# Неопределённый интеграл.

**Основные понятия.**

Функци*я*  называется *первообразной* *для функции* на множестве , если для любого . Так как , то называют также *первообразной для выражения* .

**Пример 75.** Для функции первообразной будет функция , так как . Но , ,

, поэтому функции , , , где – любое число (константа) так же будут первообразными для функции .

Это оказывается верным для любых функций и их первообразных.

**Теорема 41**. *Множество всех первообразных для функции задаётся формулой , где – какая - либо первообразная функции , а - произвольная постоянная*.

Доказательство. Пусть и – некоторые первообразные для функции , тогда, следовательно или .

**Неопределённый интеграл.**

Пусть функция задана в некоторой области , тогда неопределённым интегралом от функции называется множество её всех первообразных. Т.е. , где .

Функция называется *подынтегральной функцией*, а выражение - *подынтегральным выражением*, - *переменной интегрирования*.

Операция нахождения неопределённого интеграла называется *интегрированием.*

**Пример 76.** , , ,

**Свойства неопределённых интегралов.**

1) *Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции*

Доказательство..

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется обратным дифференцированием.

2) *Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению*

Доказательство.

3)*Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной*

Доказательство.

4) *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*

Доказательство.

5) *Неопределённый интеграл от суммы двух непрерывных функций равен сумме интегралов от каждого слагаемого*

Доказательство*. П*усть тогда

6) *Инвариантность формулы интегрирования:*

*Если , где -произвольная функция, имеющая непрерывную производную.*

Доказательство.Пусть , где непрерывная дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию

. Тогда . Отсюда

Таким образом, формула для неопределённого интеграла остаётся справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от неё, имеющей непрерывную производную. Например

# Таблица основных интегралов.

Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, можно получить таблицу основных интегралов.

Дополнительные формулы интегрирования.

Такие интегралы называются *табличными*. Все методы интегрирования сводятся к указанию приёмов, приводящих данный интеграл к табличному. Поэтому их необходимо знать наизусть и уметь узнавать.

**Пример 77.** Вычислить интеграл

Решение. Представим наш интеграл, в соответствии с свойством 5), в виде суммы более простых интегралов и сведем их к табличным

**Пример 78.** Вычислить интеграл  
 Решение. Разделим почленно числитель на знаменатель и представим интеграл в виде суммы двух интегралов

**Пример 79.** Вычислить интеграл

Решение. Заменим в числителе 1 по основному тригонометрическому тождеству и представим интеграл в виде суммы двух интегралов

**Пример 80.** Вычислить интеграл

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде степенной функции и воспользуемся формулой 1) табличных интегралов

**Основные методы интегрирования.**

**Непосредственное интегрирование.**

Непосредственное интегрирование заключается в приведении с помощью свойств интегралов к табличным. При этом используются следующие свойства дифференциалов:

**Пример 81**. Вычислить интеграл

Решение.

**Пример 81**. Вычислить интеграл

Решение.

**Пример 82**. Вычислить интеграл

Результат проверить дифференцированием.

Решение.

Проверка.

**Пример 83**. Вычислить интеграл

Решение.

**Метод интегрирования подстановкой.**

Метод заключается в том, что вводится новая переменная интегрирования, при этом исходный интеграл приводится к новому интегралу, который является более простым или табличным. Общих методов выбора подстановок не существует, но для некоторых выражений возможны общие подходы в выборе той или иной подстановки.

Пусть надо вычислить интеграл

где - некоторая функция от переменной .Тогда преобразовав интеграл по формуле мы получим

Сделаем замену . В итоге получим

**Пример 84**. Вычислить интеграл

Решение. Вычислим интеграл, сделав замену