999\neq 1$.

Пример 7. Вычислим частное $3,16:5,01$.
Нажмем на клавиши:

$$\boxed{3}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{.}\ \boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{=},$$

получим лишь приближенный результат 0,6307385 (проверьте).

Многие калькуляторы позволяют вести расчеты с запоминанием промежуточных результатов.

Пример 8. Вычислим значение выражения

$$48-(90:3-51).$$

Нажмем на клавиши:

$$\boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{П}+}.$$

Клавишей $\boxed{\text{П}+}$ мы запомнили число -21 (результат вычислений в скобках), далее нажимаем на клавиши:

$$\boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{ИП}}\ \boxed{=}.$$

Клавишей $\boxed{\text{ИП}}$ мы извлекаем число из памяти и вычисляем: $48-(-21)=69$.

Перед повторным использованием памяти калькулятора надо очистить память двойным нажатием клавиши $\boxed{\text{ИП}}$ и очистить табло клавишей $\boxed{\text{С}}$. Иначе при следующем нажатии клавиш $\boxed{\text{П}+}$ и $\boxed{\text{П}-}$ калькулятор сложит число, вводимое в память, с тем числом, которое там хранится.

Клавишам $\boxed{\text{П}+}$, $\boxed{\text{П}-}$, $\boxed{\text{ИП}}$ калькуляторов отечественного производства соответствуют клавиши $\boxed{\text{M}+}$, $\boxed{\text{M}-}$ и $\boxed{\text{MRC}}$ калькуляторов зарубежного производства.

Используя клавишу $\boxed{\text{П}-}$, можно запомнить число -21 с противоположным знаком.

$$\boxed{9}\ \boxed{0}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{П}-}\ \boxed{4}\ \boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{\text{ИП}}\ \boxed{=}$$

Эти вычисления с помощью калькулятора соответствуют такой последовательности действий:

1) $90:3=30$; 2) $30-51=-21$; 3) $48+21=69$.

При вычислениях с помощью калькулятора память можно использовать многократно для суммирования результатов промежуточных вычислений.

Пример 9. Подсчитаем стоимость покупки, если купили 1,2 кг конфет по 26,5 р. за 1 кг, 2,3 кг печенья по 6,5 р. за 1 кг и 2,47 кг яблок по 6 р. за 1 кг.

Решение. Выполним вычисления:

$26{,}5 \cdot 1{,}2 = 31{,}8$ и нажмем клавишу $\boxed{П+}$ (запомнили 31,8),

$6{,}5 \cdot 2{,}3 = 14{,}95$ и нажмем клавишу $\boxed{П+}$ (к числу 14,95 прибавили 31,8 и результат 46,75 запомнили),

$6 \cdot 2{,}47 = 14{,}82$ и нажмем клавиши $\boxed{+}$ $\boxed{ИП}$ $\boxed{=}$ (к числу 14,82 прибавили 46,75). Окончательный результат 61,75 р.

Замечания. В обычный калькулятор можно ввести любое число, записанное в десятичной системе и состоящее из 8 цифр. При этом запятая в десятичной дроби может стоять после любой цифры.

Арифметические операции над двумя такими числами (сложение, вычитание, умножение или деление) приводят к ответу, выраженному на табло калькулятора не более чем восемью цифрами. При этом следует учесть:

1) Если ответ выражен не более чем семью цифрами, то результат вычислен точно.

2) Если ответ выражен десятичной дробью с восемью цифрами, то он может быть неточным. Если результат неточный, то на табло дается его приближение с недостатком (цифры после восьмой отбрасываются без округления). Например, вычислим произведение «столбиком»:

$$111{,}11 \cdot 111{,}11 = 12345{,}4321$$

и с помощью калькулятора:

$$111{,}11 \cdot 111{,}11 = 12345{,}432.$$

3) Если ответ выражен натуральным числом с восемью цифрами, то к нему надо отнестись осторожно. Может случиться, что калькулятор получил десятичную дробь с восемью цифрами до запятой и отбросил все цифры после запятой. Например, вычислим произведение «столбиком»:

$$11111 \cdot 1000{,}1 = 11112111{,}1$$

и с помощью калькулятора:

$$11111 \cdot 1000{,}1 = 11112111.$$

Как видим, калькулятор отбросил единицу после запятой и дал приближенный ответ с точностью до единицы. Здесь по виду ответа на табло нельзя определить, точный он или приближенный.

Вычислите с помощью калькулятора **(887 – 890):**

887. а) $3{,}56+7{,}031$; б) $4{,}27-2{,}999$;
в) $3{,}25\cdot 4{,}8$; г) $8{,}8:0{,}55$.

888. а) $6{,}325+1{,}5031$; б) $7{,}1-6{,}3456$;
в) $6{,}25\cdot 1{,}92$; г) $14{,}4:0{,}048$.

889. а) $4{,}295+7{,}35$; б) $7{,}2391-3{,}957$;
в) $9{,}58\cdot 0{,}45$; г) $7{,}896:0{,}48$.

890. а) $5{,}728\cdot 4{,}25-20{,}134$; б) $87{,}162:4{,}38+13{,}78$;
в) $6{,}236\cdot 12{,}5:0{,}625$; г) $0{,}729:0{,}027\cdot 3{,}126$;
д) $14{,}9445:4{,}05-5{,}69$; е) $0{,}016\cdot 0{,}3125-0{,}05$.

891. С помощью калькулятора найдите приближения обыкновенных дробей с недостатком по *образцу:*

а) $\mathbf{\frac{6}{9}\approx 0{,}6666666}$; б) $\frac{7}{9}$; в) $\frac{8}{9}$; г) $\frac{1}{9}$;
д) $\frac{13}{99}$; е) $\frac{25}{99}$; ж) $\frac{79}{99}$; з) $\frac{5}{99}$.

892. Вычислите с помощью калькулятора:
а) $1:9\cdot 9$; б) $4:7\cdot 7$.
Точный или приближенный результат получился? Каков точный ответ?

893. Вычислите с помощью калькулятора:
а) $891:297$; б) $297:891$;
в) $999{,}9999\cdot 9$; г) $7777{,}7777:1{,}4$.

4.13. Процентные расчеты с помощью калькулятора

Если у калькулятора есть клавиша $\boxed{\%}$, то с его помощью можно решать некоторые задачи на проценты.

Задача 1. Найти 12% от 750.

Решение. Ответ можно получить следующим образом:

$$750\cdot 0{,}12=90,$$

а можно так:

$$\boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{0}\ \boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\%}\,.$$

Задача 2. Увеличить число 400 на 12%.

Решение. Ответ на вопрос задачи можно найти, выполнив два действия:

$$400 \cdot 0{,}12 = 48 \text{ и } 400 + 48 = 448$$

или объединив эти действия:

$$400 + 400 \cdot 0{,}12 = (1 + 0{,}12) \cdot 400 = 1{,}12 \cdot 400 = 448.$$

С помощью калькулятора вычисления упрощаются:

$$\boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\%}\ .$$

Здесь при нажатии клавиши $\boxed{\%}$ к числу 400 прибавляется 12% этого числа. Получим 448.

Задача 3. Уменьшить число 300 на 15%.

Решение. Ответ на вопрос задачи можно найти, выполнив два действия:

$$300 \cdot 0{,}15 = 45 \quad \text{и} \quad 300 - 45 = 255$$

или объединив эти действия:

$$300 - 300 \cdot 0{,}15 = (1 - 0{,}15) \cdot 300 = 0{,}85 \cdot 300 = 255.$$

Решим ту же задачу с помощью калькулятора:

$$\boxed{3}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{\%}\, .$$

Получим 255.

Задача 4. Найти число, 12% которого равны 720.

Решение. Ответ можно получить следующим образом:

$$720 : 0{,}12 = 6000,$$

а можно так:

$$\boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\%}\, .$$

Получим 6000.

Задача 5. Сколько процентов числа 4 составляет число 3?

Решение. Здесь требуется найти процентное отношение чисел 3 и 4. Эту задачу можно решить так:

$$\frac{3 \cdot 100}{4} = 75\ (\%).$$

Тот же результат можно получить с помощью калькулятора:

$$\boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\%}\, .$$

Получим 75%.

Задача 6*. Увеличьте число 400 на 12%, полученный результат увеличьте еще раз на 12 %.

Решение. Как было установлено ранее, увеличение числа на 12 % можно выполнить, умножив это число на 1,12. Чтобы увеличить полученный результат еще раз на 12%, умножим его на 1,12 еще раз:

$$400 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}12 = 501{,}76.$$

С помощью калькулятора можно выполнить многократное умножение числа на себя (возведение в степень). Поменяв порядок действий, вычислим так:

$\boxed{1}\ \boxed{.}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$.

---

894. а) Найдите 36% числа 500.

б) В школе 540 учащихся. Мальчики составляют 55% числа всех учащихся. Сколько в школе мальчиков?

895. Товар стоил 45 р. На сколько рублей повысится цена товара, если ее повышение составит:

а) 10%; б) 12%; в) 20%; г) 25%?

896. Магазин повышает цены на некоторые товары на 15%. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните ее, определив, на сколько рублей повысилась цена каждого товара и какой она стала.

Цена товара до повышения, р.	На сколько повысилась цена, р.	Новая цена товара, р.
200		
150		
420		
324		

897. Банк по срочным вкладам платит ежемесячный доход в размере 3% от суммы вклада. Определите величину вклада через месяц.

Величина вклада в начале месяца, р.	Величина вклада через месяц, р.
700	
950	
320	
725	

898. а) Найдите число, 18% которого равны 720.

б) Из посаженных семян подсолнечника взошло 176 семян, что составило 88% от числа посаженных семян. Сколько семян подсолнечника было посажено?

899. На предновогодней распродаже магазин снизил цены на все товары на 12%. Определите, какой стала цена каждого товара.

Цена товара до понижения, р.	Новая цена товара, р.
40	
300	
120	
225	

900. Банк по срочным вкладам платит ежемесячный доход в размере 5% от суммы вклада. В начале месяца на счет положили 500 р. Определите величину вклада через:
а) 1 месяц; б) 2 месяца; в) 3 месяца.

901. Сколько процентов составляет число 80 от:
а) 100; б) 320; в) 240; г) 60?

902. Из 120 посаженных семян подсолнечника взошло 102. Сколько процентов семян подсолнечника взошло?

903. Число увеличили на 20%, результат уменьшили на 20%. Получилось ли первоначальное число?

904.*В автоинспекции города N подсчитали, что число легковых автомобилей в городе увеличивалось в последние годы на 15% ежегодно. Во сколько раз увеличится число легковых автомобилей за 5 лет, если эта тенденция сохранится?

Решение. Если число легковых автомобилей в городе будет увеличиваться на 15%, или в 1,15 раза ежегодно, то за 5 лет оно увеличится в $1{,}15^5 = 2{,}011...$, т. е. примерно в 2 раза.

905.*Вася прочитал в газете, что за последние 3 месяца цены на продукты питания росли в среднем на 10% за каждый месяц. На сколько процентов выросли цены за 3 месяца?

906.*Деньги, вложенные в акции известной фирмы, приносят ежегодно 20% дохода. Через сколько лет вложенная сумма удвоится?

4.14. Исторические сведения

Мы уже познакомились с вавилонским способом записи дробей без знаменателей. Например, запись $15°12'36''55'''$ соответствует сумме $15+\frac{12}{60}+\frac{36}{60^2}+\frac{54}{60^3}$. Несмотря на громоздкие знаменатели, такая запись позволяла довольно быстро выполнять действия с дробями. Так сумма $\left(5+\frac{38}{60}+\frac{54}{3600}\right)+\left(6+\frac{12}{60}+\frac{14}{3600}\right)$ может быть вычислена коротко:

$$\begin{array}{r} 5°38'54'' \\ +\ 6°12'14'' \\ \hline 11°51'08''. \end{array}$$

Позднее так стали записывать и дроби со знаменателями 10, 100, 1000, ... :

$$2\frac{1}{10}=2+\frac{1}{10}=2°1'; \qquad 5\frac{123}{1000}=5+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{3}{1000}=5°1'2''3'''.$$

В дальнейшем запись упростили, стали отделять целую и дробную части друг от друга не кружком сверху, а запятой снизу, цифры десятых, сотых, тысячных и т. п. стали писать слитно:

$$5°1'2''3''' = 5{,}123.$$

В 1427 году самаркандский математик и астроном Джемшид ибн-Масуд аль Каши впервые подробно описал систему десятичных дробей и действий над ними. В Европе десятичные дроби стали известны через 100 с лишним лет после этого, благодаря, главным образом, трудам фламандского инженера и ученого С. Стевина.

В России учение о десятичных дробях впервые было изложено в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого — первом русском печатном учебнике по математике. История создания учебника такова. 14 января 1701 года Петр I подписал указ об учреждении в Москве Математико-навигационной школы. В школу принимались дети из различных сословий. После окончания школы они направлялись на военную, морскую и государственную службу. 22 февраля 1701 года учителем этой школы был назначен лучший в то время математик Москвы, которому поручили создать для школы учебник по математике и навигации. За «остроумие в науках» Петром I он был «именован прозванием Магницкий и учинен российскому благородному юношеству учителем математики». 21 ноября 1701 года рукопись учебника была закончена, и в 1703 году «Арифметика» Л. Ф. Магницкого была напечатана.

Книга использовалась не только в учебных заведениях, но и для самообразования. Один из экземпляров «Арифметики» в 1725 году попал к юному М. В. Ломоносову, который хранил эту книгу до конца своих дней. Позже М. В. Ломоносов назвал «Арифметику» Леонтия Магницкого и «Славянскую грамматику» (1643) Мелентия Смотрицкого «вратами учености».

Десятичные дроби, благодаря простой записи и сходными с целыми числами правилами действий, получили широкое распространение в практических расчетах.

Отметим, что в наше время в некоторых странах, например в США, целую и дробные части десятичных дробей отделяют не запятой, а точкой. Так, вместо

$$1{,}2;\ 35{,}48;\ 2{,}008$$

пишут

$$1.2;\ 35.48;\ 2.008.$$

Точкой отделяется целая часть числа от дробной в калькуляторах и компьютерах.

4.15. Занимательные задачи

907.*Арбуз весил 20 кг, в нем содержалось 99% воды. Через несколько дней он немного усох и содержание воды уменьшилось до 98%. Сколько теперь весит арбуз?

Решение. На первый взгляд кажется, что вес арбуза мало изменился, но это только на первый взгляд! Вес «сухого вещества» в арбузе составлял $100-99=1$ (%), или $20\cdot0{,}01=0{,}2$ (кг). После того, как арбуз усох, вес «сухого вещества» составил $100-98=2$ (%) от нового веса арбуза. Найдем этот новый вес: $0{,}2:0{,}02=10$ (кг).

Итак, вес арбуза уменьшился вдвое!

908.*Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В нашем лесу 99% сосны. После рубки сосна будет составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса может вырубить леспромхоз?

909.*На коробке с вермишелью написано: «Масса нетто 500 г при влажности 13%». Какова масса вермишели, если она хранится при влажности 25%?

910.*Для получения томат-пасты протертую массу томатов выпаривают в специальных машинах. Сколько тонн томат-пасты, содержащей 30% воды, получится из 28 т протертой массы томатов, содержащей 95% воды?

911.*Производительность труда повысили на 25%. На сколько процентов уменьшится время выполнения задания?

912.*Папа и сын плывут на лодке против течения. В какой-то момент сын уронил за борт папину шляпу. Только через 25 мин папа заметил пропажу, быстро развернул лодку и они поплыли вниз по течению с той же собственной скоростью. Через сколько минут они догонят шляпу?

913. Папа купил себе дипломат с двумя кодовыми замками. На каждом из этих замков устанавливают код — набор из трех цифр от 0 до 9 (рис. 64). Дипломат закрывают и на его наружной панели устанавливают произвольные наборы цифр. Каждый замок откроется лишь тогда, когда будет правильно набран его код.

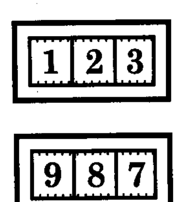


Рис. 64

а) Саша установил новый код на каждый замок, но забыл сообщить об этом папе и ушел в школу. Сколько времени может занять открывание замков у папы в худшем случае, если он будет последовательно проверять коды для каждого замка и на проверку каждого кода будет тратить 1 с?

б) Какова вероятность открыть с первой попытки один кодовый замок? Оба замка?

в) Саша установил новый код на каждый замок и через некоторое время забыл, в каком порядке цифры 1, 2 и 3 образуют эти два кода. Сколько кодов в худшем случае придется проверить Саше, чтобы открыть оба замка?

г) Саша установил два новых кода на замках дипломата и через некоторое время забыл их. Он помнит, что в каждый код входят цифры 1, 2 и какая-то третья цифра (не 1 и не 2). Сколько кодов в худшем случае придется проверить Саше, чтобы открыть один замок? Оба замка?

914. Известно, что площади равных фигур равны и площадь фигуры равна сумме площадей составляющих ее частей. Вычислите площадь (рис. 65): а) прямоугольника $ABCD$; б) треугольника ABC; в) треугольника ADC.

915. Вычислите площадь многоугольника (длины сторон в сантиметрах указаны на рисунке 66).

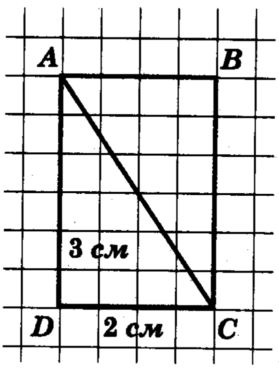


Рис. 65

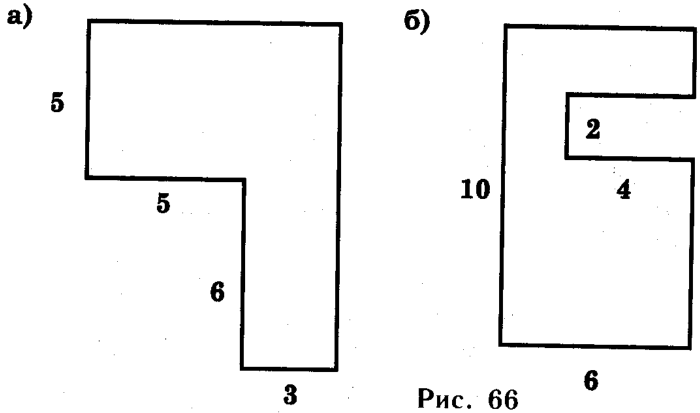


Рис. 66

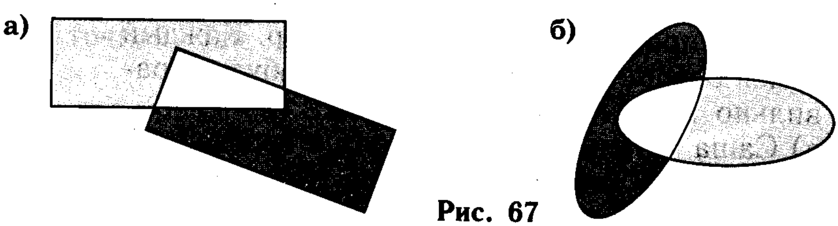


Рис. 67

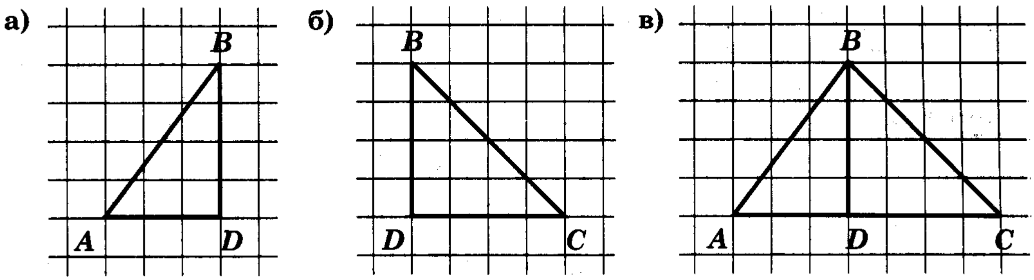


Рис. 68

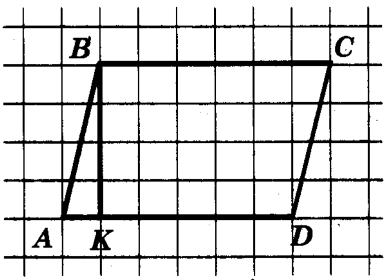


Рис. 69

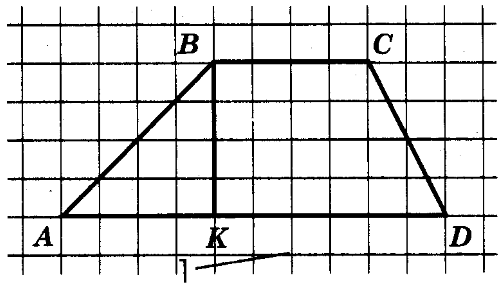


Рис. 70

916.*Две равные фигуры наложили друг на друга (рис. 67). Докажите, что площади закрашенных фигур равны.

917. Вычислите площадь треугольника (рис. 68).

918.*На рисунке 69 изображен **параллелограмм** (четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны). Вычислите его площадь, если $AD = 3$ см, $BK = 2$ см.

919.*На рисунке 70 изображена **трапеция** (четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие — не параллельны). Вычислите ее площадь, если $AD = 5$ см, $BC = 2$ см, $BK = 2$ см.

920.*Дан отрезок AB. Провели две пересекающиеся окружности с центрами в точках A и B (рис. 71). Точки пересечения окружностей обозначили M и N. Докажите, что точки M и N симметричны относительно прямой AB.

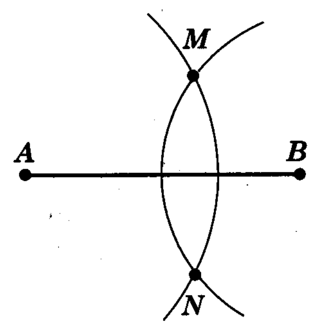


Рис. 71

921.*Дан отрезок AB. Провели две пересекающиеся окружности одинакового радиуса с центрами в точках

A и B. Точки пересечения окружностей обозначили M и N. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой MN.

922.*Серединным перпендикуляром к отрезку называют прямую, перпендикулярную отрезку и делящую его пополам. Докажите, что любая точка серединного перпендикуляра к отрезку одинаково удалена от концов этого отрезка.

923.*_Задача Леонардо да Винчи._ Докажите, что если две равные окружности пересекаются друг с другом, то любая точка прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, одинаково удалена от того и другого центра.

924.*Даны точки A и B. Постройте ось симметрии точек A и B.

925.*Разделите отрезок пополам циркулем и линейкой.

926.*В школе 20 классов. В ближайшем к школе доме живут 23 ученика этой школы. Можно ли утверждать, что среди них обязательно найдутся хотя бы два одноклассника?

927.*В школе учится 370 человек. Докажите, что среди всех учащихся найдутся хотя бы два ученика, празднующие свой день рождения в один и тот же день.

928.*Коля подсчитал, что на завтрак, обед и ужин он съел 10 конфет. Докажите, что хотя бы один раз он съел не меньше четырех конфет.

929.*В классе 37 человек. Докажите, что из них найдутся хотя бы 4 человека, родившиеся в один месяц.

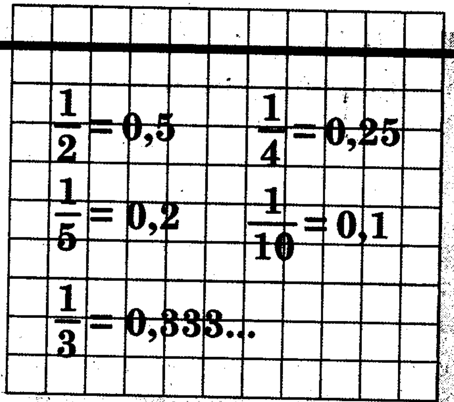
930.*В коллекции имеется 25 монет по 1, 2, 3 и 5 копеек. Есть ли среди них 7 монет одинакового достоинства?

931.*Учительница объявила результаты диктанта. Больше всех ошибок было у Пети — 13. Докажите, что среди 27 учащихся, допустивших ошибки, найдутся 3 человека с одинаковым числом ошибок.

932. Какие остатки могут получиться при делении натуральных чисел на:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5; д) 9; е) 11?

933.*Докажите, что число различных остатков, получающихся при делении натуральных чисел на натуральное число n, меньше или равно n.



ГЛАВА V

ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

5.1. Разложение положительной обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь

До сих пор мы рассматривали десятичные дроби, которые называют конечными, потому что после запятой у них стоит конечное число цифр. В дальнейшем мы будем рассматривать и бесконечные десятичные дроби. У них после запятой бесконечно много цифр.

Конечные десятичные дроби всегда можно записать в виде обыкновенных дробей.

Например,

$$0,375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8};$$

$$6,72=\frac{672}{100}=\frac{168}{25};$$

$$0,065=\frac{65}{1000}=\frac{13}{200}.$$

Заметим, что после сокращения дробей получились знаменатели

$$8=2^3,\ 25=5^2,\ 200=2^3\cdot 5^2.$$

Из этих примеров видно, что **если конечную десятичную дробь записать в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{p}{q}$, то ее знаменатель q не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.**

Это утверждение можно доказать в общем случае.

Верно и обратное утверждение:

Если знаменатель q несократимой дроби $\frac{p}{q}$ не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то эта дробь разлагается в конечную десятичную дробь.

Например, $$\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

В этом примере числитель и знаменатель дроби мы умножили на 2, чтобы получить в знаменателе 10.

Аналогично поступим и в следующих примерах:

$$\frac{201}{200}=\frac{201\cdot 5}{200\cdot 5}=\frac{1005}{1000}=1{,}005;$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75.$$

Для разложения в конечную десятичную дробь обыкновенной несократимой дроби, знаменатель которой не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, существует два способа.

Один из них мы уже рассмотрели, он сводится к умножению числителя и знаменателя дроби $\frac{p}{q}$ на соответствующую степень числа 2 или числа 5, чтобы в знаменателе получилась некоторая степень числа 10.

Другим является способ деления числителя на знаменатель уголком. Обратим этим способом обыкновенную дробь $\frac{3}{4}$ в десятичную (рис. 72,*а*). Те же вычисления иногда записывают иначе (рис. 72,*б*).

Следовательно, $\frac{3}{4}=0{,}75$.

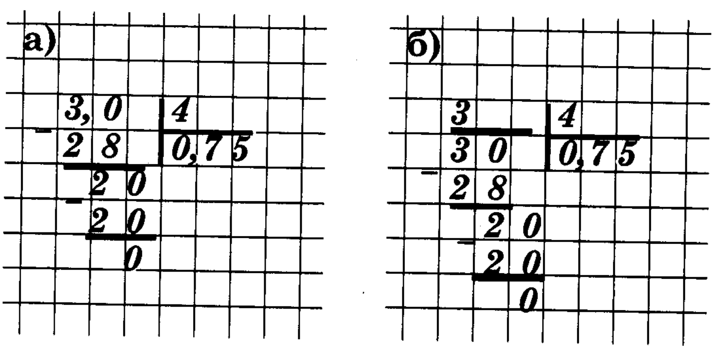


Рис. 72

934.° Конечную десятичную дробь записали в виде обыкновенной несократимой дроби. Может ли знаменатель этой дроби иметь простые делители, отличные от 2 и 5?

935.° Какие делители должен иметь знаменатель обыкновенной несократимой дроби, чтобы она разлагалась в конечную десятичную дробь? Приведите примеры.

936.° Какими способами можно разложить обыкновенную дробь в десятичную? Приведите примеры.

937. Какие простые множители содержит знаменатель дроби:

а) $\frac{1}{64}$; б) $\frac{1}{48}$; в) $\frac{1}{56}$; г) $\frac{1}{24}$;
д) $\frac{1}{128}$; е) $\frac{1}{78}$; ж) $\frac{1}{256}$; з) $\frac{1}{625}$;
и) $\frac{1}{10}$; к) $\frac{1}{100}$; л) $\frac{1}{1000}$; м) $\frac{1}{10000}$?

938. Сократите дробь:

а) $\frac{24}{60}$; б) $\frac{15}{20}$; в) $\frac{65}{100}$; г) $\frac{94}{100}$;
д) $\frac{21}{30}$; е) $\frac{16}{400}$; ж) $\frac{8}{100}$; з) $\frac{8}{1000}$.

939. Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби:

а) 0,4; б) 0,12; в) 0,125; г) 1,2;
д) 0,45; е) 0,04; ж) 1,008; з) 0,0018.

940. Приведите дробь к знаменателю 10, или 100, или 1000:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{25}$;
д) $\frac{11}{20}$; е) $\frac{9}{8}$; ж) $\frac{3}{8}$; з) $\frac{7}{40}$.

941. Разложите двумя способами в десятичную дробь:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{4}{5}$; в) $\frac{24}{15}$; г) $\frac{15}{24}$.

Разложите обыкновенную дробь в десятичную делением числителя на знаменатель уголком **(942 – 944):**

942. а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{3}{16}$; в) $\frac{48}{15}$; г) $\frac{3}{2000}$;
д) $\frac{17}{40}$; е) $\frac{28}{140}$; ж) $\frac{3}{12}$; з) $\frac{7}{56}$.

943. а) $\frac{6}{24}$; б) $\frac{7}{4}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{9}{5}$;

д) $\frac{3}{25}$; е) $\frac{12}{75}$; ж) $\frac{17}{200}$; з) $\frac{123}{20}$.

944. а) $\frac{783}{40}$; б) $\frac{324}{25}$; в) $\frac{625}{125}$; г) $\frac{860}{400}$;

д) $\frac{33}{60}$; е) $\frac{1024}{256}$; ж) $\frac{804}{400}$; з) $\frac{624}{120}$.

945. Можно ли разложить данную обыкновенную дробь в конечную десятичную дробь (ответ обосновать):

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{6}{48}$; в) $\frac{7}{352}$; г) $\frac{12}{56}$;

д) $\frac{120}{38}$; е) $\frac{12}{96}$; ж) $\frac{21}{75}$; з) $\frac{7}{300}$?

5.2. Периодические десятичные дроби

Из изложенного в предыдущем пункте следует, что **если знаменатель** несократимой дроби $\frac{p}{q}$ имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, **то эта дробь не разлагается в конечную десятичную дробь.** Поэтому при делении числителя этой дроби на знаменатель уголком не может получиться конечная десятичная дробь.

Пример 1. Разложим в десятичную дробь число $\frac{7}{9}$.

Это несократимая дробь, и ее знаменатель имеет простой делитель 3, отличный от 2 и 5. Поэтому число $\frac{7}{9}$ заведомо не разлагается в конечную десятичную дробь. Разделим все же числитель этой дроби на знаменатель уголком (рис. 73, *а*, другая запись деления показана на рис. 73, *б*).

На каждом этапе вычисления получается один и тот же остаток 7, а в частном одна и та же цифра 7. Процесс этот бесконечен (не имеет конца). Он приводит к выражению 0,777... , где точки означают, что цифра 7 периодически повторяется бесконечно много раз.

Выражение 0,777... называют **бесконечной периодической десятичной дробью** или просто периодической дробью, ее записывают еще так: 0,(7) и читают: «нуль целых и семь в периоде». Цифру 7 называют периодом дроби 0,(7).

Говорят, что число $\frac{7}{9}$ представлено в виде периодической дроби 0,(7) или, что периодическая дробь 0,(7) есть десятичное разложение числа $\frac{7}{9}$. При этом пишут:

$$\frac{7}{9}=0{,}777\ldots=0{,}(7).$$

Надо иметь в виду, что $\frac{7}{9}$ и 0,(7) являются разными обозначениями одного и того же числа в виде обыкновенной дроби $\frac{7}{9}$ и в виде бесконечной периодической десятичной дроби 0,(7).

Пример 2. Разложим в десятичную дробь число $\frac{2}{99}$.

Дробь $\frac{2}{99}$ несократимая, и ее знаменатель имеет простые делители, отличные от 2 и 5. Поэтому ее десятичное разложение не может быть конечным. В самом деле, разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\,2{,}0000 & 99 \\ \underline{198} & \overline{0{,}0202\ldots} \\ -\,200 & \\ \underline{198} & \\ 2 & \\ \ldots & \end{array}$$

Процесс деления числителя на знаменатель уголком здесь бесконечный, он приводит к периодической дроби 0,0202... . Группа цифр (02) является периодом дроби 0,0202... . Эту периодическую дробь записывают так: 0,(02) и читают: «нуль целых и нуль два в периоде».

Говорят, что число $\frac{2}{99}$ представлено в виде периодической дроби 0,(02) или что

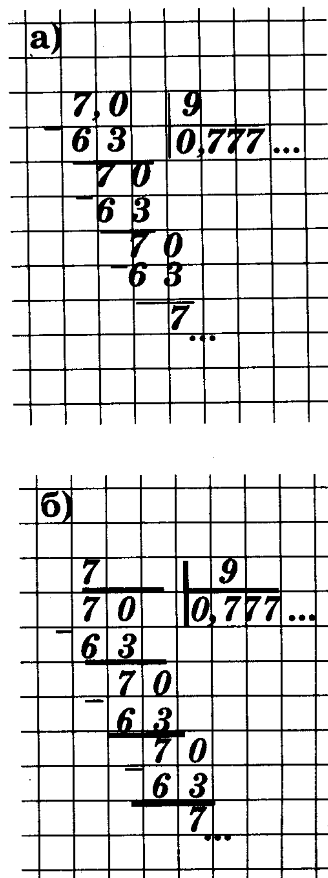


Рис. 73

периодическая дробь 0,(02) есть десятичное разложение числа $\frac{2}{99}$, и пишут:

$$\frac{2}{99}=0{,}0202...=0{,}(02).$$

Пример 3. Разложим в десятичную дробь число $\frac{143}{45}$.

Разделив числитель дроби $\frac{143}{45}$ на ее знаменатель уголком, получим:

$$\frac{143}{45}=3{,}1777...=3{,}1(7).$$

Правая часть этого равенства читается так: «три целых, одна десятая и семь в периоде».

Вообще, если числитель положительной несократимой дроби разделить на ее знаменатель уголком, то в частном получится либо конечное, либо бесконечное периодическое ее десятичное разложение.

Поставив перед положительной периодической дробью знак «−», получим отрицательную периодическую дробь. Например, $-0{,}(7)=-\frac{7}{9}$. Периодическая дробь $-0{,}(7)$ есть десятичное разложение числа $-\frac{7}{9}$.

Приписывая к целому числу (после запятой) или к конечной десятичной дроби бесконечно много нулей, мы превращаем ее в равную ей бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 0.

Например,

$$27=27{,}000...=27{,}(0);$$
$$0{,}354=0{,}354000...=0{,}354(0);$$
$$-3{,}1=-3{,}1000...=-3{,}1(0).$$

Следовательно, любое целое число и любую конечную десятичную дробь можно считать периодической дробью с периодом 0.

Итак, **любое рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в периодическую дробь.** Можно показать также, что **любая периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого рационального числа.**

В следующем пункте дается обоснование этим утверждениям.

946.° В каком случае несократимая обыкновенная дробь не разлагается в конечную?

947.° Каким способом любую обыкновенную дробь можно разложить в десятичную?

948.° Какие десятичные дроби можно получить при делении уголком числителя обыкновенной дроби на ее знаменатель?

949.° Как узнать, в какую десятичную дробь разлагается обыкновенная дробь — в конечную или в бесконечную? Приведите примеры.

950. Как можно записать конечную десятичную дробь или натуральное число в виде бесконечной периодической десятичной дроби? Приведите примеры.

951. Запишите число в виде периодической дроби, назовите ее период:

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{12}{5}$; г) 12; д) $\frac{24}{30}$;

е) $\frac{36}{48}$; ж) $\frac{4}{7}$; з) $\frac{45}{63}$; и) $\frac{1}{6}$; к) $\frac{2}{6}$;

л) $\frac{3}{6}$; м) $\frac{4}{6}$; н) $\frac{20}{41}$; о) $\frac{15}{37}$; п) $\frac{5}{21}$.

952. Разложите обыкновенную дробь в десятичную делением числителя на знаменатель уголком:

а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{3}{9}$; г) $\frac{4}{9}$.

953. Используя результат предыдущего задания, разложите обыкновенную дробь в десятичную:

а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{6}{9}$; в) $\frac{7}{9}$; г) $\frac{8}{9}$.

954. Разложите обыкновенную дробь в десятичную и назовите ее период:

а) $\frac{12}{99}$; б) $\frac{23}{99}$; в) $\frac{34}{99}$; г) $\frac{45}{99}$.

955. Используя результат предыдущего задания, разложите обыкновенную дробь в десятичную:

а) $\frac{56}{99}$; б) $\frac{67}{99}$; в) $\frac{78}{99}$; г) $\frac{89}{99}$.

956. Используя предыдущие задания, запишите периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 0,(1); б) 0,(3); в) 0,(5); г) 0,(7);
д) 0,(25); е) 0,(37); ж) 0,(10); з) 0,(05).

5.3.* Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби

Покажем, что если числитель положительной несократимой дроби $\frac{p}{q}$ разделить на ее знаменатель уголком, то в частном получится либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.

Если знаменатель q несократимой дроби не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то при делении числителя на знаменатель получится конечная десятичная дробь. В остальных случаях получится бесконечная десятичная дробь. Наша цель показать, что она периодическая.

Рассмотрим сначала пример. Пусть надо найти десятичное разложение дроби $\frac{88}{7}$. Будем делить 88 на 7 уголком:

```
_88    | 7
  7    |------------
 ---   | 12,5714285...
 _18
  14
  ---
 _*40
   35
   ---
   _50
    49
    ---
    _10
      7
     ---
     _30
      28
      ---
      _20
       14
       ---
       _60
        56
        ---
      _**40
         35
         ---
          5
         ...
```

Остатки, получаемые после того, как снесена последняя цифра делимого, выделены цветом. Мы видим, что остатки, помеченные одной и двумя звездочками, равны между собой. Это показывает, что процесс деления имеет периодический характер и приводит к бесконечной периодической десятичной дроби, т. е.

$$\frac{88}{7}=12,(571428).$$

То, что десятичное разложение дроби $\frac{88}{7}$ должно быть бесконечным периодическим, можно объяснить и без вычислений.

Данная дробь $\frac{88}{7}$ несократимая, ее знаменатель содержит простой делитель, отличный от 2 и 5. Следовательно, десятичное разложение числа $\frac{88}{7}$ не может быть конечным — возникающие при делении остатки положительны на любом этапе деления. В то же время каждый остаток меньше 7, т. е. он равен одному из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но тогда, если мы будем рассматривать подряд остатки, начиная с отмеченного одной звездочкой, то среди первых 7 из них обязательно найдутся два равных между собой остатка. Это и показывает, что в частном получится периодическая дробь.

Подобные рассуждения можно провести для любой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5. Если делить p на q уголком, то наступит такой этап, когда все цифры делимого будут снесены. Если рассмотреть подряд все возникающие (начиная с этого момента) остатки, то среди первых q из них всегда найдутся два равных между собой. А это и показывает, что процесс деления бесконечный и периодический.

Итак, **любое положительное рациональное число $\frac{p}{q}$ разлагается в бесконечную периодическую десятичную дробь.**

Напомним, что конечную десятичную дробь можно считать периодической дробью (с периодом 0).

Справедливо и обратное утверждение: **любая положительная периодическая дробь есть десятичное разложение некоторого положительного рационального числа.**

Рассмотрим на примерах, как можно находить это число.

Пример 1. Запишем периодическую дробь 0,(8) в виде обыкновенной дроби. Для этого обозначим искомую дробь через x:

$$x=0{,}888\ldots\ .$$

Умножим это равенство на 10, получим:

$$10x = 8{,}888\ldots\ .$$

Вычтем первое равенство из второго, получим:

$$10x - x = 8,$$
$$9x = 8,$$
$$x = \frac{8}{9}.$$

Разделив числитель дроби $\frac{8}{9}$ на ее знаменатель уголком, убедимся, что эта дробь действительно равна периодической дроби $0{,}(8)$.

Пример 2. Запишем периодическую дробь $2{,}35(7)$ в виде обыкновенной дроби. Для этого обозначим искомую дробь через x:

$$x = 2{,}357777\ldots\ .$$

Умножая это равенство на 100 и на 1000, получим равенства:

$$100x = 235{,}777\ldots \quad \text{и}$$
$$1000x = 2357{,}777\ldots\ .$$

Вычитая первое равенство из второго, находим, что

$$1000x - 100x = 2357 - 235,$$

откуда

$$x = \frac{2357-235}{900} = \frac{2122}{900}.$$

Разделим числитель дроби $\frac{2122}{900}$ на знаменатель уголком и убедимся, что эта дробь действительно равна периодической дроби $2{,}35(7)$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно заметить, что

$$2{,}4(0) = \frac{240-24}{90} = 2{,}4,$$
$$2{,}3(9) = \frac{239-23}{90} = 2{,}4.$$

Следовательно, $2{,}4 = 2{,}4(0) = 2{,}3(9)$.

Также показывается, что любую периодическую дробь с периодом 9 можно заменить равной ей конечной десятичной дробью.

Замечание. При делении уголком десятичное разложение с периодом 9 не возникает. Поэтому обычно не рассматривают периодические дроби с периодом 9.

957.°Сколько цифр может быть в периоде десятичного разложения обыкновенной несократимой дроби со знаменателем 7?

958.°В каком случае разложение обыкновенной дроби в десятичную является:

а) конечным; б) бесконечным?

959.°Почему десятичное разложение дроби $\frac{3}{7}$ периодическое?

960. Разложите обыкновенную дробь в десятичную делением числителя на знаменатель уголком:

а) $\frac{1}{11}$; б) $\frac{2}{11}$; в) $\frac{1}{12}$; г) $\frac{5}{12}$;
д) $\frac{1}{7}$; е) $\frac{5}{7}$; ж) $\frac{2}{7}$; з) $\frac{1}{33}$.

961.*Запишите периодическую дробь в виде обыкновенной дроби:

а) 1,(8); б) 0,(3); в) 0,(7); г) 3,(5);
д) 0,1(2); е) 1,12(3); ж) 7,5(4); з) 0,(35);
и) 0,(59); к) 0,(12); л) 1,0(12); м) 8,7(21).

962.*Покажите, что периодическая дробь с периодом 9 равна конечной десятичной дроби:

а) 0,3(9) = 0,4; б) 1,2(9) = 1,3.

5.4. Непериодические бесконечные десятичные дроби

Рассмотрим положительную бесконечную десятичную дробь

$$0{,}101101110111110\ldots ,$$

в которой после запятой записаны цифры: единица, нуль, две единицы, нуль, три единицы, нуль и т. д. У этой дроби никакая группа цифр не является периодом. Эта дробь **непериодическая** и, следовательно, не может быть десятичным разложением какого-либо рационального числа.

Вот еще примеры положительных бесконечных непериодических десятичных дробей:

$$0{,}01001000100001\ldots ,$$
$$17{,}1234567891011\ldots .$$

У первой дроби после запятой записаны цифры: нуль, единица, два нуля, единица, три нуля, единица и т. д. У второй — после запятой записаны в возрастающем порядке числа натурального ряда.

Поставив перед положительной дробью знак «$-$», получим отрицательную дробь. Например, дроби

$$-0{,}01001000100001\ldots\ ,$$
$$-17{,}12345678\ldots$$

есть отрицательные бесконечные непериодические десятичные дроби.

Бесконечные десятичные дроби называют числами.

Число, которое можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, называют иррациональным (нерациональным) **числом.**

Если иррациональное число обозначено буквой, например,

$$a = 0{,}01001000100001\ldots\ ,$$

то говорят, что правая часть этого равенства есть десятичное разложение числа a.

Рациональные и иррациональные числа называют действительными числами.

Любое действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби. Если число рациональное, то дробь периодическая, если число иррациональное, то дробь непериодическая.

963.° Какое число называют:

а) рациональным; б) иррациональным; в) действительным?

964.° Любое ли иррациональное число является действительным?

965. Придумайте какие-нибудь пять бесконечных непериодических дробей (иррациональных чисел).

966.° Существует ли рациональное число, равное бесконечной непериодической дроби?

967. Каким числом (рациональным или иррациональным) является число:

а) 0,275; б) 0,(2);
в) 1,32323232... ; г) 1,15(45);
д) 3,10110111011110... ; е) 0,12345678... ?

968. Запишите четыре числа:

а) натуральных;
б) положительных;
в) отрицательных;
г) целых;
д) рациональных;
е) иррациональных;
ж) четных;
з) нечетных;
и) простых;
к) составных;
л) кратных 3;
м) кратных 2 и 5.

969. Запишите два числа:

а) рациональных и отрицательных;
б) целых и кратных 5;
в) целых и положительных;
г) простых и больших 30;
д) составных и четных;
е) нечетных и кратных 7.

5.5.* Действительные числа

Число до запятой у положительной бесконечной десятичной дроби называют **целой частью** этой **дроби.**

Первую цифру после запятой у бесконечной десятичной дроби называют цифрой первого разряда после запятой, вторую цифру — цифрой второго разряда после запятой, третью — цифрой третьего разряда после запятой и т. д.

Числа, отличающиеся только знаком, называют противоположными числами.

Например, числа $-4{,}328...$ и $4{,}328...$ — противоположные.

Если одно из двух противоположных чисел обозначить буквой a, то другое обозначают $-a$.

Если a — положительное число, то $-a$ — отрицательное число; если a — отрицательное число, то $-a$ — положительное число; если $a=0$, то $-a=0$.

Модуль (абсолютную величину) действительного числа a обозначают $|a|$, и определяют следующим образом:

$|a|=a$, если a положительно,
$|a|=0$, если $a = 0$,
$|a|=-a$, если a отрицательно.

Для числа $a=0$ верны равенства $|a|=a$, $|a|=-a$, так как $-0=0$.

Бесконечные десятичные дроби (не имеющие периода 9) сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

Пример 1. Сравним числа $-3,1$ и $-3,(1)$.

Так как $|-3,1|=3,1=3,1000...$,

$|-3,(1)|=3,(1)=3,1111...$

и $3,1 < 3,(1)$, то $-3,1 > -3,(1)$.

Действительно, модули этих чисел имеют одинаковые целые части и одинаковые цифры первого разряда после запятой, но цифра второго разряда после запятой у дроби 3,1 меньше, чем у дроби 3,(1). Поэтому модуль первой дроби меньше модуля второй и по правилу сравнения отрицательных чисел получаем:

$$-3,1 > -3,(1).$$

Правила сложения, вычитания, умножения и деления конечных десятичных дробей нам уже хорошо известны. Можно дать формальные правила сложения, вычитания, умножения и деления бесконечных десятичных дробей — они сложнее соответствующих правил для конечных десятичных дробей. Эти правила требуют применения бесконечных процессов и потому могут представлять лишь теоретический интерес. Они здесь не приводятся.

На практике бесконечные десятичные дроби (т. е. действительные числа) складывают, вычитают, умножают и делят приближенно, точно так же, как и конечные десятичные дроби.

