7 Докажите непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра.

8 Докажите интегрируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.

9 Докажите дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра.

10 Сформулируйте и докажите свойства линейности и сдвига преобразования Фурье.

11 Сформулируйте и докажите преобразования Фурье от производной.

12 Сформулируйте и докажите дифференцирование преобразования Фурье.

13 Сформулируйте и докажите преобразование Фурье от свертки.

В о п р о с ы и з а д а ч и н а п о н и м а н и е

1 Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $\mathbb{R}$ и несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ сходится. Являются ли равномерно сходящимися на любом конечном отрезке несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x-t)\,dt$ и $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x-t)\,dt$?

2 Верно ли равенство $v.p.\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \ln\left|\frac{b}{a}\right|$, если $0 \in (a;b)$?

3 Для каких функций существует преобразование Фурье?

4 В чем особенность преобразования Фурье для четных и нечетных функций?

5 Верно ли равенство $x\delta' = -\delta$

Задания к практическим занятиям

Раздел 1 Теория рядов

Задания для практических занятий и примеры оформления решения по разделу приводятся в первой части комплекса.

Раздел 2 Дифференциальное исчисление функции многих переменных

Темы 2-3 Предел и непрерывность функции многих переменных

1 Являются ли окрестностями точки $A(1;1)$ множества:

а) $\{(x;y) \mid 0<x<1,\ 0<y\le 1\}$;

б) $\{(x;y) \mid x^2+y^2\le 1\}$;

в) $\{(x;y) \mid 0<x<2,\ -1<y<2\}$;

г) $\{(x;y) \mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$?

2 Найти внутренние, граничные и предельные точки множеств:

а) $\{(x;y) \mid |x|<1,\ |y|\le 1\}$;

б) $\{(x;y;z) \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z<2\}$;

в) $\{(x;y;z) \mid 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$;

г) $\{(x;y) \mid x+y<0\}$.

Какие из множеств являются открытыми, замкнутыми, связными, компактами?

3 Найти предел последовательности (x_n) в $\mathbb{R}^2$, где

$$x_n=\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right);\frac{1}{n}\sin n\right).$$

4 Найти области определения следующих функций:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-4}$;

б) $z=y\sqrt{\cos x}$;

д) $z=\sqrt{9-\left(x^2+y\right)^2}$;

е) $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$;

в) $u = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$; ж) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2-25}$;

г) $z = \dfrac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$; и) $z = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin y}$.

5 Найти для функции $f(x;y) = \dfrac{2x-3y}{3x-2y}$ значения $f(2;1)$, $f(1;2)$, $f(a;-a)$, $f(-a;a)$.

6 Выяснить, имеет ли предел при $x \to 0$, $y \to 0$ функция

$$f(x;y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ?$$

7 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -3}} \dfrac{(x-2)^2-(y+3)^2}{(x-2)^2+(y+3)^2}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}$.

8 Показать, что для функции

$$f(x;y) = (2x+3y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

не существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)$, но существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = 0$.

9 Показать, что для функции

$$f(x;y) = \frac{x^2+y^2-x+2y}{x+y}$$

существуют повторные пределы $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y)$, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)$, а предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

10 Имеет ли предел при $x \to \infty$, $y \to \infty$ функция

$$f(x;y)=\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}\,?$$

11 Найти точки разрыва следующих функций:

а) $f(x;y)=\dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2}$; г) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{\sin xyz}$;

б) $f(x;y)=\ln\left|1-(x+1)^2-(y-2)^2\right|$; д) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-z}$;

в) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2-2x+3y}{x+y}$; е) $f(x;y;z)=\dfrac{1}{x^2-y^2+z^2}$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти область определения функции:

а) $z=x^2+y^2$, в) $z=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}$,

б) $z=\sqrt{4-x^2-2y^2}$. г) $z=\ln\left(5-x^2-y^2-z^2\right)$.

Р е ш е н и е. а) область определения этой функции $D(f)=\mathbb{R}^2$, множество значений $E(f)=[0;+\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\mathbb{R}^3$ является круговой параболоид (рисунок 1. 1);

б) областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4-x^2-2y^2}$, т. е. $4-x^2-2y^2\geq 0$.

Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a=2$, $b=\sqrt{2}$ (рисунок 1. 2):

$$D(f)=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}\leq 1\right\}.$$

Множество значений $E(f)=[0;2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида;

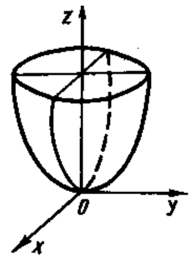

Рисунок 1. 1 – График функции $z = x^2 + y^2$

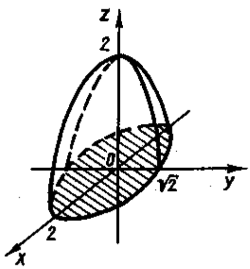

Рисунок 1. 2 – График функции $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$

в) функция определена, если $1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \geq 0$ или $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1$. Отсюда

$$D(f) = \left\{ (x_1; x_2; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1 \right\},$$

т. е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r = 1$ с центром в начале координат. Множество значений функции есть отрезок $[0;1]$:

$$E(f) = [0;1];$$

г) функция определена, если $5 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ или $x^2 - y^2 - z^2 < 5$. Отсюда областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$:

$$D(f) = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 < 5 \right\}.$$

Множество значений функции есть $E(f) = (-\infty; \ln 5]$.

2 Используя определение предела а) по Гейне; б) по Коши доказать $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = 0$.

Решение. а) область определения данной функции $D(f) = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \neq y \right\}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k) = ((x_k; y_k))$, таких, что $x_k \neq y_k$, $x_k \to 0$, $y_k \to 0$. Тогда

$$f\left(M_k\right)=\frac{x_k^3-y_k^3}{x_k-y_k}=x_k^2+x_k y_k+y_k^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=\lim_{k\to\infty}\left(x_k^2+x_k y_k+x_k^2\right)=0;$$

б) выберем произвольное число $\varepsilon>0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M\left(x;y\right)\in\overset{\circ}{U}\left(\delta;\left(0;0\right)\right)$ выполняется неравенство $\left|f\left(x,y\right)-0\right|<\varepsilon$. Так как для любой точки $M(x;y)\in D(f)$ справедливо соотношение

$$f\left(x,y\right)=\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

то

$$\left|f\left(x,y\right)-0\right|=\left|x^2+xy+y^2\right|\le x^2+y^2+\left|xy\right|.$$

Оценим $\left|x\cdot y\right|$:

$$\left(\left|x\right|-\left|y\right|\right)^2=x^2-2xy+y^2\le x^2+y^2\ge 0\ \Rightarrow\ \left|x\cdot y\right|\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Таким образом,

$$\left|f\left(x,y\right)-0\right|\le\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{3}{2}\rho^2\left(O,M\right)<\varepsilon.$$

Отсюда $\rho\left(O,M\right)<\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, где $\rho\left(O;M\right)$ – расстояние от точки $M\left(x;y\right)$ до точки $O\left(0;0\right)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta\left(\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$, такое, что для любой точки $M\left(x;y\right)\in U\left(\delta,\left(0;0\right)\right)$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{x^3-y^3}{x-y}-0\right|<\varepsilon.$$

По определению предела функции по Коши заключаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0$$

3 Найти точки разрыва функций:

а) $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$; б) $z = \dfrac{1}{x-y}$; в) $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

Решение. а) функция $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$ определена на $\mathbb{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции;

б) функция $z = \dfrac{1}{x-y}$ определена для любых x, y, таких, что $x \neq y$. Следовательно, прямая $x = y$ является линией разрыва функции;

в) функция $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. Следовательно, сфера с центром в начале координат и радиусом $R = 3$ является поверхностью разрыва функции.

Тема 4 Частные производные

1 Найти частные производные функций:

а) $z = x^2 + y^3 - 3x^2 y + 4x + 5y - 7$; г) $z = y\sin(3x - 4y)$;

б) $z = 3^{x^2 y^4}$; д) $z = \dfrac{3x - y^5}{x^2 + 4y^3}$;

в) $z = \arccos\dfrac{x}{y}$; е) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - xy}{x - y}$.

2 Вычислить значения частных производных в точке:

а) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$, $M_0(3,2)$; б) $u = \dfrac{y-z}{z-x}$, $M_0(2,1,3)$.

3 Найти полный дифференциал функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{1+x^2}$; б) $z = e^{\frac{x}{y}}$.

4 Вычислить полный дифференциал и полное приращение функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ при переходе от точки $M_0(1;1)$ к точке $M(1,1;0,8)$.

5 Показать, что функция $z = y\sin\left(ye^{-x}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6. Вычислить приближенно значение выражения:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$; б) $1{,}98^{2{,}02}$.

7 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 = y^2$ в точке $M(1{,}1{,}3)$.

Примеры оформления решения

1 Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x,$$

$$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Аналогично

$$\Delta_y z = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2,$$

$$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84.$$

Тогда

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$

$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324.$$

2 Найти частные производные функций

а) $z = x^2 + \sin\left(x + y^2\right)$;

б) $u = xy + \ln(x - y - z)$;

в) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение. а) частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos\left(x + y^2\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x + y^2\right);$$

б) частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z};$$

в) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-t) = y - t\sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt) = \sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-x) = -x\sin 2(z - xt).$$

3 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x-1) - 2(y-1) - (z-3) = 0 \text{ или } 2x + 2y + z - 7 = 0,$$

канонические уравнения нормали –

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1} \text{ или } \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

4 Доказать, что функция $z=xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy .

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x;y)\in\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=$$
$$=y^2\Delta x+2xy\Delta y+\left(2xy\Delta y+\Delta y^2\right)\Delta x+x(\Delta y)^2.$$

Положив $y^2=A$, $2xy=B$, $2xy\Delta y+\Delta y^2=\alpha$, $x\Delta y=\beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0;y_0)$ являются постоянными, а $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

5 Доказать, что функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0;0)$ не имеет частных производных.

Решение. Действительно,

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)+0-0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

6 Найти полный дифференциал функции $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда полный дифференциал равен

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=$$

$$=-\frac{xz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx-\frac{yz}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}dy+\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}dz=$$

$$= \frac{\left(x^2+y^2\right)dz - z\left(xdx+ydy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

7 Приближенно вычислить $\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.

Решение. Пусть $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Тогда искомое число будем рассматривать как значение функции

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то получим:

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}\approx$$

$$\approx\sqrt{4^2+3^2}+\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0{,}05+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0{,}07\approx 5+0{,}08=5{,}08.$$

Тема 5 Дифференцирование сложной и неявной функции

1 Найти $\frac{dz}{dt}$, если

а) $z=e^{x^2+y^2}$, где $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

б) $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-t$.

