**Квадратичные формы.**

*Квадратичной формой от переменных* называется однородный многочлен второй степени от этих переменных. В общем виде квадратичную форму можно записать как

где – матрица квадратичной формы. Если обозначить через , то квадратичная форма будет иметь вид .

**Пример 33.** Матрицей для квадратичной формы

будет

Квадратичная форма имеет *канонический вид*, если ее матрица является диагональной, т. е. форма содержит лишь слагаемые с квадратами переменных.

Выразим переменные квадратичной формы через новые переменные

Пусть – матрица перехода от переменных к переменным , т. е. . Тогда новая квадратичная форма в матричном виде будет выглядеть как

Матрица новой квадратичной формы, таким образом, будет равна

**Теорема 7.** *Каждая действительная квадратичная форма подходящим преобразованием переменных может быть приведена к каноническому виду*

*где – ранг матрицы , – ее собственные значения (без доказательства).*

**Алгоритм Лагранжа.**

Рассмотрим один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду, который известен как алгоритм Лагранжа. Пусть задана квадратичная форма с матрицей

Если хотя бы один из диагональных элементов , то делается переход к новым переменным по формулам:

и для .

В результате получим квадратичную форму относительно переменных , в которой не будет смешанных произведений переменных, содержащих . Продолжая этот процесс дальше, мы получим в итоге канонический вид квадратичной формы.

Если все коэффициенты матрицы вида равны нулю, то для какого –

нибудь слагаемого делается переход к новым переменным по формулам:

и для и .

В результате в квадратичной форме появятся квадраты переменных и можно будет исключать из смешанных переменных либо , либо .

**Пример 34.** Привести квадратичную форму к каноническому виду. Построить общее преобразование, приводящее квадратичную форму к этому виду.

Решение. Матрица данной квадратичной формы имеет вид

Так как все диагональные элементы матрицы равны нулю, то предварительно сделаем переход к новой форме, содержащей хотя бы один квадрат. Выберем элемент матрицы, неравный нулю. Таким является, например, элемент , поэтому подстановка имеет вид

Матрица перехода

В результате получим новую квадратичную форму

матрица которой равна

Так как , то в соответствии с алгоритмом Лагранжа сделаем подстановку

Отсюда

Матрица перехода равна

Получим квадратичную форму

матрица которой равна

Теперь делаем подстановку

Из которой следует

Матрица перехода

Получим квадратичную форму

которая является канонической. Матрица этой формы имеет диагональный вид и равна

Построим теперь преобразование, которое позволяет непосредственно получить в данном случае канонический вид. Для этого найдем общую матрицу перехода , которая равна

Таким образом, общее преобразование квадратичной формы, приводящее ее к каноническому виду, равно

**Замечание**. Если необходимо найти только канонический вид квадратичной формы без указания преобразования, то достаточно вычислить собственные значения ее матрицы и записать соответствующий вид. В данном случае составляем характеристическое уравнение

Отсюда и квадратичная форма с точностью до пропорциональных множителей эквивалентна форме

.

**Знакопостоянные квадратичные формы**.

Действительная квадратичная форма называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для всех значений переменных выполняется условие (). Существуют специальные критерии для выяснения того, является ли данная квадратичная форма положительно или отрицательно определенной.

Критерий Сильвестра.

**Теорема 8.** *Действительная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны.*

*Действительная квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка ее матрицы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.* (Без доказательства).