Пример 2. Найдем приближенно сумму и разность чисел a и b, округлив их с точностью до одной десятой, если:

$$a=23,(18),\ b=-4,23(75).$$

Решение. Округляя эти числа с точностью до одной десятой, находим, что $a\approx 23,2$ и $b\approx -4,2$. Откуда получаем ответ:

$$a+b\approx 19,0;\ a-b\approx 27,4.$$

Пример 3. Найдем приближенно произведение $a\cdot b$ и частное $a:b$ чисел a и b, округлив их с точностью до третьей значащей цифры, если:

$$a=-135,78(6),\ b=0,0068751.$$

Решение. Округляя эти числа с точностью до третьей значащей цифры, имеем:

$$a\approx -136,\ b\approx 0,00688.$$

Откуда получаем ответ:

$$a\cdot b\approx -0,93568\approx -0,936;$$
$$a:b\approx -19767,4...\approx -19800=-1,98\cdot 10^4.$$

Для действительных чисел справедливы те же основные свойства, что и для рациональных чисел:

1. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место только одно из соотношений:

$$a=b,\ a < b,\ a > b.$$

2. Для любых двух действительных чисел a и b таких, что $a < b$ найдется такое действительное число c, что $a < c$ и $c < b$, т. е. $a < c < b$.

3. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ — свойство транзитивности неравенств.

4. Если $a < b$, то $a+c < b+c$ для любого действительного числа c.

5. Если $a < b$ и c — положительное число, то справедливо неравенство $a \cdot c < b \cdot c$.

Для любых действительных чисел a, b и c справедливы равенства:

$$a+b=b+a, \tag{1}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c), \tag{2}$$

$$a \cdot b=b \cdot a, \tag{3}$$

$$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c), \tag{4}$$

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c, \tag{5}$$

$$a+0=a, \tag{6}$$

$$a+(-a)=0, \tag{7}$$

$$a-b=a+(-b), \tag{8}$$

$$a \cdot 1=a, \tag{9}$$

$$a \cdot 0=0, \tag{10}$$

$$-a=(-1) \cdot a, \tag{11}$$

$$a \cdot \frac{1}{a}=1 \ (a \neq 0), \tag{12}$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} \ (b \neq 0). \tag{13}$$

Подчеркнем еще раз, что делить на нуль нельзя, поэтому запись $\frac{a}{0}$ бессмысленна для любого действительного числа a, в том числе и для $a=0$.

Замечание. Мы знаем, что эти свойства могут быть обоснованы для рациональных чисел a, b, c. Подобное обоснование можно выполнить и для действительных чисел (не только рациональных, но и иррациональных), пользуясь тем, что они приближаются десятичными дробями.

970.° Что называют целой частью положительной бесконечной десятичной дроби?

971.° Назовите цифры пятого, шестого, седьмого разрядов после запятой дроби:

а) 13,(27); б) 17,12345678... .

972. Какие числа называют противоположными? Приведите примеры.

973. Как обозначают число, противоположное числу a?

974. Если число обозначено через $-a$, значит ли это, что оно отрицательное? Приведите примеры.

975. Что называют модулем (абсолютной величиной) действительного числа? Приведите примеры.

976. Как сравнить два действительных числа? Приведите примеры.

977. Если $|a| < |b|$, то всегда ли верно неравенство $a < b$?

978. Пусть $|a| = |b|$. В каких случаях $a = b$ и в каких $a = -b$?

979. Поясните, как надо понимать записи:

а) $a \leqslant b$; б) $a < b < c$; в) $a \leqslant b < c$;
г) $a < b \leqslant c$; д) $a \leqslant b \leqslant c$.

980. Для каких чисел верно равенство:

а) $|a| = a$; б) $|a| = -a$?

981. Найдите модуль (абсолютную величину) числа:

а) $-2,(3)$; б) $-0,5777$; в) $-12,0(12)$; г) $3,0(13)$.

982. Найдите число, противоположное числу:

а) $2,5(3)$; б) $-1,(72)$; в) $3,1(12)$; г) $3,0(13)$.

983. Сравните числа:

а) $3,5$ и $3,(5)$; б) $-2,14$ и $-2,1(4)$;
в) $-3,(2)$ и $4,11$; г) $-5,(43)$ и $-5,(4)$.

984. Округлите числа a и b с точностью до $0,1$ и вычислите приближенно разность $a - b$, если:

а) $a = 12,32$, $b = 0,1$; б) $a = 0,(2)$, $b = -2,323$;
в) $a = 4,2$, $b = 1,(1)$; г) $a = 45,6(12)$, $b = 10,(2)$.

985. Найдите приближенно сумму чисел, беря слагаемые с точностью до $0,01$:

а) $3,5 + 3,(5)$; б) $1,359 + 3,2(6)$;
в) $12,351 + 0,(3)$; г) $7,(41) + 5,(36)$.

986. Найдите приближенно разность чисел, беря уменьшаемое и вычитаемое с точностью до 0,001:

а) 11,(4) − 7,3; б) 12,(15) − 3,7236;
в) 7,(93) − 2,(39); г) 3,3297 − 6,(8).

987. Найдите приближенно произведение чисел, беря множители с точностью до третьей значащей цифры:

а) 1,3·12,(1); б) 0,56·0,(3);
в) 9,(1)·6,(2); г) 12,(45)·10,(1).

988. Найдите приближенно частное чисел, беря делимое и делитель с точностью до третьей значащей цифры:

а) 3,2:0,(2); б) 0,(5):2;
в) 3,(82):2,(3); г) 35,0(8):4,(02).

989.° а) Что получится, если к числу прибавить 0?
б) Чему равна сумма противоположных чисел?
в) Можно ли разность $a-b$ записать в виде суммы?
г) Что получится, если число умножить на 1?
д) Что получится, если число умножить на 0?

990.* Докажите, пользуясь свойствами действительных чисел, что:

а) если $a < b$ и c — отрицательное число, то $a \cdot c > b \cdot c$;
б) если $0 < a < b$, то $a^2 < b^2$;
в) если $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$.

991. Какими свойствами арифметических действий воспользовались при вычислениях:

а) $125 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 = 125 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 = 1000 \cdot 21 = 21\,000$;

б) $4\frac{2}{3} \cdot 7\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} \cdot 4\frac{2}{3} = 4\frac{2}{3} \cdot \left(7\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3}\right) = 4\frac{2}{3} \cdot 10 =$

$= \frac{14 \cdot 10}{3} = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}$;

в) $4\frac{2}{5} \cdot 7\frac{13}{19} \cdot \frac{5}{22} = \frac{22}{5} \cdot \frac{5}{22} \cdot 7\frac{13}{19} = 7\frac{13}{19}$?

992. Известно, что если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого действительного числа c. Проиллюстрируйте это свойство действительных чисел на примере, взяв $a = -4,7$, $b = -5,25$, $c = -2,3$.

Вычислите **(993 — 996):**

993.° а) $68 \cdot 48 + 68 \cdot 52$; б) $59 \cdot 37 + 59 \cdot 63$;
в) $87 \cdot 29 + 87 \cdot 71$; г) $17 \cdot 73 - 63 \cdot 17$;
д) $382 \cdot 400 - 500 \cdot 382$; е) $756 \cdot 350 + 756 \cdot 650$.

994. а) $352 \cdot 18 : 9$; б) $748 \cdot 36 : 18$;
в) $126 \cdot 96 : 32$; г) $172 \cdot 256 : 128$.

995. а) $25 \cdot 7 \cdot 8$; б) $13 \cdot 12 \cdot 25$;
в) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{7} \cdot 7\frac{1}{6} \cdot 6$;
д) $78 : 3 \cdot \left(\frac{1}{8} - 2\frac{1}{8}\right)$; е) $\left(75 - 100\frac{1}{2}\right) \cdot 0{,}04$.

996. а) $12{,}5(67) - 12{,}5(67)$; б) $6{,}7(89) \cdot 0$;
в) $4{,}51(2) : 1$; г) $0 : 0{,}0(654)$.

5.6. Длина отрезка

Рассмотрим несколько примеров измерения длины отрезка. За единичный отрезок (единицу длины) возьмем 1 дм (рис. 74).

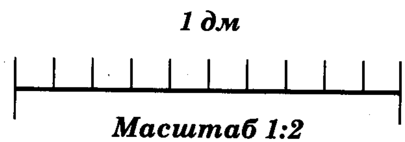


Рис. 74

Пример 1. Отрезок AB, изображенный на рисунке 75, имеет длину 2 дм, т. е. на отрезке AB укладывается точно 2 дм. Пишут: $AB = 2$ дм.

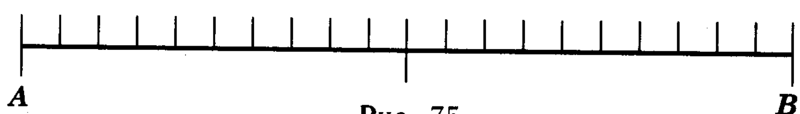


Рис. 75

Пример 2. На рисунке 76 в отрезке AB укладывается 2 дм с некоторым остатком, меньшим 1 дм. В этом случае говорят, что длина AB приближенно равна 2 дм с точностью до 1 дм с недостатком и пишут: $AB \approx 2$ дм.

Рис. 76

Пример 3. На рисунке 77 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором укладывается точно 3 см. В этом случае пишут: $AB=2{,}3$ дм.

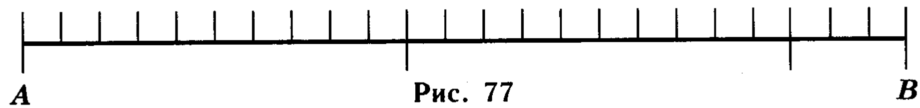


Рис. 77

Пример 4. На рисунке 78 в отрезке AB укладывается 2 дм с остатком, в котором укладывается 3 см с остатком, меньшим 1 см. В этом случае длина отрезка AB приближенно равна 2,3 дм с точностью до 0,1 дм с недостатком. Пишут: $AB \approx 2{,}3$ дм.

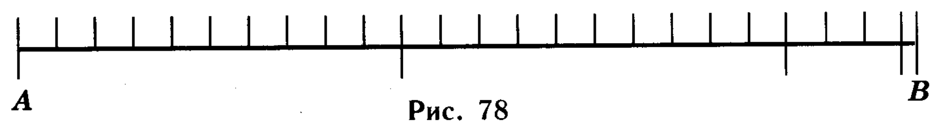


Рис. 78

Пример 5. Если в примере 4 во втором остатке укладывается точно 4 миллиметра, то пишут $AB=2{,}34$ дм.

Пример 6. Если в примере 4 во втором остатке укладывается 4 мм с остатком, меньшим 1 мм, то говорят, что длина отрезка AB приближенно равна 2,34 дм с точностью до 0,01 дм с недостатком:

$$AB \approx 2{,}34 \text{ дм.}$$

Также, как в примерах 1—6, можно измерять длины отрезков любой другой единицей длины: 1 см, 1 м, 1 км, ...

Пример 7. Если $AB=0{,}2305$, то это значит, что длина отрезка AB меньше длины единичного отрезка (единицы длины); в отрезке AB укладывается 0,2 единицы с остатком, в котором укладываются 0,03 единицы с остатком, в котором в свою очередь укладывается точно 0,0005 единицы.

Если при измерении данного отрезка AB при помощи заданной единицы длины, ее десятых, сотых, тысячных и т. д. долей на любом этапе измерения возникает остаток, то длина AB при помощи конечной дроби может быть выражена только приближенно. Точно же длина отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью:

$$AB = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots\ .$$

Здесь α_0 — приближенная длина AB с точностью до 1 с недостатком; α_0,α_1 — приближенная длина AB с точностью до 0,1 с недостатком; $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ — приближенная длина AB с точностью до 0,01 с недостатком и т.д.

Пример 8. Если $AB=3,(07)=3,070707\ldots$, то приближенная длина отрезка AB равна:

3 — с точностью до 1 с недостатком;

3,0 — с точностью до 0,1 с недостатком;

3,07 — с точностью до 0,01 с недостатком;

3,070 — с точностью до 0,001 с недостатком и т. д.

Отметим, что

$$3,(07)=3\frac{7}{99}.$$

Поэтому это число можно рассматривать как длину отрезка, в котором укладывается 3 единицы (три единичных отрезка) и еще $\frac{7}{99}$ единицы.

На практике, чтобы начертить с помощью линейки отрезок AB, воспользовались бы его приближенной длиной, заданной десятичной дробью. Например, приняли бы, что $AB \approx 3,07$. Ведь обычные измерительные приборы приспособлены к десятичной системе счисления — единица длины делится на 10, 100, 1000, ... равных частей.

Замечание. Ранее вводилось уже понятие длины отрезка, но только в том случае, когда его длина выражается рациональным числом. В этом пункте дано понятие длины произвольного отрезка, которая может выражаться как рациональным, так и иррациональным числом. Подводя итог, можно сказать, что произвольный отрезок AB имеет длину a — положительное число. Верно и обратное утверждение: если дано положительное число a, то можно указать отрезок AB, длина которого равна этому числу.

997. На рисунке 79 изображены отрезки BC, AD, KP. Определите на глаз длину каждого отрезка в сантиметрах. Проверьте свой глазомер с помощью линейки.

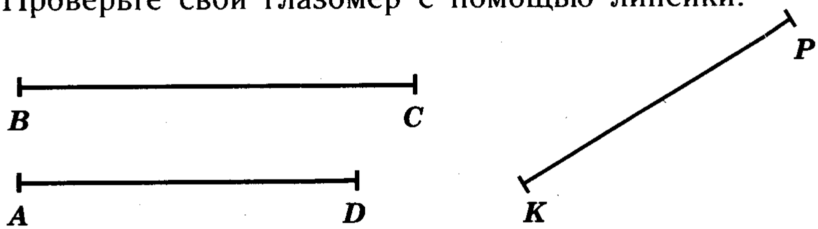


Рис. 79

998. Постройте в тетради три произвольных отрезка и выполните предыдущее задание.

999. Постройте в тетради отрезки длиной 3,5 см, 5 см и 6,5 см. Разделите на глаз каждый отрезок на 3 равные части. Проверьте свой глазомер с помощью линейки.

1000. Постройте отрезок длиной в 8,5 см. Разделите на глаз этот отрезок на 5 равных частей; на 6 равных частей.

1001. На рисунке 80 изображены отрезки AB и CD. Приняв за единицу измерения отрезок CD, измерьте на глаз отрезок AB с точностью до 1 с недостатком. Проверьте свой глазомер с помощью циркуля.

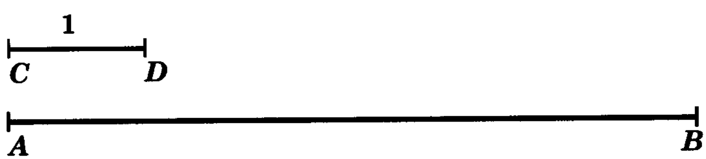


Рис. 80

1002. Длина отрезка AB выражена числом 5,375. Запишите приближенную длину отрезка AB с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком.

1003. Длина отрезка AB равна:

а) $3\frac{1}{8}$; б) $2\frac{5}{16}$; в) $3\frac{61}{99}$; г) $4\frac{14}{27}$.

Выразите длину отрезка десятичной дробью с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком.

1004. Выразите длину отрезка AB десятичной дробью с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 с недостатком, если $AB=3\frac{19}{99}$.

5.7. Длина окружности. Площадь круга

Еще в глубокой древности было замечено, что **отношение длины окружности к длине ее диаметра выражается одним и тем же числом для всех окружностей.**

Это число теперь принято обозначать греческой буквой π (пи). π — иррациональное число, которое выражается бесконечной непериодической дробью:

$$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028\ldots .$$

Закон, по которому вычисляют цифры числа π, очень сложен. Мы записали у этого числа 34 знака после запятой. Но с помощью вычислительных машин можно вычислить практически любую его цифру после запятой. Обычно используют приближение числа π с точностью до одной сотой:

$$\boxed{\pi \approx 3{,}14.}$$

Число π есть отношение длины окружности (C) к длине ее диаметра (d):

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2R},$$

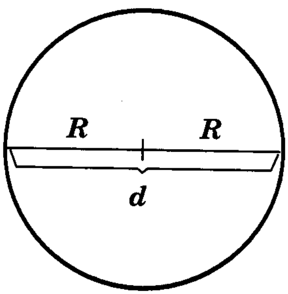


Рис. 81

поэтому справедлива формула:

$$\boxed{C = 2\pi R.}$$

Здесь R — радиус окружности (рис. 81), C — ее длина.

С помощью числа π вычисляется площадь S круга радиуса R:

$$\boxed{S = \pi R^2.}$$

Пример. Радиус окружности равен 10 см. Вычислим длину окружности и площадь круга, ограниченного этой окружностью.

1) Длина окружности равна:

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8 \text{ (см)}.$$

2) Площадь круга равна:

$$S = \pi R^2 \approx 3{,}14 \cdot 10^2 = 3{,}14 \cdot 100 = 314 \text{ (см}^2\text{)}.$$

1005.°Чему равно отношение длины окружности к длине ее диаметра?

1006. Напишите формулу для вычисления:
а) длины окружности;
б) площади круга.

1007. Вычислите длину окружности радиуса:
а) 3 см; б) 0,06 м; в) 0,4 дм.

1008. Вычислите площадь круга радиуса:
а) 3 см; б) 4,6 дм; в) 0,2 м.

1009. Как изменится длина окружности, если ее радиус:
а) увеличить в 3 раза;
б) уменьшить в 2 раза?

1010. Как изменится радиус окружности, если ее длину:
а) увеличить в 5 раз;
б) уменьшить в 7 раз?

1011. Как изменится длина окружности, если ее радиус:
а) увеличить на 3 см;
б) уменьшить на 3 см?

1012. Как изменится радиус окружности, если ее длину:
а) увеличить на 6,28 см;
б) уменьшить на 9,42 дм?

1013. Как изменится площадь круга, если его радиус:
а) увеличить в 3 раза;
б) уменьшить в 2 раза?

1014.*Сравните длины голубой и черной линий (рис. 82).

1015.*Докажите, что ответ в предыдущей задаче не зависит от положения точки M на отрезке AB.

1016.*Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 83). Сторона квадрата равна 4 см, дуги — четвертые части окружности.

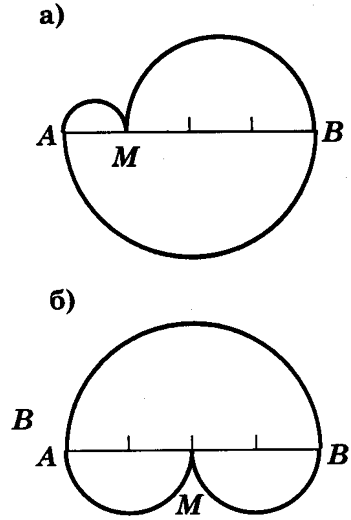


Рис. 82

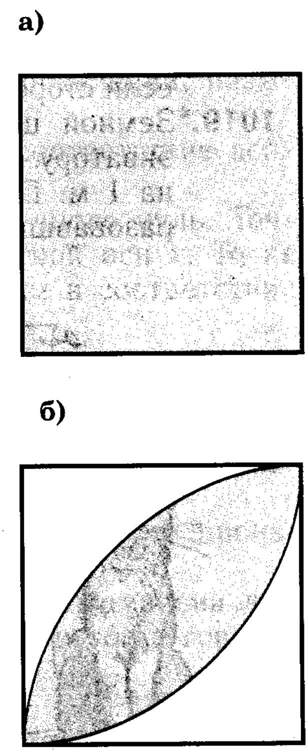
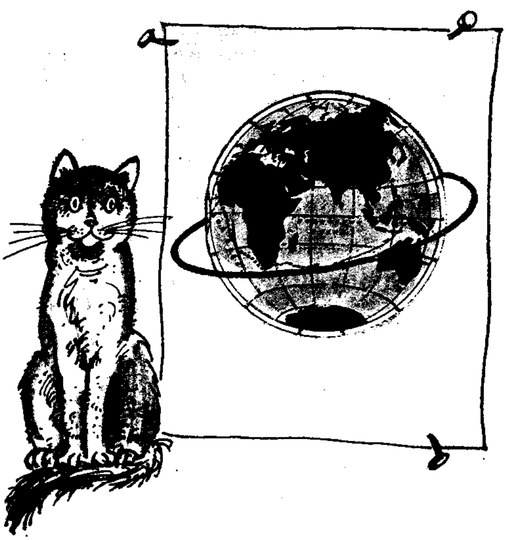


Рис. 83

1017. *На сторонах квадрата как на диаметрах построили полукруги внутри квадрата. Вычислите площадь закрашенной фигуры (рис. 84). Сторона квадрата равна 4 см.

1018. *На сторонах квадрата как на диаметрах построили полукруги вне квадрата. Получили первую фигуру (рис. 85, *а*). Потом каждую сторону такого же квадрата разделили на 2 равные части и на каждой из этих частей как на диаметрах построили полукруги вне квадрата. Получили вторую фигуру (рис. 85, *б*). Потом каждую сторону такого же квадрата разделили на 3 равные части и т. д. Вычислите периметр и площадь каждой из первых четырех фигур, если сторона квадрата равна 12 см.

1019. *Земной шар стянули обручем по экватору. Затем увеличили обруч на 1 м. Пролезет ли кошка в образовавшийся зазор?



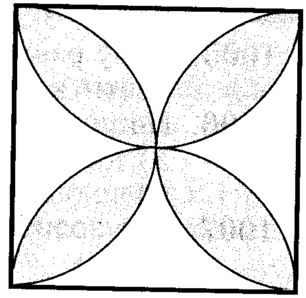
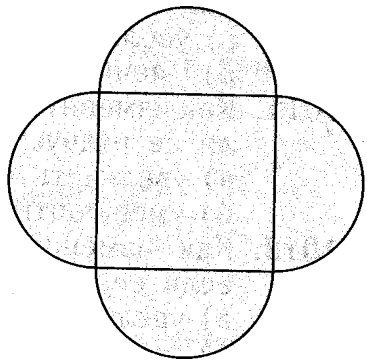


Рис. 84

а)



б)

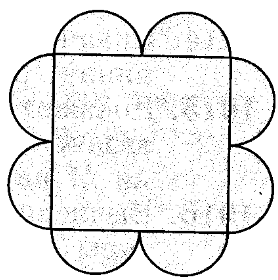


Рис. 85

5.8. Координатная ось

Зададим прямую, на которой выбрано направление, называемое положительным, и выбрана точка O, называемая начальной точкой. Зададим еще отрезок, длину которого примем за единицу — единичный отрезок.

Прямую, на которой выбрана начальная точка, положительное направление и единичный отрезок, называют координатной осью.

На рисунке 86 координатная ось нарисована горизонтально, с положительным направлением, идущим вправо от точки O. Но, вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально, или еще как-нибудь, и положительное направление на ней может быть выбрано так, как это может оказаться удобным.

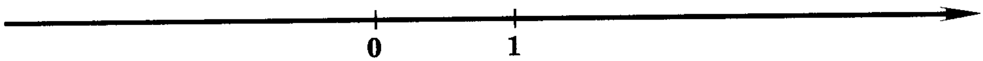


Рис. 86

Начальная точка O делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называют положительным, другой — отрицательным.

Каждой точке координатной оси поставим в соответствие действительное число x по следующему правилу.

Начальной точке O поставим в соответствие число нуль. Точку O называют еще начальной точкой координатной оси x. Точке A, находящейся на положительном луче, поставим в соответствие число x, равное длине отрезка OA: $x = OA$.

Точке A, находящейся на отрицательном луче, поставим в соответствие отрицательное число x, равное длине отрезка OA, взятой со знаком «$-$»: $x = -OA$.

Определенную таким образом координатную ось называют координатной осью x или коротко — осью x.

Число, соответствующее согласно указанному правилу произвольной точке оси x, называют **координатой** этой точки.

Впрочем, в этих названиях буква x может быть заменена любой другой буквой, например буквами y, z, t, ..., и тогда говорят об оси y, оси z и т. д.

Согласно указанному правилу:

1. Каждой точке оси x соответствует действительное число — координата этой точки.

2. Две различные точки A и B оси x имеют разные координаты x_1 и x_2. При этом, если точка B расположена правее точки A, то $x_1 < x_2$.

3. Каждое действительное число есть координата некоторой точки оси x.

