**Производная и дифференциал.**

**Производная функции и ее геометрический смысл.**

Пусть функция определена на некотором интервале и .

*Производной функции в точке*  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

Функция , имеющая производную в каждой точке интервала , называется *дифференцируемой на этом интервале*. Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*. Величину

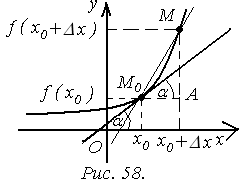
называют *приращением функции* и обозначают .

**Пример 42.** Найти производную функции .

Решение. По определению производной

**Геометрический смысл производной**.

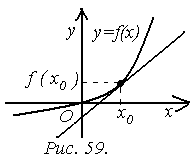
Пусть задана функция , непрерывная в некоторой окрестности точки (рис. 58). Построим на осях координат точки и . Тогда длина , ,



При точка стремится к точке и в пределе совпадает с ней. Угол стремится к углу наклона касательной и в пределе совпадает с ним. Секущая превращается в касательную к графику функции в точке . Таким образом,

Производная функции в точке есть тангенс угла наклона к оси касательной к графику функции в этой точке. Это является геометрическим смыслом производной.

Так как общее уравнение касательной в точке имеет вид , , , то окончательно уравнение касательной (рис. 59) можно записать в виде



**Пример 43.** Написать уравнение касательной к графику функции в точке

Решение. Так как , то вычислим значения , , . Окончательно получим или .

**Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функций.**

**Теорема 20.** *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.*

Доказательство. Пусть функция дифференцируема в некоторой точке . Тогда существует предел

По теореме 9 о связи предела и бесконечно малой, имеем

где при . Отсюда Тогда

Это означает, что

Теорема доказана.

Обратная теорема неверна. Непрерывная функция может не иметь производной, что показывает следующий пример.

**Пример 44.** Пусть . Тогда в точке функция непрерывна, но не имеет производной. Действительно

Пределы справа и слева не совпадают, следовательно, производной в точке не существует.

**Основные формулы и правила дифференцирования функций.**

Пусть функции и дифференцируемы в некотором интервале .

**Теорема 21.** *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций, т. е.*

Доказательство.

**Теорема 22.** *Числовой множитель (константу) можно выносить за знак производной, т. е.*

Доказательство.

**Теорема 23.** *Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т. е*.

Доказательство.

**Теорема 24.** *Производная частного двух функций , если , равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя, т. е*

Доказательство.

**Теорема 25.** *Производная константы равна нулю, т. е. .*

Доказательство. Пусть , тогда

**Таблица основных производных.**

**Степенные функции.**

**Показательные функции.**

1) ; 2) .

**Логарифмические функции.**

**Тригонометрические функции.**

**Дифференциал и его геометрический смысл.**

**Основные понятия.**

Пусть функция имеет в точке отличную от нуля производную

Тогда по теореме 8 о связи функции, ее предела и бесконечно малой, ее можно представить в виде суммы

где , при , отсюда Таким образом, является суммой двух бесконечно малых и . Величину называют *главной частью приращения функции* .

*Дифференциалом функции* в точке называется главная часть ее приращения в этой точке. Обозначается или , . Так как для функции справедливы равенства

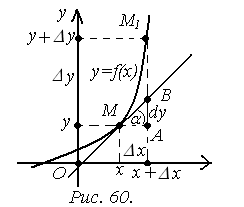
то и Отсюда следует выражение производной через дифференциалы

**Пример 45.** Найти дифференциалы функций и .

Решение. Для первой функции , для второй

**Геометрический смысл дифференциала.**

Пусть дана некоторая дифференцируемая в точке функция (рис. 60). По построению Тогда из прямоугольного треугольника следует



Отсюда

Таким образом, *дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке при приращении аргумента* . В этом заключается геометрический смысл дифференциала.

**Применение дифференциала к приближенным вычислениям.**

Пусть дана функция . Тогда , где , при . Отсюда , и . В итоге получаем формулу приближенного вычисления функции

**Пример 46**. Вычислить приближенное значение .

Решение. Рассмотрим функцию . Пусть Так как

то

**Производная сложной функции.**

Пусть некоторая функция, где так же функция, тогда выражение является функцией, которая называется *сложной функцией от переменной* . Переменная в этом случае называется *промежуточной*.

**Теорема 26.** *Если функция имеет производную в точке , а функция имеет производную в точке , то сложная функция имеет производную в точке , которая находится по формуле .*

Доказательство. Пусть

Отсюда по теореме 9 о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем , или , где при . Функция имеет производную в точке

поэтому или , где при . Отсюда

. Разделим обе части на

где и , при . По теореме 10 (обратной к теореме 9) о связи функции, ее предела и бесконечно малой, имеем

Рассмотрим примеры на применение теоремы 25.

**Пример 47.** Найти производную функции .

Решение. В нашем случае , . По теореме 25 имеем

.

**Пример 48.** Найти производную функции

Решение. В нашем случае , . По теореме 25 имеем

**Пример 49.** Найти производную функции .

Решение. В нашем случае , , . По теореме 26 имеем

**Производная обратной функции.**

**Теорема 27.** *Если функция строго монотонна на интервале и имеет неравную нулю производную в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция так же имеет производную в соответствующей точке и*

Доказательство. Пусть для функции и ее обратной выполнены все условия теоремы. Дадим аргументу обратной функции приращение . В силу монотонности исходной функции, соответствующее приращение будет так же не равно нулю, т. е. . Тогда справедливо равенство

Если , то в силу непрерывности обратной функции, так же и так как

то имеем

**Пример 50.** Рассмотрим функцию . Ее обратная . Тогда по теореме 26