**Дифференциальные уравнения (ДУ).**

**Общие понятия.**

*Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную, некоторую функцию и её производные, т. е. уравнение вида

Например, уравнение является дифференциальным уравнением 1 - го порядка, а уравнение - дифференциальным уравнением 3 - го порядка.

*Решением уравнения* называется функция, которая при подстановке в исходное уравнение, обращает его в тождество.

**Пример 107**. Записать решения ДУ 1 – го порядка и .

Решение. Для первого порядка функция очевидно будет являться решением. Но решениями будут так же функции , , …, , где – некоторая произвольная константа. Для второго уравнения общим решением будут функции вида .

Если неизвестная функция в ДУ зависит только от одной переменной то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. В противном случае – *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Наивысший порядок производной, входящий в ДУ, называется *порядком* этого уравнения.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*, а график решения ДУ - *интегральной кривой*.

В общем случае любое ДУ может иметь бесконечное множество решений, отличающихся друг от друга постоянными величинами. Чтобы из этого множества выделить одно решение, необходимо ввести дополни дополнительные условия.

Условие, при котором функция должна быть равной в некоторой точке заданному числу, т. е. называется *начальным условием*.

Для уравнения - ого порядка такие условия, как правило, имеют вид

Они задают значения функции и её производных в некоторой точке (точках). Такие условия называются *начальными*, а задача, у которой даны такиеначальные условия, называется *задачей Коши*.

**Пример 108.** Решить задачу Коши для уравнения

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид Подставим в решение значения переменных , получим равенство , из которого находим . Отсюда решение Задачи Коши для данного уравнения имеет вид .

**Уравнения с разделяющимися переменными.**

Простейшим ДУ первого порядка является уравнение вида

Перенесем слагаемое с в левую часть и возьмем интегралы (проинтегрируем) от обеих частей

=

Выразим, если это возможно, из последнего равенства переменную и запишем решение уравнения в виде .

В общем случае уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

Коэффициенты при и представляют собой произведения двух функций, одна из которых зависит только от , другая – только от .

Решение таких уравнений осуществляется следующим образом:

1. переносят все выражения с вправо, а с – влево

2) делают так, чтобы при функции не содержали переменную , а при – переменную . Обычно это достигается делением обеих частей на выражение на

В результате получают уравнение с разделенными переменными.

3) Интегрируют его обе части

Отсюда получают общий интеграл , из которого затем выражают (если это возможно) функцию .

**Замечание 1**. *При делении обеих частей уравнения на выражение*

*могут быть потеряны решения дифференциального уравнения вида =0. Такие решения называются особыми и исследуются отдельно.*

**Замечание 2**. *Уравнения вида могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными, если заменить производную функции отношением дифференциалов*

*затем домножить обе части на , в результате получается уравнение*

*отсюда получают уравнение с разделенными переменными вида*

**Пример 109**. Записать общее решение уравнения

Решение. Данное ДУ является уравнением с разделяющимися переменными поэтому запишем его в виде

Разделим обе части на

Интегрируем

Проверим особые решения:

Ответ.. Особые решения , .

**Пример 110**. Записать общее решение уравнения

Решение. Данное ДУ является уравнением с разделяющимися переменными поэтому запишем его в виде

Интегрируем

Ответ. Общее решение имеет вид

Особое решение .

**Уравнение вида**

Уравнение вида , где – некоторые числа, путем замены сводится к ДУ с разделяющимися переменными.

Действительно

или

Интегрируя его и делая затем обратную замену получим общий интеграл исходного уравнения.

**Пример 111**. Записать общее решение уравнения

Решение. Сделаем подстановку . Тогда

Или  
 Интегрируем

Делаем обратную подстановку и выражаем

**Однородные дифференциальные уравнения.**

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и однородные уравнения.

Функция называется *однородной функцией - ого порядка*, если при умножении каждого аргумента и на множитель *λ* вся функция умножается на т.е.

Например, функция является однородной функцией первого порядка, так как

Функция является однородной функцией второго порядка, так как

*Однородным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

где – однородные функции одного и того же порядка.

Запишем однородное уравнение в виде:

Положим  
 получим

Обозначим

В итоге получаем уравнение с разделяющимися переменными

**Пример 112**. Решить уравнение

Решение. Данное уравнение является однородным ДУ второго порядка. Сделаем подстановку . Тогда

Интегрируя последнее равенство, получим

или окончательно

**Линейные уравнения первого порядка.**

Так называется уравнение вида

где – некоторые функции от .

Решение уравнения функцию представим в виде произведения двух функций . Тогда . Подставляем в исходное уравнение

Подберём функцию таким образом, чтобы .

Решив это уравнение с разделяющимися переменными, найдем функцию

Подставим найденное значение в исходное уравнение

В результате, снова получим ДУ с разделяющимися переменными, решив которое, найдём функцию Тогда общее решение исходного уравнения будет иметь вид

**Пример 113**. Решить уравнение

Решение. Данное уравнение является линейным ДУ первого порядка. Сделаем замену . Тогда и

Подберем функцию так, что бы . Решая это уравнение, найдем такое

Получаем

Подставим это значение в исходное уравнение, получим

Интегрируя последнее равенство, получим

Общее решение исходного уравнения имеет вид

**Уравнения Бернулли.**

Так называются уравнения вида

где . При мы получаем линейное дифференциальное уравнение, а при - ДУ с разделяющимися переменными.

Для решения уравнения, разделим его на , получим

Сделаем подстановку , получим

Отсюда

Подставим в исходное уравнение

в результате получили линейное уравнение первого порядка, решив которое найдём , а затем и .