2 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{dz}{dx}$, если $z=\ln\left(x^2-y^2\right)$, где $y=e^x$.

3 Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

4 Дана дифференцируемая функция $z=f(x;y)$, где $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Выражение $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ представить в полярных координатах.

5 Найти dz, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

6 Найти производные неявной функции в точке:

а) $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y - 3 = 0$, $M(-1;1)$;

б) $2\left(x^2 + y^2\right)^2 = 25\left(x^2 - y^2\right)$, $M(3;1)$.

7 Записать уравнение касательной и нормали в точке:

а) $xy - 4x + 6y - 14 = 0$, $M(-1;2)$;

б) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = 0$, $M(1;0)$.

8 Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$\begin{cases} 7x^2 + y^2 - 3z^2 + 1 = 0, \\ 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0. \end{cases}$$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}$ в точке $M(1;-2;2)$.

9 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = u^2v^2.$$

10 Найти dz, если $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$, $z = uv$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(x,y) = x\cdot\ln y$, где $x = 3u - v$; $y = u^2 + v^2$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3,\ \frac{\partial y}{\partial u} = 2u,\ \frac{\partial x}{\partial v} = -1,\ \frac{\partial y}{\partial v} = 2v,\ \frac{\partial f}{\partial x} = \ln y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3\ln y + 2x\frac{x}{y} = 3\ln\left(u^2 + v^2\right) + 2u\frac{3u - v}{u^2 + v^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\ln y + 2v\frac{x}{y} = -\ln\left(u^2 + v^2\right) + 2y\frac{3u - v}{u^2 + v^2}.$$

2 Найти полную производную сложной функции $f(x,y,z) = x\sin y\cos z$, где $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$; $z = -\sqrt{1 - x^2}$.

Решение. Учитывая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y \cos z\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y \cos z\,,\ \frac{\partial f}{\partial z} = -x \sin y \sin z\,,$$

$$\frac{dx}{dx} = 1,\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}\,,\ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

получим:

$$\frac{df}{dx} = \sin y \cos z + x \cos y \cos z \cdot \frac{2x}{x^2+1} - x \sin y \sin z \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sin \ln\left(x^2+1\right)\left(\cos\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2 \sin\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \frac{2x^2 \cos \ln\left(x^2+1\right) \cos\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}.$$

3 Доказать, что уравнение $y^3 + 2xy + x^4 - 4 = 0$ задает неявную функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую условию $f(1) = 1$.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y)$. Проверим выполнение условий теоремы существования неявной функции:

– $F(1{,}1) = 0$;

– $F'_y(1{,}1) = \left(3y^2 + 2x\right)\Big|_{(1;1)} = 5 \neq 0$;

– частные производные $F'_x = 2y + 4x^3$ и $F'_y = 3y^2 + 2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $(1{,}1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y = f(x)$, являющаяся решением уравнения $y^3 + 2xy + x^4 - 4 = 0$ и удовлетворяющая условию $f(1) = 1$.

4 Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Решение. Обозначим через $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$. Имеем:

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}\,,\ F'_y = \frac{2y}{b^2}\,.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}\,.$$

5 Найти частные производные неявной функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$.

Решение. Обозначим $F(x, y, z) = e^{-xy} - 2z + e^z$. Частные производные этой функции равны:

$$F'_x = -ye^{-xy},\ F'_y = -xe^{-xy},\ F'_z = -2 + e^z.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

6 Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$ в точке $M_0(0,1,1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x, y, z) = 2x$, $\quad F'_x(0,1,1) = 0$,
$F'_y(x, y, z) = 4y$, $\quad F'_y(0,1,1) = 4$,
$F'_z(x, y, z) = 6z$, $\quad F'_z(0,1,1) = 6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1) + 6(z-1) = 0$ или

$$2y + 3z - 5 = 0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-0}{0} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-1}{6}$ или

$$\frac{x}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

7 Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u + v - x = 0, \\ u - yv = 0. \end{cases}$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

Решение. Для данной системы имеем

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = u + v - x, \\ F_1(x, y, u, v) = u - yv. \end{cases}$$

Якобиан системы имеет вид

$$J=\frac{D(F_1;F_2)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial y_2}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -y\end{vmatrix}=-y-1,$$

при этом $J\neq 0$ при $y\neq -1$.

Дифференцированием равенств данной системы находим два уравнения, связывающих дифференциалы четырех переменных:

$$\begin{cases}du+dv=dx,\\ u-ydv-vdy=0.\end{cases}$$

Решая эту систему относительно du, dv при $y\neq -1$, получим

$$du=\frac{ydx+vdy}{1+y},$$

$$dv=\frac{dx-vdy}{1+y}.$$

Дифференцируя повторно, имеем:

$$d^2u=\frac{(dydx+dvdy)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{\left(dydx+\dfrac{dx-vdy}{1+y}dy\right)(1+y)-(ydx+vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{(1+y)dxdy+dxdy-vdy^2-ydxdy-vdy^2}{(1+y)^2}=\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v=\frac{-dvdy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{dx-vdy}{1+y}dy(1+y)-(dx-vdy)dy}{(1+y)^2}=\frac{-dxdy+vdy^2-dxdy+vdy^2}{(1+y)^2}=$$

$$=-\frac{2\left(dxdy-vdy^2\right)}{(1+y)^2}=-d^2u.$$

8 Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=cv$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u\neq 0$$

при $u\neq 0$.

Дифференцированием равенств $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=cv$ находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx=\cos v\,du-u\sin v\,dv\,,$$

$$dy=\sin v\,du+u\cos v\,dv\,,$$

$$dz=c\,dv\,.$$

Из первых двух уравнений находим dv:

$$dv=\frac{\cos v\,dy-\sin v\,dx}{u}\,.$$

Подставим в третье уравнение, получим

$$dz=\frac{c}{u}(\cos v\,dy-\sin v\,dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\sin v}{u} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c\cos v}{u}\,.$$

9 Доказать, что функции $y_1=x_1+x_2$ и $y_2=x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J=\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_2 & x_1\end{vmatrix}=x_1-x_2\,.$$

В точке $(0,0)$ якобиан равен нулю $\left.\frac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(0;0)}=0$. Для любой точки (x_1,x_2), где $x_1\neq x_2$, из окрестности точки $(0,0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\frac{D(y_1,y_2)}{D(x_1,x_2)}\right|_{(x_1,x_2)}\neq 0$. Следовательно, функции

y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $(0,0)$.

Тема 6-7 Частные производные и дифференциалы высших порядков, формула Тейлора

1 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = xy + \dfrac{x}{y}$; г) $z = xe^{-xy}$;

б) $z = y^x$; д) $z = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

в) $u = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$; е) $u = \ln(x + y + z)$.

2 Найти частные производные первого и второго порядка функции $z = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$ в точке $M(3;2)$.

3 Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = \cos\dfrac{y}{x}\arccos\dfrac{x}{y}$.

4 Найти дифференциал второго порядка функции:

а) $z = x^3y^3$; б) $z = e^{xy}$.

5 Найти дифференциал третьего порядка функций:

а) $z = x^4 - y^4 + x^2y^2$; б) $z = \sin(x + \cos y)$.

6 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(2;-1)$ до членов второго порядка включительно функцию

$$f(x,y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4.$$

7 Разложить по формуле Маклорена до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

8 Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$.

Примеры оформления решения

1 Найти частные производные второго порядка функции

$$f(x,y) = \sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Решение. Функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\mathbb{R}^2$. Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Видно, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4^2 x\sin\left(x^2 + y^2\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

2 Найти частные производные второго порядка функции

$$u = xyz - e^{x+y}.$$

Р е ш е н и е. Функция определена и непрерывна на $\mathbb{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - e^{x+y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z - e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3 Найти dz и $d^2 z$, если $z = \ln(x - y) + \sqrt{xy}$.

Р е ш е н и е. Так как

$$z'_x = \frac{1}{x - y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y = \frac{-1}{x-y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y},$$

то

$$dz = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда дифференциал второго порядка равен:

$$d^2z = \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2 + 2\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy -$$

$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

4 Разложить по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $P_0(1;1)$ до членов второго порядка включительно функцию $f(x,y) = 2^{xy}$.

Решение. Для любой точки $P(x,y) \in U(\varepsilon; P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(P_0) + o(\rho^2).$$

С учетом $dx = x-1$, $dy = y-1$ имеем:

$f(P_0) = 2$,

$df(P_0) = f'_x(P_0)dx + f'_y(P_0)dy =$

$$= \left(y \cdot 2^{xy}\ln 2 \cdot (x-1) + x \cdot 2^{xy}\ln 2 \cdot (y-1)\right)\Big|_{P_0} =$$

$$= 2\ln 2 \cdot (x-1) + 2\ln 2 \cdot (y-1),$$

$d^2 f(P_0) = f''_{xx}(P_0)dx^2 + 2f''_{xy}(P_0)dxdy + f''_{yy}(P_0)dy^2 =$

$$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$$
$$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2\,)\Big|_{P_0}=$$
$$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2.$$

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$
$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o\left(\rho^2\right),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

Тема 8 Экстремум функции многих переменных

1 Найти экстремум функций двух переменных:

а) $z=x^2+xy+y^2-x-6y$; г) $z=x^3+3xy^2-51x-24y$;

б) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$; д) $z=e^{-x^2-y^2}\left(3x^2+y^2\right)$;

в) $z=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$; $x>0$; $y>0$; е) $z=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$

2 Найти экстремум функций трех переменных:

а) $u=x^2+y^2+z^2-12x+8y-6z+40$;

б) $u=xy^2z^3(1-x-2y-3z)$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

3 Найти экстремум функции, заданной неявно уравнением

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-8z+9=0.$$

Примеры оформления решения

1 Исследовать на экстремум функцию $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2+2\right),\ z'_y=2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}z'_x&=0,\\ z'_y&=0,\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x+y^2+2&=0,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0=-2$, $y_0=0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

Вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 4\right)\Big|_{(-2;1)} = \frac{1}{2e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = \frac{2}{e}.$$

Так как определитель

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0$$

и $A > 0$, то согласно теореме 4 точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума: $z_{\min} = z(-2,0) = -\frac{2}{e}$.

2 Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-x}\left(x + y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0, \\ z'_y &= 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 - x - y^2 &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

Частные производные второго порядка функции z в точке P_0 равны:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1;0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\frac{2}{e^2} < 0$, то по теореме 4 в точке $P_0(1;0)$ локального экстремума нет.

