**Интегрирование тригонометрических функций.**

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования тригонометрических выражений.

**Интегралы вида** .

Вычисление интегралов вида , где - некоторая рациональная функция, осуществляется с помощью универсальной подстановки

Тогда

Подставив всё в исходный интеграл, получим интеграл от рациональной функции.

**Пример 92.** Вычислить интеграл

Решение.

**Интегралы вида** .

Для нахождения интегралов такого вида используются следующие методы:

1) подстановка , если - целое положительное нечётное число;

2) подстановка , если - целое положительное нечётное число;

3) если и - целые неотрицательные чётные числа, то используются формулы понижения степени

4) eсли - чётное отрицательное целое число, то используется подстановка . Тогда

В результате получится интеграл от рациональной функции.

**Пример 93.** Вычислить интеграл

Решение. Так как - целое положительное нечётное число, то используем подстановку . Тогда

В результате получим

Остальные типы тригонометрических выражений сводятся к данным выражениям с помощью формул:

**Интегрирование иррациональных выражений**

**Интегралы вида**

Такие интегралы называются *неопределёнными интегралами от квадратичных иррациональностей*. Их вычисляют, выделив под корнем полный квадрат и обозначая его затем за *t*.

**Пример 94.** Вычислить интеграл

Решение.

**Интеграл типа**

где - некоторый многочлен - ой степени.  
  
 Интегралы такого вида вычисляют с помощью рекуррентной формулы

где - многочлен степени , коэффициенты которого (а также число λ) определяются с помощью метода неопределённых коэффициентов, предварительно продифференцировав обе части равенства.

**Интегралы типа**

где - некоторая рациональная функция.

Интегралы такого вида приводятся к интегралам вида

с помощью следующих подстановок:

в первом случае

во втором случае

в третьем случае

**Интегрирование дифференциального бинома**

Как показал русский математик Чебышев П.А. такие интегралы берутся лишь в случаях, когда целым является одно из следующих чисел

1. Если целым является , то применяется подстановка   
где – наименьшее общее кратное знаменателей дробей и .

2. Если – целое число, то применяется подстановка  
где - знаменатель дроби .

3. Если – целое число, то применяется подстановка   
где  - знаменатель дроби .

Во всех остальных случаях интегралы такого вида не выражаются через известные элементарные функции, т. е являются *неберущимися.*

**Пример 95.** Представить интеграл

в виде интеграла от рациональной дроби.

Решение. Запишем интеграл в виде дифференциального бинома

В нашем случае

Поэтому целым является выражение

Применяем подстановку Отсюда

Подставим эти выражения в интеграл

В результате получили интеграл от рациональной дроби, который вычисляется разложением на сумму простейших дробей и их последующим интегрированием.

**Неберущиеся интегралы.**

*Неберущимися* являются также интегралы: