**Знакочередующиеся и знакопеременные ряды**.

*Знакочередующимся* называется ряд вида

где для всех .

Для знакочередующихся рядов существует достаточный признак, установленный Лейбницем.

**Теорема 53**.(Признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд  
сходится, если:*

*1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. ;*

*2. Общий член ряда стремится к нулю:* Доказательство. Пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы. Рассмотрим частичную сумму чётного числа членов ряда

Выражение в каждой скобке, согласно первому условию теоремы, положительно. Следовательно, и возрастает с возрастанием номера . С дугой стороны

Отсюда, Таким образом, последовательность , , , …, возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел  
причём .

Рассмотрим частичные суммы нечётного числа членов .Так как , то

Итак, предел частичной суммы равен как при чётном , так и при нечетном , следовательно, искомый ряд сходится.

**Замечание 1.** *Из доказательства теоремы следует, что в этом случае для суммы ряда выполняется условие* .

**Следствие 1**. *Если ряд имеет вид . Т. е. с первым отрицательным числом, то умножив его на (-1) получим описываемый теоремой ряд.*

**Следствие 2**. *Погрешность вычисления суммы знакочередующегося ряда не превосходит по модулю величины первого отбрасываемого числа*.

Доказательство. Действительно, взяв слагаемых, мы отбрасываем так же знакочередующийся ряд (остаток) сумма которого по теореме 53 не превосходит первого числа, т.е. .

**Пример 134**. Исследовать сходимость ряда

Решение. Это знакочередующийся ряд. Проверим выполнимость условий Лейбница. Так как

и

то условия теоремы 53 выполняются и ряд является сходящимся.

**Степенные ряды.**

*Степенным рядом* называется ряд вида  
где некоторые действительные (или комплексные) числа, называемые *коэффициентами ряда*, - действительная переменная.

Придавая переменной определённое числовое значение мы получим числовой ряд который поможет быть сходящимся или расходящимся. Точка называется *точкой сходимости ряда* в первом случае и *точкой расходимости* - во втором. Совокупность всех числовых значений , при которых степенной ряд сходится, называется его *областью сходимости*. Область сходимости степенного ряда содержит всегда точку .

Область сходимости степенного ряда характеризуется следующей теоремой.

**Теорема 54.** (Теорема Абеля) *Если степенной ряд  
сходится при , то он сходится при всех значениях , удовлетворяющих неравенству .*

Доказательство. По условию ряд  
 сходится. Следовательно, по необходимому признаку сходимости   
Отсюда следует, что величина ограничена сверху, т.е. найдется такое число , что для всех выполняется неравенство . Пусть . Тогда  
и, следовательно,  
для всех Т. о. модуль каждого члена ряда  
не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда бесконечно убывающей () геометрической прогрессии. Поэтому по признаку сравнения при ряд сходится.

**Следствие 1.** *Если ряд  
расходится при , то он расходиться и при всех , удовлетворяющих неравенству .*

Доказательство. Действительно, если допустить сходимость ряда в точке для которой , то по теореме Абеля ряд сходится при всех , для которых , и, в частности, в точке , что противоречит условию.

**Интервал и радиус сходимости степенного ряда.**

Из теоремы Абеля следует, что если – точка сходимости степенного ряда, то интервал весь состоит из точек сходимости, а при всех значениях вне этого интервала, ряд расходится. Интервал называемой интервалом сходимости степенного ряда. Положив , интервал сходимости можно записать в виде .

Число называют *радиусом сходимости степенного ряда*. Т. е. – это такое число, что при всех ряд сходится, а при всех ряд расходится. На концах интервала сходимости сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно. Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда  
составим ряд из модулей этого ряда

По признаку Даламбера  
в точке . Ряд сходится, если  
т. е.

Обозначим   
 Аналогично, используя радикальный признак Коши, получим формулу  
 **Замечание 1.** *Если  
 то ряд сходится на всей числовой оси и считают, что* .

**Замечание 2.** *Если степенной ряд содержит не все степени , то интервалом сходимости находят непосредственно применяя признак Даламбера или Коши.*

**Пример 135**. Найти область сходимости степенного ряда

Решение. Найдем интервал сходимости

В нашем случае

Поэтому

Таким образом, степенной ряд сходится для любого и расходится для любого

Исследуем сходимость степенного ряда на границах интервала сходимости. Пусть Тогда

Последний ряд является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница. Пусть Тогда

По признаку сравнения

Ряд является сходящимся, так как его члены меньше соответствующих слагаемых бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является отрезок .