3 Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

Решая систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x^3 &= 0, \\ 4y^3 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, по теореме 4 нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

Поскольку $\forall P(x,y) \in \dot{U}(\delta; P_0)$ имеет место

$$\Delta z(P) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x,y) =$$
$$= (x + \Delta x)^4 + (y + \Delta y)^4 - (x^4 + y^4) > 0,$$

то точка возможного экстремума $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума. При этом $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

4 Найдите точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Решение. Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные

$$u'_x = 4x - y + 2z,\ u'_y = -x - 1 + 3y^2,\ u'_z = 2x + 2z.$$

Приравнивая их нулю и решая систему трех уравнений, получаем две точки возможного экстремума

$$M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Вычислим частные производные второго порядка данной функции:

$$u''_{xx} = 4\,,\; u''_{yy} = 6y\,,\; u''_{zz} = 2\,,\; u''_{xy} = -1\,,\; u''_{xz} = 2\,,\; u''_{yz} = 0\,.$$

Выражение для дифференциала второго порядка

$$d^2u = 4dx^2 + 6ydy^2 + 2dz^2 - 2dxdy + 2dxdz$$

есть квадратичная форма от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1 = 4 > 0\,,\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0\,,\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0\,.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 4 > 0$, то $M_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -\frac{1}{27}$.

Матрица квадратичной формы d^2u в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой

$$\Delta_1 = 4 > 0\,,\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13 < 0\,,\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 < 0\,.$$

Согласно критерию Сильвестра, d^2u не является знакоопределенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz. Следовательно, в точке $M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ функция не имеет локального экстремума.

5 Найти локальные экстремумы функции $z = f(x,y)$, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Решение. Уравнение задает неявную функцию

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10,$$

которая удовлетворяет условиям теоремы 2 практического занятия 3 и является дифференцируемой. Частные производные первого порядка имеют вид:

$$z'_x = \frac{x-1}{2-z}, \quad z'_y = \frac{y+1}{2-z}$$

и дифференциал первого порядка –

$$dz = \frac{x-1}{2-z}dx + \frac{y+1}{2-z}dy.$$

Приравнивая к нулю частные производные первого порядка, получаем точки возможного экстремума $M_1(1,-1,-2)$, $M_2(1,-1,6)$.

Дифференцируя дважды исходное уравнение, получим:

$$dx^2 + dy^2 + z\,d^2z + dz^2 - 2d^2z = 0.$$

Отсюда находим дифференциал второго порядка

$$d^2z = \frac{1}{2-z}dx^2 + \frac{1}{2-z}dy^2 + \frac{1}{2-z}dz^2,$$

который представляет собой квадратичную форму от переменных dx, dy, dz.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$. Согласно критерию Сильвестра, d^2z является положительно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_1 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = 1/4 > 0$, то $M_1(1,-1,-2)$ является точкой локального минимума, $z_{\min} = -2$.

Матрица этой квадратичной формы в точке M_2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$. Согласно критерию Сильвестра, $d^2 z$ является отрицательно определенной квадратичной формой от переменных dx, dy, dz, следовательно, в точке M_2 функция имеет локальный экстремум. Поскольку $a_{11} = -1/4 < 0$, то $M_2(1,-1,6)$ является точкой локального максимума, $z_{\max} = 6$.

Тема 10 Условный экстремум

1 Найти условные экстремумы функций:

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

б) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 2$;

в) $z = xy^2$ при $x^2 + y^2 = 1$;

г) $u = xy^2 z^3$ при $x + 2y + 3z = 12$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

2 Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных областях:

а) $z = xy^2 + 4xy + 4x - 8$ в области $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 0$;

б) $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$;

в) $z = 1 + 2x + 2y$ в области $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 6$.

3 Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющей наибольший объем.

4 Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

5 В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

6 На эллипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку наиболее удаленную от точки $P(0;0;3)$.

7 Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью A_1B_1. Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй – v_2. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон преломления светового луча (рисунок 6. 2). (Принцип Ферма: световой луч распространяется вдоль той линии, для прохождения которой требуется минимум времени.)

Примеры оформления решения

1 Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при уравнении связи $x + y - 1 = 0$.

Решение. 1 способ. Для решения воспользуемся методом исключения переменных. Выражая из уравнения связи переменную y и подставляя ее в функцию, получим функцию одной переменной x:

$$z = 2x^2 - 2x + 1.$$

Исследуем ее на локальный экстремум:

$z' = 4x - 2$, $z'' = 4 > 0$,

$z' = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, точка $x = \dfrac{1}{2}$ есть точка локального минимума для функции $z = 2x^2 - 2x + 1$, а соответственно точка $P\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ есть точка условного минимума функции $z = x^2 + y^2$ при уравнении связи $x + y - 1 = 0$.

2 способ. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x = 2x + \lambda,\; L'_y = 2y + \lambda,\; L'_\lambda = x + y - 1.$$

Решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L'_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $\lambda = -1$, т. е. точка $P_0(0{,}5; 0{,}5; -1)$ единственная точка возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как $L''_{xx} = 2$, $L''_{yy} = 2$, то дифференциал второго порядка

$$d^2L = 2dx^2 + 2dy^2$$

является квадратичной формой от переменных dx, dy. В точке $P_0(0,5;0,5;-1)$ матрица квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

главные миноры которой $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ и $a_{11} = 2 > 0$. Следовательно, в точке $P_0(0,5;0,5;-1)$ функция Лагранжа имеет локальный минимум. Тогда функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет в точке $M_0(0,5;0,5)$ условный минимум.

2 Найти экстремум функции $z = 9 - 8x - 6y$, если $x^2 + y^2 = 25$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;\lambda) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$$

Находим ее частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -8 + 2\lambda x, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -6 + 2\lambda y, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 25.$$

Решая систему

$$\begin{cases} -8 + 2\lambda x = 0, \\ -6 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases}.$$

получим

$$x_1 = 4,\ y_1 = 3,\ \lambda_1 = 1;$$
$$x_2 = -4,\ y_2 = -3,\ \lambda_2 = -1,$$

т. е. точки $P_1(4;3;1)$. $P_2(-4;-3;-1)$ являются точками возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

то выражение для второго дифференциала есть

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Видно, что $d^2L\Big|_{P_1} > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = 2 > 0$, то функция $L(x; y; \lambda)$ имеет в точке P_1 минимум. Следовательно, функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_1(4; 3)$ имеет условный минимум, $z_{\min} = z(4;3) = -41$.

Аналогично, $d^2L\Big|_{P_2} < 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{P_1} = -2 < 0$; функция $L(x; y; \lambda)$ имеет в точке P_2 максимум; функция $z = 9 - 8x - 6y$ при уравнении связи $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M_2(-4; -3)$ имеет условный максимум, $z_{\max} = z(-4;-3) = 59$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ на компакте D, ограниченном осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \ge 0$ (рисунок 1. 3).

Решение. Определим локальные экстремумы функции.

Для этого вычислим частные производные:

$$z'_x = 6x^2 - 6y, \quad z'_y = -6x + 6y.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

получаем две точки возможного экстремума $O(0;0)$ и $M(1;1)$.

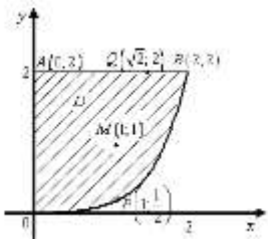

Рисунок 1. 3 – Область D типового примера 3

Внутренней точкой компакта D является только $M(1;1)$. Поскольку $z''_{xx} = 12x$, $z''_{yy} = 6$, $z''_{xy} = -6$ и

$$\Delta(M)=\begin{vmatrix}12 & -6\\ -6 & 6\end{vmatrix}=36,\ z''_{xx}\big|_M=12>0,$$

то точка $M(1;1)$ является точкой локального минимума, $z_{\min}=-1$.

Исследуем функцию на границе области.

Уравнение прямой OA есть $x=0$ и, следовательно,

$$z=3y^2\ (0\le y\le 2).$$

Функция $z=3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает в точке $O(0;0)$ и $A(0;2)$.

Уравнение прямой AB есть $y=2$, и поэтому здесь функция

$$z=2x^2-12x+12\ (0\le x\le 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x. Так как $z'_x=6x^2-12$, то из уравнения $z'_x=0$ получим $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ находится только точка $x_1=\sqrt{2}$, которой соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$. Глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ имеем:

$$z=\frac{3}{4}x^4-x^3,\ (0\le x\le 2).$$

Так как $z'_x=3x^3-3x^2$, то из уравнения $x^2(x-1)=0$ находим точки возможного экстремума $x_1=0$, $x_2=1$, которым соответствуют точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т. е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $\quad z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $\quad z(P)=z(1;1/2)=-\frac{1}{4}$,

$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}$, $\quad z(M)=z(1;1)=-1$.

Откуда $\max\limits_D z = z(A) = 12$, $\min\limits_D z = z(M) = -1$.

4 Из всех прямоугольных параллелепипедов с одинаковой площадью поверхности найти тот, который имеет наибольший объем.

Решение. Обозначим длину, ширину и высоту параллелепипеда через x, y, z. И пусть V – объем параллелепипеда, S – его площадь. Тогда

$$V = xyz,$$

$$S = 2xy + 2yz + 2xz.$$

Задача сводится к нахождению экстремума функции $V(x;y;z) = xyz$ при условии $2xy + 2yz + 2xz = S$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x;y;z;\lambda) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = yz + \lambda(2y + 2z),$$

$$L'_y = xz + \lambda(2x + 2z),$$

$$L'_z = xy + \lambda(2x + 2y),$$

$$L'_\lambda = 2xy + 2yz + 2xz.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + 2xz = S \\ yz + \lambda(2y + 2z) = 0, \\ xz + \lambda(2x + 2z) = 0, \\ xy + \lambda(2x + 2y) = 0, \end{cases}$$

получаем $x = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$, $y = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$, $z = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$, $\lambda = -\dfrac{1}{24}\sqrt{\dfrac{6}{S}}$, т. е. при $\lambda = -\dfrac{1}{24}\sqrt{\dfrac{6}{S}}$ имеем единственную точку $P\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$ возможного экстремума функции Лагранжа.

Так как

$$L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 0,$$

$$L''_{xy} = z - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}},$$

$$L''_{xz} = y - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}}\ ,$$

$$L''_{yz} = x - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}}\ ,$$

то дифференциал второго порядка в точке $P\left(\sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}, \sqrt{S/6}\right)$ имеет вид

$$d^2L = 2\left(\sqrt{\frac{S}{6}} - \frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{S}}\right)\left(dxdy + dxdz + dydz\right).$$

Главные миноры соответствующей матрицы квадратичной формы неотрицательны при $S > 3$. Поэтому можно считать, что в найденных значениях x, y, z объем будет наибольшим.