Иначе говоря, установлено **взаимно однозначное соответствие** между точками оси x и действительными числами.

Положительный луч называют положительной координатной полуосью x, а отрицательный луч называют отрицательной координатной полуосью x.

Для краткости точку, имеющую координату x, называют **точкой** $\boldsymbol{x}$.

Замечание. Ранее вводилось понятие координатной оси. Но там рассматривались только рациональные точки, т. е. точки, имеющие рациональные координаты x, и ось была «дырявая» — без иррациональных точек. Однако координата x произвольной точки координатной оси есть, вообще говоря, действительное число, т. е. оно может быть рациональным или иррациональным. Этот вопрос и был выяснен нами на основании общего понятия длины отрезка, введенного в п. 5.6. Теперь координатная ось перестала быть «дырявой» — каждой ее точке соответствует действительное число.

1020.° Что называют координатной осью?

1021.° Что называют координатой точки на координатной оси?

1022.° Какие точки координатной оси называют:

а) рациональными; б) иррациональными?

1023.° Как надо понимать утверждение: множество всех точек координатной оси находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством всех действительных чисел?

1024. Отметьте на координатной оси числа:

а) 2; 3; 4; 5; б) −1; −2; −3; −4.

1025. Отметьте на координатной оси точки:

а) 0; 1; −1; 2; −2; 3; −3; 4; −4; 5; −5;
б) 0; 1; −2; 3; −4; 5; −6; 7; −8; 9; −10.

1026. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком 1 см (2 клетки). Укажите на этой оси числа:

а) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{7}{2}$;

б) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{2}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{4}{2}$; $-\frac{5}{2}$; $-\frac{6}{2}$; $-\frac{7}{2}$.

1027. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком 5 см. Укажите на оси числа:

а) 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9;
б) −0,1; −0,2; −0,3; −0,4; −0,5; −0,6; −0,7; −0,8; −0,9.

1028. Начертите координатную ось и укажите на ней следующие числа, выбрав удобный для работы единичный отрезок и положение начальной точки координатной оси:

а) $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{7}{4}$; $-\frac{3}{4}$;

б) $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{3}{5}$; $-\frac{4}{5}$; -1; $-1\frac{1}{5}$; $1\frac{2}{5}$;

в) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{3}$; 2; $\frac{7}{3}$; $\frac{8}{3}$; 3; $\frac{10}{3}$; $\frac{11}{3}$; 4;

г) 0,5; −0,5; −1; 1,5; −1,5; −2; −2,5; −3; −3,5.

1029. Укажите на координатной оси точки:

а) 10; 11; 12; 13;
б) −25; −24; −23; −22;
в) 100; 101; 102; 103;
г) −257; −256; −255; −254;
д) 60; 70; 80; 90; 100;
е) −30; −20; −10; 0; 10.

1030. Укажите на координатной оси точки:

а) 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4;
б) −3,2; −3,1; −3; −2,9; −2,8;
в) 0,01; 0,02; 0,03;
г) −0,04; −0,05; −0,06;
д) 4,053; 4,054; 4,055;
е) −10,01; −10,02; −10,03.

1031. Покажите на оси x числа:

а) большие 3;
б) меньшие −2;
в) большие 1,5;
г) меньшие 7,2;
д) большие 4;
е) меньшие −3;
ж) большие −1, но меньшие 0;
з) большие −2, но меньшие 5;
и) большие 0, но меньшие 2.

5.9. Декартова система координат на плоскости

Зададим на плоскости две оси координат, расположив их под прямым углом друг к другу, ось x и ось y — с точкой пересечения O, являющейся начальной точкой каждой из этих осей. Единичные отрезки осей возьмем равными друг другу.

Говорят, что этим на плоскости определена **прямоугольная система координат xOy.** Ее называют еще **декартовой системой координат** по имени французского математика и философа Р. Декарта (1596—1650), который первым широко использовал это важное понятие.

Ось x называют еще **осью абсцисс,** а ось y — **осью ординат.** Точку O пересечения осей координат называют **начальной точкой системы координат.** Плоскость, на которой задана декартова система координат, называют **координатной плоскостью.**

Обычно ось абсцисс рисуют в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат в виде вертикальной прямой, направленной вверх (рис. 87).

Буквы x, y иногда заменяют другими буквами z, t, s, u,... .

Пусть A — произвольная точка координатной плоскости. Проведем через точку A прямые, параллельные осям координат (рис. 88). Прямая, параллельная оси y, пересечет ось x в точке A_1, а прямая, параллельная оси x, пересечет ось y в точке A_2. Координату точки A_1 на оси x называют **абсциссой точки** A.

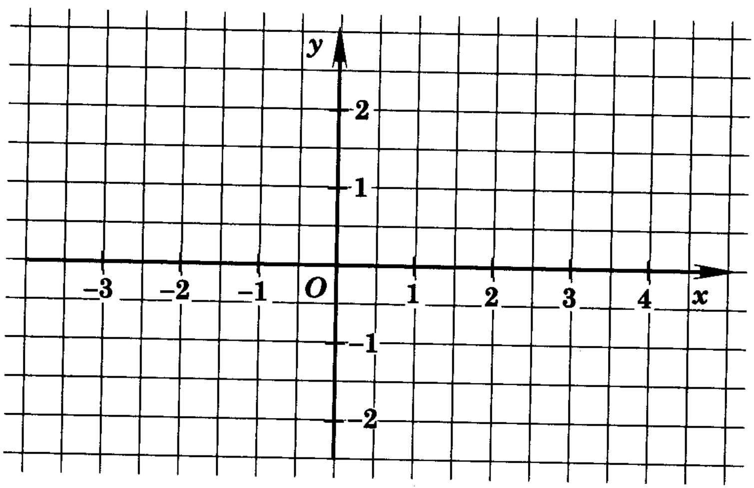


Рис. 87

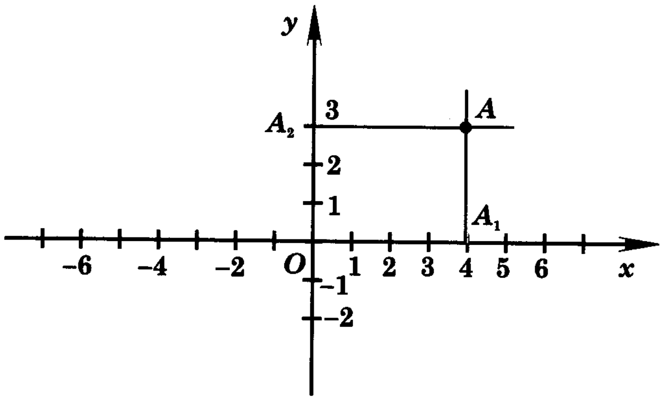


Рис. 88

Координату точки A_2 на оси y называют **ординатой точки** A. Абсциссу x и ординату y точки A называют **координатами точки** A.

Координаты точки записывают в скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку: $A(x;\ y)$, причем на первом месте пишется абсцисса, а на втором месте — ордината. Например, точка A, изображенная на рисунке 88, имеет абсциссу $x=4$ и ординату $y=3$, поэтому пишут $A(4;\ 3)$.

На рисунке 89 изображена прямоугольная система координат xOy и точки: $O(0;0)$, $A(2;3)$, $B(-1;1)$, $C(-3;-2)$, $D(1;0)$, $E(2;-2)$, $F(0;4)$.

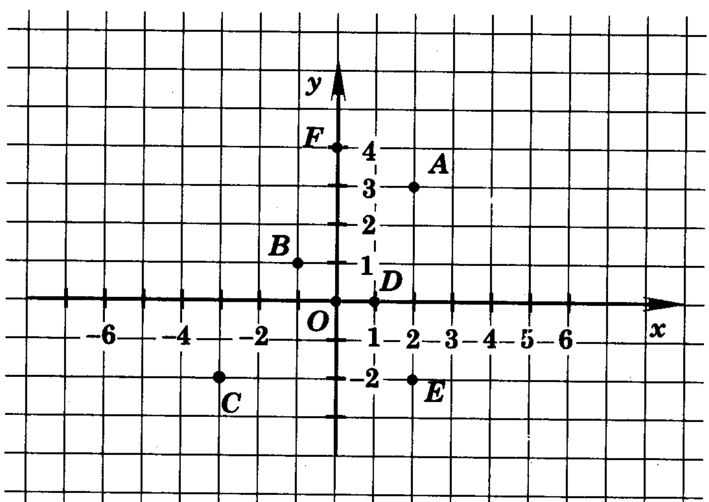


Рис. 89

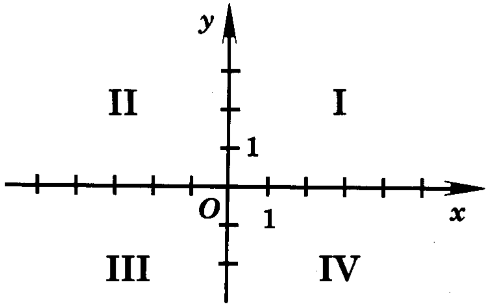


Рис. 90

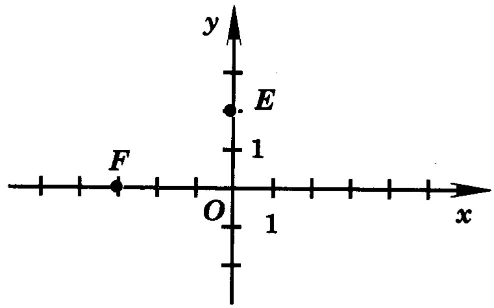


Рис. 91

Прямоугольная система координат xOy разделяет плоскость на четыре угла, называемые **координатными углами** или **координатными четвертями.**

Их обозначают римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 90).

Если исключить точки, лежащие на осях координат, то можно сказать, что точки:

угла I имеют координаты $(x;\ y)$ такие, что $x > 0$, $y > 0$;
угла II имеют координаты $(x;\ y)$ такие, что $x < 0$, $y > 0$;
угла III имеют координаты $(x;\ y)$ такие, что $x < 0$, $y < 0$;
угла IV имеют координаты $(x;\ y)$ такие, что $x > 0$, $y < 0$.

Например, точка $B(-1;1)$ на рисунке 89 принадлежит углу II, точка $E\ (2;-2)$ принадлежит углу IV.

Легко видеть, что абсцисса точки равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси y, ордината точки равна нулю тогда и только тогда, когда эта точка лежит на оси x.

Например, на рисунке 91 точка E лежит на оси y и имеет абсциссу $x=0$; точка F лежит на оси x и имеет ординату $y=0$.

Напомним еще, что точка O — начальная точка системы координат. Она имеет обе координаты равные нулю.

Важно отметить, что если на плоскости задана прямоугольная система координат, то каждой точке A плоскости приводится в соответствие пара чисел $(x;\ y)$ — пара координат точки A; и в то же время произвольную пару чисел $(x;\ y)$ можно рассматривать как пару координат некоторой точки A плоскости.

Нужно иметь в виду, что если пара состоит из разных чисел, то, поменяв эти числа местами, мы получим другую пару, определяющую другую точку плоскости.

Абсциссу x точки A называют еще **первой** координатой, а ординату y — **второй** координатой. Поэтому пару координат $(x;\ y)$ точки A называют упорядоченной парой чисел.

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат xOy, то:

1) каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (координаты точки);

2) разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;

3) каждая упорядоченная пара чисел соответствует некоторой одной (в силу пункта 2) точке плоскости.

Иначе говоря, между точками плоскости и упорядоченными парами чисел имеет место взаимно однозначное соответствие.

Замечание. Точки $(x; y)$, где x и y — рациональные числа, называют рациональными точками координатной плоскости.

Рациональные точки полностью не заполняют плоскость, между рациональными точками на плоскости располагаются еще и точки с иррациональными координатами.

1032. На рисунке 92 изображены точки $A(2;3)$, $B(0;4)$, $C(3;0)$, $D(-4;-2)$. Назовите абсциссу и ординату каждой точки. Запишите координаты точек M, N, K, L. В каких координатных углах расположены точки A, D, M, K?

1033.° а) Где находятся точки, абсциссы которых равны нулю?
б) Где находятся точки, ординаты которых равны нулю?

1034.° Каким свойством обладают координаты точек I, II, III, IV четвертей?

1035.° В каких координатных углах находятся точки, абсциссы которых положительны?

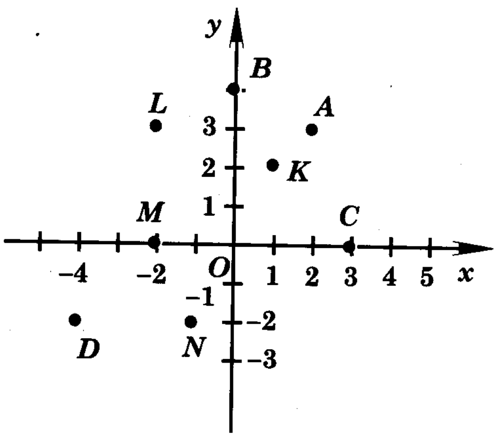


Рис. 92

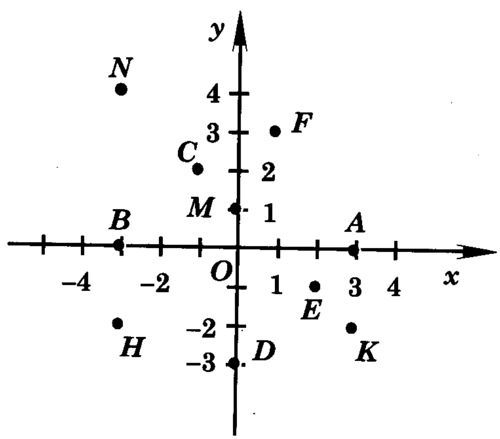


Рис. 93

1036.° В каких координатных углах находятся точки, ординаты которых положительны?

1037.° Как надо понимать утверждение «между точками координатной плоскости и упорядоченными парами чисел имеет место взаимно однозначное соответствие»?

1038. Определите координаты точек, изображенных на рисунке 93.

Постройте систему координат и отметьте точки **(1039—1040):**

1039. $A(4;3)$, $B(2;4)$, $C(-5;2)$, $D(4;-3)$, $E(-5;-1)$, $M(1;3)$, $N(3;0)$, $K(0;4)$.

1040. $A(5;1)$, $B(-4;2)$, $S(-3;-2)$, $Q(1;-4)$, $C(-5;-4)$, $D(4;-2)$, $Z(-3;0)$, $P(0;4)$.

1041. Назовите абсциссы и ординаты точек, постройте точки в системе координат:

а) $A(-3;4)$, $B(4;-2)$, $C(-2;-4)$, $D(5;2)$;

б) $E(0;4)$, $F(0;-4)$, $M(3;0)$, $N(-3;0)$.

1042. Постройте в системе координат точки $(2;1)$, $(2;5)$, $(6;5)$, $(5;4)$, $(6;3)$, $(2;3)$. Соедините отрезками первую точку со второй, вторую с третьей и т. д. Какая фигура получилась?

1043. Постройте по данным точкам в системе координат фигуры, соединяя точки, как в предыдущем задании:

а) $(0;4)$, $(-2;2)$, $(3;2)$, $(-3;2)$, $(2;-2)$, $(0;4)$;

б) $(2;3)$, $(-2;3)$, $(-2;5)$, $(3;5)$, $(5;3)$, $(2;3)$, $(2;-5)$, $(0;-5)$, $(0;3)$;

в) $(0;-4)$, $(0;0)$, $(3;3)$, $(6;0)$, $(6;-4)$, $(0;-4)$, $(6;0)$, $(0;0)$, $(6;-4)$.

1044.* Постройте фигуру по точкам: $(4;-3)$, $(2;-3)$, $(2;-2)$, $(4;-2)$, $(4;-1)$, $(3;1)$, $(2;1)$, $(1;2)$, $(0;0)$, $(-3;2)$, $(-4;5)$, $(0;8)$, $(2;7)$, $(6;7)$, $(8;8)$, $(10;6)$, $(10;2)$, $(7;0)$, $(6;2)$, $(6;-2)$, $(5;-3)$, $(4;-3)$, $(4;-5)$, $(3;-9)$, $(0;-8)$, $(1;-5)$, $(1;-4)$, $(0;-4)$, $(0;-9)$, $(-3;-9)$, $(-3;-3)$, $(-7;-3)$, $(-7;-7)$, $(-8;-7)$, $(-8;-8)$, $(-11;-8)$, $(-10;-4)$, $(-11;-1)$, $(-14;-3)$, $(-12;-1)$, $(-11;2)$, $(-8;4)$, $(-4;5)$.

Постройте отдельно две точки: $(2;4)$, $(6;4)$ — это глаза животного.

1045. Постройте отрезки AB и CD, если $A(-3;4)$, $B(2;-1)$, $C(-2;\ 0)$, $D(4;3)$. Найдите координаты точки пересечения отрезков AB и CD.

1046. Постройте прямые AB и CD, если $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $C(-3;0)$, $D(2;1)$. Найдите координаты точки пересечения прямых AB и CD.

5.10. Столбчатые диаграммы и графики

Чтобы сделать сравнение величин наглядным, их изображают на **столбчатой диаграмме.** Пусть результаты выполнения контрольной работы по математике в 6 классе заданы таблицей.

Оценки	«5»	«4»	«3»	«2»
Число учащихся	3	8	11	2

Изобразим число учащихся, получивших оценки «5», «4», «3», «2», столбцами высотой 3, 8, 11 и 2 единицы (рис. 94).

С помощью диаграмм можно показывать изменение одной величины. Пусть результаты измерения высоты цветка (в конце каждой недели) заданы таблицей.

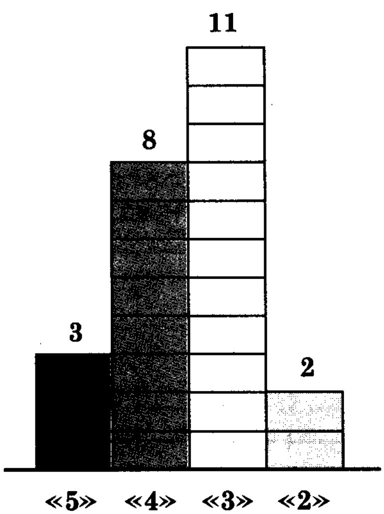


Рис. 94

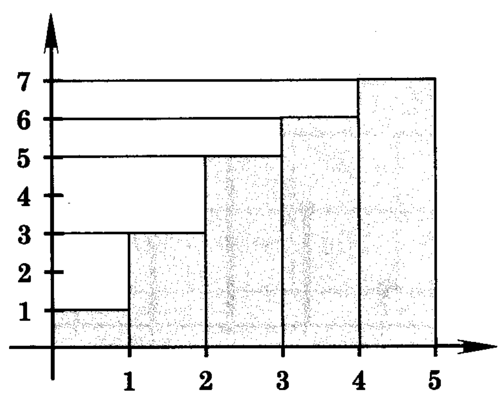


Рис. 95

Время, недели	1	2	3	4	5
Высота цветка, см	1	3	5	6	7

Изменение высоты цветка показано на столбчатой диаграмме (рис. 95). Столбики можно заменить отрезками (рис. 96). Если бы измерения высоты цветка проводились чаще, то отмеченных в системе координат точек (верхних концов отрезков) было бы больше и они расположились бы на кривой — графике роста цветка (рис. 97).

В таблице указаны изменения температуры воздуха в течение суток.

Время t, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура T, °C	−1	0	1	2	3	5	7	6	4	3	0	−2	−3

В системе координат tOT отмечены точки (t; T), а затем они соединены. Получилась непрерывная линия — **график** изменения температуры воздуха в течение суток (рис. 98). По графику можно определить приближенно температуру в любой момент времени t суток, например, при $t=11$. Для этого надо через точку 11 оси t провести перпендикуляр к оси t до пересечения с графиком

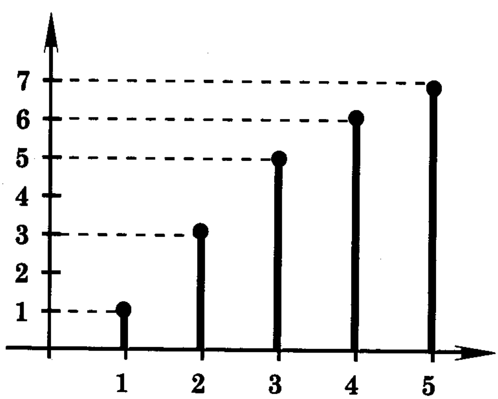


Рис. 96

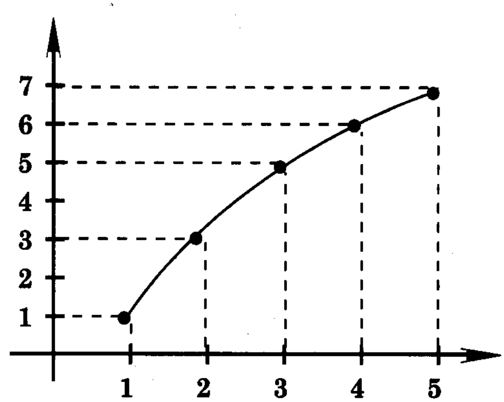


Рис. 97

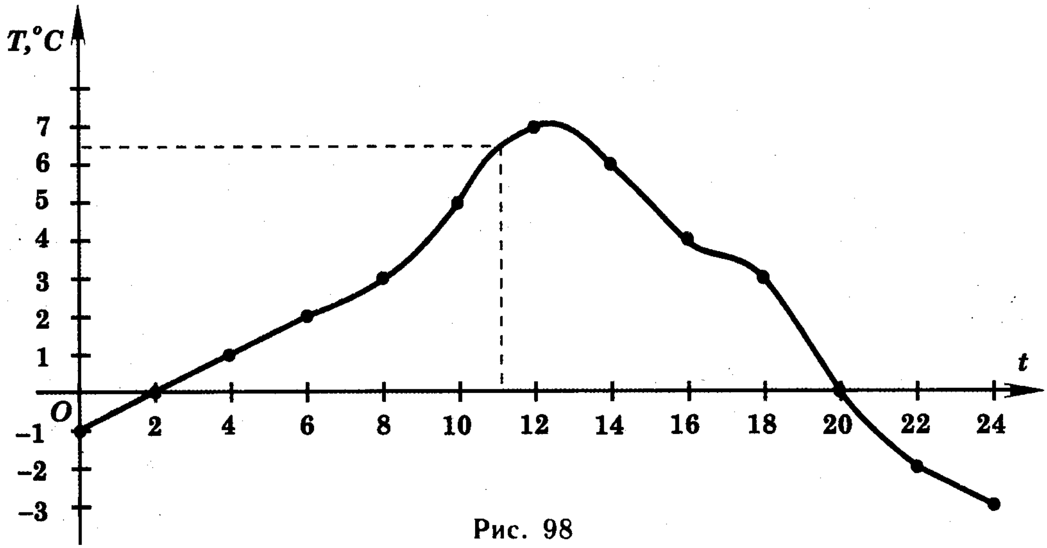


Рис. 98

и определить значение T, соответствующее этой точке графика. Получим $T \approx 6{,}5°$.

Для получения графика изменения температуры на метеорологических станциях часто пользуются прибором, называемым термографом. Термограф состоит из барабана, вращающегося вокруг своей оси при помощи часового механизма, изогнутой коробки (чувствительной к изменению температуры) и пишущего устройства. При повышении температуры коробка разгибается, а прикрепленное к ней перо поднимается вверх. При понижении температуры перо опускается. Таким образом перо вычерчивает на движущейся бумажной ленте непрерывную линию — график изменения температуры воздуха в зависимости от времени.

Рассмотрим еще один пример. Поезд вышел в 0 часов из пункта A. Данные о его движении приведены в таблице.

t, ч	0	1	2	3	4	5	6	7
s, км	0	100	200	300	300	400	500	600

поезд стоит

Здесь s — расстояние в километрах от пункта A до поезда в момент времени t.

