**Векторные пространства.**

**Арифметическое - мерное пространство.**

*Арифметическим - вектором* называют упорядоченный набор из действительных чисел. Обозначается как *,* где – действительные числа. Вектор – называется *нулевым - вектором.*

Пусть , λ – некоторое число Определим сумму – векторов и произведение – вектора на число λ следующим образом:

,

.

Множество всех - мерных векторов называется *арифметическим вектор­ным пространством* и обозначается - . Так в качестве можно рассматривать множество всех векторов на плоскости, – множество всех векторов в пространстве.

**Аксиомы векторного пространства.**

Для любых векторов и чисел выполняются следующие свойства:

1) (ассоциативность суммы векторов);

2) (наличие нейтрального элемента для суммы векторов);

3) (наличие противоположного вектора);

4) (коммутативность);

5) (дистрибутивность умножения на сумму векторов);

6) (дистрибутивность произведения суммы чисел на вектор);

7) (ассоциативность умножения произведения чисел на вектор);

8) (существование нейтрального элемента при умножении чисел на вектор).

Свойства 1 – 8 называются *аксиомами – векторного пространства*.

В общем случае, множество для которого выполняются аксиомы 1 – 8 называется *линейным векторным пространством*.

Скалярным произведением двух – векторов и называется число, равное

.

На основании скалярного произведения вводится длина вектора как квадратный корень из его скалярного квадрата, т. е. если , то

Введенная таким образом длина – вектора обладает всеми свойствами длины векторов плоскости и пространства.

Свойства длины – вектора.

1. , для любого – вектора и числа .
2. , для любых – векторов и (неравенство треугольника).

Угол между векторами и определяется равенством откуда

**Базис - мерного пространства.**

Пусть задана система - мерных векторов из пространства .

Вектор вида , для некоторых чисел называется *линейной комбинацией* этих векторов.

**Пример 29.** Для трехмерных векторов пространства , вектор является линейной комбинацией векторов и .

Система - векторов называется *линейно независимой*, если из того, что *,* всегда следует

в противном случае система называется *линейно зависимой*.

Линейную зависимость – векторов можно выразить следующим образом:

Пусть и векторы являются линейно зависимыми, тогда, по крайней мере, одно из чисел (например, ) и

Вектор является линейной комбинацией остальных векторов. Таким образом, система – векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Система векторов - мерного пространства зависима тогда и только тогда, когда ранг матрицы, строки которой являются векторами системы меньше их количества. Если же ранг матрицы в точности равен количеству этих векторов, то они являются линейно независимыми.

*Рангом системы – векторов* называется максимальное количество линейно независимых векторов этой системы.

**Пример 30.** В пространстве единичные векторы , и являются линейно независимыми.

*Базисом - мерного векторного пространства* называется любая линейно - независимая система векторов, через которые можно выразить любой вектор пространства. Базисов в пространстве может быть бесконечное множество. Количество векторов в базисе пространства называется его *размерностью*.

**Теорема 5**. *Базис - мерного пространства состоит из векторов*.

Доказательство. Покажем линейную независимость системы векторов

, , …, . Пусть

.

Запишем это равенство в координатной форме

,

или

Отсюда

т. е. векторы – линейно независимы.

Для произвольного вектора , очевидно равенство

.

Таким образом, векторы образуют базис пространства.

Предположим, что существует другой базис , пространства , где

, ,…,

и , т. е. число векторов которого больше *n*. Тогда выполняется равенство

,

что равносильно системе

Число уравнений системы меньше, чем число неизвестных, поэтому ранг матрицы системы ограниченной не может быть больше, чем *n*, следовательно, система векторов линейно зависима и не может образовывать базис. Теорема доказана.

Координаты векторов.

Если в пространстве выбран некоторый базис , то для произвольного вектора справедливо представление

Числа называются *координатами вектора в базисе* . В различных базисах пространства один и тот же вектор будет иметь различные координаты.