Следовательно, прямоугольный параллелепипед с заданной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем

$$V_{\max} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}\ ,$$

является кубом со стороной $\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Раздел 3 Интегральное исчисление функции многих переменных

Тема 1-2 Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода

1 Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

а) $\int\limits_{\Gamma} y dl$, где Γ – отрезок прямой $y = x$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x^3}{y^2} dl$, где Γ – дуга линии $xy = 1$ между точками $A(1;1)$ и $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$;

в) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dl$, где Γ – дуга линии $x = \ln y$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;e)$;

г) $\int\limits_{\Gamma} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dl$, где Γ – дуга линии $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} \sin^4 x \cos x \, dl$, где Γ – дуга линии $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где Γ – верхняя половина кардиоиды $r = 2(1+\cos\varphi)$;

ж) $\int\limits_{\Gamma} x^2 y dl$, где Γ – дуга астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2 Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по данной линии в указанном направлении:

а) $\int\limits_{\Gamma} \sin^3 x \, dx + \frac{dy}{y^2}$, где Γ – дуга линии $y = \operatorname{ctg} x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^3 - y^2\right)dx + xydy$, где Γ – дуга линии $y = 2^x$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

в) $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+3y}dy+(x-y)dx$, где Γ – дуга линии $y=x^2$ от точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$;

г) $\int\limits_{\Gamma}y^2dx+xydy$, где Γ – дуга эллипса $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma}ydx-xdy$, где Γ – дуга астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$;

е) $\int\limits_{\Gamma}y^2dx+x^2dy$, где Γ – первая арка циклоиды $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$;

ж) вычислить $\int\limits_{\Gamma}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$, Γ: $x=t^2$, $y=t^4$, $z=t^6$, $0\le t\le 1$;

и) вычислить $\int\limits_{\Gamma}zydx+zxdy+xydz$, Γ – дуга винтовой линии $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\dfrac{3t}{2\pi}$ от точки пересечения с плоскостью $z=0$ до точки пересечения с плоскостью $z=3$.

3 Вычислить длину дуги кривых:

а) $x=t$, $y=\sqrt{2}\ln t$, $z=\dfrac{1}{t}$, $1\le t\le 10$;

б) $x=6\cos t$, $y=6\sin t$, $z=8t$, $0\le t\le 2\pi$.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром, образованным указанными линиями:

а) первой аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$;

б) лемнискатой Бернулли $\left(x^2+y^2\right)^2=2\left(x^2-y^2\right)$.

5 Найти массу материальной кривой с заданной плотностью:

а) $4y=x^4$, $0\le x\le 1$, $\rho(x;y)=x^5+8xy$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$, $\rho(x;y)=x+y$.

6 Найти массу дуги кривой $x=t$, $y=\dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z=t^3$, $0\le t\le 1$, если линейная плотность $\rho(x,y,z)=x+z$.

7 Найти работу, производимую силой $\vec{F}=X\,\vec{i}+Y\,\vec{j}$ вдоль указанной линии:

а) $\vec{F}=x^2\,\vec{i}+xy^2\,\vec{j}$, L – отрезок между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

б) $\vec{F}=\left(x^3+y\right)\vec{i}+\left(x+y^3\right)\vec{j}$, L – ломаная ABC, где $A(1;1)$ и $B(3;1)$, $C(3;5)$;

в) $\vec{F}=x^2\,\vec{i}+\dfrac{1}{y^2}\,\vec{j}$, L – дуга линии $xy=1$ от $A(1;1)$ и $B\left(4;\dfrac{1}{4}\right)$;

г) $\vec{F}=y\vec{i}+x\,\vec{j}$, L – дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$;

д) найти работу A переменной силы

$$F=\left(2+xy^2\right)\vec{i}+\left(x^2y-3\right)\vec{j}$$

вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ от точки $B(-2{,}0)$ до точки $C(2{,}0)$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|\, x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их параметрические представления, имеем:

$$y^2=a^2\sin^2 t,$$

$$dl=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=a\,dt.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{AB} y^2dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2 t\,dt=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{a^3}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3\pi}{4}.$$

2 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r=\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их представления в полярных координатах, имеем:

$$dl=\sqrt{\sin 2\varphi+\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}d\varphi=\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{d\varphi}{r}.$$

Тогда получим

$$\int\limits_{AB}(x+y)dl=\int\limits_0^{\pi/2}(r\sin\varphi+r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{r}=\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi=2.$$

3 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}ydl$, где

$AB=\left\{(x;y)\middle|y^2=2x \text{ от точки } O(0;0) \text{ до точки } M(2;2)\right\}$.

Решение. Имеем:

$$y=\sqrt{2x},\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{2x}},\qquad dl=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{AB}ydl=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

4 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}xdx+xydy$, где

$$AB=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

Решение. Перейдем к параметрическому заданию окружности:

$$\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=r\sin t,\end{cases}$$

где $r=1$ и $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Точке A соответствует значение параметра $t=0$, а точке B – значение $t=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $x'(t)=-\sin t$ и $y'(t)=\cos t$. Тогда

$$\int_{AB} xdx + xydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos t \cdot \sin t + \cos t \cdot \sin t \cdot \cos t]dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = \left.\frac{\cos^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

5 Вычислить интеграл $\int_{AB} (x^2+y)dx + xydy$, где (рисунок 2. 1)

а) $AB = \left\{ (x;y) \middle| y = x,\ 0 \le x \le 1 \right\}$,

б) $AB = \left\{ (x;y) \middle| y = x^2,\ 0 \le x \le 1 \right\}$,

в) $AB = \left\{ (x;y) \middle| \begin{array}{l} \text{ломаная, проходящая} \\ \text{через точки } A(0;0),\ C(1;0),\ B(1;1) \end{array} \right\}$.

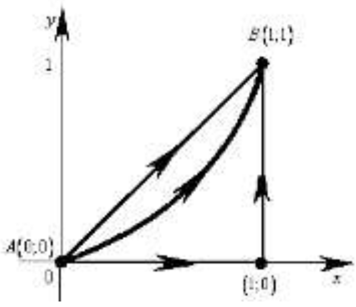

Рисунок 2. 1 – Различные кривые AB

Р е ш е н и е . а) имеем:

$$\int_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x, \\ y'=1, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int_0^1\left(x^2+x+x\cdot x\cdot 1\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6};$$

б) $$\int_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x^2, \\ y'=2x, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int_0^1\left(x^2+x^2+x^2\cdot x\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+2x^4\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15};$$

в) используя свойство аддитивности криволинейного интеграла, имеем:

$$\int_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\int_{AC}\left(x^2+y\right)dx+xydy+\int_{CB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=$$

$$=\begin{bmatrix} AC: y=0,\ 0\le x\le 1, \\ CB: x=1,\ 0\le y\le 1. \end{bmatrix}=\int_0^1\left(x^2+0\right)dx+\int_0^1(1+y)\cdot 0+1\cdot ydy=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

6 Найти массу материальной дуги линии $y=x^2+1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке $M(x;y)$ пропорциональна абсциссе этой точки

Решение. Выражение для плотности имеет вид $\rho(x;y)=k\,x$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда находим

$$m=\int_{AB}\rho(x;y)\,dl=k\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{k}{8}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,d\left(1+4x^2\right)=$$

$$=\frac{k}{8}\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{k}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

7 Вычислить длину дуги линии $x = t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$ при $0 \le t \le 1$.

Р е ш е н и е. Имеем $x_t^{'} = 1$, $y_t^{'} = \sqrt{2}t$, $z_t^{'} = t^2$.

Тогда

$$dl = \sqrt{x_t^{'2} + y_t^{'2} + z_t^{'2}} = \sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\,dt = \left(1 + t^2\right)dt.$$

Значит, длина дуги равна

$$L = \int_{AB} dl = \int_0^1 \left(1 + t^2\right)dt = \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

8 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^6\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$.

Р е ш е н и е. По условию $P(x;y) = 4x^6$, $Q(x;y) = xy$. Тогда работа равна:

$$A = \int_{AB} 4x^6dx + xydy = \int_0^1 4x^6dx + x \cdot x^3 \cdot 3x^2dx = 7\int_0^1 x^6 = x^7\Big|_0^1 = 1.$$

9 Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Отсюда $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$.

Тогда искомая площадь равна:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \pi\,ab.$$

Тема 4-5 Двойной интеграл

1 Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

а) $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{y^2}$, $G = \{(x;y)|\ 1 \le x \le 2, 4 \le y \le 6\}$;

б) $\iint\limits_G (x^2 + y^2)dxdy$, $G = \{(x;y)|\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

2 **Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$ от функции $f(x;y)$, непрерывной в указанной области:**

а) G ограничена линиями $y = x^2$, $y = 4$;

б) G определена неравенствами $x^2 + y^2 \le 9$, $x + y \ge 3$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\iint\limits_G (x - y)dxdy$, G ограничена линиями $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$;

б) $\iint\limits_G (\cos 2x - \sin y)dxdy$, G ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y - \pi = 0$;

в) $\iint\limits_G (x^2 + 2y)dxdy$, G ограничена линиями $y = x^2$, $y = 4$;

г) $\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}dxdy$, G ограничена линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$;

д) $\iint\limits_G (6x^2y + 8xy^3)dxdy$, G ограничена линиями $x^2 + y = 2$, $y^3 = x^2$;

е) $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, G ограничена линиями $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (первая четверть).

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, предварительно изобразив на рисунке область интегрирования:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{2x-3} f(x,y)dy$; г) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$; д) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)dy$; е) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

Примеры оформления решения

1 Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область G (рисунок 2. 2) ограничена линиями $y = x^2$, $x = a$, $a > 0$, $y = 0$.

Решение. Областью интегрирования является криволинейная трапеция, ограниченная сверху параболой $y = x^2$, снизу – осью Ox, справа – прямой $x = a$, $a > 0$.

Если внутренний интеграл взять по y, то y изменяется от 0 до $y = x^2$, а x изменяется в пределах от 0 до a:

$$\iint\limits_G f(x,y)ds = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{x_2} f(x,y)dy.$$

Если внутренний интеграл взять по x, то x изменяется от 0 до $x = \sqrt{y}$, а y изменяется в пределах от 0 до a^2:

$$\iint\limits_G f(x,y)ds = \int\limits_0^{a^2} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{a} f(x,y)dx.$$

2 Представить двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по x и по y, если область G ограничена линиями $y = 2x$, $x = 0$, $y + x = 3$ (рисунок 2. 3).

Решение. Областью интегрирования является треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(0;3)$; $B(1;2)$.

