**Уравнения в полных дифференциалах.**

Уравнение вида называется уравнением полных дифференциалов, если существует такая функция , что  
 В этом случае дифференциальное уравнение можно записать в виде , а его общий интеграл имеет вид .

В общем случае решение дифференциальных уравнений полных дифференциалов основано на следующей теореме

**Теорема 46**. *Для того чтобы выражение, где функции , и их частные производные  
непрерывны в некоторой области , было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия*

Доказательство. Необходимость. Пусть – полный дифференциал, т. е.

*.* Так както

Дифференцируя последние равенства по и по соответственно, получим

Так как

то получаем требуемое равенство   
 Достаточность. Пусть выполняется условие  
 Покажем, что существует такая функция , для которой выполняется условие  
 Тогда Проинтегрируем первое равенство

Функция зависит или только от или является числом. Продифференцируем теперь это равенство по переменной

Отсюда   
 Левая часть этого равенства зависит только от функции . Покажем, что и правая часть зависит только от переменной . Продифференцируем правую часть равенства по переменной

Таким образом, левая часть равенства для зависит только от переменной и из этого равенства находим функцию .

где – некоторая константа.

Подставим значение в выражение , получим

и тогда

**Пример 114**. Решить дифференциальное уравнение первого порядка

Решение. Обозначим , тогда

Таким образом дифференциальное уравнения является уравнением в полных дифференциалах. Из равенства

находим функцию

где функция зависит только от переменной или является константой.

Так как по условию

то продифференцировав выражение для по переменной , получим с другой стороны

Приравнивая правые части последних равенств, получим .

Отсюда

Подставим найденную функцию в выражение для , получим общее решение исходного дифференциального уравнения

**Интегрирующий множитель.**

Если в уравнении , выполнены условия  
то оно является уравнением в полных дифференциалах. Если это условие не выполняется, то уравнение таковым не является, но в некоторых случаях умножением его на некоторую функцию можно получить уравнение в полных дифференциалах. В этом случае функцию называют *интегрирующим множителем*.

Пусть дано уравнение . Чтобы оно являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия

или

Перегруппировав его, получим

Для нахождения функции необходимо проинтегрировать это равенство. В общем случае это может оказаться сложной задачей. Нахождение интегрирующего множителя можно упростить, если допустить существование функции t зависящей только от одной переменной или . Предположим например, что , тогда  
и уравнение для нахождения примет вид

Интегрируя это равенство, мы находим функцию . При этом выражение

должно зависеть только от переменной .

Аналогично, если предположить, что зависит только от переменной , получим, что

так же должно зависеть только от переменной .

**Пример 115**. Решить дифференциальное уравнение первого порядка

Решение. Обозначим , тогда

Таким образом, дифференциальное уравнения не является уравнением в полных дифференциалах. Так как

Не зависит от переменной , то будем искать интегрирующий множитель , зависящий только от переменной . Из равенства

получим

Таким образом, уравнение , будет являться уравнением в полных дифференциалах. Так как , то

Продифференцировав равенство по , получим . По условию . Приравнивая эти равенства, найдем функцию . Так как , то

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

**Уравнения, допускающие понижения порядков.**

Одним из методов решения дифференциальных уравнений высших порядков является понижение порядка. Существуют три основных типа дифференциальных уравнений, допускающих такое понижение.

1. Уравнение вида . Порядок этого уравнения можно понизить, обозначив . В результате получим уравнение , порядок которого на 1 меньше порядка исходного.

**Пример 116.** Решить дифференциальное уравнение

Решение. Обозначим , тогда исходное уравнение примет вид . Сделав ещё одну подстановку , получим уравнение , решая которое, найдем

Возвращаясь к переменной , получим уравнение

.

Решая которое, найдем

.

Отсюда

2.Уравнение вида. Подстановка позволяет получить уравнение более низкого порядка.

**Пример 117.** Решить дифференциальное уравнение

Решение. Обозначим , тогда исходное уравнение примет вид . Получаем уравнение с разделяющимися переменными. Отсюда

Интегрируя это уравнение, получим

Следовательно,

или

3.Уравнение вида. Подстановка так же позволяет получить уравнение более низкого порядка, чем исходное. Причем в этом случае

**Пример 118.** Решить дифференциальное уравнение

Решение. Обозначим . Тогда исходное уравнение примет вид . Получим одно решение вида , или Отсюда . Второе решение следует из уравнения с разделяющимися переменными .

Отсюда

Таким образом

Отсюда

или

В итоге получаем общий интеграл Выразив , окончательно получим