**Экстремум функции двух переменных.**

**Общие понятия.**

 Понятие максимума и минимума для функции двух переменных аналогичны таким же понятиям функции одной переменной. Пусть $z=f\left(x, y\right)$ определена в некоторой области $D$, точка $M\_{0}\left(x\_{0};y\_{0}\right)\in D$.

 Точка $M\_{0}\left(x\_{0};y\_{0}\right)$ называется *точкой максимума (минимума) функции* $z=f\left(x, y\right)$, если существует такая $δ$- окрестность точки $M\_{0}$, что для всех точек $M\left(x,y\right)$ из этой окрестности, отличных от $M\_{0}$, выполняется неравенство $f\left(x,y\right)<f\left(x\_{0},y\_{0}\right)$ ($f\left(x,y\right)>f\left(x\_{0},y\_{0}\right)$).

 В области $D$ функция может иметь несколько экстремумов, или не иметь ни одного. На рис. 88 точка $M\_{0}$ является точкой максимума функции $z=f\left(x, y\right)$, задающей поверхность, в области $D$.

**Необходимые условия экстремума функции двух переменных.**

 **Теорема 39**. *Если в точке* $M\_{0}\left(x\_{0};y\_{0}\right)$ *дифференцируемая функция* $z=f\left(x, y\right)$ *имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю*

$$f\_{x}^{'}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0, f\_{y}^{'}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0.$$

 Доказательство. Зафиксируем одну из переменных. Пусть$y=y\_{0}$, тогда получим функцию $φ\left(x\right)=f\left(x,y\_{0}\right)$ одной переменной, которая имеет экстремум при $x=x\_{0}$. По необходимому условию экстремума функции одной переменной ее производная в этой точке будет равна нулю $φ^{'}\left(x\_{0}\right)=0$, т.е. $f\_{x}^{'}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0$. Аналогично можно показать, что и $f\_{y}^{'}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=0$. Теорема доказана.

 Геометрически равенство нулю частных производных в точках экстремума означает, что касательные плоскости в этих точках поверхности $z=f\left(x, y\right)$ параллельны плоскости $Oxy$.

 **Замечание.** *Функция может иметь экстремум и в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует (пример 68).*

 **Пример 67.** Функция $z=\left|x\right|+\left|y\right|$ имеет минимум в точке $O\left(0;0\right)$, но не имеет в этой точке частных производных.

 Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z=f\left(x, y\right)$равны нулю, называются *стационарными точками функции*. Стационарные точки и точки в которых хотя бы одна частная производная первого порядка не существует, называются *критическими точками*. В критических точках функция может иметь экстремумы, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием экстремума (пример 2).

 **Пример 68.** Точка $O\left(0;0\right)$ является критической для функции $z=xy$, но экстремума в ней $z$ не имеет.

**Достаточные условия экстремума функции двух переменных**.

 **Теорема 40.** (Без доказательства) *Пусть в стационарной точке* $M\_{0}\left(x\_{0};y\_{0}\right)$ *и некоторой ее окрестности функция* $z=f\left(x, y\right)$ *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть* $A=f\_{xx}^{″}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$*,* $B=f\_{xy}^{″}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$*,* $C=f\_{yy}^{″}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$*,* $∆=\left|\begin{matrix}A&B\\B&C\end{matrix}\right|=A∙C-B^{2}.$

 *Тогда:*

 *1) если* $∆>0$*, то функция* $z=f\left(x, y\right)$ *в точке* $M\_{0}$ *имеет экстремум: максимум, если* $A<0$*; минимум, если* $A>0$*;*

 *2) если* $∆<0$*, то функция* $z=f\left(x, y\right)$ *в точке* $M\_{0}$ *экстремума не имеет;*

 *3) если* $∆=0$*, то функция может иметь экстремум в этой точке, а может и не иметь. В этом случае необходимы дополнительные исследования.*

**Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.**

 Пусть функция $z=f\left(x, y\right)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $D$. Тогда она достигает в некоторых точках области свои наибольшие и наименьшие значения. Эти значения могут достигаться либо внутри области $D$, либо в точках лежащих на границе области. Для того чтобы найти эти значения необходимо:

 1) найти все критические точки функции, лежащие в области $D$ и вычислить значения функции в них;

 2) найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=f\left(x, y\right)$на границах области;

 3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее $M$ и наименьшее $m$.

