**Линейные, однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Так называются дифференциальные уравнения вида , где – некоторые числа.

**Лемма 1**. Пусть функции и являются решениями однородного уравнения . Тогда функция , для любых чисел и , так же является решением этого уравнения.

Доказательство. Подставим в исходное уравнение функцию .

Будем искать решения этого уравнения в виде линейно независимых функций вида , где - некоторое число, – произвольная константа.

Найдем производные

, .

Подставим их в исходное уравнение

После преобразования, будем иметь

или

Здесь возможны следующие случаи

Случай 1. Дискриминант квадратного уравнения и существуют два корня ; . Тогда решениями уравнения будут функции

Случай 2. . Покажем, что в этом случае решениями будут функции Действительно,

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

Разобьём выражение на 2 части

Но и, кроме того, , поэтому , и

Таким образом, функция так же является решением дифференциального уравнения и его общее решение можно записать в виде

Случай 3. . В этом случае частные решения будут иметь вид

По формуле Эйлера

Поэтому

,

*.*

Заметим, что

Тогда функции и также будут являться решениями нашего уравнения и общее решение примет вид

Во всех случаях - произвольные числа (константы).

**Пример 119.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Решение. Составим характеристическое уравнение Решая его, получим . По первому случаю общее решение будет иметь вид .

**Пример 120.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Решение. Составим характеристическое уравнение Решая его, получим . По второму случаю общее решение будет иметь вид .

**Пример 121.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Решение. Составим характеристическое уравнение Решая его, получим . По третьему случаю общее решение будет иметь вид .

**Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

Так называются уравнения вида , где и - некоторые числа, а - некоторая функция от переменной .

В общем случае решение этого уравнения является достаточно сложным, поэтому рассмотрим случаи, когда правая часть имеет некоторый специальный вид.

Общее решение данного уравнения будем искать в виде , где – общее решение соответствующего однородного уравнения

– частное решение исходного неоднородного уравнения. Функцию будем искать в виде, который зависит от функции . Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1**.** , которое действительное число,

- многочлен степени *n.* Таким образом, исходное уравнение имеет вид

В этом случае частное решение имеет вид , где – число, равное кратности как корня характеристического уравнения

(если не является его корнем, то считают , - некоторый многочлен степени *n*, коэффициенты которого определяются путём подстановки функции в исходное уравнение.

Случай 2. , где и – некоторые многочлены степеней соответственно . В этом случаи частное решение записывается в виде

,

где *r* - число равное кратности как корня характеристического уравнения . Если не является корнем этого уравнения, то полагают , , – многочлены степени *t* от *x*, где *t* - наивысшая степень многочленов , т. е.. Коэффициенты многочленов и подбираются подстановкой в исходное уравнение.

**Пример 122.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами .

Решение. Общее решение уравнения будем искать в виде , где - общее решение соответствующего однородного уравнения

.

В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид и

поэтому

*.*

Частное решение будем искать в виде . Коэффициенты найдем, подставив в исходное уравнение. Для этого найдем производные

Подставив функции в исходное уравнение, получим

После упрощения равенство будет иметь вид

Приравняв коэффициенты при функциях и , получим систему

,

решив которую, найдем

Таким образом

и общее решение уравнения имеет вид

**Пример 123.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами .

Решение. Общее решение уравнения будем искать в виде , где - общее решение соответствующего однородного уравнения

.

В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид и

поэтому

*.*

Частное решение будем искать в виде . Параметр найдем, подставив в исходное уравнение. Для этого найдем производные

Подставив функции в исходное уравнение, получим

После упрощения равенство будет иметь вид

Следовательно,

Таким образом

И общее решение уравнения имеет вид

**Пример 124.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

.

Решение. Общее решение уравнения будем искать в виде , где - общее решение соответствующего однородного уравнения

.

В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид и

поэтому

*.*

Частное решение будем искать в виде . Коэффициенты найдем, подставив в исходное уравнение. Для этого найдем производные

Подставив функции в исходное уравнение, получим

После преобразования, равенство будет иметь вид

Приравняв коэффициенты слева и справа этого равенства при и свободных членах, получим систему

,

решая которую, найдем Таким образом

Общее решение уравнения имеет вид