**Линейные операторы.**

В пространстве можно определить преобразования, которые сохраняют линейные операции.

Отображение векторного пространства называется *линейным оператором*, если для любых векторов , и для любого числа выполняются условия:

1) ;

2) .

**Теорема 6.** Всякий линейный оператор однозначно определяется некоторой матрицей .

Доказательство. Пусть задан линейный оператор и некоторый базис . Выразим векторы через векторы базиса .

Обозначим

,

Тогда

Отсюда

.

Таким образом, действие оператора на произвольный вектор

полностью определяется умножением координатной строки вектора на матрицу . Теорема доказана.

**Собственные значения и собственные векторы операторов.**

*Собственным вектором линейного преобразования* (или соответствующей матрицы ) называется такой вектор , что . Число называется *собственным значением* оператора для вектора . После линейного преобразования векторы и являются коллинеарными.

Пусть для некоторого собственного вектора и собственного значения . Тогда , или . Так как , то

Последнее уравнение называется *характеристическим*.

Таким образом, собственные значения являются корнями характеристического уравнения.

**Пример 31.** Найти все собственные значения и собственные векторы линейного преобразования пространства имеющего матрицу

Решение. Составим характеристическое уравнение

.

В нашем случае

.

Откуда , и .

Случай 1. . Тогда для собственного вектора получим матричное равенство

,

или

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

которая равносильна уравнению с двумя неизвестными

.

Положим , получим . Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид

, где .

Случай 2. . Тогда для собственного вектора получим матричное равенство , или

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

которая равносильна уравнению с двумя неизвестными .

Положим , получим . Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид

, где .

**Пример 32.** Найти все собственные значения и собственные векторы линейного преобразования пространства имеющего матрицу

Решение. Составим характеристическое уравнение

.

В нашем случае

.

Разложим определитель по элементам первого столбца

Подстановкой убеждаемся, что является корнем уравнения. Разделив левую часть уравнения на , получим разложение

Откуда . Найдем собственные векторы для каждого их найденных собственных значений.

Случай 1. . Тогда для собственного вектора получаем матричное равенство , или

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

Решая систему методом Гаусса, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

.

Получаем систему

Положим , получим . Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид

, где .

Случай 2. . Тогда для собственного вектора получаем матричное равенство , или

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

Решая систему методом Гаусса, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду, предварительно сократив третье уравнение на 3 и поменяв его местами с первым

.

Получаем систему

Положим , получим

Отсюда . Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид

, где .

Случай 3. . Тогда для собственного вектора получаем матричное равенство , или

Перемножая матрицы слева и сравнивая элементы, получим систему

Решая систему методом Гаусса, приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду

.

Получаем систему

Положим , получим . Таким образом, все собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид , где .

**Модель международной торговли.**

Пусть имеется стран с национальными доходами . Каждая из стран тратит весь национальный доход либо на закупку товаров внутри страны, либо на импорт из остальных стран. Пусть – часть национального дохода – ой страны, которую она тратит на закупку товаров в – ой стране. Тогда имеют место равенства

Обозначим  
– относительную часть национального дохода – ой страны, которая тратится в – ой стране. Матрица

называется *структурной матрицей торговли*. Разделив – е уравнение системы на , получим

Для каждой из стран выручка от торговли равна

С учетом равенства получим

Торговля между странами будет бездефицитной для некоторой страны, если ее выручка будет не меньше национального дохода, т. е. Ясно, что эти условия невозможны. Так если какая – то страна получит прибыль, то хотя бы одна из других стран понесет убытки и для нее . Таким образом, если торговля будет бездефицитной для всех стран, то должно быть , или

Тогда в матричном виде система выглядит как , или , где

– вектор – столбец национальных доходов. Матричное равенство

означает, что вектор является собственным вектором линейного преобразования с матрицей . При этом собственное значения для равно 1 ().