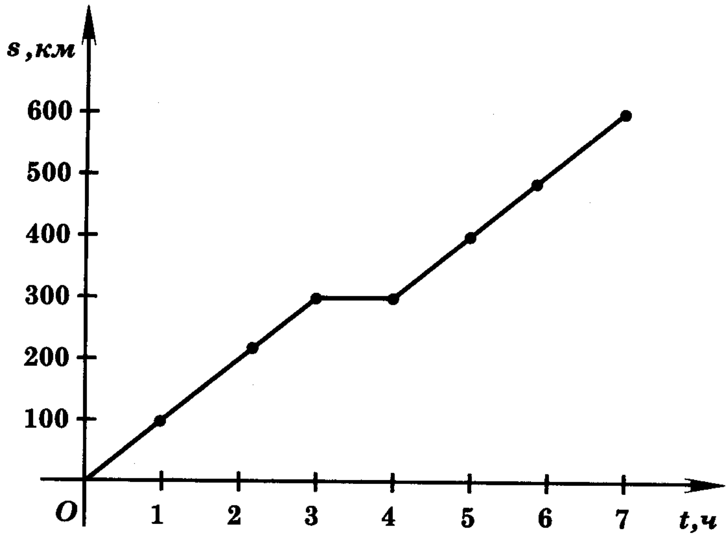


Рис. 99

Нанесем точки (t; s) на координатную плоскость tOs и соединим их отрезками, считая, что единица длины на оси t соответствует часу, а единица длины на оси s соответствует 100 км (рис. 99).

Полученная ломаная есть график движения поезда. С его помощью можно приближенно определить, где находился поезд в моменты времени, например, $t=0{,}5$ ч, 1,5 ч, 2,5 ч, 3,5 ч, 4,5 ч.

Так, в момент $t=0{,}5$ ч поезд находился на расстоянии 50 км от пункта A, так как точка графика, имеющая абсциссу $t=0{,}5$ имеет ординату $s=50$.

Расстояния, на которых находился поезд от пункта A в другие моменты времени, можно определить по графику.

1047.°Пользуясь столбчатой диаграммой (рис. 100), определите, сколько мальчиков и сколько девочек в 6«А» и в 6«Б» классах.

1048. В таблице приведены результаты выполнения контрольной работы по математике. Постройте столбчатую диаграмму, отражающую эти результаты.

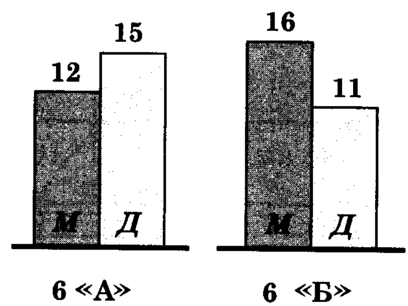


Рис. 100

Оценки	«5»	«4»	«3»	«2»
Число учащихся	4	10	12	2

1049. На рисунке 101 показан график изменения температуры T (в градусах по Цельсию) воды в чайнике. Какой была температура воды через 3, 5, 7 минут после включения? В какой момент чайник выключили? Сколько минут он кипел?

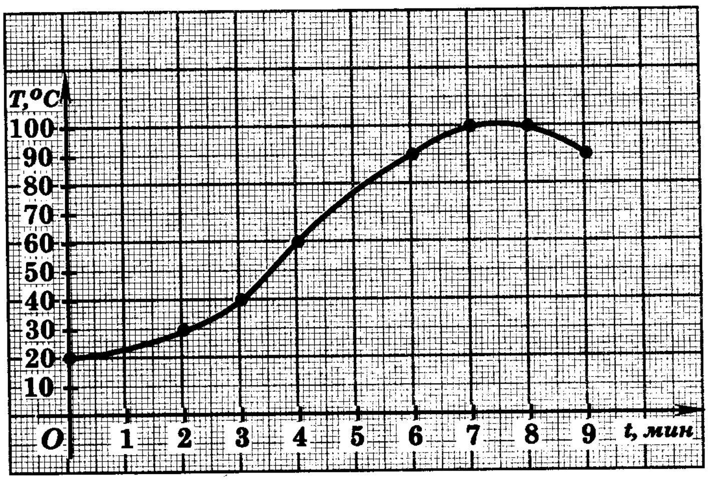


Рис. 101

1050. В 6 ч утра из поселка на озеро, находящееся в 5 км от поселка, отправились рыбачить отец и сын. Туда они пошли пешком, а обратно ехали на попутной машине. На рисунке 102 изображен график их движения. Определите с помощью графика:

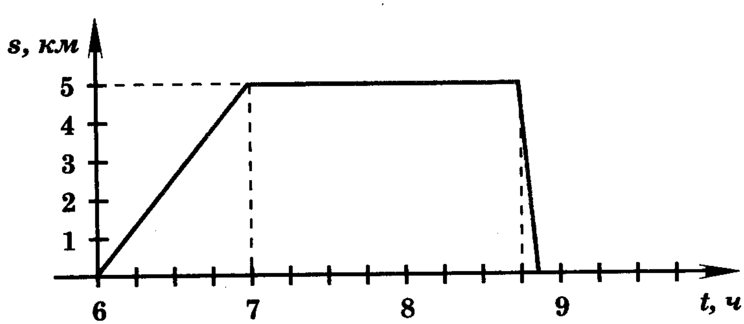


Рис. 102

а) В какое время рыболовы пришли к озеру?
б) Что они делали с 7 ч до 8 ч 45 мин?
в) Сколько времени занял у них обратный путь?
г) С какой скоростью они шли пешком?
д) С какой скоростью ехала машина?

1051. На рисунке 103 приведен график изменения температуры воздуха в течение суток. Измерения проводились через 2 ч.

а) Какая температура была в 4 ч, 8 ч, 12 ч, 21 ч, 23 ч?
б) В какие часы температура была выше 0°?
в) В какие часы температура была ниже 0°?

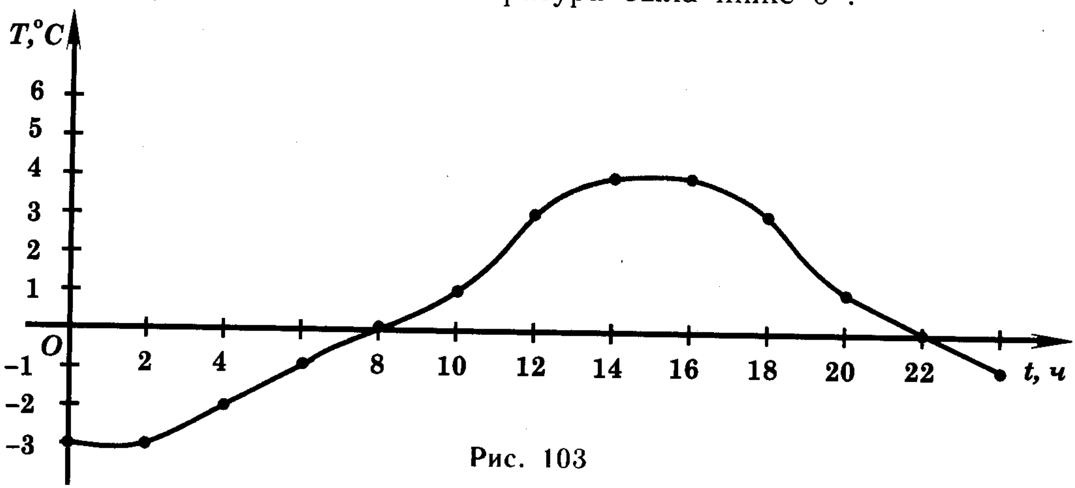


Рис. 103

1052. По данным, приведенным в таблице, постройте график изменения температуры воздуха. T — температура воздуха в градусах по Цельсию, t — время в часах.

t	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
T	−6	−5	−4	−2	0	1	2	5	4	3	1	0	−2	−4

Сколько часов температура была выше 0°? Ниже 0°?

1053.*На рисунке 104 показан график движения двух пешеходов, вышедших из пунктов A и B навстречу друг другу.

а) Через сколько часов после выхода первого пешехода из A второй пешеход вышел из B?

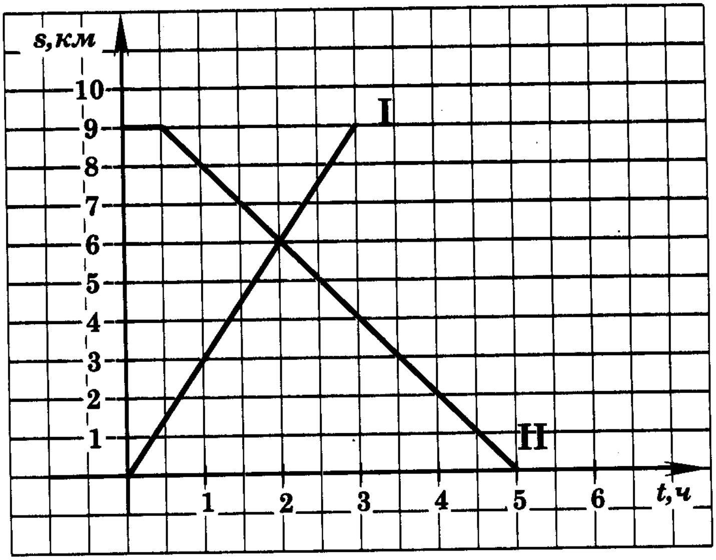


Рис. 104

б) Через сколько часов после выхода первого пешехода из A они встретились?

в) С какой скоростью шел первый пешеход?

5.11. Исторические сведения

Мы уже знаем, что задолго до нашей эры натуральными числами пользовались для счета предметов и грубых измерений. Необходимость уточнения измерений привела к открытию дробных чисел.

Еще древние греки рассматривали число как длину отрезка, знали, что такое отрезок рациональной длины. Но, занимаясь геометрией, они обнаружили также отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Например, длину диагонали квадрата (т. е. отрезка, соединяющего вершины, не принадлежащие одной его стороне) нельзя выразить рациональным числом, если длина стороны квадрата выражена числом 1 (об этом будет подробно рассказано в курсе алгебры средней школы).

Таким образом, при решении математических задач стали появляться иррациональные (нерациональные) числа. Иррациональными числами, например, являются числа, квадраты которых равны соответственно 2; 3; 17. Примеры таких чисел знал, а может быть, впервые их открыл, Пифагор — знаменитый греческий математик (VI в. до н.э.). В XVI веке выдающийся математик Д. Кардано в своих исследованиях пользовался иррациональными числами, кубы которых равны целым числам.

Важную роль в математике играет число, равное отношению длины окружности к ее диаметру. Обозначение этого числа греческой буквой π (пи) получило в XVIII веке широкое распространение после работ Л. Эйлера — академика Российской академии наук. Буква π есть начальная буква греческого слова «периферия» (окружность). Ученые вычисляли значение π с разной точностью. Так великий греческий математик и механик Архимед (III в. до н. э.) знал, что π больше $3\frac{10}{71}$, но меньше $3\frac{1}{7}$:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Самаркандский математик аль-Каши (XV в.) выразил приближенное значение числа π шестидесятиричной дробью:

$$\pi \approx 3°8'29''44'''.$$

Только в XVIII веке было доказано, что число π иррациональное. Список отдельных иррациональных чисел, которые возникали в исследованиях математиков более раннего времени, можно было бы продолжать. Однако к общему понятию действительного числа, выражающего длину произвольного отрезка, математики пришли сравнительно недавно — около ста лет назад.

Это понятие вводится в нашей книге с помощью десятичных дробей. Длина отрезка выражается десятичной дробью, вообще говоря, бесконечной. Обратно, любая десятичная дробь есть длина некоторого отрезка.

Длина отрезка тесно связана с понятием координатной оси.

5.12. Занимательные задачи

1054.*Купили конфеты и печенье. 1 кг конфет дороже 1 кг печенья на 50%, но их купили на 50% меньше, чем печенья. За что заплатили больше?

Решение. Пусть купили x кг печенья по y р. за 1 кг — всего на xy р. Тогда конфет купили $0{,}5x$ кг по $1{,}5y$ р. за 1 кг — всего на $0{,}5x \cdot 1{,}5y = 0{,}75\ xy$ р. Так как $xy > 0{,}75\ xy$, то за печенье заплатили больше, чем за конфеты.

1055.* Мама не доверяет банкам и хранит сбережения дома. Крупная премия пролежала дома с зимы до лета. За это время цены в магазине выросли на 50%. На сколько процентов уменьшилась покупательная способность отложенных денег?

Решение. Пусть на a р. зимой можно было купить одну единицу товара. Летом этот товар уже стоил $a+0{,}5a=$ $=1{,}5\,a$, т. е. летом на те же a р. можно купить $a:1{,}5a=$ $=\frac{2}{3}$ единицы того же товара. Это на $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ единицы товара, или на $33\frac{1}{3}\%$, меньше, чем зимой. Покупательная способность отложенных денег уменьшилась на треть, или на $33\frac{1}{3}\%$.

1056.* Некто купил зимой акции АО *NNN* по 60 р. за акцию. К лету стоимость акций поднялась на 20 р. за акцию, а цены на товары за то же время увеличились на 20%. На сколько процентов увеличилась покупательная способность денег, вложенных в акции?

1057.* Мальчики составляют 45% всех учащихся школы. Известно, что 30% всех мальчиков и 40% всех девочек учатся без «троек». Сколько процентов всех учащихся школы учатся без «троек»?

1058.* Рядовой Сидоров почистил бак картошки за 4 ч, и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он начистит такой же (по массе) бак картошки?

1059.* Когда подвели итоги голосования по половине всех бюллетеней, то оказалось, что объединение «Ананас» получило 10% голосов избирателей. Подсчитайте, какое наибольшее и какое наименьшее число процентов голосов избирателей может набрать объединение «Ананас» на выборах после подсчета всех бюллетеней?

1060.* Велосипедист проехал путь от A до B и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошел путь от A до B со скоростью, в 2 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе со скоростью, в 4 раза большей скорости велосипедиста. Сколько времени затратил каждый из них на путь туда и обратно, если один был в пути на 0,5 ч дольше другого?

1061. **Задача ал-Каши.* Плата работнику за 30 дней 10 динаров и платье. Он работал 3 дня и заработал платье. Сколько динаров стоит платье?

1062. **Из книги «Косс» К. Рудольфа* (XVI в.). Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов. Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда?

1063. **Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некий человек нанял работника на год, обещал ему дать 12 р. и кафтан. Но тот, отработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчет 5 р. и кафтан. Спрашивается, а какой цены тот кафтан был?

1064. **Старинная задача.* Несколько работников получило 120 р. Если б их было четырьмя меньше, то каждый из них получил бы втрое больше. Сколько было работников?

1065. **Старинная задача.* Принес крестьянин на рынок продавать яйца. Подходит к нему торговец и спрашивает: «Сколько стоит десяток яиц?» Крестьянин ответил замысловато: «Двадцать пять яиц без полушки стоят пять полушек без пяти яиц». Сосчитайте, по какой цене продавал крестьянин десяток яиц?

1066. **Старинная задача.* Двадцать пять яиц с полуденьгой стоят столько, сколько 3 деньги без 5 яиц. Сколько яиц приходится на 1 деньгу?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Вычислите **(1067—1073)**:

1067. а) $14957-(2586+4298)$; б) $598\cdot 99:299$;
в) $758\cdot 809-180492:356$; г) $682-480:(123+37)$.

1068.° а) $795\cdot 848:848$; б) $456\cdot 759:759$;
в) $6111:679\cdot 679$; г) $6768:846\cdot 846$.

1069.° а) $48-48:(17-9)+40$; б) $54-(48-39)\cdot 5-5$;
в) $67-(62-38):6-4$; г) $48:(31-19):2+2$.

1070. а) $(7529+4356)+(644+1901)$;
б) $(8935+6639)+(7361+125)$;
в) $753+(2747+3998)+1002$;
г) $4957+(8243+495)+7205$.

1071. а) $468-396:(42-42:7)+8$;
б) $324-297:(36-36:4)+5$;
в) $4221-294:(98:14-5)$;
г) $5864-79:(72:9-7)+1001$.

1072.° а) $(756\cdot 242+326\cdot 9)\cdot 0$;
б) $14304:596\cdot(777:7-888:8)$.

1073.° а) $248:2-124+963:3-321+4$;
б) $808:8-909:9+424:2-636:3+5$.

Вычислите наиболее простым способом **(1074 –1075)**;

1074. а) $239\cdot 324-156\cdot 315+156\cdot 315$;
б) $31905:45+571\cdot 33-33\cdot 571$;
в) $22796:41+505\cdot 707-22796:41$;
г) $896\cdot 127+9702:77-127\cdot 896$.

1075. а) $35+33+31+29+27+25$;
б) $36\cdot35-35\cdot34+34\cdot33-33\cdot32+$
$+32\cdot31-31\cdot30+30\cdot29-29\cdot28+$
$+28\cdot27-27\cdot26+26\cdot25-25\cdot24$.

1076. а) Вычислите: $7\cdot11$; $24\cdot101$; $378\cdot1001$;
$7\cdot22-2\cdot77$; $24\cdot1313-13\cdot2424$.
б) Докажите, не выполняя всех вычислений, что:
$275\cdot346346-346\cdot275275=0$;
$1996\cdot19971997-1997\cdot19961996=0$.

1077. Проверьте справедливость равенств:
$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$;
$3^3+4^3+5^3=6^3$.

Используя данные равенства, вычислите:
а) $(10^2+11^2+12^2+13^2+14^2):365$;
б) $(3^3+4^3+5^3+6^3):54$.

1078. Проверьте справедливость равенств:
$1^3+6^3+8^3=9^3$;
$108^2+109^2+110^2=133^2+134^2$;
$11^3+12^3+13^3+14^3=20^3$.

Используя данные равенства, вычислите:
а) $(1^3+6^3+8^3+9^3):27$;
б) $(108^2+109^2+110^2-133^2-134^2):365$;
в) $(11^3+12^3+13^3+14^3+20^3):1000$.

Вычислите **(1079 – 1081):**

1079. а) $-640:(-80)-560:7+490:7$;
б) $-540:9+(-450):5+160$;
в) $720:(-36)-840:(-42)-753$;
г) $-860:20-625:25+75$.

1080. а) $222:(-3996:54)+333$;
б) $-2376:(-625:25+49)$;
в) $256\cdot(37\cdot(-9)+33):(-1200)$;
г) $5100:(-2279:53+26)\cdot(-17)$.

1081. а) $49\cdot68+51\cdot68+49\cdot12+51\cdot12$;
б) $87\cdot52-17\cdot52+87\cdot38-17\cdot38$;
в) $77\cdot99+23\cdot99-77\cdot29-23\cdot29$;
г) $108\cdot86-86\cdot18-108\cdot56+18\cdot56$;
д) $428\cdot356+72\cdot356+144\cdot428+72\cdot144$.

1082. Два ученика по очереди пишут цифры десятизначного числа.

а) Может ли второй ученик добиться того, чтобы это число делилось на 3, если первый старается ему помешать?

б) Может ли первый ученик добиться того, чтобы это число делилось на 9, если второй старается ему помешать?

1083.*Дано число 12345678910111213...979899. Делится ли оно на 3? на 9?

1084. Докажите, что если в трехзначном числе средняя цифра равна сумме крайних, то число кратно 11.

1085. Чтобы узнать, является ли число 2503 простым, его стали последовательно делить на простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13,... . На каком простом числе можно прекратить испытание?

1086. Из утверждений «A делится на 2», «A делится на 4», «A делится на 8», «A делится на 16» три верных, а одно неверное. Какое? Объясните ваш ответ.

1087.*Разность двух нечетных чисел равна 8. Докажите, что эти числа взаимно простые.

1088.*Сколько чисел от 1 до 100 не делятся ни на 2, ни на 3?

1089. Сравните дроби $\frac{12}{13}$ и $\frac{16}{17}$, не приводя их к общему знаменателю.

1090. Сравните дроби:

а) $\frac{2323}{6464}$ и $\frac{23}{64}$; б) $\frac{71}{98}$ и $\frac{7171}{9898}$.

Вычислите **(1091–1098):**

1091. а) $\frac{11}{15}\cdot\left(4\frac{1}{2}-3\frac{2}{5}:\frac{17}{20}\right)+1\frac{11}{20}$;

б) $5\frac{4}{7}:1\frac{5}{21}-\left(5\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{22}+1\frac{14}{15}\right)$;

в) $7\frac{2}{3}+4\frac{1}{6}\cdot\left(6\frac{2}{7}-3\frac{5}{7}\right)$;

г) $4\frac{2}{7}:1\frac{5}{21}+\left(4\frac{3}{13}\cdot\frac{14}{15}-3\frac{1}{3}\right)$.

1092. а) $3\frac{3}{7}\cdot 3\frac{1}{2}:\left(1\frac{1}{11}-\frac{27}{55}\right)$;

б) $\left(2\frac{1}{2}:10+10:2\frac{1}{2}-2\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{36}{125}$;

в) $3\frac{1}{8}:\left(\left(4\frac{5}{12}-3\frac{13}{24}\right)\cdot\frac{4}{7}+\left(3\frac{1}{18}-2\frac{7}{12}\right)\cdot 1\frac{10}{17}\right)$.

1093. а) $\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{6}+\frac{23}{24}\right)\cdot 177:118$;

б) $129\cdot\left(\frac{7}{9}+\frac{5}{6}+\frac{7}{18}+5\right):86$;

в) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+3\right)\cdot 119:68$;

г) $3456:\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{15}+7\right):16$.

1094. а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{11}{12}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot(-5)+(-756):(-36)$;

б) $\left(\frac{19}{20}+\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\right)\cdot(-123)-(-5092):76$.

1095. а) $17:10-7:5$; б) $14:3+17:6$;
в) $256:48-156:36$; г) $399:49+664:56$;
д) $816:88-819:99$; е) $460:52+123:39$;
ж) $\dfrac{48:7-45:14}{45:7-48:14}$; з) $\dfrac{56:13+100:26}{100:13+56:26}$.

1096.

а) $\dfrac{5\frac{1}{2}+1\frac{4}{7}}{5\frac{1}{2}-1\frac{4}{7}}:\dfrac{1\frac{1}{7}+\frac{4}{21}}{1\frac{1}{7}-\frac{4}{21}}:\dfrac{\frac{1}{9}-\frac{1}{19}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{19}}$;

б) $\dfrac{3\frac{2}{3}+1\frac{4}{7}}{3\frac{2}{3}-1\frac{4}{7}}:\dfrac{13\frac{1}{3}-3\frac{1}{13}}{13\frac{1}{3}+3\frac{1}{13}}:\dfrac{5\frac{1}{2}+1\frac{3}{8}}{5\frac{1}{2}-1\frac{3}{8}}$.

1097. а) $\dfrac{3\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}\cdot 2\frac{1}{2}}{2:3\frac{1}{5}+3\frac{1}{4}:13:\frac{2}{3}}$;

б) $\dfrac{15:\frac{5}{18}:3\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{11}{36}+\frac{5}{48}+\frac{5}{18}\right)}{\left(11\frac{5}{11}-8\frac{21}{22}\right):1\frac{2}{3}}$.

1098. а) $\dfrac{20:2\frac{2}{15}+25\frac{5}{7}:2\frac{2}{35}}{20\frac{7}{9}:4\frac{2}{5}-\frac{5}{9}}$;

б) $\dfrac{6\frac{3}{4}:9+24:\frac{6}{7}-\frac{1}{9}:\frac{4}{21}}{53\frac{2}{3}-22\frac{14}{15}:2\frac{2}{3}}$.

Сократите дробь **(1099 – 1100):**

1099. а) $\dfrac{36\cdot 25}{50\cdot 24}$; б) $\dfrac{38\cdot 17}{34\cdot 21}$;

в) $\dfrac{64\cdot 48}{56\cdot 72}$; г) $\dfrac{38\cdot 45}{60\cdot 95}$;

д) $\dfrac{25-12}{12\cdot 13}$; е) $\dfrac{26+13}{13\cdot 26}$;

ж) $\dfrac{7+28}{7\cdot 28}$; з) $\dfrac{45+5}{5\cdot 45}$.

