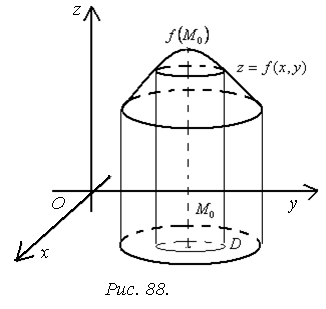
**Экстремум функции двух переменных.**

**Общие понятия.**

Понятие максимума и минимума для функции двух переменных аналогичны таким же понятиям функции одной переменной. Пусть определена в некоторой области , точка .

Точка называется *точкой максимума (минимума) функции* , если существует такая - окрестность точки , что для всех точек из этой окрестности, отличных от , выполняется неравенство ().



В области функция может иметь несколько экстремумов, или не иметь ни одного. На рис. 88 точка является точкой максимума функции , задающей поверхность, в области .

**Необходимые условия экстремума функции двух переменных.**

**Теорема 39**. *Если в точке дифференцируемая функция имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю*

Доказательство. Зафиксируем одну из переменных. Пусть, тогда получим функцию одной переменной, которая имеет экстремум при . По необходимому условию экстремума функции одной переменной ее производная в этой точке будет равна нулю , т.е. . Аналогично можно показать, что и . Теорема доказана.

Геометрически равенство нулю частных производных в точках экстремума означает, что касательные плоскости в этих точках поверхности параллельны плоскости .

**Замечание.** *Функция может иметь экстремум и в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует (пример 68).*

**Пример 67.** Функция имеет минимум в точке , но не имеет в этой точке частных производных.

Точки, в которых частные производные первого порядка функции равны нулю, называются *стационарными точками функции*. Стационарные точки и точки в которых хотя бы одна частная производная первого порядка не существует, называются *критическими точками*. В критических точках функция может иметь экстремумы, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием экстремума (пример 2).

**Пример 68.** Точка является критической для функции , но экстремума в ней не имеет.

**Достаточные условия экстремума функции двух переменных**.

**Теорема 40.** (Без доказательства) *Пусть в стационарной точке и некоторой ее окрестности функция имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть , , ,*

*Тогда:*

*1) если , то функция в точке имеет экстремум: максимум, если ; минимум, если ;*

*2) если , то функция в точке экстремума не имеет;*

*3) если , то функция может иметь экстремум в этой точке, а может и не иметь. В этом случае необходимы дополнительные исследования.*

**Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области.**

Пусть функция определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области . Тогда она достигает в некоторых точках области свои наибольшие и наименьшие значения. Эти значения могут достигаться либо внутри области , либо в точках лежащих на границе области. Для того чтобы найти эти значения необходимо:

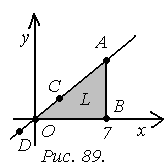
1) найти все критические точки функции, лежащие в области и вычислить значения функции в них;

2) найти наибольшее и наименьшее значение функции на границах области;

3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее .

**Пример 69**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в области , ограниченной линиями: *.*

Решение. Графически область представляет собой треугольник (рис. 89). Найдем критические точки функции : Решая систему



получим точки и . Точка  не принадлежит области , . Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе.

Рассмотрим сначала линию . На ней функция равна *.* Производная . Критические точки . Но только значение принадлежит отрезку . Находим значения функции в ней: .

На линии функция имеет вид . Критических точек не имеет, поэтому находим её значения в граничных точках и : .

Рассмотрим теперь оставшуюся граничную линию . На ней , . Сравнивая значения функции в найденных точках, видим, что наибольшее значение функции равно 322 и достигается оно в точке , наименьшее значение функции равно и достигается оно в точке .

**Условный экстремум.**

Поставим задачу о нахождении экстремума функции при условии, что переменные и связаны условием . Такой экстремум называется *условным*. Уравнение называется *уравнением связи*. Если уравнение связи разрешимо относительно переменной (или ), (*)* тогда, подставив это значение в функцию, получим - функцию одной переменной. Тогда задача об условном экстремуме сведется к задаче на экстремум функции одной переменной. Однако выразить одну переменную через другую удается не всегда, поэтому рассмотрим другой способ нахождения условного экстремума.

**Метод множителей Лагранжа.**

Чтобы найти условный экстремум функции при наличии одного уравнения связи составим функцию Лагранжа:

где λ - неопределенный постоянный множитель. Затем находят экстремум функции . Необходимые условия экстремума для выражаются следующей системой трех уравнений с тремя неизвестными , и .

Решив эту систему, находят значения , и . Вопрос о существовании и характере условного экстремума в этом случае решается на основе теоремы 2. Для этого исследуется определитель , где *, ,* . Если при , то функция , а, следовательно, и функция имеет в точке при максимум, при - минимум. Если же , то точка не является точкой экстремума. В случае вопрос о существовании экстремума остается открытым. Аналогично находится экстремум при наличии нескольких уравнений связи. Если, например, требуется найти экстремум функции при нескольких уравнениях связи

то вводится функция Лагранжа вида

Затем составляется система из - х уравнений с неизвестными и аналогичным образом находится безусловный экстремум.

**Пример 70.** Найти условный экстремум функции при условии .

Решение. Способ 1. Из уравнения связи выразим переменную и подставим в исходную функцию , получим функцию одной переменной , . После преобразования, запишем функцию в виде

.

Находим производную . Отсюда . Исследуя экстремум функции одной переменной, получаем, что является точкой минимума, при этом , .

Ответ: , при .

Способ 2. Составим функцию Лагранжа

Система уравнений для нахождения точек экстремума имеет вид

Решая систему, получим значения переменных . Исследуем достаточные признаки экстремума при . Так как

, , , то

Следовательно, по теореме 40 функция имеет в точке экстремум. А так как , то это будет минимум.

Ответ: , при .