 **Пример 69**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных $z=x^{2}y-2x-y$ в области $L$, ограниченной линиями: $y=x, y=0, x=7$*.*

 Решение. Графически область $L$ представляет собой треугольник (рис. 89). Найдем критические точки функции $z$: $f\_{x}^{'}=2xy-2, f\_{y}^{'}=x^{2}-1.$ Решая систему

$\left\{\begin{array}{c}2xy-2=0\\x^{2}-1=0\end{array},\right.$

получим точки $C\left(1;1\right)$ и $D\left(-1; -1\right)$. Точка  не принадлежит области $L$, $z\left(C\right)=-2$. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе.

 Рассмотрим сначала линию $OA, \left(y=x, 0\leq x\leq 7\right)$. На ней функция $z$ равна $z=x^{3}-2x-x=x^{3}-3x$*.* Производная $z^{'}=3x^{2}-3$. Критические точки $x=\pm 1$. Но только значение $x=1$ принадлежит отрезку $\left[0;7\right]$. Находим значения функции в ней: $z\left(-1\right)=-2$.

 На линии $AB \left(x=7, 0\leq y\leq 7\right)$ функция $z$ имеет вид $z=49y-14-y=48y-14$. Критических точек $z$ не имеет, поэтому находим её значения в граничных точках $A$ и $B$: $z\left(A\right)=322, z\left(B\right)=-14$.

 Рассмотрим теперь оставшуюся граничную линию $OB \left(y=0, 0\leq x\leq 7\right)$. На ней $z=2x$, $z\left(O\right)=0, z\left(B\right)=-14$. Сравнивая значения функции $z$ в найденных точках, видим, что наибольшее значение функции равно 322 и достигается оно в точке $A\left(7;7\right)$, наименьшее значение функции равно $\left(-14\right)$ и достигается оно в точке $B\left(7;0\right)$.

**Условный экстремум.**

 Поставим задачу о нахождении экстремума функции $z=f\left(x, y\right)$при условии, что переменные $x$ и $y$ связаны условием $φ\left(x, y\right)=0$. Такой экстремум называется *условным*. Уравнение $φ\left(x, y\right)=0$ называется *уравнением связи*. Если уравнение связи разрешимо относительно переменной $y$ (или $x$), $y=y\left(x\right)$ ($x=x\left(y\right)$*)* тогда, подставив это значение в функцию, получим $z=f\left(x, y\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$ $\left(z=f\left(x\left(y\right), y\right)=f\left(y\right)\right)$ - функцию одной переменной. Тогда задача об условном экстремуме сведется к задаче на экстремум функции одной переменной. Однако выразить одну переменную через другую удается не всегда, поэтому рассмотрим другой способ нахождения условного экстремума.

**Метод множителей Лагранжа.**

 Чтобы найти условный экстремум функции $z=f\left(x, y\right)$ при наличии одного уравнения связи $φ\left(x, y\right)=0$ составим функцию Лагранжа:

$$F\left(x, y\right)=f\left(x, y\right)+λφ\left(x, y\right)$$

 где λ - неопределенный постоянный множитель. Затем находят экстремум функции $F\left(x, y\right)$. Необходимые условия экстремума для выражаются следующей системой трех уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $λ$.

