# Интегрирование рациональных выражений.

**Интегрирование по частям.**

Пусть – функции, имеющие непрерывные производные. Так как , то

Интегрируем обе части выражения

Отсюда получаем формулу интегрирования по частям

Формула позволяет свести вычисление интеграла к вычислению интеграла , который может оказаться более простым.

**Пример 85.** Вычислить интеграл

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

**Пример 86.** Вычислить интеграл  
 Решение. Применим формулу интегрирования по частям

Укажем типы интегралов, которые удобно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям:

где – некоторое число. В этом случае полагают .

За обычно полагают функции ,

В таких интегралах за *u* обычно полагается .

Как правило, в общем случае в качестве выбирается такая функция, производная которой проще, чем сама функция.

**Пример 87.** Вычислить интеграл  
 Решение. Применим формулу интегрирования по частям, обозначив

**Интегрирование рациональных дробей.**

Функция вида

где - натуральное число - некоторые числа, называется многочленом - й степени.

**Теорема 42.** (теорема Безу). *Если - корень многочлена , то где - многочлен степени . В этом случае многочлен делится на без остатка*. (Без доказательства).

**Теорема 43.** *Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е.*

где

**Пример 88**.

Если корни многочлена

, то из теоремы Безу следует разложение

**Дробно-рациональная функция**

*Дробно - рациональной функцией* *или рациональной дробью* называется функция, равная отношению двух многочленов  
где - многочлен степени , - многочлен в степени .

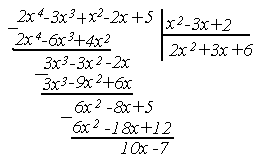
Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. . В противном случае она называется *неправильной.*

Всякую неправильную дробь   
путём деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби

**Пример 89.** Представить рациональную дробь

в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Решение. Разделим (уголком) числитель дроби на знаменатель и выделим целую часть, которая и будет искомым многочленом



Таким образом

Правильные рациональные дроби вида

где действительные числа, называются *простейшими рациональными дробями.*

**Теорема 44***.* *Всякую правильную рациональную дробь  
знаменатель которой разлагается на множители*

*можно единственным образом представить в виде суммы простейших дробей вида*

**Пример 90.** Представить разложение правильной рациональной дроби

в виде суммы простейших дробей.

Решение. В соответствии с теоремой 44 имеем

Числа можно подобрать методом неопределенных коэффициентов, либо давая различные значения переменной .

**Пример 91.** Разложить правильную рациональную дробь

в виде суммы простейших дробей.

Решение. В соответствии с теоремой 44 имеем

Найдем коэффициенты . Для этого приведем правую часть к общему знаменателю

Сравнивая левые и правые числители равных дробей, получим

.

Раскроем в правой части скобки

или

Приравнивая коэффициенты слева и справа при равных степенях , получим систему уравнений

Решая эту систему, например, с помощью подстановок (методом Гаусса), получим . В результате получаем разложение

**Интегрирование простейших дробей.**

Так как в итоге любая рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей, рассмотрим методы их интегрирования.

Этот тип интегрируется аналогично как и третий с помощью выделения полного квадрата и последующей подстановки