**Признак Даламбера.**

**Теорема 50.** *Пусть дан ряд  
с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел  
тогда ряд сходится при и расходится при*

Доказательство. Так как  
то по определению предела выполняется условие

.

Пусть . Подберём так, что .Обозначим Тогда .Таким образом,  
для всех . В результате мы получим следующие соотношения

…………………

………….............

Т.е. члены ряда меньше соответствующих членов ряда, который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем . Но тогда на основании признака сравнения, сходится и ряд

Пусть теперь . В этом случае  
 Отсюда следует, что начиная с некоторого номера , выполняется неравенство

т.е. члены ряда возрастают с увеличением номера . Поэтому  
 На основании следствия из необходимого признака сходимости ряд  
расходится.

**Замечание 1**. *Признак Даламбера, как правило, применяют в случаях, когда содержит выражение вида или* .

**Пример130**. Исследовать сходимость ряда

Решение. Применим признак Даламбера. В нашем случае  
 Тогда

Следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

**Замечание 2.** Если , то ряд может быть сходящимся или расходящимся. В этом случае необходимы дополнительные исследования другими достаточными признаками.

**Радикальный признак Коши.**

Для исследования сходимости знакоположительных рядов, содержащих степени иногда удобно пользоваться радикальным признаком.

**Теорема 51.** *Пусть дан ряд  
и существует конечный или бесконечный предел  
тогда,ряд сходится прии расходится при.*

Доказательство. Пусть  
 Тогда для некоторых

Пусть и доказательстве признака Даламбера, получим, что ряд   
сходится. Аналогично исследуется случай и для

**Пример 131.** Пользуясь радикальным признаком Коши, исследовать сходимость числового ряда

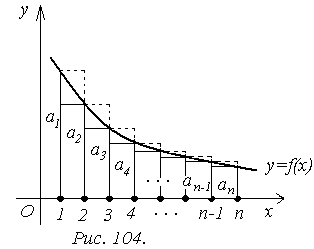
Решение. В нашем случае  
 По теореме 51 исходный ряд сходится.

**Интегральный признак Коши.**

**Теорема 52.** *Если члены знакоположительного ряда  
могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке функции , так что то:*

1. *если сходится интеграл  
   то сходится и ряд*
2. *если интеграл  
   расходится, то расходится и ряд*

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции от значения до значения .



Построим входящие и выходящие прямоугольники, основаниями которых служат отрезки

Учитывая геометрический смысл определенного интеграла как площадь криволинейной трапеции (рис. 104), получим что

или

Отсюда

Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1. Несобственный интеграл  
сходится, т.е.   
 Так как

то последовательность частичных сумм возрастает и ограничена сверху числом , поэтому последовательность имеет предел. Значит, ряд  
сходится.

Случай 2. Несобственный интеграл  
расходится. Тогда и интеграл  
неограниченно возрастает при . А так как

Следовательно, ряд  
расходится. Теорема доказана.

**Замечание 1**. *Вместо интеграла  
можно исследовать интеграл  
 где ,так как по замечанию 3 из свойства 2 числовых рядов отбрасывание k первых членов ряда не влияет на его сходимость.*

**Пример 132**. Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость числового ряда

Решение. Так как функция

удовлетворяет условиям теоремы 52, то найдем интеграл

Так как несобственный интеграл сходится, то и исходный ряд является сходящимся.

**Обобщённый гармонический ряд.**

Ряд  
называется *обобщенным гармоническим рядом*. Применим интегральный признак Коши. Пусть  
 Тогда

Если   
является сходящимся. Если

и обобщённый гармонический ряд расходится.

При имеем гармонический ряд  
 Итак, ряд

**Пример 133**. Так из числовых рядов

первый является сходящимся. А второй – расходящимся.