**Системы линейных уравнений.**

**Основные понятия.**

 Система видa

называется *системой - линейных уравнений с неизвестными*.

 Числа , , называются *коэффициентами системы*.

 Числа , называются *свободными членами системы*, – *переменными системы*. Матрица

называется *основной матрицей системы*, а матрица

 – *расширенной матрицей системы*. Матрицы – столбцы

 и - соответственно *матрицами свободных членов и неизвестных системы*. Тогда в матричной форме систему уравнений можно записать в виде

.

 *Решением системы* называется значений переменных , при подстановке которых, все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства. Всякое решение системы можно представить в виде матрицы - столбца . Тогда справедливо матричное равенство .

 Система уравнений называется *совместной* если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной* если не имеет ни одного решения.

 Решить систему линейных уравнений это значит выяснить совместна ли она и в случае совместности найти её общее решение.

 Система называется *однородной* если все её свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, так как имеет решение

.

**Теорема Кронекера – Копелли.**

 Ответ на вопрос существования решений линейных систем и их единственности позволяет получить следующий результат, который можно сформулировать в виде следующих утверждений относительно системы линейных уравнений с неизвестными

 (1)

 **Теорема 2**. Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной (.

 **Теорема 3**. Если ранг основной матрицы совместной системы линейных уравнений равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

 **Теорема 4**. Если ранг основной матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

**Правила решения систем.**

1. Находят ранги основной и расширенной матрицы и если то система не совместна.
2. Если , то система совместна, в этом случае находят какой-нибудь базисный минор - того порядка и берут соответствующие ему - уравнений системы, отбрасывая остальные. Те переменные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называются главными, остальные переменных называют свободными. Выражения со свободными переменными переносят в правую часть.

3. Находят выражение главных переменных через свободные и получают общее решение системы.

4. Придавая свободным переменным произвольные значения получают все значения главных переменных.

**Методы решения систем линейных уравнений.**

**Метод обратной матрицы.**

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными

 причем , т. е. система имеет единственное решение. Запишем систему в матричном виде

,

где , , .

 Умножим обе части матричного уравнения слева на матрицу

.

 Так как , то получаем , откуда получаем равенство для нахождения неизвестных

.

 **Пример 26.** Методом обратной матрицы решить систему линейных

уравнений

 Решение. Обозначим через основную матрицу системы

.

 Пусть , тогда решение найдем по формуле .

Вычислим .

 Так как , то и система имеет единственное решение. Найдем все алгебраические дополнения

, ,

, ,

, ,

, ,

 Таким образом

 Сделаем проверку

.

 Обратная матрица найдена верно. Отсюда по формуле , найдем матрицу переменных .

.

 Сравнивая значения матриц, получим ответ: .

**Метод Крамера.**

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными

 причем , т. е. система имеет единственное решение. Запишем решение системы в матричном виде или

Отсюда

 Обозначим

. . . . . . . . . . . . . . ,

 Таким образом, получаем формулы для нахождения значений неизвестных, которые называются *формулами Крамера*.

 **Пример 27.** Решить методом Крамера следующую систему линейных

уравнений .

 Решение. Найдем определитель основной матрицы системы

.

 Так как , то , система имеет единственное решение.

 Найдем остальные определители для формул Крамера

,

,

.

 По формулам Крамера находим значения переменных

 Ответ:

**Метод Гаусса.**

Метод заключается в последовательном исключении переменных.

Пусть дана система линейных уравнений с неизвестными.

 Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов:

 На первом этапе расширенная матрица системы приводится с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду

,

где , которой соответствует система

 После этого переменные считаются свободными и в каждом уравнении переносятся в правую часть.

 На втором этапе из последнего уравнения выражается переменная , полученное значение подставляется в уравнение. Из этого уравнения

выражается переменная . Этот процесс продолжается до первого уравнения. В результате получается выражение главных переменных через свободные переменные .

 **Пример 28.** Решить методом Гаусса следующую систему

 Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду

.

 Так как больше числа неизвестных, то система совместна и имеет бесконечное множество решений. Запишем систему для ступенчатой матрицы

 Определитель расширенной матрицы этой системы, составленный из трех первых столбцов не равен нулю, поэтому его считаем базисным. Переменные

 , будут базисными а переменная – свободной. Перенесем ее во всех уравнениях в левую часть

 Из последнего уравнения выражаем

 Подставив это значение в предпоследнее второе уравнение, получим

откуда
 Подставив значения переменных и в первое уравнение, найдем
Ответ запишем в следующем виде:

Ответ: