**Линейные, однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

 Так называются дифференциальные уравнения вида , где – некоторые числа.

 **Лемма 1**. Пусть функции и являются решениями однородного уравнения . Тогда функция , для любых чисел и , так же является решением этого уравнения.

 Доказательство. Подставим в исходное уравнение функцию .

 Будем искать решения этого уравнения в виде линейно независимых функций вида , где - некоторое число, – произвольная константа.

 Найдем производные

, .

 Подставим их в исходное уравнение

 После преобразования, будем иметь

или

 Здесь возможны следующие случаи

Случай 1. Дискриминант квадратного уравнения и существуют два корня ; . Тогда решениями уравнения будут функции

 Случай 2. . Покажем, что в этом случае решениями будут функции Действительно,

 Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

 Разобьём выражение на 2 части

Но и, кроме того, , поэтому , и

 Таким образом, функция так же является решением дифференциального уравнения и его общее решение можно записать в виде

 Случай 3. . В этом случае частные решения будут иметь вид

 По формуле Эйлера

Поэтому

,

*.*

 Заметим, что

 Тогда функции и также будут являться решениями нашего уравнения и общее решение примет вид

 Во всех случаях - произвольные числа (константы).

 **Пример 119.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

 Решение. Составим характеристическое уравнение Решая его, получим . По первому случаю общее решение будет иметь вид .

 **Пример 120.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

 Решение. Составим характеристическое уравнение Решая его, получим . По второму случаю общее решение будет иметь вид .

 **Пример 121.** Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

 Решение. Составим характеристическое уравнение Решая его, получим . По третьему случаю общее решение будет иметь вид .

**Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

 Так называются уравнения вида , где и - некоторые числа, а - некоторая функция от переменной .

 В общем случае решение этого уравнения является достаточно сложным, поэтому рассмотрим случаи, когда правая часть имеет некоторый специальный вид.

 Общее решение данного уравнения будем искать в виде , где – общее решение соответствующего однородного уравнения

 – частное решение исходного неоднородного уравнения. Функцию будем искать в виде, который зависит от функции . Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1**.** , которое действительное число,

 - многочлен степени *n.* Таким образом, исходное уравнение имеет вид

 В этом случае частное решение имеет вид , где – число, равное кратности как корня характеристического уравнения

(если не является его корнем, то считают , - некоторый многочлен степени *n*, коэффициенты которого определяются путём подстановки функции в исходное уравнение.

Случай 2. , где и – некоторые многочлены степеней соответственно . В этом случаи частное решение записывается в виде

,

где *r* - число равное кратности как корня характеристического уравнения . Если не является корнем этого уравнения, то полагают , , – многочлены степени *t* от *x*, где *t* - наивысшая степень многочленов , т. е.. Коэффициенты многочленов и подбираются подстановкой в исходное уравнение.

 **Пример 122.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами .

 Решение. Общее решение уравнения будем искать в виде , где - общее решение соответствующего однородного уравнения

.

В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид и

поэтому

*.*

 Частное решение будем искать в виде . Коэффициенты найдем, подставив в исходное уравнение. Для этого найдем производные

Подставив функции в исходное уравнение, получим

После упрощения равенство будет иметь вид

 Приравняв коэффициенты при функциях и , получим систему

,

решив которую, найдем

 Таким образом

и общее решение уравнения имеет вид

 **Пример 123.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами .

 Решение. Общее решение уравнения будем искать в виде , где - общее решение соответствующего однородного уравнения

.

 В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид и

поэтому

*.*

 Частное решение будем искать в виде . Параметр найдем, подставив в исходное уравнение. Для этого найдем производные

 Подставив функции в исходное уравнение, получим

 После упрощения равенство будет иметь вид

 Следовательно,

 Таким образом

 И общее решение уравнения имеет вид

 **Пример 124.** Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

.

 Решение. Общее решение уравнения будем искать в виде , где - общее решение соответствующего однородного уравнения

.

 В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид и

поэтому

*.*

 Частное решение будем искать в виде . Коэффициенты найдем, подставив в исходное уравнение. Для этого найдем производные

 Подставив функции в исходное уравнение, получим

 После преобразования, равенство будет иметь вид

 Приравняв коэффициенты слева и справа этого равенства при и свободных членах, получим систему

,

решая которую, найдем Таким образом

 Общее решение уравнения имеет вид