1100. а) $\dfrac{(17-12)\cdot 8}{15\cdot 16}$; б) $\dfrac{(25-9)\cdot 25}{75\cdot(38-22)}$; в) $\dfrac{(41-5)\cdot 19}{(23-4)\cdot 36}$;

г) $\dfrac{17\cdot 8-12\cdot 8}{80}$; д) $\dfrac{25\cdot 25-9\cdot 25}{3\cdot 50}$; е) $\dfrac{16\cdot 23+9\cdot 23}{17\cdot 25+6\cdot 25}$.

1101. Вычислите:

а) $\dfrac{45\cdot 56+45\cdot 14}{70\cdot 72}$; б) $\dfrac{38\cdot 53-38\cdot 25}{19\cdot 42}$;

в) $\dfrac{395\cdot 43+5\cdot 43}{695\cdot 86+86\cdot 105}$; г) $\dfrac{359\cdot 23-59\cdot 23}{758\cdot 69-158\cdot 69}$.

1102. Вычислите по *образцу:*

а) $742 \cdot 16 : 371 \cdot 5 : 80 = \dfrac{\overset{2}{\cancel{742}} \cdot \overset{1}{\cancel{16}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{371}} \cdot \underset{5}{\cancel{80}}} = \dfrac{2 \cdot 5}{5} = 2;$

б) $954 \cdot 35 : 742 \cdot 9;$ в) $5292 : 63 : 28 \cdot 999;$

г) $4189 : 71 \cdot 26 : 118;$ д) $1125 \cdot 808 : 375 \cdot 33 : 1111.$

1103. Проверьте равенство:

а) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{7};$ б) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}} = \dfrac{13}{30}.$

1104. Вычислите:

а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}};$ б) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}};$ в) $\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3}}}.$

1105.*а) Найдите натуральные числа x, y, z, для которых верно равенство:

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}} = \frac{7}{30}.$$

б) Найдите целые числа x, y, z, для которых верно то же равенство.

1106. Вычислите:

а) $4{,}35 \cdot 3{,}08 - 16{,}119 : 4{,}05 + 0{,}95 \cdot 40;$

б) $(454{,}5 : 5 - 0{,}3636 : 0{,}09) : 4{,}343.$

Вычислите наиболее простым способом **(1107 – 1109):**

1107. а) $5759 + 43{,}25 + 6{,}75;$

б) $42{,}3 + 7{,}29 + 57{,}7 + 0{,}51;$

в) $3{,}17 \cdot 125 \cdot 8;$

г) $1{,}25 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 2{,}5.$

1108. а) $2\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot1\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{5}\cdot\left(2\frac{1}{2}\cdot5,4\right)$;

в) $765\cdot59+235\cdot59$; г) $42\cdot43,8-42\cdot3,8$;

д) $4\frac{1}{2}\cdot7\frac{2}{3}+4\frac{1}{2}\cdot2\frac{1}{3}$; е) $\left(3\frac{1}{3}-1\frac{1}{4}\right)\cdot12$.

1109. а) $\frac{4,8\cdot2,12\cdot0,25}{10,6\cdot0,96\cdot2,5}$; б) $\frac{3,12\cdot0,72\cdot5,05}{3,6\cdot6,4\cdot4,04}$;

в) $\frac{6,25\cdot0,49\cdot0,88}{7,7\cdot3,5\cdot0,125}$; г) $\frac{18,18\cdot6,8\cdot4,3}{0,86\cdot0,34\cdot9,09}$.

1110. Вычислите:

а) $(-24,3):(4,5-4,5\cdot(-0,8)):0,5$;

б) $12,5\cdot(-3,6+3,6\cdot(-1,5))\cdot(-0,8)$.

Вычислите наиболее простым способом **(1111–1112)**:

1111. а) $751-387-551+387-600$;

б) $(4,7-4,9)+(4,9-5,1)-(-5,1-5,3)$.

1112. а) $4,6\cdot7,3+5,4\cdot8,5+4,6\cdot8,5+5,4\cdot7,3$;

б) $9,8\cdot17,42+9,8\cdot5,58-1,8\cdot17,42-1,8\cdot5,58$;

в) $15,37\cdot7,88-9,37\cdot7,88+15,37\cdot2,12-9,37\cdot2,12$;

г) $4,54\cdot77,7-4,54\cdot7,7+7,46\cdot77,7-7,46\cdot7,7$;

д) $75,9\cdot42,3-65,9\cdot42,3+628\cdot1,77-528\cdot1,77$.

Вычислите **(1113 – 1117)**:

1113. а) $\frac{1}{4}+2,7$; б) $4,1\cdot\frac{2}{5}$; в) $2,9-1\frac{3}{4}$;

г) $4,5:2\frac{1}{2}$; д) $3\frac{2}{3}-0,25$; е) $2\frac{1}{7}\cdot0,7$;

ж) $\frac{1}{2}:0,3$; з) $2\frac{1}{2}:4,5$.

1114. а) $(1,545:1,5-1)\cdot2\frac{2}{3}+0,5\cdot\frac{4}{15}$;

б) $(2,678:1,3-2)\cdot3\frac{1}{3}+0,3\cdot\frac{7}{15}$.

1115. а) $\frac{2}{7}:8+5:0,7-\frac{3}{4}:21$;

б) $3:4\frac{1}{5}+5,4:7,2-\frac{2}{7}:0,8$;

в) $4,5\cdot\frac{2}{3}-1\frac{5}{7}:1,2+3\frac{1}{5}\cdot3\frac{1}{8}$;

г) $6,25:\frac{5}{3}-2,5:1,5+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{3}$.

1116. а) $\dfrac{\left(8\frac{1}{4}-3,51\right):2,37}{\frac{1}{5}\cdot3,17-2,205:3\frac{1}{2}}$; б) $\dfrac{\left(3\frac{1}{3}-2,5\right)\cdot6,6}{15,717:3,1-\frac{1}{7}\cdot0,49}$.

1117. а) $3\frac{3}{4}:0,03-4,52\cdot8\frac{1}{2}$; б) $3\frac{3}{8}-\left(7\frac{1}{2}-4,25\right):\frac{9}{20}$;

в) $3\frac{2}{5}:5,1-4\frac{2}{3}:6,3$; г) $-3\frac{3}{5}:2,7+2,7:3\frac{3}{5}$.

1118. Вычислите наиболее простым способом:

а) $4,526+12\frac{1}{5}-\left(4\frac{2}{3}\cdot1,8+4,526\right)$;

б) $3\frac{1}{3}:2,4+9,888-\left(\frac{1}{18}+7,888\right)$;

в) $4,51\cdot3\frac{1}{2}-7\frac{2}{3}-\left(-5,49\cdot3\frac{1}{2}+10\frac{1}{3}\right)$;

г) $4,573+2\frac{2}{7}\cdot3\frac{1}{8}-\left(2,073-1\frac{5}{7}\cdot3\frac{1}{8}\right)$.

1119. Вычислите:

а) $\left(15:3,75+10,5:1,5\cdot\frac{3}{14}\right):\left(1\frac{33}{52}-1\frac{1}{4}\right)$;

б) $(10:2,5+7,5:10)\cdot\left(\frac{3}{40}+\frac{7}{12}-\frac{157}{360}\right)$.

Решите пропорцию **(1120 – 1121)**:

1120. а) $x:7=5:8$; б) $x:3=4:5$; в) $2:x=3:4$; г) $1:x=7:8$.

1121. а) $\frac{x}{9}=\frac{5}{7}$; б) $\frac{5}{x}=\frac{0,2}{3}$; в) $\frac{6x}{5}=\frac{18}{7}$;

г) $7,5:(2x)=3:0,8$; д) $\frac{x-3}{5}=\frac{4}{7}$; е) $\frac{x+1}{3}=\frac{x-1}{2}$.

Упростите выражение **(1122 –1125)**:

1122. а) $4x-5+1{,}5+2$;
б) $8x-(3x+5)+(2x-9)$;
в) $5(x-0{,}4)-7(2x+1{,}5)$;
г) $2{,}3x-(2{,}3x+0{,}5)-0{,}2(5x-3)$.

1123. а) $3(x-8)+2(x+3)+24$;
б) $2(x-1)-3(x-2)+x$;
в) $3{,}2(2x+1)+1{,}6(4x+2)+1{,}7$;
г) $7{,}5(x-4)-2{,}5(3x-12)+5$.

1124. а) $2{,}4x+1\frac{5}{7}-2\frac{2}{3}x-5$;
б) $7{,}1x+(3{,}5-x)-(5{,}9x-1)$;
в) $-3x-2(x-9)+3(2x+\frac{2}{3})$.

1125. а) $3(x-5)+5(x+1)+10$;
б) $5(x-1)-2(x+3)-3x$;
в) $1{,}2(2x-1)+3{,}5(x-2)+10{,}2$;
г) $2{,}5(x-0{,}2)-5(2x-0{,}4)+0{,}5x$.

Найдите значение выражения **(1126–1128)**:

1126. а) $5x-39$ при $x=10$; 0; 3;
б) $-3{,}5x+6$ при $x=2$; -3; $0{,}4$;
в) $x-\frac{1}{3}$ при $x=5$; $2\frac{1}{2}$; $-0{,}5$;
г) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$ при $x=0{,}5$; -6; 4.

1127. а) $25x-50+44x-88$ при $x=2$;
б) $13x+39+21x+63$ при $x=-3$;
в) $128-4x+356-8x$ при $x=7$;
г) $121-11x+456-10x$ при $x=11$.

1128. а) $4{,}2x-84+2{,}3x-46+x$ при $x=20$;
б) $2{,}1x+6{,}3-2{,}4x-6{,}2-5$ при $x=-3$;
в) $3{,}2(x-3{,}2)+5{,}5(x-2{,}2)$ при $x=3{,}2$;
г) $6{,}3(x+2{,}4)-9{,}1(x+1{,}4)$ при $x=-1{,}4$.

Решите уравнение **(1129–1133)**:

1129. а) $4\frac{1}{2}x=9{,}9$;
б) $5{,}5x=-66$;
в) $-3{,}6x=14\frac{2}{5}$;
г) $-2{,}2x=-4{,}84$.

1130. а) $3x = 5$; б) $0{,}7x = -2$;
в) $-2{,}1x = 3{,}6$; г) $6x - 7 = 0{,}2$;
д) $0{,}6x + 0{,}5 = 3$; е) $-5x + 1{,}2 = -5{,}1$.

1131. а) $5x - 9 = 2{,}3x + 1$; б) $7{,}3x - \frac{1}{3} = -1{,}2x + 3$;
в) $6(x-3) + 2(x+2) = 1$; г) $5(x-1) - 4(x-2) = 10$;
д) $3(x-9) + 5(x-4) = 1$; е) $7(x-9) - (3x+1) = 9$.

1132. а) $4{,}5(x-1) - 2{,}3(x+2) = 2{,}1x$;
б) $\frac{2}{3}(x-5) + 1\frac{1}{3}(x+1) = 9$;
в) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 33$;
г) $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$.

1133. а) $2(2x-1) - 3(x-2) = 6 + 4(3-2x)$;
б) $2(x+2) - 3(x-2) = 5 - 4(3x-1)$.

1134. Бак вмещает 1000 л воды. Каждый день расходуют 600 л, а ночью доливают половину того количества, что находилось в баке утром. Хватит ли воды в баке на четверг, если утром в понедельник бак был полон?

1135. В булочную привезли 654 кг черного и белого хлеба. После того, как продали 215 кг черного и 287 кг белого хлеба, того и другого сорта осталось поровну. Сколько черного и белого хлеба в отдельности привезли в булочную?

1136. В двух магазинах было 452 холодильника. После того, как оба магазина продали холодильников поровну, в одном осталось 72, а в другом — 84 холодильника. Сколько холодильников было в каждом магазине первоначально?

1137. Первый цех железобетонных изделий расходует в день 25 т цемента. Сколько цемента расходует в день второй цех завода, если привезенных 870 т цемента хватит на 15 дней их совместной работы?

1138. Завод по плану должен изготовить 7920 приборов за 24 дня. За сколько дней завод выполнит это задание, если будет изготавливать в день на 30 приборов больше, чем намечено по плану?

1139. Токарь должен за 6 ч обточить 96 деталей. Применяя усовершенствованный резец, он может обтачивать в час на 8 деталей больше. Сколько времени сэкономит токарь на обточке 96 деталей, применяя усовершенствованный резец?

1140. *Старинная задача.* Нужно проверить 360 тетрадей диктанта. Первый учитель может проверить за 15 ч, второй — за 10 ч, третий — за 6 ч. За сколько времени проверят они тетради втроем?

1141. A, B и C сыграли три партии, причем проигравший обязан был удваивать суммы, принадлежащие остальным в начале партии. Проиграли последовательно A, B и C и в результате у всех троих оказалось по 48 р. Сколько денег было у каждого из них вначале?

1142. *Старинная задача.* A, B, C и D сыграли четыре партии, причем проигравший обязан был удваивать суммы, принадлежащие остальным в начале партии. Проиграли последовательно A, B, C и D и в результате у всех четверых оказалось по 48 р. Сколько денег было у каждого из них вначале?

1143. а) У крестьянина было несколько поросят и несколько ягнят. Три поросенка и два ягненка весят 23 кг, а два поросенка и три ягненка весят 22 кг. Сколько весят один поросенок и один ягненок в отдельности?

б) В трех маленьких и четырех больших коробках 150 цветных карандашей, а в четырех маленьких и трех больших коробках 144 цветных карандаша. Сколько цветных карандашей в большой коробке?

1144.° а) Скорость течения реки 2 км/ч. На сколько километров в час скорость лодки по течению реки больше скорости против течения? Зависит ли ответ от собственной скорости лодки?

б) Скорость лодки по течению реки больше скорости лодки против течения на 6 км/ч. Какова скорость течения?

1145. Расстояние между двумя пунктами, равное 3,6 км, проплыли по течению за 30 мин, а против течения за 40 мин. Определите скорость течения реки. За сколько часов это же расстояние проплывут плоты?

1146. Пассажир метро, стоящий на ступеньке эскалатора, поднимается вверх за 3 мин. За сколько минут поднимается пассажир, если будет идти вверх со скоростью 25 м/мин и длина эскалатора 150 м?

1147. Стоя неподвижно на ступени эскалатора метро, человек поднимается вверх за 1 мин. Тот же человек, взбегая по ступеням неподвижного эскалатора, поднимается вверх за 40 с. За какое время тот же человек взбежит вверх по движущемуся эскалатору?

1148.° Дачник пришел от своей дачи на станцию как раз к отходу электрички. Если бы он на каждый километр тратил на 3 мин меньше, то пришел бы на 12 мин раньше. Далеко ли от станции живет дачник?

1149. а) Колонна автобусов с детьми длиной 1 км двигалась по шоссе со скоростью 50 км/ч. Автоинспектору, машина которого замыкала колонну, понадобилось подъехать к головному автобусу. Сколько минут уйдет у инспектора на путь туда и обратно, если он будет ехать со скоростью 70 км/ч?

б) Колонна солдат длиной 250 м движется со скоростью 4,5 км/ч. Из конца колонны в ее начало отправляется сержант со скоростью 5,5 км/ч, затем с той же скоростью он возвращается в конец колонны. Сколько минут затратит сержант на путь туда и обратно?

1150. а) Два поезда вышли одновременно навстречу друг другу с двух станций, удаленных друг от друга на 520 км. Через какое время расстояние между поездами будет равно 65 км, если их скорости 60 км/ч и 70 км/ч?

б) Два поезда, расстояние между которыми 685 км, вышли одновременно навстречу друг другу. Через какое время расстояние между поездами будет равно 95 км, если их скорости 55 км/ч и 45 км/ч?

1151. После четырех стирок белья от куска мыла осталась только третья часть. На сколько стирок хватит оставшейся части куска мыла?

1152. Двум ученикам поручено подклеить в библиотеке несколько книг. Когда они закончили работу, то первый сказал, что подклеил $\frac{3}{5}$ всех книг, а второй сказал, что подклеил $\frac{2}{3}$ всех книг. Их товарищ заметил, что ребята ошиблись в расчетах. Как он догадался?

1153. В классе каждый ученик выполнил нормативы по бегу или по метанию мяча. Половина класса сдала норматив по бегу, $\frac{2}{3}$ класса — по метанию мяча. Какая часть класса выполнила нормативы и по бегу, и по метанию мяча?

1154. Часть студентов института изучает английский язык, часть — французский. Какая часть студентов изучает оба языка, если $\frac{3}{4}$ изучает английский и $\frac{1}{3}$ — французский?

1155. Наибольшее количество соли, которое растворяется в воде, составляет $\frac{9}{25}$ массы воды. Сколько килограммов соли растворится в $\frac{5}{6}$ ведра воды, если ведро вмещает 12 кг воды?

1156. *Из «Арифметики» Л. Н. Толстого.* Муж и жена брали деньги из одного сундука, и ничего не осталось. Муж взял $\frac{7}{10}$ всех денег, а жена 690 р. Сколько было всех денег?

1157. *Старинная задача.* Купивши комод за 36 р., я потом вынужден был продать его за $\frac{7}{12}$ цены. Сколько рублей я потерял при этой продаже?

1158. *Старинная задача.* Мастер сплавил 3 куска серебра в $\frac{1}{4}$ фунта, в $\frac{1}{6}$ фунта и в $\frac{1}{8}$ фунта, сделал из него ложки и продал их. Сколько получил он денег, если фунт серебра ценил в 24 р., да за работу взял 8 р.?

1159. Из первого крана за 2,5 мин наливается столько воды, сколько из второго за 3 мин. За сколько минут можно наполнить бак объемом 66 л через эти два крана, если через второй кран в минуту наливается 15 л воды?

1160. Одна бригада за день выполняет $\frac{1}{6}$ задания, другая — $\frac{1}{12}$ задания. За сколько дней при совместной работе бригады выполнят это задание?

1161. Через одну трубу за минуту наполняется $\frac{1}{50}$ бассейна, через вторую — $\frac{1}{75}$ бассейна. За сколько минут бассейн наполнится через обе трубы?

1162. а) Заготовленного корма хватило бы корове на 60 дней или овцам на 90 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит заготовленного корма и корове, и овцам вместе?

б) Крестьянин подсчитал, что заготовленного сена хватит для коровы на 80 дней или для овец на 120 дней. Рассчитайте, на сколько дней хватит этого сена для коровы и овец?

1163. Из села в город вышел пешеход. Одновременно с ним из города в село выехал велосипедист. Пешеход пришел в город через 6 ч, а велосипедист приехал в село через 3 ч. Через сколько часов после начала движения они встретились?

1164. Из пункта *A* в пункт *B* отправили плот по реке. Одновременно с ним из *B* в *A* вышел катер, который прибыл в *A* через 5 ч. Через сколько часов катер встретил плот, если плот прибыл в *B* через 20 ч после начала движения?

1165. Опытный токарь выполнит задание за 1 ч 20 мин, а его ученик за 4 ч. За сколько минут они выполнят задание при совместной работе?

1166. Первый турист может пройти расстояние между городами за 4 ч, а второй — за 6 ч. Как-то раз они вышли одновременно из этих городов навстречу друг другу. Хватит ли им 2,5 ч на движение до встречи?

1167. Первая бригада может выполнить задание за 5 недель, а вторая — за 3 недели. Хватит ли им двух недель на выполнение задания при совместной работе?

1168. *Задача Я. И. Перельмана.* Переписка доклада поручена двум машинисткам. Более опытная из них могла бы выполнить всю работу в 2 ч, менее опытная — в 3 ч. Во сколько времени перепишут они доклад, если разделят между собой работу так, чтобы выполнить ее в кратчайший срок?

1169. Имеющихся денег хватит на школьные завтраки на 24 учебных дня или на обеды на 12 дней. На сколько дней хватит этих денег, если завтракать и обедать в школе?

1170. Мама с дочкой потратили на уборку квартиры 30 мин. Одна мама убрала бы квартиру за 50 мин. За сколько минут убрала бы квартиру дочь?

1171. *Задача Метродора.* Бассейн наполняется четырьмя трубами, из которых первая может наполнить бассейн за 1 день, вторая — за 1 день, третья — за 3, четвертая — за 4. За какое время наполнится бассейн через четыре трубы?

1172. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов *A* и *B* и встретились через 3 ч. Еще через 2 ч легковая машина прибыла в город *B*. За сколько часов грузовая машина доехала от города *B* до города *A*?

1173. В хозяйстве под картофель занята площадь в 3 раза большая, чем под капусту. Под капусту занято на 36 га меньше, чем под картофель. Какая площадь занята под картофель?

1174. Первая глава книги содержит в 3 раза меньше страниц, чем две другие вместе взятые. Три главы вместе содержат 276 страниц. Сколько страниц содержит первая глава?

1175. Мост длиной 324 м имеет четыре пролета, из которых два в два раза короче двух других, имеющих одинаковую длину. Определите длины пролетов моста.

1176. Кенгуру прыгает в длину на расстояние, в 4 раза большее и на 9 м большее, чем в высоту. На какое расстояние кенгуру прыгает в длину?

1177. Слон в 5 раз тяжелее белого медведя. Белый медведь на 3,6 т легче слона. Сколько весит каждое животное?

1178.° Для участия в эстафете ребята разделились на две команды. Чтобы участников эстафеты в командах стало поровну, учитель перевел 3 человека из одной команды в другую. На сколько человек первоначально в одной команде было больше, чем в другой?

1179. У Саши и Вити вместе 160 марок. После того как Саша дал Вите 15 марок, а Витя дал Саше 19 марок, число марок у мальчиков стало одинаковым. Сколько марок было у каждого мальчика первоначально?

1180. У кассира метро в двух мешках 250 телефонных жетонов. Если из одного мешка переложить в другой 25 жетонов, то количества жетонов в мешках сравняются. Сколько жетонов в каждом мешке?

1181. а) Сумма числителя и знаменателя дроби равна 32, числитель на 2 меньше знаменателя. Найдите эту дробь?

б) Числитель на 8 больше знаменателя, сумма числителя и знаменателя равна 34. Найдите эту дробь.

1182. Между городами A и B расстояние 331 км. На пути из A в B есть город C, расстояние от которого до города A на 17 км больше, чем до города B. Найти расстояние от A до C и от B до C.

1183. а) Книга в переплете стоит 5 р. Книга на 4 р. дороже переплета. Сколько стоит переплет?

б) Бутылка масла стоит 10 р. Масло на 9 р. дороже бутылки. Сколько стоит масло?

1184. Три доярки обслуживают на ферме 125 коров. Сколько доярок потребуется для обслуживания 625 коров при той же норме?

1185. С конвейера автозавода каждые полторы минуты сходит один автомобиль. Сколько автомобилей выпускает завод за 1 ч?

1186. На некотором участке заменили старые рельсы длиной 8 м новыми рельсами длиной 12 м.

а) Сколько потребуется новых рельсов, если сняли 240 старых рельсов?

б) Сколько сняли старых рельсов, если установили 240 новых рельсов?

1187. Колесо, окружность которого 1,5 м, сделало на некотором расстоянии 96 оборотов. Сколько оборотов на том же расстоянии сделает колесо, окружность которого 2,4 м?

1188. Для 16 голов скота на 36 дней требуется 1,92 т сухой подстилки. Сколько сухой подстилки требуется для 20 голов скота на 40 дней?

1189. Из A в B вышел пешеход со скоростью 4,8 км/ч. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч, который доехал до A, повернул назад и поехал с той же скоростью. Догонит ли велосипедист пешехода до его прихода в B?

1190.* а) За 1 ч бригада маляров покрасила половину стены дома. Оставшуюся часть стены покрасил 1 человек за 4 ч. Сколько маляров в бригаде?

