**Определённый интеграл.**

**Общие понятия.**

 Пусть функция определена на отрезке , где . Разобьём отрезок точками

на частичных отрезков ] ,

 каждом частичном отрезке выберем произвольную точку и вычислим значение функции в этой точке (рис. 95). Обозначим через

|

длину – го интервала и рассмотрим сумму
Эта сумма называется *частичной интегральной суммой*.

 Пусть
 Найдем предел частичной интегральной суммы при

 Если предел такой частичной интегральной суммы существует, то он называется *определённым интегралом функции* в пределах от до и обозначается

 Числа и называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования* – *подынтегральной функцией*, выражение – *подынтегральным выражением*, отрезок - *областью интегрирования*,

 *– переменной интегрирования*.

 На вопрос о существовании определенного интеграла дает ответ следующая теорема

 **Теорема 44**. (Теорема Коши**)** *Если функция непрерывна на отрезке , то определённый интеграл от этой функции*

*существует* (без доказательства).

 Из непосредственного построения определённого интеграла вытекают следующие его свойства:

**Формула Ньютона – Лейбница.**

 **Теорема 45.** *Если функция непрерывна на отрезке и*

 *– какая - либо её первообразная на этом отрезке, то*

 Доказательство. Пусть

 Рассмотрим тождество

 Применим к каждой разности теорему Лагранжа (лекция 11)

 для некоторого

 Тогда

 Таким образом

 Переходя в этом равенстве к пределу, получим

 или

 **Пример 96.** Вычислить определенный интеграл

 Решение.

**Основные свойства определённого интеграла**

 1. Если – постоянное число и интегрируема на , то

 Доказательство**.**

 2. *Если и интегрируемы на отрезке функции, то их сумма так же интегрируема на этом отрезке и*

Доказательство**.** По определению интеграла

Доказательство. По формуле Ньютона - Лейбница

4.*Если функция интегрируема на отрезке и точка*

Доказательство. Выполним разбиение отрезка таким образом, что бы точка совпала с одним из концов отрезка разбиения. Тогда

 **Замечание 1.** *Свойство справедливо при любом расположении точек* *считая, что интегрируема на любом из получаемых отрезков*.

 Так, если , то

 Отсюда

5. **(**Теорема о среднем) *Если функция непрерывна на отрезке , то существует такая точка , что*

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

 По теореме Лагранжа (лекция 12)

для некоторой точки

 6.*Если функция сохраняет знак на отрезке , где , то интеграл
имеет тот же знак что и функция*

 Доказательство. По теореме о среднем

 Так как по условию , то и знак определённого интеграла совпадает со знаком .

 7. *Если для двух непрерывных функций на отрезке , справедливо неравенство то и*

Доказательство. Так как на отрезке , то по свойству 6

8. **(**Оценка интеграла) *Пусть на отрезке m и M - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции Тогда*

Доказательство. Так как на отрезке выполняются условия

, то по свойству 7 справедливо неравенство

 Но тогда

9.*Если функция непрерывна на отрезке , то*

Доказательство. Так как выполняется условие

то

следовательно

Доказательство. По формуле Ньютона – Лейбница

**Несобственные интегралы.**

 Если промежуток интегрирования конечны, а подынтегральная функция непрерывна на нём, то определенный интеграл от этой функции
называется *собственным интегралом*. В противном случае интеграл называется *несобственным*.

**Несобственные интегралы первого рода.**

 Пусть функция непрерывна на промежутке . Если существует предел
то его называют *несобственным интегралом 1 рода* и обозначают

 В этом случае говорят, что интеграл
*сходится*. Если же предела не существует, то интеграл называется *расходящимся*. Точно также определённый интеграл

 Интеграл с двумя бесконечными пределами вычисляется следующим образом

где - некоторое произвольное число.

 **Пример 97.** Вычислить несобственный интеграл

 Решение.

**Несобственные интегралы второго рода**

 Пусть функция непрерывна на отрезке и имеет бесконечный разрыв при т.е.

 Если существует конечный предел

то его называют *несобственным интегралом второго рода* и записывают это как интеграл

 Если предел конечен, то интеграл называется *сходящимся*, в противном случае говорят, что интеграл *расходится*.

 Если функция имеет разрыв второго рода в точке , то интеграл определяется следующим образом

 Если функция непрерывна на отрезке и имеет разрыв второго рода в некоторой точке , то

 **Пример 98.** Вычислить несобственный интеграл второго рода

 Решение.