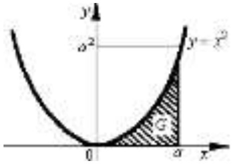

Рисунок 2. 2 – Область интегрирования для типового примера 1

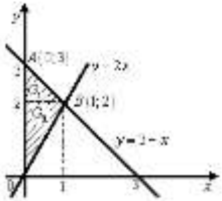

Рисунок 2. 3 – Область интегрирования для типового примера 2

Если внутренний интеграл взять по y, то область G рассмотрим как криволинейную трапецию, ограниченную слева прямой $x=0$, справа – прямой $x=1$; снизу – прямой $y=2x$, сверху – прямой $y+x=3$. Отсюда $0\le x\le 1$, $2x\le y\le 3-x$. Поэтому пределы расставятся следующим образом:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)\,dy$$

Если внутренний интеграл будем брать по x, то область G разбивается прямой $y=2$ на две непересекающиеся области:

$$G_1=\left\{(x;y)\middle|\,0\le x\le\frac{y}{2},\ 0\le y\le 2x\right\},$$

$$G_2=\left\{(x;y)\middle|\,0\le x\le 3-x,\ 2\le y\le 3\right\}.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy+\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_2^3 dy\int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx.$$

3 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G x^2 y\,dxdy$ по области, ограниченной линиями $y=0$, $y=2x^3$, $x+y=3$.

Решение. Область интегрирования G состоит из двух непересекающихся областей G_1 и G_2 (рисунок 2. 4).

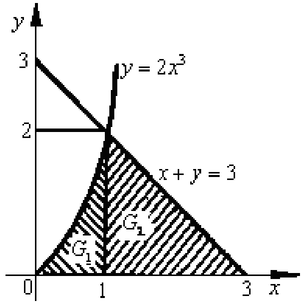

Рисунок 2. 4 – Область интегрирования
для типового примера 3

Рассмотрим различный порядок интегрирования. Сначала вычислим внешний интеграл по переменной x. В этом случае исходный интеграл сводится к вычислению двух интегралов по областям

$$G_1 = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x^3 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (x;y) \middle| 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 - x \right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x^3} x^2 y dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3-x} x^2 y dy$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$G = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le y \le 2,\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}y} \le x \le 3 - y \right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} x^2 y dx = \int\limits_0^2 y dy \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^2 y \left((3-y)^3 - \frac{y}{2} \right) dy = \frac{1}{3} \int\limits_0^2 y \left(27 - 27y + 9y^2 - y^3 - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2} y^2 - \frac{1}{5} y^5 + \frac{9}{4} y^4 - \frac{275}{30} y^3 \right) \Bigg|_0^2 = \frac{154}{45}.$$

4 Вычислить $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, если G – прямоугольник

$$G=\left\{ x\middle|\ 1\le x\le 2,0\le y\le 1\right\}.$$

Решение. Относительно переменных $y=x$ и y интегралы $\int \frac{dx}{(x+y+1)^2}$ и $\int \frac{dy}{(x+y+1)^2}$ табличные, поэтому двойной интеграл сведем к следующему повторному:

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}=\int_1^2 dx\int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2}=\int_1^2 dx\int_0^1 \frac{d(x+y+1)}{(x+y+1)^2}=$$

$$\int_1^2\left(\left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^1\right)dx=\int_1^2\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\left(-\ln(x+2)+\ln(x+1)\right)\Big|_1^2=-\ln 4+\ln 3+\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\ln\frac{9}{8}.$$

5 Вычислить $\iint_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, где G – область, ограниченная параболой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}x^2\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2-2x=0\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=0\,;x_2=2\\ y=x\end{cases}$$

Получаем точки: $O(0;0)$ и $A(2;2)$

Итак, снизу область G ограничена параболой $y=\frac{1}{2}x^2$, сверху – прямой $y=x$:

$$G=\left\{ x\middle|\ 0\le x\le 2,\frac{1}{2}x^2\le y\le x\right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\iint_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\frac{xdy}{x^2+y^2}=\int_0^2 xdx\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\frac{dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{x}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Bigg|_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\right)dx=\int_0^2\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Bigg|_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}x\Big|_0^2-\int_0^2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx=\begin{bmatrix} u=\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ du=\dfrac{2dx}{x^2+4}, \\ dv=dx \qquad v=x \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2xdx}{x^2+4}\right)=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}1+\int_0^2\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^2=\ln 8-\ln 4=\ln\frac{8}{4}=\ln 2 .$$

Тема 6,8 Замена переменных в двойном интеграле, приложения двойных интегралов

1 Вычислить $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линией $x^2+y^2=4y$.

2 Вычислить $\iint\limits_G 2\pi\left(x^2-y^2\right)\sin\pi(x-y)^2\,dxdy$, где G – параллелограмм: $x+y=2$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=2$.

3 Вычислить $\iint\limits_G\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где G – область, ограниченная линией $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

4 Вычислить $\iint\limits_G\sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линиями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

5 Вычислить $\iint\limits_G\frac{dxdy}{(x+y)^3}$, где G – трапеция $ABCD$: $A(1;3)$, $B(2;6)$, $C(6;2)$, $D(3;1)$.

6 Найти площадь области G, ограниченной линиями

$$3x-3y-7=0,\ y^2+2y-3x=0 .$$

7 Найти массу пластинки $y = x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$, если поверхностная плотность равна сумме координат точки.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9.$$

9 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x,\ x = 2y,\ x + y = 1,\ x + 3y = 1.$$

10 Вычислить площадь области, ограниченной кривой

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2x^3.$$

11 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z = x^2 + y^2$, $x - y = 0$, $\sqrt{3}x - y = 0$, $x^2 + y^2 = 8$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$);

б) $x^2 + y^2 = 4x$, $2z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

в) $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 3$;

г) $x^2 + y^2 = 4$ отсекаемого плоскостями $z = 0$, $z = 3x$, $z \ge 0$.

12 Найти массу плоской пластинки G с плотностью $\rho(x;y)$ и ограниченной линиями:

а) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$, $x \le 0$, $y \ge -\dfrac{3}{2}x$, $\rho(x,y) = xy^2$;

б) $x + y = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 0$, $4x - y = 0$, $\rho(x;y) = (x + y)^2$;

в) $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x - y = 0$, $4x - y = 0$,
$\rho(x;y) = (x + y)^{-4}$.

13 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

а) $x + y = 4$, $x - 3y = 0$, $x + 5y = 16$;

б) $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$;

в) $xy = 12$, $x - 3y = 0$, $4x - 3y = 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$;

г) $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\iint\limits_G y^3 dxdy$ по области

$$G = \left\{ (x;y) \middle|\ y \ge x^2, y \le 2x^2, xy \ge 1, xy \le 2 \right\}.$$

Р е ш е н и е . Область G представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{2}{x}$ (рисунок 2. 5, а).

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при $x \geq 0$ отображение вида:

$$u = \frac{y}{x^2},\; v = xy.$$

Образом области G является квадрат (рисунок 2. 5, б)

$$G^* = \left\{ (u;v) \middle|\; 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2 \right\}.$$

Данное отображение является взаимно однозначным и

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}},\; y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

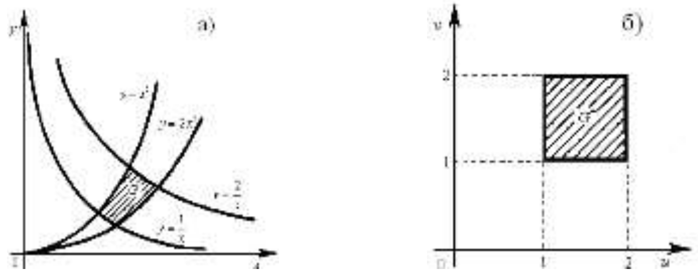

Рисунок 2. 5 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 1

Найдем якобиан отображения:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(u;v)} == \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \dfrac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \dfrac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Тогда

$$\iint_G y^3 dxdy = \left[\begin{array}{l} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}, \\ |J| = \dfrac{1}{3|u|} \end{array} \right] = \iint_{G^*} uv^2 \frac{1}{3|u|} dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{G^*} v^2 dudv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{1}{3} u\Big|_1^2 \cdot \frac{v^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}(2-1)\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}.$$

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где

$$G=\left\{\,(x;y)\middle|x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\le 0\,\right\}.$$

Решение. Область G представляет собой часть круга радиуса 1, расположенного в первой четверти (рисунок 2. 6, а) Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам. При этом область G преобразуется в прямоугольник (рисунок 2. 6, б):

$$G^*=\left\{(r;\varphi)\middle| 0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

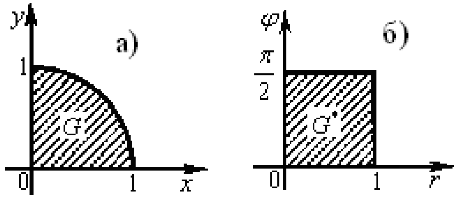

Рисунок 2. 6 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 2

Имеем:

$$\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{G^*} e^{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin\varphi}r\,drd\varphi=\iint\limits_{G^*} e^{r^2}r\,drd\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{r^2}d\left(r^2\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{2}e_0^1\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=4y-y^2,\ x+y=6.$$

Решение. Найдем координаты точек пересечения данных линий. Для этого решим систему:

$$\begin{cases}x=4y-y^2,\\ x+y=6,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4y-y^2,\\ 4y-y^2+y-6=0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4y-y^2,\\ y^2-5y+6=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4,x_2=3,\\ y_1=2,y_2=3.\end{cases}$$

Итак, имеем две точки пересечения $A(4;2)$ и $B(3;3)$.

Тогда площадь равна:

$$S=\iint\limits_G dxdy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int\limits_2^3\left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{6}.$$

4 Вычислить $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область G ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Преобразуем уравнение окружности:

$$x^2+y^2-2ax=0;\ (x-a)^2+y^2=a^2.$$

Область G представляет собой окружность с центром в точке $(a;0)$ и радиусом a (рисунок 2. 7).

Переходя к полярным координатам

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2,$$

получаем уравнение окружности:

$$x^2+y^2=2ax\ \Rightarrow\ r^2=2ar\cos\varphi\ \Rightarrow\ r(r-2a\cos\varphi)=0.$$

Отсюда $r_1=0$; $r_2=2a\cos\varphi$, т. е.

$$0\le r\le 2a\cos\varphi.$$

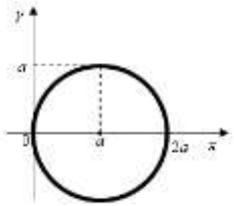

Рисунок 2. 7 – Область G для типового примера 5

Тогда

$$\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_{G^*}r^2\cdot rdrd\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}r^3dr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\varphi d\varphi=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$= a^4\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^4\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{2}a^4\pi .$$

5 Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рисунок 2. 8).

Площадь поверхности равна:

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_G dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 2\sqrt{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

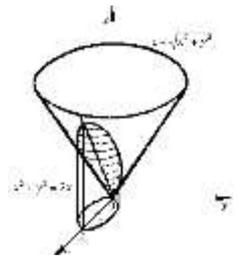

Рисунок 2. 8 – Рисунок для типового примера 6

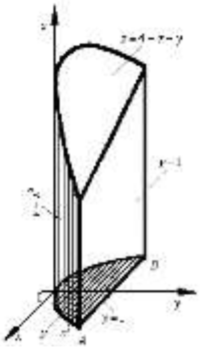

Рисунок 2. 9 – Рисунок для типового примера 7

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = x^2, \; x + y + z = 4, \; y = 1, \; z = 0.$$

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z = 4 - x - y$, снизу – частью плоскости, заключенной между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рисунок 2. 9).