б) Бригада за полдня выполнила $\frac{3}{4}$ задания. Оставшуюся часть задания выполнил 1 человек за полдня. Сколько человек в бригаде?

в) Бригада плотников выполнила $\frac{3}{5}$ задания за полдня. Оставшуюся часть задания выполнил один плотник за день. Сколько плотников в бригаде?

г) *Задача Л. Н. Толстого.* Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом луге и к вечеру его докосила, а другая — перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?

1191.* *Старинная задача.* 10 ветряных мельниц смололи 200 четвертей ржи в 12 дней, работая в день по 14 ч. По сколько часов в день должны работать 8 таких же мельниц, чтобы в 21 день смолоть 300 четвертей ржи?

1192. а) Картофель содержит 20% крахмала. Сколько картофеля надо взять для получения 200 кг крахмала?

б) При помоле ржи получается 75% муки. Сколько ржи надо взять, чтобы получить 200 кг муки?

в) При помоле пшеницы получается 80% муки. Сколько пшеницы надо взять, чтобы получить 200 кг муки?

г) Получаемый при сушке винограда изюм составляет 32% от массы винограда. Из скольких килограммов винограда получится 4 кг изюма?

1193. а) Найдите число, 20% которого составляют 50% от 200.

б) Найдите число, 10% которого составляют 60% от 300.

1194. В 800 г воды растворили 200 г соли. Какова концентрация раствора в процентах?

1195. а) Рубашка стоила 15 р. После снижения цены она стоит 12 р. На сколько процентов снижена цена рубашки?

б) Товар стоил 69 р. После снижения цены он стоит 62,1 р. На сколько процентов снижена цена товара?

1196.* Агроном подсчитал, что имеющиеся в хозяйстве удобрения составляют 80% того, что потребуется в текущем году. На сколько процентов надо увеличить имеющийся запас удобрений, чтобы полностью обеспечить потребности хозяйства?

1197. Два мальчика собрали 420 марок, и у одного из них оказалось на 10% больше марок, чем у другого. Сколько марок было у другого?

1198. На заводе 35% всех работающих — женщины, а остальные — мужчины, которых на 504 человека больше, чем женщин. Сколько всего рабочих на заводе?

1199. а) Разность чисел равна 20. Одно из них больше другого на 40%. Найдите меньшее число.

б) Разность чисел равна 20. Одно из них меньше другого на 40%. Найдите меньшее число.

1200. В коллекции имеется 12 жуков и пауков. У всех вместе у них 80 ног. Сколько в коллекции жуков и сколько пауков? (У жука 6 ног, у паука — 8.)

1201. *Задача Д. Пойи.* Торговец продает орехи двух сортов: одни по 90 центов, другие по 60 центов за килограмм. Он хочет получить 50 кг смеси по 72 цента за килограмм. Сколько для этого потребуется орехов каждого сорта?

1202. Пешеход прошел расстояние между двумя селами со скоростью 4 км/ч. Если бы он проходил в час на 1 км больше, то ему потребовалось бы на тот же путь на 1 ч меньше. Сколько времени шел пешеход и какой путь он прошел?

1203. Поезд прошел расстояние между двумя городами со скоростью 80 км/ч. Если бы его скорость была на 20 км/ч меньше, то ему потребовалось бы на эту поездку на 1 ч больше. Найдите расстояние между двумя городами.

1204. Чтобы выполнить задание к сроку, цех должен был в день изготавливать по 30 приборов. Повысив производительность труда, рабочие цеха стали изготавливать в день по 34 прибора и выполнили задание на 2 дня раньше срока. Сколько приборов нужно было изготовить по плану и за сколько дней?

1205. Завод получил заказ на изготовление некоторого числа машин к определенному сроку. Если завод будет выпускать ежедневно по 250 машин, то к сроку будет изготовлено на 1000 машин меньше, чем заказано. Если же завод будет выпускать ежедневно по 320 машин, то к сроку будет изготовлено на 400 машин больше, чем заказано. Сколько машин надо изготавливать в день, чтобы выполнить заказ в срок?

1206. Если раздать учащимся по 1 тетради, останется 36 тетрадей, а если раздать по 3 тетради, не хватит 12. Сколько тетрадей и сколько учащихся?

1207. *Старинная задача.* Ученики собираются выписать газету. Если они соберут с каждого по 15 к., то им не хватит 2 р., а если каждый внесет по 25 к., то получится лишних 2 р. Сколько было учеников? Сколько стоит подписка на газету?

1208. *Старинная задача (Китай, I в.).* Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесет по 8 (денежных единиц), то избыток равен 3. Если каждый человек внесет по 7, то недостаток равен 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи.

1209. *Старинная задача* (*Китай, II в.*). Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесет по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый внесет по 6, то не хватит 16. Найти число людей и стоимость курицы.

1210. Тракторист может вспахать поле за 5 дней. Увеличив выработку на 2,5 га в день, он выполнил работу за 4 дня. Какова площадь поля?

1211. *Задача Я. И. Перельмана.* Двое очистили 400 штук картофеля; один очищал 3 штуки в минуту, другой — 2. Второй работал на 25 мин больше, чем первый. Сколько времени работал каждый?

1212. Слон может бежать со скоростью на 25 км/ч большей, чем белый медведь. Скорость белого медведя составляет $\frac{2}{7}$ скорости слона. С какой скоростью может бежать каждое животное?

1213. Первая бригада может выполнить задание за 56 ч, а вторая — за 112 ч. Мастер рассчитал, что работу можно организовать так, что сначала над выполнением задания будет работать первая бригада несколько дней (по 8 ч), а затем — вторая. При этом задание будет выполнено за 8 дней. Сколько дней должна работать каждая бригада?

1214. На пришкольном участке один класс окопал $\frac{7}{20}$ всех деревьев, другой $\frac{3}{5}$ остатка, а третий — остальные 52 дерева. Сколько деревьев на пришкольном участке?

1215. Рабочий израсходовал $\frac{2}{35}$ зарплаты на уплату за квартиру, $\frac{5}{22}$ оставшихся денег на покупку вещей. После этого у него осталось на 320 р. больше, чем он израсходовал. Какова зарплата рабочего?

1216. В два магазина завезли яблок поровну. В первом магазине продали треть всех яблок и еще 30 кг, во втором магазине продали четверть всех яблок и еще 40 кг. После чего оказалось, что яблок в магазинах продали поровну. Сколько яблок завезли в каждый магазин первоначально?

1217. В нашем классе мальчиков и девочек поровну. На школьный вечер пришли половина всех мальчиков и еще 3 мальчика, треть всех девочек и еще 6 девочек. Оказалось, что на школьный вечер пришло мальчиков и девочек поровну. Сколько всего учащихся в нашем классе?

1218. *Старинная задача.* На вопрос: «Который час?» был дан ответ: «$\frac{2}{5}$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $\frac{2}{3}$ часов, оставшихся до полудня». Спрашивается, сколько сейчас времени.

1219. Веревку длиной 28 м надо разрезать на 3 части так, чтобы вторая часть была в 3,5 раза, а третья — в 2,5 раза больше первой. Найти длину каждой части.

1220. Один человек спросил своего приятеля:

— Сколько лет твоему сыну?

— Если к возрасту моего сына прибавить столько же, да еще половину, то будет 10 лет.

Сколько же лет сыну?

1221. Одного человека спросили: «Сколько Вам лет?» На что он ответил: «Когда я проживу еще половину, да треть, да четверть моих теперешних лет, тогда мне будет 100 лет». Сколько лет этому человеку?

1222. *Старинная задача.* Летит стая гусей и навстречу ей один гусь.

— Здравствуйте, сто гусей! — сказал гусь.

— Нас не сто, — ответил вожак стаи. — Вот если бы нас было еще столько, да полстолько, да четверть столько, да еще ты, гусь, с нами — вот тогда бы нас было сто гусей.

Сколько гусей было в стае?

1223.*У мальчика в коллекции было 210 российских марок и 65 иностранных. Когда ему подарили еще 25 марок, то российских марок стало в 3 раза больше, чем иностранных. Сколько российских марок подарили мальчику?

1224.*Отцу 32 года, сыну 8 лет. Через сколько лет отец будет: а) в 3 раза старше сына; б) в 5 раз старше сына?

1225. Брату 12 лет, он в 3 раза старше своей сестры. Через сколько лет он будет в 2 раза старше своей сестры?

1226. а) Сейчас мама в 8 раз старше своей дочери, а через 4 года она будет старше дочери в 4 раза. Сколько лет дочери сейчас?

б) Брат в 3 раза старше сестры, а через 5 лет он будет в 2 раза старше сестры. Сколько сейчас лет брату и сестре?

1227. *Отец старше сына на 24 года. Сейчас он старше сына в 3 раза. Через сколько лет отец будет:

а) в 2 раза старше сына; б) в 5 раз старше сына?

1228. В двух бидонах 70 л молока. После того как из каждого бидона продали по 20 л молока, в одном осталось в 2 раза больше молока, чем в другом. Сколько молока было в каждом бидоне первоначально?

1229. *Двое ели сливы. Один сказал другому: «Дай мне свои две сливы, тогда у нас слив будет поровну», на что другой ответил: «Нет, лучше ты дай мне свои две сливы — тогда у меня будет в два раза больше, чем у тебя». Сколько слив у каждого?

1230. **Старинная задача (Греция).* Ослица и мул шли вместе, нагруженные мешками равного веса. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. «Чего ты жалуешься, — сказал мул, — если ты мне дашь один твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я дам тебе один мешок, наши грузы только сравняются». Сколько мешков было у каждого?

1231. **Задача Бхаскары.* Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

1232. **Задача Л. Эйлера.* Мул и осел несли груз весом в несколько сотен каких-то единиц. Осел, жалуясь на свою судьбу, сказал мулу: «Мне нужно только сто единиц твоей ноши, чтобы моя стала вдвое тяжелее твоей». На это мул ему ответил: «Да, это так, но если бы ты мне отдал сто единиц из твоей ноши, то я был бы нагружен втрое больше тебя». Какого веса была ноша осла и ноша мула?

1233. *Мне теперь вдвое больше лет, чем было тогда, когда мой брат был в моем возрасте. Когда мне будет столько лет, сколько теперь моему брату, то нам вместе будет 98 лет. Сколько лет каждому?

1234. Кузнечик прыгает по прямой большими прыжками по 12 см и малыми прыжками по 7 см. Сможет ли кузнечик из одной точки прямой попасть в другую, если расстояние между ними 3 см?

1235. Кузнечик прыгает по плоскости в любом направлении прыжками по 12 см. Сможет ли кузнечик из одной точки плоскости попасть в другую, если расстояние между ними 10 см?

1236. Разрежьте прямоугольник по прямой линии на две части так, чтобы из них можно было сложить треугольник. Найдите два различных решения задачи.

1237. а) Тротуар шириной 3 м и длиной 60 м выстилают бетонными плитами, каждая из которых имеет форму квадрата со стороной 50 см. Сколько потребуется плит?

б) Пол в ванной комнате выстилают керамическими плитками, каждая из которых имеет форму квадрата со стороной 12 см. Сколько нужно купить упаковок плиток по 48 плиток в каждой, если размеры пола ванной комнаты 1 м 80 см и 1 м 50 см? Учтите, что в ванной комнате мастера делают бортик высотой в полплитки и умеют резать керамические плитки на части.

1238. а) Коробка из-под конфет имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Ее длина равна 28 см, ширина составляет 0,5 длины, а высота составляет $\frac{1}{7}$ ширины. Найдите объем коробки.

б) Длина строительного кирпича 25 см, ширина составляет 0,48 длины, а высота составляет 0,26 длины. Выразите объем кирпича в кубических дециметрах.

1239. В килограммовой пачке сахара содержится 180 кусков сахара. Какова масса каждого куска?

1240. Выразите объем пачки сахара, размеры которой 5,5 см, 11,5 см и 17,5 см, в кубических дециметрах. Ответ округлите до сотых.

1241. а) Можно ли написать 45 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

б) Можно ли написать 55 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

1242. а) В коробке лежат 5 красных и 5 зеленых карандашей. Какое наименьшее число карандашей нужно взять из коробки не глядя, чтобы среди них оказалось 2 карандаша одного цвета; 2 карандаша разных цветов?

б) В коробке лежат 5 красных, 5 зеленых и 5 синих карандашей. Какое наименьшее число карандашей нужно взять из коробки не глядя, чтобы среди них оказалось 2 карандаша одного цвета; 2 карандаша разных цветов?

1243.*Студент за 5 лет учебы сдал 31 экзамен. В каждом следующем году он сдавал больше экзаменов, чем в предыдущем. На пятом курсе экзаменов было втрое больше, чем на первом. Сколько экзаменов было на четвертом курсе?

1244.*Предание повествует, что царь Гиерон поручил мастеру изготовить венец для одной статуи и приказал выдать ему необходимое количество золота и серебра. Когда венец был доставлен, взвешивание показало, что он весит столько же, сколько весили золото и серебро. Однако правителю донесли, что мастер утаил часть золота, заменив его серебром. Гиерон призвал Архимеда и предложил ему определить, сколько золота и серебра заключает изготовленная мастером корона. Архимед решил эту задачу исходя из того, что чистое золото при взвешивании в воде теряет двадцатую долю своего веса, а серебро десятую долю. Определите, сколько золота утаил мастер, если ему выдали 8 кг золота и 2 кг серебра, а корона весила в воде $9\frac{1}{4}$ кг?

Вариант 1

1.1. Вычислите:

а) $\frac{5}{12}-\frac{1}{8}$; б) $2{,}25\cdot 30{,}4$.

1.2. Три рабочих могут выполнить задание за 8 дней. За сколько дней это задание выполнят 2 рабочих, если будут работать с такой же производительностью?

1.3. Вычислите: $\frac{2}{5}:\frac{7}{10}+2\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}$.

1.4. Найдите значение выражения $7-2a$ при $a=-0{,}5$.

1.5. В первый день ученик прочитал 28 страниц, во второй день — в 1,5 раза больше, чем в первый. Сколько страниц в книге, если за эти два дня ученик прочитал $\frac{5}{7}$ числа страниц книги?

1.6. Вычислите наиболее простым способом:

$$(7{,}51-1{,}98)+(1{,}98-2{,}51).$$

Вариант 2

2.1. Вычислите: а) $\frac{7}{12}+\frac{5}{14}$; б) $3\frac{2}{3}:1{,}1$.

2.2. За конфеты заплатили на 5,4 р. больше, чем за печенье, а за все вместе заплатили 42 р. Сколько заплатили за конфеты?

2.3. Вычислите: $27{,}54:5{,}1-1{,}5\cdot 8{,}4$.

2.4. Упростите выражение: $7x-3{,}2-2x+1$.

2.5. До обеда магазин продал 60%, а после обеда еще $\frac{3}{8}$ привезенных яблок. К концу дня осталось продать 6 кг яблок. Сколько килограммов яблок привезли в магазин?

2.6. Вычислите наиболее простым способом:

$$3\frac{13}{17}\cdot 2\frac{1}{5}-2\frac{1}{5}\cdot 2\frac{13}{17}+\frac{4}{5}.$$

Вариант 3

3.1. Вычислите: а) $4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}$; б) $6{,}4:0{,}3$.

3.2. За месяц работы бригада установила 45% всех окон. Сколько окон ей осталось установить, если всего она должна установить 320 окон?

3.3. Вычислите: $3{,}6\cdot\frac{3}{4}+0{,}16:\frac{2}{5}$.

3.4. Решите пропорцию: $\frac{35}{x}=\frac{2}{3}$.

3.5. Некоторое задание первый рабочий может выполнить за 4 ч, а второй — за 6 ч. За сколько часов это задание выполнят два этих рабочих при совместной работе?

3.6. Вычислите наиболее простым способом:

$$12{,}75\cdot 3{,}5-2{,}25\cdot 3{,}5+15\cdot 3{,}5.$$

Вариант 4

4.1. Вычислите: а) $5\frac{3}{5}+2\frac{2}{3}$; б) $6\frac{3}{5}:3$.

4.2. Ученик потратил $\frac{5}{7}$ имевшихся у него денег на покупку учебника и оставшиеся 12 р. на покупку тетрадей. Сколько денег он потратил?

4.3. Вычислите: $\frac{3{,}2+0{,}64\cdot 5{,}5}{4{,}8:3}$.

4.4. Решите уравнение: $5(x-3)=x+1$.

4.5. В магазине было 320 кг яблок и винограда. Когда продали 115 кг яблок и 97 кг винограда, то яблок и винограда осталось поровну. Сколько килограммов яблок было в магазине первоначально?

4.6. Вычислите наиболее простым способом:

$$\left(13\frac{2}{5}+7\frac{2}{3}\right)-\left(6\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right).$$

Вариант 5

5.1. Вычислите:

а) $\dfrac{729\cdot428-729\cdot311+117\cdot71}{320\cdot215+19\cdot320-120\cdot234}$; б) $5+2\frac{1}{3}:(-9{,}8)-5:(-21)$.

5.2. Укажите какую-либо обыкновенную дробь, большую 0,7, но меньшую 0,8.

5.3. Ученик имел 54 р. Он потратил $\frac{2}{9}$ имевшейся у него суммы на покупку книги и $\frac{2}{7}$ остатка на покупку тетрадей. Сколько денег у него осталось после этих покупок?

5.4. Первая труба наполнит бассейн за 24 мин, а вторая — за 40 мин. За сколько минут наполнится бассейн, если открыть обе эти трубы?

5.5. Составьте все трехзначные числа, используя цифры 4, 5 и 6 без повторения?

Вариант 6

6.1. Вычислите:

а) $(5{,}4\cdot4{,}05-19{,}98:22{,}2):1{,}8+0{,}35$; б) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}-\frac{3}{14}:\left(-4\frac{1}{2}\right)-2\frac{2}{3}$.

6.2. Что больше: $\frac{2}{3}$ от 120 или 40% от 150?

6.3. Когда коллекция марок увеличится на $\frac{2}{5}$ имеющегося числа марок, то в ней будет 350 марок. Сколько марок в коллекции сейчас?

6.4. Две бригады рабочих при совместной работе выполнили задание за 6 дней. Это задание могла бы выполнить одна первая бригада за 18 дней. За сколько дней это задание могла бы выполнить одна вторая бригада?

6.5. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 7 и 9 без повторения?

Вариант 7

7.1. Вычислите:

а) $\left(13\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{7}-12\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{7}\right):1\frac{1}{14}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; б) $9{,}36:(-9)-2{,}8\cdot(-1{,}8)$.

7.2. Укажите какую-либо десятичную дробь, большую $\frac{3}{11}$, но меньшую $\frac{4}{11}$.

7.3. Товар стоил 400 р. Его цена увеличилась на 15%, а через некоторое время еще на 10%. Сколько теперь стоит этот товар?

7.4. Имеющегося запаса кормов хватило бы для 120 коров на 4 месяца. На сколько месяцев хватит этого запаса кормов, если хозяйство продаст 24 коровы?

7.5. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 0 и 6 без повторения?

Вариант 8

8.1. Вычислите:

а) $\left(2\frac{1}{2}\cdot 0{,}8-5\frac{2}{3}:5{,}1\right):\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$; б) $(-34\cdot 28-34\cdot(-98)):35$.

8.2. Что больше: 25% от 180 или $\frac{3}{7}$ от 140?

8.3. После снижения цены на 20% товар стоит 480 р. Сколько стоил товар до снижения цены?

8.4. Бригада из 18 рабочих может заасфальтировать участок дороги за 10 дней. Сколько рабочих надо добавить в эту бригаду, чтобы заасфальтировать участок дороги на 1 день раньше?

8.5. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 2, 0 и 8 с повторением?

Арифметика — одна из основных наук. Правильное ее изучение приводит не только к умению считать, но и к умению логически мыслить. Она дает перспективу для других дисциплин — алгебры, геометрии, анализа, физики и т. д. Поэтому необходимо основательное изучение арифметики каждым учеником школы независимо от ее профиля и образования, которое ученик будет получать в дальнейшем.

Учебники «Арифметика. 5» и «Арифметика. 6» полностью отвечают действующей программе по математике. Они нацелены на повышенный уровень математической подготовки учащихся, но могут использоваться в классах с обычной программой.

Возвращая школьному курсу математики для 5—6 классов традиционное название «Арифметика», авторы хотели подчеркнуть значимость основательного изучения арифметики. Принципиальной особенностью учебников является то, что они не натаскивают ученика, ориентированы не только на формирование навыка, а учат действовать осознанно. Если традиционно в 5—6 классах обучение больше ориентировано на вопрос «как?», на действия по образцу, то в этих учебниках усиливается внимание к вопросу «почему?», имеющему большой развивающий потенциал.

Существенной особенностью учебников является расположение основного учебного материала в естественной логической последовательности, позволяющей сделать изложение материала более глубоким, экономным и строгим. Из всех возможных схем изложения материала в учебниках выбрана та, которая отвечает научным представлениям о расширении понятия числа и в то же время учитывает возрастные особенности учащихся 5—6 классов, количество учебных часов, отведенных программой на курс математики в этих классах. Так, например, в 6 классе целые числа изучаются отдельно — до отрицательных дробей. Это позволяет учащимся освоиться с идеей знака числа в более простой ситуации, после чего изучаются рациональные числа; наконец, остается освоить запись некоторых из рациональных чисел в виде десятичных дробей и научиться действовать с ними.

В учебниках есть еще одна очень важная идея. Это идея формирования понятия числа как длины отрезка, а точнее — как координаты произвольной точки прямой. В этом втором смысле понятие «число» объединяет в себе положительные и отрицательные числа.

Назвав учебник «Арифметика», авторы уделяют достаточно внимания алгебраическому и геометрическому материалу, который принято изучать в 5—6 классах. Но этот материал расположен так, чтобы не мешать развитию арифметических идей. В учебнике для 6 класса вводятся буквенные выражения и простейшие уравнения, показывается применение уравнений для решения задач. В большей части рассуждений доказательства ведутся на характерных числовых примерах, в которых при замене чисел буквами можно получить общее доказательство. Все же примеров, когда можно использовать буквы, в 6 классе достаточно много, и, таким образом, учебник вносит определенный алгебраический элемент в образование учащихся. Некоторые из приведенных в учебнике доказательств являются необязательными для всех учащихся, но их освоение полезно для самых сильных из них.

Геометрические вопросы, выходящие за рамки программы, даны в учебнике для 6 класса в виде занимательных задач.

В учебниках имеются нестандартные развивающие задачи, старинные задачи. Это позволяет значительно расширить возможности для развития мышления и речи учащихся, разнообразить приемы решения задач, расширить их представления о способах решения задач в далекие времена, может способствовать развитию школьников, формированию у них интереса к решению задач и к самой математике.

Глава I учебника посвящена важным прикладным вопросам: пропорциям и процентам. Здесь же имеются два пункта, материал которых еще не входит в обязательную программу: это «Задачи на перебор всех возможных вариантов» и «Вероятность события». В главе много задач на повторение изученного в 5 классе. **Цель главы — восстановить навыки работы с натуральными и рациональными числами и усвоить новые понятия, связанные с пропорциями и процентами.**

Глава II «Целые числа» выделена не случайно. Авторы считают, что идею отрицательного числа и правил действий с ним легче усвоить на целых числах. Все трудности здесь сосредоточены именно на знаке числа, это позволяет упростить понимание учащимися правил определения знака результата. **Цель главы — научить учащихся работать со знаками, так как арифметические действия над их модулями — натуральными числами — уже хорошо усвоены.**

Глава III посвящена изучению действий с рациональными числами. Мы считаем, что учащийся должен овладеть арифметическими действиями хотя бы по правилам:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\ (b\neq0,\ d\neq0),$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\ (b\neq0,\ d\neq0),$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\ (b\neq0,\ d\neq0),\qquad (*)$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\ (b\neq0,\ c\neq0,\ d\neq0),$$

где a, b, c и d теперь уже целые числа. Хотелось бы, чтобы после изучения этой главы учащиеся поняли, что каждое действие с рациональными числами (т. е. с дробями любого знака) сводится к нескольким действиям над целыми числами. Обратим внимание, что совершенно не обязательно определять предварительно знак результата действий, достаточно выполнить действия по правилам (*) и знак результата определится автоматически. Например,

$$-\frac{7}{8}+\frac{10}{11}=\frac{-7}{8}+\frac{10}{11}=\frac{-7\cdot 11+8\cdot 10}{8\cdot 11}=\frac{-77+80}{88}=\frac{3}{88}.$$

Цель главы — добиться осознанного владения школьниками арифметическими действиями над рациональными числами.

