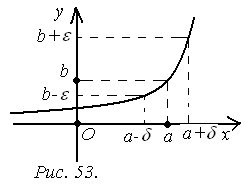
**Пределы.**

*Окрестностью* произвольной точки будем считать любой интервал , содержащий эту точку.

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки , кроме, может быть, самой точки .

Число называется *пределом функции* в точке , если для любого положительного числа найдется такое положительное число , что для всех , удовлетворяющих условию выполняется условие . В таком случае записывают



Определение предела в математических терминах можно записать следующим образом (рис. 53): Число называется *пределом функции* в точке , если что из условия следует .

В определении предела функции считается, что стремится к любым способом, оставаясь либо меньшим , либо большим, либо колебаясь около точки .

Число называется *пределом функции слева в точке* , если

если что из условия следует .

Записывается это как

Аналогично определяется предел справа. Число называется *пределом функции справа в точке ,* если если что из условия следует . Записывается это как

Если , то предел функции в точке не существует.

**Предел функции при**

Пусть функция определена на всей числовой оси .

Число называется *пределом функции при*  , если , существует такое число , что для всех , удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство . Записывается это как

**Бесконечно малые и бесконечно большие функции.**

Функция называется *бесконечно большой при* , если для любого числа , , что для всех , удовлетворяющих неравенству , выполняется неравенство . Записывается это как

при или

Если при , , то

Если при , , то

Функция называется бесконечно малой при , если

**Свойства бесконечно малых функций.**

1. Сумма бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

3. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая.

5. Если функция бесконечно малая, то функция есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция бесконечно большая, то есть бесконечно малая функция.

**Теоремы о связи предела функции и бесконечно малых.**

**Теорема 9.** *Если функция имеет предел, равный при , то ее можно представить как сумму числа и бесконечно малой функции , т. е. если то .*

Доказательство. Пусть тогда что из условия следует , т. е. Следовательно

т. е. функция является бесконечно малой при . Отсюда . Теорема доказана.

**Теорема 10** (обратная). *Если функцию можно представить в виде суммы числа и бесконечно малой функции , то*

Доказательство. Пусть ,

Тогда

такое, что из условия следует .

Так как , то получим условие: такое, что из следует . Следовательно,

**Основные теоремы о пределах.**

**Теорема 11**. *Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов. Т. е.*

Доказательство. Пусть

Тогда по теореме 7 , Следовательно,

Так как по свойству 1 бесконечно малых, функция является бесконечно малой, то по теореме 9

**Теорема 12.** *Функция может иметь только один предел при*

Доказательство. Пусть

По теореме 10

Следовательно,

**Теорема 13.** *Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, т. е.*

Доказательство. Пусть

Тогда по теореме 7 , Следовательно,

Так как по свойствам 1- 3 бесконечно малых функций, функция является бесконечно малой, то по теореме 9

**Теорема 14**. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела.*

Доказательство. По теореме 13

**Теорема 15**. *Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя неравен нулю. Т. е.*

Доказательство. Пусть

Тогда по теореме 9, , Следовательно,

Так как по свойствам 1- 3 бесконечно малых функций, функция

является бесконечно малой, то по теореме 10

**Непрерывность функций.**

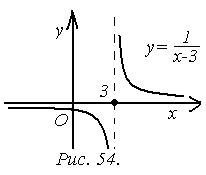
Пусть функция определена в точке и в некоторой окрестности этой точки. Функция называется *непрерывной в точке* , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е.

Это означает, что вычисление предела функции в точке сводится к вычислению значения функции в точке .

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции.

Если точка разрыва функции , то в ней не выполняется одно из следующих условий:

1) Функция определена в окрестности точки , но не определена в самой точке (рис. 54);



2) функция определена в точке и ее окрестности, но не существует предела при . Например, функция

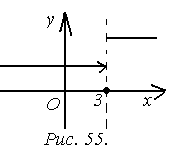
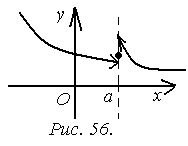


график которой изображен на рис. 55.

3) функция определена в точке и ее окрестности, существует но этот предел не равен значению в точке (рис. 56).



Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка разрыва называется *точкой разрыва первого рода*, если в этой точке существуют пределы слева и справа, но они не равны

Этому условию соответствуют точки, указанные на рисунках 55 и 56.

Точка разрыва называется *точкой разрыва второго рода*, если, по крайней мере, один из односторонних пределов равен плюс или минус бесконечности (рис. 54).

**Примеры вычисления пределов.**

**Пример 35.** Вычислить

Решение. Так как функция определена в точке , то ее предел равен значению в этой точке

**Пример 36**. Вычислить

Решение. Так как значения числителя и знаменателя в точке равны нулю, то предел имеет неопределенность вида . Преобразуем числитель и знаменатель, воспользовавшись их разложением на множители

Таким образом,

**Пример 37.** Вычислить

Решение. Так как значения числителя и знаменателя в точке равны нулю, то предел имеет неопределенность вида . Преобразуем дробь, домножив числитель и знаменатель на сопряженное выражение получим

**Признаки существования пределов.**

Не всякая функция имеет предел. Так функции и при не имеют пределов.

**Теорема 16.** *Если функция заключена между двумя функциями и , стремящихся к одному и тому же пределу, то он так же стремится к этому пределу, т. е. если*

и , то

Доказательство. По определению предела

Тогда для выполняются оба неравенства и

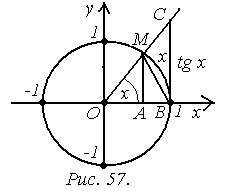
Так как , то или

**Теорема 17.** (Без доказательства). *Если функция является монотонной и ограниченной при или при , то существует ее левый предел  
или ее правый предел*

**Первый замечательный предел.**

**Теорема 18.**

Доказательство. Выберем на координатной плоскости круг с единичным радиусом и центром в начале координат (рис. 57). Построим в первой четверти угол в радиан. Тогда длина дуги будет так же равна . Так как по построению



и отрезки , то справедливы неравенства

Отсюда разделив на , получим

Так как

то по теореме 15, для имеем

Если же , то

и поэтому

Так как пределы слева и справа равны, то получаем окончательно

**Замечание.** Верным является так же и предел

Данный предел называют *первым замечательным пределом*.

**Пример 38.** Вычислить предел  
 Решение. По свойству пределов

**Пример 39.** Вычислить предел  
 Решение. По свойству пределов

**Второй замечательный предел.**

**Теорема 19.** (Без доказательства).

*где* .

Так как выражение в скобках стремится к единице, то предел имеет неопределенность и называется *вторым замечательным пределом*.

**Пример 40**. Вычислить

Решение. Так как предел имеет неопределенность вида и, следовательно, является вторым замечательным пределом, то

**Пример 41**. Вычислить

Решение. Так как предел имеет неопределенность вида и, следовательно, является вторым замечательным пределом, то