**Эмпирические формулы.**

 При обработке опытных данных часто встречаются с задачей об определении параметров функциональной зависимости между переменными значениями и посредством формулы . Пусть при измерении данных величин получены следующие опытные данные.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | …… |  |
|  |  |  | …… |  |

 Вид конкретной функциональной зависимости определяют, как правило, с помощью геометрических методов. Для этого на плоскость наносят табличные значения в виде координатных точек и подбирают вид зависимости исходя из субъективных соображений. Так для рис.89 больше подходит линейная зависимость, а для рис. 90 – квадратическая.

 Пусть известен, исходя из визуального (рис. 91) или какого – нибудь иного анализа, предполагаемый вид функциональной зависимости . Возникает задача, об определении параметров такой связи. Так, в случае предположения о линейной зависимости нужно найти параметры и . Если зависимость квадратическая , то это величины , и . Если зависимость показательная , то это , и . Точно найти значения параметров часто бывает невозможно т.к. опытные данные лишь приблизительно отвечают предполагаемой зависимости. Поэтому параметры функций определяются исходя из минимизации квадратов погрешностей. Этот способ называется *методом наименьших квадратов*.

**Метод наименьших квадратов.**

 Пусть функциональная зависимость имеет вид , где - переменная, а - параметры, которые необходимо определить. Значения , полученные из теоретической формулы и экспериментальные значения могут не совпадать, т.е. разность , будет отличаться от 0, для всех или некоторых точек (). В этих условиях параметры требуется выбрать так, что бы сумма квадратов погрешностей была минимальной, т. е. что бы функция

принимала наименьшее значение. Функция является функцией переменной Если она имеет непрерывные частные производные по всем переменным, то необходимое условие её минимума выражается системой.

Из этой системы и находятся значения параметров .

 Во многих случаях функция y = определяется формулой

где - известные функции, например ,

, и т. д. В этом случае система для определения параметров примет вид

 Решив эту систему, например, с помощью метода Гаусса или метода Крамера или методом обратной матрицы, можно найти параметры

 Если , то в этом случае

 и система примет вид

 В частности, если предполагается линейная зависимость , то коэффициенты и () можно найти из следующей системы

 Еcли предполагаемая зависимость квадратичная , то и система имеет следующий вид:

 Если функциональная зависимость является показательной , то коэффициенты и находятся следующим образом: обозначим , , получим систему

 Решив эту систему, мы найдем и , затем

 В случае степенной зависимости , система для определения коэффициентов и имеет следующий вид:

 **Пример 71**.Предположим, что в результате экспериментальных измерений получена следующая зависимость между величинами и .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|  | 3 | 1 | 4 | 3 | 6 | 8 | 12 | 15 |

 Исходя из предположения об их линейной зависимости , найти коэффициенты и , сделать прогноз для значения . Вычислить среднее значение квадратической погрешности .

 Решение. Составим систему для определения параметров и

 В нашем случае . Для удобства вычислений и контроля над ними, составим следующую таблицу для вычислений

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 1,32 | 1,68 | 2,82 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 4 | 2,8 | -1,8 | 3,24 |
| 3 | 3 | 4 | 12 | 9 | 4,28 | -0,28 | 0,08 |
| 4 | 4 | 3 | 12 | 16 | 5,76 | -2,76 | 7,62 |
| 5 | 5 | 6 | 30 | 25 | 7,24 | -1,24 | 1,54 |
| 6 | 6 | 8 | 48 | 36 | 8,72 | -0,72 | 0,52 |
| 7 | 7 | 12 | 84 | 49 | 10,2 | 1,8 | 3,24 |
| 8 | 8 | 15 | 120 | 64 | 11,68 | 3,32 | 11,02 |
|  | **36** | **52** | **311** | **214** |  |  | **30,08** |

Теперь система, для вычисления параметров имеет вид

 Выразим из первого уравнения
 и подставим во второе, получим

 Откуда
 Искомая линейная зависимость имеет вид

 Определим прогнозное значение для значения

 Вычислим теоретические значения переменной и найдем значения погрешностей , занесем вычисления в таблицу и найдем сначала затем их среднее арифметическое значение