В главе IV с опорой на уже известные теоретические сведения излагается материал, связанный с десятичными дробями — сначала положительными, потом любого знака. Можно обратить внимание на схожесть правил действий над десятичными дробями и натуральными числами. Здесь же рассмотрены приближенные вычисления с использованием калькулятора. Появление приближенных вычислений в этом месте связано с тем, что при делении десятичных дробей часто не удается получить точный ответ, а также с тем, что во многих задачах не надо знать много знаков после запятой и что табло калькулятора позволяет вывести небольшое число знаков.

Цель главы — научить учащихся действиям с десятичными дробями и приближенным вычислениям.

Глава V посвящена связи между обыкновенными и десятичными дробями. Здесь показывается, что несократимые дроби, знаменатель которых не содержит простых делителей, кроме 2 и 5, и только они, записываются в виде десятичных дробей. Один из двух способов превращения обыкновенной дроби в десятичную — деление ее числителя на знаменатель уголком. Если попытаться этим способом дробь $\frac{1}{3}$ превратить в десятичную, то получится бесконечная периодическая десятичная дробь. Делается вывод, что любое рациональное число может быть записано в виде периодической десятичной дроби. Затем приводятся примеры бесконечных непериодических десятичных дробей, которые и называют иррациональными числами. Рациональные и иррациональные числа — это действительные числа.

Вопрос об измерении длины отрезка является одним из главных в данной главе. Здесь показывается, что длина отрезка как раз и есть бесконечная десятичная дробь, что координатная прямая заполняется действительными числами полностью. Этот материал является внепрограммным, но он вполне может быть основательно изучен в обычных классах и ознакомительно — в слабых.

Цель главы — ввести действительные числа. Авторы предполагают, что при дальнейшем изучении математики в школе учащиеся могут опираться на изученные здесь сведения. Если же этот материал не удастся пройти в 6 классе, то ничего страшного в этом нет, так как он помещен в начале учебника «Алгебра. 7» серии «МГУ — школе».

Главная особенность построения системы упражнений в учебниках «Арифметика. 5» и «Арифметика. 6» заключается в учете важного методического принципа: ученик должен преодолевать за один раз не более одной трудности. Другими словами, сложность заданий в каждом пункте учебника должна нарастать линейно. При этом в учебниках имеется достаточное число действительно сложных задач — учитель сам должен определить, на какой ступеньке лестницы сложности он остановится со своим классом или с конкретным учеником.

Другая особенность заключается в том, что для каждого нового действия, приема решения задач в учебнике имеется достаточное число упражнений, которые не перебиваются упражнениями на другие темы. При необходимости продолжения работы по освоению нового вида деятельности нужные задания помещены в следующих пунктах учебника.

Учебник заканчивается разделом «Задания для самопроверки».

Для повышения уровня математического образования в стране, совершенствования школьных учебников по инициативе ректора Московского университета академика В. А. Садовничего разработана Программа «МГУ — школе» и началось издание учебников, сохраняющих и развивающих лучшие традиции отечественного математического образования. В 2003 году математическая общественность отметит 300-летие знаменитой «Арифметики» Л. Ф. Магницкого — энциклопедии математических знаний того времени. В учебниках серии «МГУ — школе» вы найдете многочисленные обращения к этому источнику. Работа со старинными задачами — одна из сильных сторон учебников, она может много дать в воспитании уважения к традициям и истории.

В настоящее время в серии «МГУ — школе» выходят и готовятся к изданию следующие учебники: «Арифметика. 5», «Арифметика. 6», «Алгебра. 7», «Алгебра. 8», «Алгебра. 9», «Алгебра и математический анализ. 10» и «Алгебра и математический анализ. 11» авторов С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина.

Авторы выражают благодарность учителям, приславшим свои замечания и предложения по совершенствованию учебников, указавшим пропущенные в первом издании опечатки. Это О. В. Бощенко (г. Волгоград), В. И. Гридасов и Е. А. Удовиченко (г. Воронеж), М. А. Свинорез (г. Орел) и др.

Предметный указатель

Ответы

10. а) $\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{7}{12}$. **27.** 1:500; 180 м. **36.** а) 500 р. и 400 р.; б) 360 р. и 540 р. **39.** 50 страниц и 40 страниц. **43.** 45 км и 15 км. **44.** 1500 р. **54.** а) $\frac{6}{7}$; б) $1\frac{1}{5}$; в) $8\frac{2}{5}$; г) $4\frac{1}{2}$. **58.** а) $\frac{3}{10}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 70; г) $\frac{1}{4}$. **75.** 18 кг. **78.** а) За 4 дня; б) за 40 дней. **79.** $110\frac{1}{4}$ м. **80.** 16 косцов. **82.** 540 км. **83.** а) За 6 ч; б) за 8 дней. **104.** а) $7\frac{1}{5}$ т; б) $5\frac{2}{5}$ т; в) 90 т. **105.** $9\frac{1}{10}$ т. **106.** 248 г олова и 152 г свинца. **114.** а) 800 лампочек; б) 300 семян. **116.** 80%; 125%. **118.** а) 48%; б) 52%. **121.** б) 192 мальчика. **125.** 40 деталей. **126.** 20 км. **141.** а) 13, 19, 31, 39, 91, 93; б) 11, 13, 19, 31, 33, 39, 91, 93, 99. **142.** а) 10, 15, 50, 51; б) 10, 11, 15, 50, 51, 55. **145.** 24-мя способами. **149.** 28 партий. **150.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$. **151.** а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{5}{7}$. **153.** $\frac{1}{2}$. **154.** $\frac{1}{6}$. **155.** $\frac{1}{24}$. **158.** а) $\frac{1}{28}$; б) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{1}{7}$; г) $\frac{1}{14}$. **159.** а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{1}{36}$; г) 0. **160.** $\frac{2}{3}$. **161.** Нет. Из 4-х возможных случаев ОО, ОР, РО, РР один благоприятен для первого игрока и два для второго. **164.** а) $\frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{60}$; в) $\frac{1}{120}$. **166.** За 7 недель. **168.** 48 яиц. **169.** 1 кг. **170.** а) 80 окон; б) за 6 дней. **210.** а) 13; б) 17; в) 13; г) 17. **227** а) −528, −400, 0, 236, 400. **228.** а) 367, 12, 0, −8, −250, −400. **243.** а) 1; б) 3; в) −3. **246.** а) −200; б) −200; в) −140; г) 1645; д) −290; е) 1432. **261.** в) 0. **262.** б) −50. **266.** а) 19; б) −3. **274.** б) −2; в) −6; г) −15. **275.** б) −12; в) −7; г) −22. **285.** а) 10; б) −101; в) 6; г) −50. **288.** а) −30; б) −56. **297.** а) −585; б) −11040; в) 4040. **306.** а) 1; б) −1; в) 256; г) −1. **310.** а) 108; б) 9. **315.** а) 12; б) 108; в) −81. **316.** а) 6; б) 10. **326.** а) −5; б) −5; в) −8; г) 90; д) 8; е) −8. **329.** б) −3863; в) 15246; г) −611; д) −262. **330.** а) −114336. **333.** а) 27600; б) 9800. **340.** а) 56; б) 6; в) −1000; г) 2500;

д) -83; е) -225. **348.** а) -100; б) -1000; в) 3000; г) -10000. **359.** а) 356; б) -628. **368.** а) 9; б) 143; в) 7; г) 77. **372.** а) -200; б) 200; в) 200; г) -500. **382.** Например, -10, 11, -10, 11, -10. **388.** а) 7; б) 12; в) 11; г) 3. **392.** Нет. **442.** а) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{7}{8}$; м) $-\frac{1}{4}$. **444.** а) -1; б) -16; в) -6. **467.** $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$. **470.** Существуют, например: $-\frac{11}{50}$, $-\frac{6}{25}$, $-\frac{3}{10}$. **475.** а) $1\frac{4}{9}$; б) $\frac{9}{25}$; в) $1\frac{61}{64}$; г) $\frac{3}{68}$; д) $1\frac{113}{392}$; е) $\frac{395}{546}$. **485.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{7}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) -1; е) $-\frac{15}{17}$. **492.** а) $-\frac{8}{15}$; б) $-\frac{7}{8}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$. **498.** а) $\frac{32}{63}$; б) $1\frac{5}{9}$; в) $1\frac{11}{24}$; г) $-\frac{9}{25}$; д) $\frac{9}{52}$; е) $-\frac{40}{63}$. **518.** а) $\frac{27}{25}$; б) $1\frac{1}{5}$; в) $-1\frac{4}{5}$; г) $-\frac{7}{9}$. **532.** а) 1; б) $1\frac{1}{2}$; в) 4; г) $1\frac{1}{8}$. **537.** б) $-1\frac{37}{700}$; в) $-\frac{249}{494}$. **544.** а) $-9\frac{21}{40}$; б) $\frac{43}{60}$; в) $-3\frac{1}{50}$; г) $\frac{3}{4}$. **551.** а) $-3\frac{2}{3}$; б) $-25\frac{1}{2}$; в) $-4\frac{5}{9}$; г) $-1\frac{2}{3}$; д) $11\frac{1}{3}$; е) $1\frac{14}{15}$. **571.** а) $-17\frac{29}{30}$; б) $-2\frac{2}{3}$. **582.** а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{41}{70}$. **584.** а) 8; б) $5\frac{1}{2}$; в) $1\frac{1}{12}$. **586.** а) $5\frac{1}{2}$; б) $1\frac{1}{2}$; в) $\frac{7}{8}$. **587.** в) $\frac{13}{16}$; г) $1\frac{11}{24}$. **591.** а) $2\frac{2}{3}$; б) $5\frac{1}{3}$; в) 13; г) -4. **602.** б) 11; в) -2; г) -3; д) 17. **603.** а) 4; б) -6; в) 4; г) 5. **604.** а) $1\frac{1}{5}$; б) $3\frac{3}{5}$; в) 1. **607.** $P=2(a+b)$; а) 10 см; в) 10 см. **610.** $V = abc$; а) 30 см^3; б) 8 см^3. **612.** а) a^2; б) ab; в) $ab+cd$; г) $ad+bc$; д) $cd-ab$; е) $ab+ad-cd$. **614.** а) 135 км; б) 4 ч. **615.** а) 6 ч; б) 8 окон. **622.** а) $12a$; б) $6x$; в) $2y$; г) $-3b$; д) $-5x$; е) 0. **627.** а) $-5a-5$; б) $2x-9y+13$. **629.** а) $(50x+8)$ км; б) $\frac{190-4x}{4}$ ч. **630.** $\frac{ab}{a+b}$ мин; а) 12 мин; б) 21 мин; в) 36 мин. **632.** а) $(2x+10)$ мин; б) $(2x-4)$ учащихся. **636.** а) 25 и 12; б) 30 и 18. **652.** а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{12}$; в) $-\frac{1}{8}$; г) 6; д) $1\frac{1}{3}$; е) 9; ж) 0; з) $-\frac{2}{25}$; и) $\frac{2}{3}$. **655.** д) 6; е) $\frac{1}{2}$; ж) $14\frac{2}{7}$; з) $\frac{2}{25}$. **657.** а) 2; б) 10; в) $3\frac{5}{7}$; г) $1\frac{1}{2}$; д) $3\frac{2}{5}$; е) $-2\frac{1}{3}$; ж) $-2\frac{1}{2}$; з) $-10\frac{1}{2}$. **659.** а) $x+6+x=18$; б) $x-6+x=18$. **662.** а) 18 и 6 грибов; б) 21 и 42 книги. **664.** а) 16 цыплят; б) 12 утят. **665.** а) 56 и 68 м; б) $7\frac{1}{2}$ и $8\frac{1}{2}$ м. **670.** 5 кошек. **671.** 6 собак и 4 кошки. **675.** 36 учеников. **676.** 28 учеников. **678.** 1000 км; не может. **679.** Философов больше. **681.** 25 учащихся. **683.** 15 и 30 р. **684.** За 23 ч. **686.** 2376 дахеканов. **697.** 15 золотых. **698.** Указание. Сначала вычислите, какая часть запаса топлива тратится на 1 км пути по течению и обратно. **699.** 9600 км. **714.** а) 11,79; б) 1,12; в) 0,06; г) 0,026; д) 2,31; е) 23,1. **727.** Например, а) 0,61; б) 0,482; в) 0,653. **732.** а) 7,485 кг $>$ 6,09 кг; б) 5,48 м $>$ 5,4 м; в) 7,74 км $>$ 7,074 км; г) 8,005 т $<$ 8,5 т. **740.** а) 6; б) 5,5; в) 0,6; г) 1,2; д) 10; е) 40. **741.** а) 2,6; б) 4,88; в) 2,92; г) 12,6;

д) 8,05; е) 8,13. **742.** а) 13 см. **744.** а) 144 см; б) 10,5 см; в) 1,14 см. **745.** 30,7 м^2. **750.** 1288,4 р. **752.** 20,5 км/ч. **762.** а) 48,4 дм; б) 35 дм; в) 39,67 дм; г) 0,25 дм. **779.** а) 171,18; б) 1723,8; в) 5,4208. **797.** а) 0,06; б) 0,04; в) 0,0002; г) 0,0005; д) 0,005; е) 0,0025. **808.** а) 4,7225; б) 21,481. **813.** 160 рельсов. **814.** 3,8 и 4,5 т. **817.** 14,8 и 20 м^2. **819.** 17,5 р. **821.** а) 5,5; б) 20. **823.** а) 0,85; б) 0,65; в) 20; г) 10,5. **830.** 50 кг, 90 кг, 1,125 т; 75%. **831.** 140 кг, 122,5 кг, 0,63 т. **834.** 168 р. **837.** Нет. **839.** а) В 1,44 раза; на 44%; б) на 19%. **842.** Похудел. **843.** В 4 раза. **855.** На 3%. **860.** а) $-12,16$; б) 6,29; в) $-2,94$; г) 0; д) $-4,5$; е) 25. **863.** а) $-0,5$; б) 0,094; в) $-0,255$; г) $-17,81$. **865.** а) 4; б) 3; в) 1,6. **866.** а) $-1\frac{29}{36}$; б) $\frac{2}{15}$; в) $-53\frac{1}{3}$; г) $3\frac{1}{7}$. **867.** а) 0,125; б) $-\frac{8}{15}$; в) -41. **872.** а) 0,345; б) 0,765; в) 0,023; г) $-0,343$. **873.** а) 1,24; б) 3,57; в) 2,58; г) 2,56. **874.** а) 1,25; б) 1,24; в) $-7,02$; г) 0,13. **883.** а) $a+b\approx3,4$; $a-b\approx3,2$; б) $a+b\approx1,3$; $a-b\approx-3,9$; в) $a+b\approx0,2$; $a-b\approx-0,2$. **885.** а) $ab\approx-4,68$; $a:b\approx-1,27$; б) $ab\approx1,69$; $a:b\approx2,73$; в) $ab\approx0,0198$; $a:b\approx229$. **894.** а) 180; б) 297 мальчиков. **898.** а) 4000; б) 200 семян. **901.** а) 80%; б) 25%; в) $33\frac{1}{3}$%; г) $133\frac{1}{3}$%. **905.** На 33,1%. **906.** За 4 года. **912.** За 25 мин. **913.** а) Для каждого замка имеется 1000 кодов от 000 до 999, т. е. в худшем случае потребуется $2\cdot1000=2000$ с, или 33 мин 20 с; б) $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{1000000}$; в) 12 кодов — по 6 на каждом замке; г) 48 кодов; 96 кодов. **937.** а) 2; б) 2 и 3; в) 2 и 7; г) 2 и 3. **944.** а) 19,575; б) 12,96; в) 5; г) 2,15; д) 0,55; е) 4; ж) 2,01; з) 5,2. **957.** Не больше 6 цифр. **961.** г) $3\frac{5}{9}$; д) $\frac{11}{90}$; е) $\frac{337}{300}$. **980.** а) Для $a \geqslant 0$; б) для $a \leqslant 0$. **985.** а) 7,06; б) 4,63; в) 12,68; г) 12,77. **986.** а) 4,144; б) 8,428; в) 5,545; г) $-3,559$. **987.** а) 16; б) 0,18; в) 56; г) 126. **1003.** а) 3; 3,1; 3,12; б) 2; 2,3; 2,31; в) 3; 3,6; 3,61. **1004.** а) 3,1; 3,19; 3,191; 3,1919. **1014.** Они равны. **1016.** а) 16 см^2; б) $(8\pi-16)$ см^2. **1019.** Пролезет. **1045.** (0; 1). **1046.** (−3; 0). **1056.** На $11\frac{1}{9}$%. **1057.** 35,5%. **1058.** 5 ч. **1060.** 4 и 4,5 ч. **1061.** $1\frac{1}{9}$ динара. **1063.** 4 р. 80 к. **1067.** б) 198; в) 612715; г) 679. **1071.** а) 465; б) 318. **1073.** а) 4; б) 5. **1074.** а) 77436; б) 709; в) 357035; г) 126. **1079.** а) -2; б) 10; в) -753; г) 7. **1080.** а) 330; б) -99; в) 64; г) 5100. **1091.** а) $1\frac{11}{12}$; б) $1\frac{13}{15}$; в) $18\frac{8}{21}$; г) $4\frac{1}{13}$. **1092.** а) 20; б) 0,6; в) 2,5. **1095.** а) 0,3; б) 7,5; в) 1; г) 20; д) 1; е) 12. **1096.** а) 3,6; б) 2,4. **1097.** а) 3,5; б) 8. **1098.** а) $5\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{8}$. **1101.** а) $\frac{5}{8}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$;

г) $\frac{1}{6}$. **1102.** б) 405; в) 2997; г) 13; д) 72. **1105.** а) $x=4$; $y=3$; $z=2$. **1106.** а) 47,418; б) 20. **1108.** а) $2\frac{2}{9}$; б) 5,4; в) 59000; г) 1680; д) 45; е) 25. **1110.** а) -6; б) 90. **1114.** а) $\frac{16}{75}$; б) 0,34. **1115.** а) $7\frac{1}{7}$; б) $1\frac{3}{28}$; в) $11\frac{4}{7}$; г) 1,25. **1116.** а) 500; б) 1,1. **1117.** а) 86,58; б) $-3\frac{61}{72}$; в) $-\frac{2}{27}$; г) $-\frac{7}{12}$. **1118.** а) 3,8; б) $3\frac{1}{3}$; в) 17; г) 15. **1119.** а) 14,3; б) $1\frac{1}{18}$. **1135.** 291 кг и 363 кг. **1136.** 220 и 232. **1137.** 33 т. **1138.** 22 дня. **1139.** 2 ч. **1141.** 78 р., 42 р. и 24 р. **1142.** 99 р., 51 р., 27 р. и 15 р. **1143.** а) Поросенок весил 5 кг, ягненок — 4 кг. **1147.** 24 с. **1149.** а) 3,5 мин; б) 16,5 мин. **1150.** а) Через 3,5 ч или через 4,5 ч. **1155.** 3,6 кг. **1159.** За 2 мин. **1162.** а) На 36 дней. **1166.** Хватит. **1167.** Не хватит. **1168.** За 1 ч 12 мин. **1169.** На 8 дней. **1170.** За 1 ч 15 мин. **1174.** 69 страниц. **1181.** а) $\frac{15}{17}$; б) $\frac{21}{13}$. **1183.** а) 50 р.; б) 9,5 р. **1188.** $2\frac{2}{3}$ т. **1189.** Догонит. **1190.** г) 8 косцов. **1191.** По 15 ч в день. **1199.** а) 50; б) 30. **1200.** 8 жуков, 4 паука. **1201.** 20 кг по 90 центов и 30 кг по 60 центов. **1204.** 510 приборов за 17 дней. **1205.** 300 машин. **1214.** 200 деревьев. **1215.** 700 р. **1217.** 36 учащихся. **1229.** 10 и 14 слив. **1233.** 28 лет и 42 года. **1238.** а) 784 см^3; 1,95 дм^3. **1243.** 8 экзаменов. **1244.** Мастер утаил 3 кг золота.

Ответы к заданиям для самопроверки

1.1. а) $\frac{7}{24}$; б) 68,4. **1.2.** За 12 дней. **1.3.** $1\frac{5}{21}$. **1.4.** 8. **1.5.** 98 страниц. **1.6.** 5. **2.1.** а) $\frac{79}{84}$; б) $3\frac{1}{3}$. **2.2.** 23,7 р. **2.3.** $-7,2$. **2.4.** $5x-2,2$. **2.5.** 240 кг. **2.6.** 3. **3.1.** а) $1\frac{5}{6}$; б) $21\frac{1}{3}$. **3.2.** 176 окон. **3.3.** 3,1. **3.4.** 52,5. **3.5.** За 2,4 ч. **3.6.** 0. **4.1.** а) $8\frac{4}{15}$; б) $2\frac{1}{5}$. **4.2.** 42 р. **4.3.** 4,2. **4.4.** 4. **4.5.** 169 кг. **4.6.** 15. **5.1.** а) 2; б) 5. **5.2.** Например, $\frac{3}{4}$. **5.3.** 30 р. **5.4.** 15 мин. **5.5.** 456, 465, 546, 564, 645, 654. **6.1.** а) 12; б) $-2\frac{1}{7}$. **6.2.** $\frac{2}{3}$ от 120 больше, чем 40% от 150. **6.3.** 250 марок. **6.4.** За 9 дней. **6.5.** 6 чисел. **7.1.** а) 7; б) 4. **7.2.** Например, 0,3. **7.3.** 506 р. **7.4.** На 5 месяцев. **7.5.** 18 чисел. **8.1.** а) 1; б) 68. **8.2.** 25% от 180 меньше, чем $\frac{3}{7}$ от 140? **8.3.** 600 р. **8.4.** 2 рабочих. **8.5.** 18 чисел.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ОТНОШЕНИЯ, ПРОПОРЦИИ, ПРОЦЕНТЫ

ГЛАВА II. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

ГЛАВА III. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

ГЛАВА IV. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

ГЛАВА V. ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Учебное издание

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АРИФМЕТИКА

Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией ***Т. А. Бурмистрова***
Редакторы ***Н. Е. Терехина, Т. Г. Вайлокова***
Младший редактор ***Н. В. Сидельковская***
Художники ***О. В. Попович, В. А. Андрианов, И. В. Гущин***
Художественный редактор ***Е. Р. Дашук***
Технический редактор ***Н. А. Киселева***
Корректор ***О. Н. Леонова***

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Сдано в набор 18.10.99. Подписано к печати 19.05.2000. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,89+0,36 форз. Усл. кр.-отт. 40,72. Уч.-изд. л. 12,73+0,53 форз. Тираж 15 000 экз. Заказ № 9614 (П—Гз).

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Государственное унитарное предприятие Смоленский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Учебники серии «МГУ — школе»

позволят учащимся получить хорошее

базовое образование и помогут

выработать правильный взгляд на

основы научного знания. Это важно.

Большинство школьных предметов —

фундамент Здания Науки. Лучше сразу

понять, как он устроен, чтобы потом,

при изучении верхних этажей,

не возвращаться к исследованию

фундамента.

Учебники серии «МГУ — школе» пишут

опытные школьные учителя вместе

с профессорами и преподавателями

Московского университета.

Надеюсь, что учеба по этим книгам

принесет школьникам как пользу,

так и удовольствие.

Ректор
Московского
университета
академик

В. Садовничий