**Основные теоремы дифференциального исчисления.**

**Понятие о производных высших порядков.**

Пусть дана функция . Ее производная так же является функцией от и называется производной первого порядка. Если дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается .

*Производной – го порядка (или – ой производной) функции* называется производная от ее производной – го порядка, т. е.  
 **Пример 51.** Пусть . Найти производную 5 – го порядка

Решение. Найдем последовательно производные до 5 – го порядка.

**Пример 52.** Найти производную – го порядка функции .

Решение. Находим последовательно производные

Продолжая этот процесс дальше, замечаем следующую закономерность

**Логарифмическое дифференцирование.**

В ряде случаев для нахождения производных функций целесообразно сначала прологарифмировать исходную функцию. Особенно это эффективно, когда исходная функция разлагается на достаточно большое число сомножителей или является одновременно степенной и показательной, т. е. имеет вид

**Пример 53.** Найти производную функции

Решение. Прологарифмируем функцию

Продифференцируем обе части этого равенства

**Пример 54.** Найти производную функции

Решение. Прологарифмируем функцию

Продифференцируем обе части этого равенства

**Дифференциалы высших порядков**.

Так как дифференциал функции является так же функцией, то от него так же можно находить дифференциал.

*Вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка)* функции называется дифференциал от ее дифференциала. Обозначается как

Так как величина не зависит от и является при дифференцировании по постоянной, то

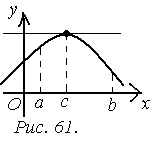
Таким образом, . Аналогично и т. д.

**Основные теоремы дифференциального исчисления.**

**Теорема 28** (теорема Ролля). *Если функция непрерывна на отрезке , дифференцируема на интервале и на концах отрезка принимает одинаковые значения , то найдется хотя бы одна точка , в которой производная функции равна нулю, т. е. .*

Доказательство. Так как непрерывна на , то она достигает на нем своего наибольшего () и наименьшего () значений. Если , то постоянна на и для любой точки из отрезка . Пусть и , . Тогда для всех верно неравенство и

Так как всегда , то при , получаем а при , получаем . Но функция дифференцирована в точке , следовательно ее пределы слева и справа должны совпадать. Это возможно лишь в случае . Аналогично доказывается и случай когда .



**Замечание.** Теорема Ролля означает, что на графике функции найдется такая точка, в которой касательная к графику будет параллельна оси (рис. 61).

**Теорема 29** (теорема Коши). *Если функции и непрерывны на отрезке , дифференцируемы на интервале , причем для , то найдется хотя бы одна точка , такая, что*

Доказательство. Заметим, что , так как в противном случае по теореме Ролля нашлась бы такая точка , что , что противоречит условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на отрезке *,* дифференцируема на интервале , так как является линейной комбинацией функций и , кроме того

По теореме Ролля найдется такая точка , что . А так как

Отсюда

**Теорема 30** (теорема Лагранжа). *Если функция непрерывна на отрезке , дифференцируема на интервале , то найдется хотя бы одна точка ,что*

Доказательство. Пусть , тогда

Подставим эти значения в формулу теоремы Коши, получим

**Следствие 1.** *Если производная функции равна нулю на некотором промежутке , то функция постоянна на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть и . По теореме Лагранжа существует такая точка , что . Но по условию , следовательно, или

**Следствие 2.** *Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке , то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Доказательство. Пусть для . Тогда получаем . Из следствия 1 следует, что

для . Но тогда .

**Формула Тэйлора.**

Пусть дана функция , определенная в некоторой окрестности точки и имеющая в ней производную до порядка включительно. Для любого из этой окрестности представим функцию в виде суммы степеней , т. е.

Найдем коэффициенты . Для этого в равенстве положим . Тогда . Продифференцируем исходное равенство

.

Приравняем опять , получим . Продолжая этот процесс дальше, найдем , , …, . Таким образом,

Окончательно выражение для примет вид

Можно показать, что

Точка находится между и , т. е. . Это равенство называется *формулой Тэйлора*. При , получим и формула совпадет с формулой Лагранжа.

**Пример 55.** Разложить функцию по степеням .

Решение. По формуле Тэйлора для имеем

Найдем производные и их значения в точке

Пятая и все последующие производные будут равны нулю, поэтому и получаем разложение

Если в формуле Тэйлора положить получим частный случай - формулу Маклорена

где .

С помощью формулы Маклорена можно находить приближенные значения трансцендентных функций, разложение которых известно

где

где

где – числа Бернулли

**Правила Лопиталя.**

**Теорема 31.** *Пусть функции и непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки и . Если в окрестности точки , то*

Доказательство. Применим к функциям  *и* теорему Коши для отрезка , лежащего в окрестности точки . Тогда

где . Учитывая, что , получаем

При , величина , тогда

**Замечание 1.** *Теорема верна и в случае, когда и не определены в точке , но выполняется условие*

**Замечание 2.** Теорема верна и для случая, когда . Действительно, положим получим

**Теорема 32** (Без доказательства). *Если функции и непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки ( кроме может быть, самой точки ) и в этой окрестности*

Если существует предел

**Пример 56.** Вычислить предел

используя правила Лопиталя.

Решение.

**Пример 57.** Вычислить предел

используя правила Лопиталя.

Решение. Предел имеет неопределенность вида , поэтому

**Пример 58.** Вычислить предел

используя правила Лопиталя.

Решение. Обозначим искомый предел через и найдем

Таким образом, , отсюда