**Числовые ряды.**

*Числовым рядом* называют выражение вида

где действительные или комплексные числа.

**Пример125**. Следующие суммы являются примерами числовых рядов

;

где Третий ряд из приведенных примеровназывается *гармоническим*.

Обозначим через

………………………

Выражение называется *частичной суммой числового ряда*.

Если существует конечный предел   
 последовательности частичных сумм ряда, то этот предел называется *суммой ряда* и обозначается

Ряд в этом случае называется *сходящимся*.

Если такого предела не существует, то и ряд называется *расходящимся.* Так в примерах рядов первые три ряда являются расходящимися, последние два – сходящимися. Примерами сходящихся рядов служат бесконечно убывающие геометрические прогрессии. Их сумма находится по формуле  
Так в четвертом примере  
и поэтому

**Свойства числовых рядов.**

1) *Если ряд   
сходится и его сумма равна , то ряд  
где - некоторое произвольное число, также сходится и его сумма равна .*

*Если же исходный ряд расходится и, то и ряд  
также расходится*.

2) *Если сходятся числовые ряды*   
*и их суммы равны соответственно , то сходятся и ряды  
и суммы их равны*

**Замечание 1.** *Из свойства 2 вытекает что сумма (разность) сходящегося и расходящегося ряда всегда есть расходящийся ряд*.

**Замечание 2.** *Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся так и расходящимся рядами.*

**Замечание 3.** *Если к ряду  
прибавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд и исходный сходятся или расходятся одновременно.*

Пусть дан ряд

*.*

Отбросим от этого ряда первые членов, в итоге получим степенной ряд вида . Выражение - называется *n - ым остатком исходного ряда*.

Основная задача исследования числовых рядов заключается в выяснении их сходимости или расходимости. Во многих случаях нахождение предела частичных сумм  
является не простой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливаются специальные признаки сходимости. Первым изниx является необходимый признак сходимости.

**Необходимый признак сходимости.**

**Теорема 47**. *Если ряд*   
*сходится, то*

Доказательство. Пусть исходный ряд сходится и  
тогда и  
 Так как , то

**Следствие 1**. (Достаточное условие расходимости ряда). *Ели предел общего члена ряда не равен нулю*   
 *то ряд расходится.*

Действительно, если бы ряд сходился, то выполнялось бы условие теоремы, что противоречит допущению следствия.

**Пример 126.** Проверить необходимое условие сходимости следующего числового ряда

Решение. Числители и знаменатели членов ряда образуют арифметические прогрессии с разностью , поэтому

Отсюда

Необходимое условие сходимости ряда не выполняется и по следствию 1 исходный ряд расходится.

Пример гармонического ряда показывает, что из выполнения необходимого признака сходимости не всегда следует сходимость числового ряда. Таким образом этого признака недостаточно для исследования сходимости числовых рядов. Поэтому сходимость рядов во многих случаях определяется с помощью других (достаточных) признаков.

**Достаточные признаки сходимости числовых рядов.**

**Признак сравнения.**

**Теорема 48.** *Пусть даны два знакоположительных ряда*  
 *Если для всех выполняется неравенство , то из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого ряда. Из расходимости первого ряда вытекает расходимость второго ряда.*

Доказательство. Пусть и соответствующие частичные суммы рядов. Так как , то . Предположим, что ряд   
сходится и его сумма равна . Тогда

Так как члены первого ряда положительны, то . Таким образом, последовательность , , …, монотонно возрастает и ограничена сверху числом . По признаку существования предела, последовательность имеет придел

т.е. первый ряд сходится.

Пусть теперь ряд  
расходится. Так как члены ряда неотрицательны, то  
 Тогда с учетом того, что имеем

**Замечание**. *Теорема справедлива и когда неравенство выполняется не для всех членов рядов, а начиная с некоторого номера . Это вытекает из свойства 3) числовых рядов*.

**Пример 127.** Пользуясь признаком сравнения, исследовать сходимость числового ряда

Решение. Сравним ряд с бесконечно убывающей геометрической прогрессией  
ряд которой является сходящимся и его сумма равна  
В нашем случае

Таким образом, каждый член нашего ряда, меньше чем соответствующий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии . По первому условию признака сравнения исходный ряд является сходящимся.

**Пример 128.** Пользуясь признаком сравнения, исследовать сходимость числового ряда

Решение. В нашем случае

Таким образом, каждый член нашего ряда, начиная со второго, больше чем соответствующий член гармонического ряда

который является расходящимся. По второму условию признака сравнения исходный ряд так же является расходящимся.

**Теорема 49**. (Предельный признак сравнения) *Пусть даны два знакоположительных ряда  
 Если существует отличный от нуля, предел  
то ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. По определению предела последовательности, начиная с некоторого выполняется неравенство  
или

или

или

Если ряд  
сходится, то из левого неравенства вытекает, что ряд  
так же сходится. По свойству 1) числовых рядов, ряд   
так же сходится.

Если ряд  
расходится, то из правого неравенства и теоремы 48 вытекает, что и ряд   
так же расходится. Аналогично вытекает сходимость(расходимость) первого ряда из сходимости (расходимости) второго ряда.

**Пример 129.** Исследовать сходимость числового ряда

Решение. Применим предельный признак сравнения.

По теореме 49 исходный ряд расходится как сравнимый с гармоническим рядом.