Объем равен:

$$V = \iint\limits_G (4 - x - y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\left((4 - y)x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \right) dy = 2\int\limits_0^1 (4 - y)\sqrt{y}\, dy =$$

$$= 8\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - 2\int\limits_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{68}{15}.$$

7 Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2, $r_1 < r_2$. Поместим полярный радиус системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей примут вид $r = r_1$ и $r = r_2$. Поверхностная плотность в любой точке кольца равна $\rho = \dfrac{k}{r^2}$.

Масса кольца равна

$$m = \iint\limits_G \frac{k}{x^2 + y^2} dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, |J| = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, r_1 \le r \le r_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} r\, dr = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = k\int\limits_0^{2\pi} \left(\ln r \Big|_{r_1}^{r_2} \right) d\varphi =$$

$$= k\ln\frac{r_1}{r_2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi k \ln\frac{r_1}{r_2}.$$

8 Найти массу пластинки G, заданной неравенствами

$$1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge \frac{3x}{2}\,,$$

если поверхностная плотность $\rho(x,y) = \dfrac{9x}{y^3}$

Решение. Переходим к обобщенным полярным координатам

$$x = 2r\cos\varphi\,,\ y = 3r\sin\varphi\,.$$

Якобиан отображения равен $J = 6r$.

Из неравенства $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 4$ получим $1 \le r^2 \le 4$, т. е. $1 \le r \le 2$.

Из уравнения прямой $y = \dfrac{3}{2}x$ имеем

$$3r\sin\varphi = 3r\cos\varphi \ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\,\varphi = 1\,.$$

Отсюда $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Поскольку $x \ge 0$, то очевидно, что $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Масса равна:

$$m = \iint_G \frac{9x}{y^3}dxdy = \iint_{G^*} \frac{9\cdot 2r\cos\varphi}{27r^3\sin^3\varphi}\cdot 6rdrd\varphi =$$

$$= 4\iint_{G^*} \frac{\cos\varphi}{r\sin^3\varphi}drd\varphi = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}d\varphi\int_1^2 \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{2}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \ln r\,\Big|_1^2 = (-2+4)\cdot(\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 2\,.$$

9 Найти центр масс равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительно его гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза AB (рисунок 2. 10).

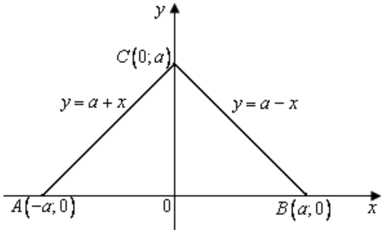

Рисунок 2. 10 – Рисунок для типового примера 10

Тогда относительно системы координат Oxy уравнения катетов AC и BC будут $y = x + a$ и $y = a - x$. Согласно условию задачи в точке $(x; y)$ треугольника ABC плотность имеет вид $\rho(x; y) = ky$.

Масса равна:

$$m = \iint\limits_{ABC} ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = k\int\limits_0^a y\left(x\Big|_{y-a}^{a-y}\right)dy =$$

$$= k\int\limits_0^a y(a - y - y + a)dy = 2k\int\limits_0^a \left(ay - y^2\right)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^3}{3}.$$

Находим статические моменты:

$$S_x = \iint\limits_{ABC} y \cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^2 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^2(a - y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^4}{6};$$

$$S_y = \iint\limits_{ABC} x \cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} x\,dx = 0.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_c = 0,\; y_c = \frac{a}{2}.$$

Момент инерции относительно гипотенузы AB представляет собой I_x. Поэтому:

$$I_x = \iint\limits_{ABC} y^2\,ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^3 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^3(a - y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^5}{10}.$$

Тема 7 Формула Грина

1 Проверить, зависят ли следующие криволинейные интегралы от пути интегрирования:

а) $\int\limits_{\Gamma} 2x e^{x^2+y^2} dx + 3y^2 e^{x^2+y^2} dy$;

б) $\int\limits_{\Gamma} 8x\sin\left(4x^2 - 5y^2\right)dx - 10y\sin\left(4x^2 - 5y^2\right)dy$;

в) $\int\limits_{\Gamma} \left(xy^3 + x^2 - 2y^2\right)dx + \left(y^5 - 3x^3y^2 + x^4\right)dy$.

2 Применив формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint\limits_{\Gamma} \left(1 - x^2\right)ydx + x\left(1 + y^2\right)dy$, $\Gamma = \left\{ (x;y) \mid x^2 + y^2 = 9 \right\}$;

б) $\oint\limits_{\Gamma} 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x+y)^2 dy$, Γ – треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$;

в) $\oint\limits_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, $\Gamma = \left\{ (x;y) \mid x^2 + y^2 = ax \right\}$;

г) $\oint\limits_{\Gamma} 2xdx - ydx$**,** где Γ – замкнутый контур, ограниченный дугой параболы $y = x^2$ $(0 \le x \le 1)$ и отрезком прямой $y = x$ между точками $O(0;0)$ и $B(1;1)$.

3 Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение:

а) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \left(3y^2 + 4y\right)dx + (6xy + 4x - 4y)dy$;

б) $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)} \left(4x^3 - 3y^2 + 5y\right)dx + (5x - 6xy - 4y)dy$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} (x - y)dx + (x + y)dy$, где

$$\Gamma = \left\{ (x; y) \middle| x^2 + y^2 = 4 \right\}.$$

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы Грина. Имеем

$$P(x;y) = x - y, \qquad Q(x;y) = x + y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Тогда

$$\oint\limits_{x^2+y^2=4} (x-y)\,dx + (x+y)\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (1+1)\,dxdy = 2\pi \cdot 2^2 = 8\pi.$$

2 Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy$.

Решение. Здесь $P = y$, $Q = x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования и дифференциал

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Тогда

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy = xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)} = 1 - 0 = 1.$$

3 Вычислить площадь, ограниченную астроидой

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

Решение. Находим площадь:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \right) dt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t \right) dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{3a^2\pi}{8}.$$

4 Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(12xy + 4x^2\right)dx + \left(6x^2 + y\right)dy,$$

предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

Р е ш е н и е. Функции

$$P(x;y) = 12xy + 4x^2,\ Q(x;y) = 6x^2 + y$$

непрерывны вместе со своими частными производными в любой односвязной области, содержащей точки $(0;0)$ $(1;1)$.

Поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x,$$

то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$:

$$dU = \left(12xy + 4x^2\right)dx + \left(6x^2 + y\right)dy.$$

С другой стороны

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Сравнивая два выражения для dU, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 12xy + 4x^2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 + y.$$

Из первого равенства, считая y постоянным, находим

$$U(x;y) = 6x^2y + \frac{4}{3}x^3 + C(y).$$

Находим частную производную по переменной y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 + C'(y).$$

Сравнивая полученное выражение с имеющимся для $\frac{\partial U}{\partial y}$, получим

$$6x^2 + C'(y) = 6x^2 + y.$$

Отсюда $C'(y)=y$ и $C(y)=\frac{y^2}{2}$.

Поэтому

$$U(x;y)=6x^2y+\frac{4}{3}x^3+\frac{y^2}{2}.$$

Тогда данный интеграл равен

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)}\left(12xy+4x^2\right)dx+\left(6x^2+y\right)dy=U(1;1)-U(0;0)=6+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{51}{6}.$$

Тема 9-10 Тройной интеграл

1 Вычислить следующие тройные интегралы по указанным пространственным областям:

а) $\iiint\limits_Q\left(5x+\frac{3}{2}z\right)dxdydz$, $Q:$ $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=0$, $z=x^2+15y^2$;

б) $\iiint\limits_Q\left(x+y+z^2\right)dxdydz$, $Q:$ $-1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$, $2\le z\le 3$;

в) $\iiint\limits_Q\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, $Q:$ $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

г) $\iiint\limits_Q(4x-y+z)dxdydz$, Q $z=2-x^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

д) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, $Q:$ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=0$, $y=x$, $y=2x$, $x=\frac{1}{2}$;

е) $\iiint\limits_Q ydxdydz$, $Q:$ $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;

ж) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, $Q:$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z\ge 0$;

и) $\iiint\limits_Q 8y^2ze^{-xyz}dxdydz$, Q: $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=0$, $z=0$, $z=2$;

к) $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^6}$, Q: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

л) $\iiint\limits_Q (1-2y)dxdydz$, Q: $z=y^2$, $z+2x=6$, $x=0$, $z=4$;

м) $\iiint\limits_Q x^2y^2dxdydz$, Q: $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le x^2+y^2$.

2 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$.

3 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2z$, $z=2$, если плотность $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 2x$, если плотность

$$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

5 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $z=2y^2$, $z=3y^2$ $(y\ge 0)$, $z=4x$, $z=5x$, $z=3$, с плотностью $\rho(x,y,z)=y$.

6 Вычислить объем тела Q, ограниченного поверхностями $2z=y^2$, $2x+3y=12$, $x=0$, $z=0$.

7 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=10x$, $x^2+y^2=13x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y\ge 0$.

8 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $12z=x^2+y^2$.

9 Найти массу однородного тела Q, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2+z^2=8z$

10 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностью $9x^2+2y^2+18z^2=18$, если плотность

$$\rho(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}+z^2}\ .$$

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить $\iiint\limits_{Q}(x+y+z)dxdydz$, где

$$Q=\left\{(x;y;z)\middle|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\right\}.$$

Р е ш е н и е. Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед. Поэтому:

$$\iiint\limits_{Q}(x+y+z)\,dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3(x+y+z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^3 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(3x+3y+\frac{9}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(3xy+\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{2}y\right)\Big|_0^2 dx=\int\limits_0^1(6x+6+9)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1(6x+15)\,dx=\left(3x^2+15x\right)\Big|_0^1=3+15=18.$$

2 Вычислить интеграл $\iiint\limits_{Q}(x+y+z)dxdydz$, область Q ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$.

Р е ш е н и е. Область Q проектируется на плоскость Oxy в область G, которая представляет собой треугольник (рисунок 2. 11): $G=\left\{(x;y)\middle|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\right\}$.