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{∂F}{∂x}=\frac{∂f}{∂x}+λ\frac{∂φ}{∂x}=0\\\frac{∂F}{∂y}=\frac{∂f}{∂y}+λ\frac{∂φ}{∂y}=0\\\frac{∂F}{∂λ}=φ\left(x, y\right)=0\end{array}\right..$$

 Решив эту систему, находят значения $x\_{i}$, $y\_{i}$ и $λ\_{i}$. Вопрос о существовании и характере условного экстремума в этом случае решается на основе теоремы 2. Для этого исследуется определитель $∆=\left|\begin{matrix}A&B\\B&C\end{matrix}\right|$, где $A=F\_{xx}^{″}\left(x\_{i},y\_{i}\right)$*,* $B=F\_{xy}^{″}\left(x\_{i},y\_{i}\right)$*,* $C=F\_{yy}^{″}\left(x\_{i},y\_{i}\right)$. Если $∆>0$при $λ=λ\_{i}$, то функция $F\left(x, y\right)$, а, следовательно, и функция $z=f\left(x, y\right)$ имеет в точке $\left(x\_{i}, y\_{i}\right)$ при $A<0$ максимум, при $A>0$ - минимум. Если же $∆<0$, то точка $\left(x\_{i}, y\_{i}\right)$ не является точкой экстремума. В случае $∆=0$вопрос о существовании экстремума остается открытым. Аналогично находится экстремум при наличии нескольких уравнений связи. Если, например, требуется найти экстремум функции $z=f\left(x, y\right)$ при нескольких уравнениях связи

$$φ\_{1}\left(x, y\right)=0, φ\_{2}\left(x, y\right)=0, …, φ\_{n}\left(x, y\right)=0,$$

то вводится функция Лагранжа вида

$$F\left(x, y, λ\_{1}, λ\_{2}, …,λ\_{n}\right)=f\left(x, y\right)+λ\_{1}φ\_{1}\left(x, y\right)+λ\_{2}φ\_{2}\left(x, y\right)+…+λ\_{n}φ\_{n}\left(x, y\right).$$

 Затем составляется система из $n+2$ - х уравнений с неизвестными $x, y, λ\_{1}, λ\_{2}, …,λ\_{n}$ и аналогичным образом находится безусловный экстремум.

 **Пример 70.** Найти условный экстремум функции $z=x^{2}+y^{2}$ при условии $x-2y-5=0$.

 Решение. Способ 1. Из уравнения связи выразим переменную $x=2y+5$ и подставим в исходную функцию $z$, получим функцию одной переменной $y$, $z=\left(2y+5\right)^{2}+y^{2}$. После преобразования, запишем функцию в виде

$z=4y^{2}+20y+25+y^{2}=5\left(y^{2}+4y+5\right)$.

 Находим производную $z^{'}=5\left(2y+4\right)=0$. Отсюда $y=-2$. Исследуя экстремум функции одной переменной, получаем, что $y=-2$ является точкой минимума, при этом $x=2∙\left(-2\right)+5=1$, $z\left(1;-2\right)=1^{2}+\left(-2\right)^{2}=5$.

 Ответ: $z\_{min}=5$, при $x=1, y=-2$.

 Способ 2. Составим функцию Лагранжа

$$F\left(x, y\right)=x^{2}+y^{2}+λ\left(x-2y-5\right).$$

 Система уравнений для нахождения точек экстремума имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{∂F}{∂x}=2x+λ=0\\\frac{∂F}{∂y}=2y+λ=0\\\frac{∂F}{∂λ}=x-2y-5=0\end{array}\right..$$

 Решая систему, получим значения переменных $λ=-2, x=1, y=-2$. Исследуем достаточные признаки экстремума при $λ=-2$. Так как

 $A=F\_{xx}^{″}\left(1,-2\right)=2$, $B=F\_{xy}^{″}\left(1,-2\right)=0$, $C=F\_{yy}^{″}\left(1,-2\right)=2$, то

$$∆=\left|\begin{matrix}A&B\\B&C\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}2&0\\0&2\end{matrix}\right|=4>0.$$

 Следовательно, по теореме 40 функция $F\left(x, y\right)$ имеет в точке $M\left(1; -2\right)$ экстремум. А так как $A>0$, то это будет минимум.

 Ответ: $z\_{min}=5$, при $x=1, y=-2$.