**Признак Даламбера.**

 **Теорема 50.** *Пусть дан ряд
с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел
тогда ряд сходится при и расходится при*

 Доказательство. Так как
то по определению предела выполняется условие

.

 Пусть . Подберём так, что .Обозначим Тогда .Таким образом,
для всех . В результате мы получим следующие соотношения

…………………

………….............

 Т.е. члены ряда меньше соответствующих членов ряда, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем . Но тогда на основании признака сравнения, сходится и ряд

 Пусть теперь . В этом случае
 Отсюда следует, что начиная с некоторого номера , выполняется неравенство

т.е. члены ряда возрастают с увеличением номера . Поэтому
 На основании следствия из необходимого признака сходимости ряд
расходится.

 **Замечание 1**. *Признак Даламбера, как правило, применяют в случаях, когда содержит выражение вида или* .

**Пример130**. Исследовать сходимость ряда

 Решение. Применим признак Даламбера. В нашем случае
 Тогда

 Следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

 **Замечание 2.** Если , то ряд может быть сходящимся или расходящимся. В этом случае необходимы дополнительные исследования другими достаточными признаками.

**Радикальный признак Коши.**

 Для исследования сходимости знакоположительных рядов, содержащих степени иногда удобно пользоваться радикальным признаком.

 **Теорема 51.** *Пусть дан ряд
и существует конечный или бесконечный предел
тогда,ряд сходится прии расходится при.*

 Доказательство. Пусть
 Тогда для некоторых

 Пусть и доказательстве признака Даламбера, получим, что ряд
сходится. Аналогично исследуется случай и для

 **Пример 131.** Пользуясь радикальным признаком Коши, исследовать сходимость числового ряда

 Решение. В нашем случае
 По теореме 51 исходный ряд сходится.

**Интегральный признак Коши.**

 **Теорема 52.** *Если члены знакоположительного ряда
могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке функции , так что то:*

1. *если сходится интеграл
то сходится и ряд*
2. *если интеграл
расходится, то расходится и ряд*

 Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции от значения до значения .

 Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки

 Учитывая геометрический смысл определенного интеграла как площадь криволинейной трапеции (рис. 104), получим что

или

 Отсюда

 Рассмотрим следующие случаи:

 Случай 1. Несобственный интеграл
сходится, т.е.
 Так как

то последовательность частичных сумм возрастает и ограничена сверху числом , поэтому последовательность имеет предел. Значит, ряд
сходится.

 Случай 2. Несобственный интеграл
расходится. Тогда и интеграл
неограниченно возрастает при . А так как

 Следовательно, ряд
расходится. Теорема доказана.

 **Замечание 1**. *Вместо интеграла
можно исследовать интеграл
 где ,так как по замечанию 3 из свойства 2 числовых рядов отбрасывание k первых членов ряда не влияет на его сходимость.*

 **Пример 132**. Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость числового ряда

 Решение. Так как функция

удовлетворяет условиям теоремы 52, то найдем интеграл

 Так как несобственный интеграл сходится, то и исходный ряд является сходящимся.

**Обобщённый гармонический ряд.**

 Ряд
называется *обобщенным гармоническим рядом*. Применим интегральный признак Коши. Пусть
 Тогда

Если
является сходящимся. Если

и обобщённый гармонический ряд расходится.

 При имеем гармонический ряд
 Итак, ряд

 **Пример 133**. Так из числовых рядов

 первый является сходящимся. А второй – расходящимся.