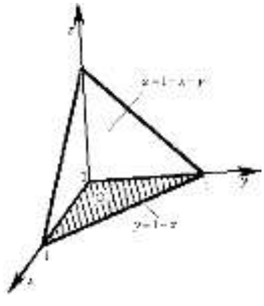

Рисунок 2. 11 – Область интегрирования для типового примера 2

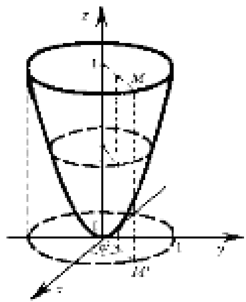

Рисунок 2. 12 – Область интегрирования для типового примера 3

Имеем

$$\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(2 - 3x + x^3\right) dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

3 Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область Q ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (рисунок 2. 12).

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к цилиндрическим координатам. Область Q проектируется в круг $x^2 + y^2 \le 1$. Поэтому $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r \le 1$. Постоянному значению r в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2 + y^2 = r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью Q, получаем изменение координаты z от точек, лежащих на параболоиде, до значений тех точек, лежащих на плоскости $z = 1$, т. е. $r^2 \le z \le 1$.

Имеем:

$$\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{\rho^2}^1 r^2 \cdot r dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r^3 z\right)\Big|_{\rho^2}^1 dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

4 Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область Q есть шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ (рисунок 2. 13).

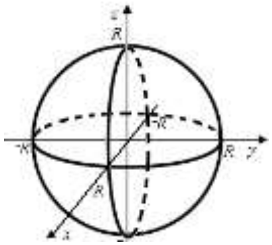

Рисунок 2. 13 – Область интегрирования для типового примера 4

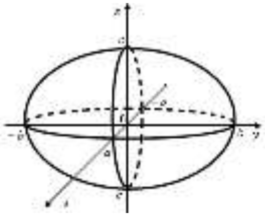

Рисунок 2. 14 – Область интегрирования для типового примера 5

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к сферическим координатам. Из вида области Q следует, что $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. В этом случае подынтегральная функция примет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta =$$
$$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2 .$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta \, d\varphi =$$
$$= \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta \, d\theta =$$
$$= 4\pi \int\limits_0^R r^4 dr = 4\pi \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5} .$$

5 Вычислить $\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz$, где Q – эллипсоид (рисунок 2. 14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

Решение. Переходя к обобщенным сферическим координатам, получим уравнение эллипсоида $r^2 = 1$.

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz =$$

$$=\iiint\limits_{Q^*} r^6\cdot r^2\sin\theta\, abc\, drd\varphi d\theta = abc\iiint\limits_{Q^*} r^8\sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$

$$=abc\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^8 dr = abc\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{r^9}{9}\Big|_0^1 =$$

$$=\frac{abc}{9}\cdot 2\pi(1+1)=\frac{4\pi abc}{9}.$$

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Решение. Тело Q ограничено снизу параболоидом вращения с осью симметрии Oz, вершиной в начале координат, сверху – плоскостью $z = 2$. Проекция тела на плоскость Oxy – область, ограниченная окружностью

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4.$$

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Так как $\frac{x^2+y^2}{2} \le z \le 2$, то $\frac{r^2}{2} \le z \le 2$. Очевидно, что $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$.

Тогда объем тела равен

$$V=\iiint\limits_{Q} dxdydz = \iiint\limits_{Q^*} r\, drd\varphi dz =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{2} rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 rz\Big|_{\frac{r^2}{2}}^{2} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 r\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2\left(2r-\frac{r^3}{2}\right)dr = \int_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}(4-2)d\varphi =$$

$$=2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

7 Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до начала координат.

Р е ш е н и е. По условию $\rho(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.Тогда масса равна

$$m=\iiint\limits_Q \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz\ .$$

Вычислим тройной интеграл. Уравнение сферической поверхности приведем к каноническому виду

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2\ .$$

Имеем сферу с центром в точке $(0;0;R)$ радиуса R. Проекция тела на плоскость $z=0$ – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=R^2$. Переходим к сферическим координатам. Из уравнения сферической поверхности находим пределы интегрирования:

$$0\le r\le 2R\cos\theta\ ,\ 0\le\varphi\le 2\pi\ ,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\ .$$

Тогда масса равна

$$m=\iiint\limits_Q \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz=k\iiint\limits_{Q^*}\frac{r^2\sin\theta}{r}\,drd\varphi\,d\theta=$$

$$=k\iiint\limits_{Q^*} r\sin\theta drd\varphi\,d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}r\sin\theta\,dr=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2R\cos\theta}d\theta=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot 4R^2\cdot\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\left(\cos\theta\right)\ =-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi$$

$$=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}\left(0-\frac{1}{3}\right)d\varphi=\frac{2}{3}kR^2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\ =\frac{4}{3}k\pi R^2\ .$$

Тема 11-13 Поверхностные интегралы

1 Вычислить поверхностные интегралы 1-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$, где Ω – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, лежащая в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS$, где Ω – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dS$, где Ω – боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=0$ $(0\le z\le 3)$;

г) $\iint\limits_{\Omega}x(y+z)dS$, где Ω – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{4-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=1$;

д) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)dS$, где Ω – поверхность $2y=9-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0$;

е) $\iint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+5z^2\right)dS$, где Ω – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостью $z=1$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^3+z^2\right)dS$, где Ω – часть сферы $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$.

2 Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

3 Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2x$, вырезанную из него сферой $x^2+y^2+z^2=4$.

4 Вычислить площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

5 Вычислить поверхностные интегралы 2-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}(y+2z)\,dxdy$, Ω – верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega} zdxdy$, где Ω – внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2+4y^2\right)dxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=3$;

г) $\iint\limits_{\Omega} zdydz-4ydzdx+8x^2dxdy$, где Ω – часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$ (нормаль внешняя),

д) $\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dydz+(y-x)\,dzdx+(z-2)\,dxdy$, где Ω – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\geq 0$, отсекаемая плоскостью $z=1$;

е) $\iint\limits_{\Omega} xdydz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона боковой поверхности цилиндра $y=\sqrt{4-x^2}$, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=2$;

ж) $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ $0\leq z\leq 1$;

и) $\iint\limits_{\Omega}\left(4y^2+4x-5z^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона части поверхности $y^2=4x$, отсеченной плоскостями $x=4$, $z=0$, $z=3$;

к) $\iint\limits_{\Omega} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона на поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

л) $\iint\limits_{\Omega}\left(x+z^2\right)dydz+\left(2x^2+y\right)dxdz$, где Ω – внешняя сторона части параболоида $y=x^2+z^2$, отсеченной плоскостью $y=2$ и расположенной над плоскостью Oxy;

м) $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydxdz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=4$ с основаниями $z=0$ и $z=H$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS$, где поверхность Ω – верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Решение. Параметрические уравнения верхней полусферы имеют вид

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\ y=a\sin\theta\sin\varphi,\ z=a\cos\theta,$$

где $0\le\theta\le\pi/2$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Частные производные по переменным θ и φ равны:

$$x'_\theta=a\cos\theta\cos\varphi,\ y'_\theta=a\cos\theta\sin\varphi,\ z'_\theta=-a\sin\theta;$$

$$x'_\varphi=-a\sin\theta\sin\varphi,\ y'_\varphi=a\sin\theta\cos\varphi,\ z'_\varphi=0.$$

Вычислим

$$E=a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+a^2\sin^2\varphi=$$

$$=a^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=a^2;$$

$$G=a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi=a^2\sin^2\theta;$$

$$F=-a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi=0;$$

$$EG-F^2=a^2\cdot a^2\sin^2\theta=a^4\sin^2\theta.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint\limits_{W}a^2\sin^2\theta\cdot\sqrt{a^4\sin^2\theta}\,d\varphi d\theta=\iint\limits_{W}a^4\sin^3\theta\, d\varphi d\theta=$$

$$=a^4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=-a^4\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-2a^4\pi\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2a^4\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}a^4\pi.$$

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,ds$, где

$$\Omega=\left\{(x;y;z)\,\middle|\,4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}.$$

Решение. Данная поверхность Ω представляет собой часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенную в первом октанте (рисунок 2. 15). Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\dfrac{3}{2}y$. Тогда $z_x'=-2$, $z_y'=-\dfrac{3}{2}$.

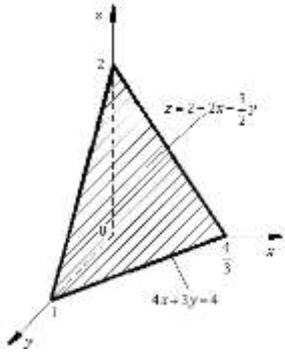

Рисунок 2. 15 – Поверхность интегрирования
к типовому примеру 2

Имеем

$$\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,dS=\iint\limits_{G}\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint\limits_{G}(4-3x-6y)\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx\int_0^{\frac{4}{3}(1-x)}(4-3x-6y)\,dy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-2x^2+4\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

3 Вычислить площадь поверхности Ω, заданной уравнением $z = x^2 + y^2$ и расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. По условию $z = x^2 + y^2$. Тогда

$$z'_x = 2x\,,\ z'_y = 2y\,.$$

Тогда получаем

$$S = \iint_{\Omega} dS = \iint_{G} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy = \iint_{G} \sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy\,,$$

где G – проекция Ω на плоскость Oxy.

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,.$$

Так как область G есть круг $x^2 + y^2 \le 1$, то $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отсюда имеем

$$S = \iint_{G^*} \sqrt{1+4r^2}\,r\,drd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\,d\left(1+4r^2\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+4r^2\right)^3}\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

4 Вычислить $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где Ω – часть конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Поверхность Ω задана неявно уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Проекция Ω на плоскость $z = 0$ представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$.

Так как $F\left(x, y, z\right) = x^2 + y^2 - z^2$, то $F'_x = 2x$; $F'_y = 2y$; $F'_z = 2z$ и

$$dS = \frac{1}{2z}\sqrt{\left(2x\right)^2 + \left(2y\right)^2 + \left(2z\right)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy\,.$$

Получим

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \iint_{G_{xy}} \sqrt{x^2+y^2+\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy =$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{G_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\left[\begin{array}{l}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ 0\le r\le 1,\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ J=r\end{array}\right]=\sqrt{2}\iint\limits_{G^*}r^2drd\varphi=$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=2$.

Решение. Поверхность Ω представляет собой параболоид, заданный явно уравнением $z=x^2+y^2$. Поэтому вектор нормали равен $\vec{n}=(2x,2y,-1)$, так как сторона внешняя и угол $\gamma>\dfrac{\pi}{2}$.

Линия пересечения параболоида с плоскостью $z=2$ есть окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R=\sqrt{2}$:

$$x^2+y^2=2.$$

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(xz\cdot 2x+x^2y\cdot 2y+y^2z\cdot(-1)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^2\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2-y^2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^4+2x^2y^2+2x^2y^2-y^2x^2-y^4\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^4+3x^2y^2-y^4\right)dxdy.$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{2},$$

якобиан отображения равен $J=r$.

