**Системы линейных уравнений.**

**Основные понятия.**

Система видa

называется *системой - линейных уравнений с неизвестными*.

Числа , , называются *коэффициентами системы*.

Числа , называются *свободными членами системы*, – *переменными системы*. Матрица

называется *основной матрицей системы*, а матрица

– *расширенной матрицей системы*. Матрицы – столбцы

и - соответственно *матрицами свободных членов и неизвестных системы*. Тогда в матричной форме систему уравнений можно записать в виде

.

*Решением системы* называется значений переменных , при подстановке которых, все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства. Всякое решение системы можно представить в виде матрицы - столбца . Тогда справедливо матричное равенство .

Система уравнений называется *совместной* если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной* если не имеет ни одного решения.

Решить систему линейных уравнений это значит выяснить совместна ли она и в случае совместности найти её общее решение.

Система называется *однородной* если все её свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как имеет решение

.

**Теорема Кронекера – Копелли.**

Ответ на вопрос существования решений линейных систем и их единственности позволяет получить следующий результат, который можно сформулировать в виде следующих утверждений относительно системы линейных уравнений с неизвестными

(1)

**Теорема 2**. Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной (.

**Теорема 3**. Если ранг основной матрицы совместной системы линейных уравнений равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

**Теорема 4**. Если ранг основной матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

**Правила решения систем.**

1. Находят ранги основной и расширенной матрицы и если то система не совместна.
2. Если , то система совместна, в этом случае находят какой-нибудь базисный минор - того порядка и берут соответствующие ему - уравнений системы, отбрасывая остальные. Те переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называются главными, остальные переменных называют свободными. Выражения со свободными переменными переносят в правую часть.

3. Находят выражение главных переменных через свободные и получают общее решение системы.

4. Придавая свободным переменным произвольные значения получают все значения главных переменных.

**Методы решения систем линейных уравнений.**

**Метод обратной матрицы.**

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными

причем , т. е. система имеет единственное решение. Запишем систему в матричном виде

,

где , , .

Умножим обе части матричного уравнения слева на матрицу

.

Так как , то получаем , откуда получаем равенство для нахождения неизвестных

.

**Пример 26.** Методом обратной матрицы решить систему линейных

уравнений

Решение. Обозначим через основную матрицу системы

.

Пусть , тогда решение найдем по формуле .

Вычислим .

Так как , то и система имеет единственное решение. Найдем все алгебраические дополнения

, ,

, ,

, ,

, ,

Таким образом

Сделаем проверку

.

Обратная матрица найдена верно. Отсюда по формуле , найдем матрицу переменных .

.

Сравнивая значения матриц, получим ответ: .

**Метод Крамера.**

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными

причем , т. е. система имеет единственное решение. Запишем решение системы в матричном виде или

Отсюда

Обозначим

. . . . . . . . . . . . . . ,

Таким образом, получаем формулы для нахождения значений неизвестных, которые называются *формулами Крамера*.

**Пример 27.** Решить методом Крамера следующую систему линейных

уравнений .

Решение. Найдем определитель основной матрицы системы

.

Так как , то , система имеет единственное решение.

Найдем остальные определители для формул Крамера

,

,

.

По формулам Крамера находим значения переменных

Ответ:

**Метод Гаусса.**

Метод заключается в последовательном исключении переменных.

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов:

На первом этапе расширенная матрица системы приводится с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду

,

где , которой соответствует система

После этого переменные считаются свободными и в каждом уравнении переносятся в правую часть.

На втором этапе из последнего уравнения выражается переменная , полученное значение подставляется в уравнение. Из этого уравнения

выражается переменная . Этот процесс продолжается до первого уравнения. В результате получается выражение главных переменных через свободные переменные .

**Пример 28.** Решить методом Гаусса следующую систему

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

.

Так как больше числа неизвестных, то система совместна и имеет бесконечное множество решений. Запишем систему для ступенчатой матрицы

Определитель расширенной матрицы этой системы, составленный из трех первых столбцов не равен нулю, поэтому его считаем базисным. Переменные

, будут базисными а переменная – свободной. Перенесем ее во всех уравнениях в левую часть

Из последнего уравнения выражаем

Подставив это значение в предпоследнее второе уравнение, получим

откуда  
 Подставив значения переменных и в первое уравнение, найдем  
Ответ запишем в следующем виде:

Ответ: