**Комплексные числа.**

**Основные понятия.**

При решении квадратных уравнений возникают ситуации, когда дискриминант отрицательный и корней не существует. Так в уравнении дискриминант . Но в то же время по теореме Виета имеем . Корней нет, но их сумма и произведение существуют. Это означает, что корни должны существовать. Но выражаются они в других, не действительных числах. Обозначим тогда . В этом случае можно записывать квадратные корни из отрицательных чисел, например .

*Комплексным числом* называется выражение вида , где и – действительные числа. Например, , и т. д.

Величина называется *действительной частью комплексного числа* и обозначается , а – *комплексной (мнимой) частью*, .

Два комплексных числа называются *равными*, если совпадают их действительные и мнимые части. Так если , , то тогда и только тогда, когда .

Понятие «больше» или «меньше» для комплексных чисел не существуют.

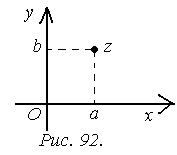
Теперь квадратное уравнение имеет два корня: и .

Два комплексных числа и называются *сопряженными*. Найдем их произведение

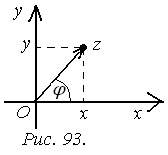
Если мнимая часть комплексного числа равна 0, то число является действительным.

**Геометрическое изображение комплексных чисел.**

Пусть дано комплексное число . Сопоставим ему на координатной плоскости точку . С другой стороны каждую точку плоскости можно рассматривать как некоторое комплексное число (рис. 92). Комплексное число можно задать и с помощью вектора (рис. 93). В этом случае длина вектора называется *модулем* комплексного числа и обозначается . Такое понятие соответствует понятию модуля действительного числа на числовой прямой как расстояние от него до начала координат. Тогда

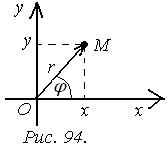


Величина угла φ между и положительным направлением оси называется *аргументом комплексного числа*и обозначается Для комплексного числа аргумент не определён. Для любого другого числа он определяется с точностью до величины . Если , то он называется *главным* аргументом.



**Формы записи комплексных чисел.**

Запись называется *алгебраической формой* комплексного числа. Модуль и комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора (рис. 94). Тогда , и число можно записать в виде



Такая запись называется *тригонометрической формой* записи комплексных чисел. В этом случае где

При переходе к тригонометрической форме в качестве аргумента выбирают его главное значение.

**Пример 72.** Записать комплексные числа и в тригонометрической форме - .

Решение. Найдем модуль и аргумент числа .

Так как косинус положителен а синус отрицателен, то угол находится в четвертой четверти, т. е. . Таким образом

Сделаем тоже самое для числа .

Так как косинус и синус отрицательны, то угол находится в третьей четвертой четверти, т. е. . Таким образом

**Пример 73.** Записать комплексные числа и в тригонометрической форме - .

Решение. Найдем модуль и аргумент числа .

Отсюда . Таким образом

Сделаем тоже самое для числа .

Отсюда . Таким образом

**Показательная форма.**

Любое комплексное число может быть записано в алгебраической и тригонометрической формах

Рассмотрим разложения , и в ряд Маклорена

Тогда

С другой стороны, в разложении в ряд Маклорена для заменим на , тогда получим

Сравнив два разложения, видим, что Это равенство называют формулой Эйлера. Оно позволяет записывать комплексное число в показательной форме . Если в этом равенстве положить , то получим .

**Действия над комплексными числами.**

**Сложение и вычитание.**

Сложение и вычитание комплексных чисел можно производить обычным образом. Так если *,*  то

, например, если

, , то

, в нашем случае

*.*

**Умножение.**

Умножение комплексных чисел производится так же обычным образом с учетом того, что .

Для наших чисел

*.*

Пусть числа и заданы в тригонометрической форме:

Тогда

Таким образом, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется и на случай нескольких множителей. Если

, то

Это правило возведения комплексных чисел в степень называется *формулой Муавра.*

**Деление.**

Деление комплексных чисел осуществляется путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю

В нашем примере

Для чисел в тригонометрической форме

При делении комплексных чисел в тригонометрической форме модули делятся, а аргументы вычитаются.

**Извлечение корня.**

*Корнем – й степени из комплексного числа*  называется комплексное число такое, что

Если и

Тогда

По формуле Муавра

Отсюда Тогда

Таким образом, формула извлечения корня  *–* й степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме имеет вид

**Пример 74.** Вычислить .

Решение. Представим единицу как комплексное число

Тогда по формуле извлечения корня 2-й степени

Подставляя значения , получим

Второй способ. Покажем на примере вычисления квадратного корня . Пусть , тогда или

Приравнивая действительные и мнимые части, получим систему

Сделаем замену , получим . Отсюда . Тогда И таким образом