Тогда

$$\iint_G \left(2x^4 + 3x^2y^2 - y^4\right)dxdy =$$

$$= \iint_{G^*} \left(2r^4\cos^4\varphi + 3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi - r^4\sin^4\varphi\right)rdrd\varphi =$$

$$= \iint_{G^*} r^5\left(2\cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \sin^4\varphi\right)drd\varphi =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr \int_0^{2\pi} \left(2\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sin^2 2\varphi - \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2\right)d\varphi =$$

$$= \frac{r^6}{6}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{2} + \frac{3(1-\cos 4\varphi)}{8} - \frac{1-2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3\cos 4\varphi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{1+\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{16}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi .$$

6 Вычислить $\iint_\Omega x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, лежащая в первом октанте.

Решение. Поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$, $F'_z \neq 0$ $z \geq 0$. По условию, нормаль к внешней стороне образует угол $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right) = \frac{1}{2z}(2x, 2y, 2z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right);$$

при этом $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

Тогда получим

$$\iint_\Omega x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy = \iint_G \left(x^2 \cdot \frac{x}{z} + y^2 \cdot \frac{y}{z} + z^2\right)dxdy =$$

$$=\iint_G \left(\frac{1}{z}\left(x^3+y^3\right)+z^2\right)dxdy=\iint_G \left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+16-x^2-y^2\right)dxdy .$$

Область G – часть круга, лежащая в первой четверти: $x^2+y^2\le 16$, так как по условию $x\ge 0$, $y\ge 0$. Перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\le r\le 4,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},$$

якобиан отображения есть $J=r$.

Тогда

$$I=\iint_{G^*} r\left(\frac{r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi}{\sqrt{16-r^2}}+16-r^2\right)drd\varphi=$$

$$=\iint_{G^*}\left(\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)+16r-r^3\right)drd\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)d\varphi\int_0^4\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^4 r\left(16-r^2\right)dr=$$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi\right)\int_0^4\frac{r^4dr}{\sqrt{16-r^2}}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{16r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^4=\left[\begin{array}{l} r=4\sin t\\ dr=4\cos tdt\\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\times$$

$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4^4\cdot\sin^4 t\cdot 4\cos tdt}{4\cos t}+\frac{\pi}{2}\cdot\left(2\cdot 64-64\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)^2 dt+32\pi=\frac{4\cdot 64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt+$$

$$+32\pi=\frac{256}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\left(\frac{3}{2}t-\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\cdot\frac{3\pi}{4}+32\pi=64\pi+32\pi=96\pi .$$

7 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz+\left(y+z\right)dzdx+\left(z-y\right)dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Решение. Зададим поверхность Ω параметрическими уравнениями

$$x=3zin\theta\cos\varphi ,\ y=3\sin\theta\sin\varphi ,\ z=3\cos\theta ,$$

где $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Имеем:

$$\left|\frac{D\left(y,z\right)}{D\left(\theta,\varphi\right)}\right|=9\sin^2\theta\cos\varphi ;$$

$$\left|\frac{D\left(z,x\right)}{D\left(\theta,\varphi\right)}\right|=9\sin^2\theta\sin\varphi ;$$

$$\left|\frac{D\left(x,y\right)}{D\left(\theta,\varphi\right)}\right|=9\cos\theta\sin\theta .$$

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz+\left(y+z\right)dzdx+\left(z-y\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin\theta\cos\varphi\cdot\sin^2\theta\cos\varphi+\right.$$

$$+\left(3\sin\theta\sin\varphi+3\cos\theta\right)9\sin^2\theta\sin\varphi+$$

$$\left.+\left(3\cos\theta-3\sin\theta\sin\varphi\right)9\cos\theta\sin\theta\right)d\theta=$$

$$= 27\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3\theta + \cos^2\theta \sin\theta\right) d\theta =$$

$$= 27 \cdot 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta = 54\pi\left(1-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 54\pi \cdot 1 = 54\pi \ .$$

8 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ и лежащей в первом октанте (рисунок 2. 16).

Р е ш е н и е . По определению

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} xdydz \pm \iint\limits_{G_{zx}} ydzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} zdxdy \ .$$

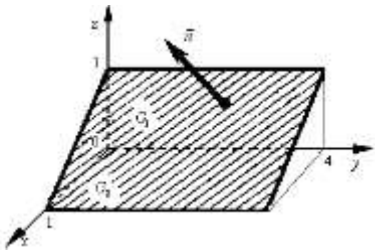

Рисунок 2. 16 – Поверхность интегрирования
к типовому примеру 8

Найдем значения направляющих косинусов

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 ;$$

$$\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = 0 ;$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \ .$$

Интеграл $\iint\limits_{G_{zx}} ydzdx = 0$, так как плоскость Ω параллельна оси Oy (нормаль и ось Oy перпендикулярны), первый и третий интегралы нужно взять со знаком “+”.

Тогда находим

$$\iint\limits_{\Omega^+} zdxdy = \iint\limits_{G_{xy}} (1-x)\,dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-x)\,dx = 2\,,$$

$$\iint\limits_{\Omega^+} xdydz = \iint\limits_{G_{yz}} (1-z)\,dydz = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-z)\,dz = 2\,.$$

Следовательно, $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = 4$.

Тема 14 Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса

1 По внешней стороне замкнутой поверхности Ω тела Q, заданного неравенствами $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$, вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2 zdydz + ydzdx + zdxdy$.

2 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} (x + 3y + 2z)\,dx + (2x + z)\,dy + (x - y)\,dz$, где Γ – контур ΔABC с вершинами $A(2{,}0{,}0)$, $B(0{,}3{,}0)$, $C(0{,}0{,}1)$ в положительном направлении.

4 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} \left(z^2 - x^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy + \left(y^2 - z^2\right)dz$ по контуру Γ, являющимся линией пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и пробегаемый в положительном направлении ($z > 0$).

5 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} 2\left(x^2 + y^2\right)dx + (x + y)^2\,dy$, где Γ – контур ΔABC: $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, пробегаемый в положительном направлении.

6 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Ω – внешняя полная поверхность конуса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 0$ $(0 \le z \le 3)$.

7 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

8 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} y^2dx - x^2dy + z^2dz$, где Γ – линия пересечения параболоида $x^2 + z^2 = 1 - y$ с координатными плоскостями.

9 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, где Γ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 0$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рисунок 2. 17).

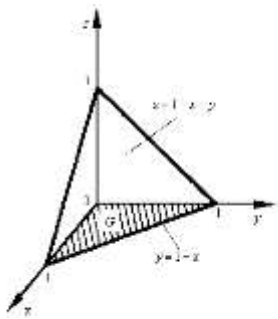

Рисунок 2. 17 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 1

Р е ш е н и е. Используя формулу Остроградского-Гаусса, имеем

$$\oiint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V} (1+1+1)dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz =$$

$$= 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz = 3\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(z\Big|_0^{1-x-y} \right) dy = 3\int\limits_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

2 Вычислить

$$I=\iint_{\Omega}\left(e^{2y}+x\right)dydz+\left(x-2y\right)dzdx+\left(y^2+3z\right)dxdy\ ,$$

где Ω – внешняя сторона поверхности шара

$$\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+5\right)^2=9\,.$$

Решение. Имеем:

$P\left(x,y,z\right)=e^{2y}+x$; $Q\left(x,y,z\right)=x-2y$; $R\left(x,y,z\right)=y^2+3z$.

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1-2+3=2\,.$$

По формуле Остроградского-Гаусса получим

$$I=2\iiint_{Q}dxdydz=2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=72\pi\ ,$$

так как $\iiint_{Q}dxdydz$ численно равен объему шара радиуса $R=3$.

3 Вычислить интеграл $\oint_{\Gamma}x^2y^3dx+dy+zdz$, используя формулу Стокса, где

$$\Gamma=\left\{\left(x;y;z\right)\middle|x^2+y^2=R^2,\,z=0\right\},$$

взяв в качестве поверхности полусферу (рисунок 2. 18)

$$\Omega=\left\{\left(x;y;z\right)\middle|z=+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}.$$

Решение. Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2\,,\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0\,,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0\,,$$

по формуле Стокса, получаем

Рисунок 2. 18 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 3

$$\oint_{\Gamma^+} x^2y^3dx + dy + zdz = -3\iint_{\Omega^+} x^2y^2dxdy = -3\iint_G x^2y^2dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ 0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ J = r. \end{array}\right] = -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^5 \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \, dr =$$

$$= -3\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^R r^5 dr = -\frac{R^6}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{R^6}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\varphi\right) d\varphi = -\frac{R^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi} + 0 = -\frac{\pi R^6}{8}.$$

4 Вычислить

$$I = \oint_{\Gamma}\left(x+y\right)dx + \left(x-z\right)dy + \left(y+z\right)dz$$

по контуру, где $A\left(1,0,0\right)$, $B\left(0,1,0\right)$, $C\left(0,0,1\right)$

Решение. Имеем

$$P = x + y, \; Q = x - z, \; R = y + z.$$

Тогда по формуле Стокса получим

$$I = \iint_{\Omega}\left(1+1\right)dydz + \left(0-0\right)dzdx + \left(1-1\right)dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} 2dtdz = 2\iint_G dydz = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

где G – плоскость ΔABC (внешняя сторона); это плоскость, отсекающая на осях координат отрезки длины единицы. Так как нормаль к внешней стороне плоскости образует с осью Ox угол $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то по правилу вычисления поверхностных интегралов 2-го рода можно записать:

$$\iint_{\Omega} dydz = \iint_D dydz.$$

Имеем $\iint_D dydz = S$, где D – треугольник прямоугольный в плоскости $x = 0$ с катетами длины 1 (D – проекция плоскости ΔABC на плоскость $x = 0$), а S – площадь этого треугольника

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Тема 15-17 Скалярные и векторные поля

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U = xy$; в) $U = x - y - z$;

б) $U = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; г) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2 Найти производную в точке M по заданному направлению $\overrightarrow{MM_1}$ скалярных полей:

а) $U = y^3 + 4xy^2 - 3x + 6y - 1$, $M(2;1;0)$, $M_1(-1;5;0)$;

б) $U = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$, $M(1;1;1)$, $M_1(-1;0;3)$.

3 Найти градиент и его модуль скалярных полей:

а) $U = x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y + 9$; б) $U = xyze^{x+y+z}$.

4 Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; б) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

5 Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$$

через сторону треугольника Ω, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

6 Найти поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность части параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, отсекаемой от него плоскостью $z = 0$ (нормаль внешняя).

7 Вычислить поток для векторных полей $\vec{a}$ и положительно ориентированных замкнутых поверхностей Ω:

а) $\vec{a} = z^2\vec{i} + (xy - 1)\vec{j} - (z - y)\vec{k}$,

$\Omega = \{3x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$;

б) $\vec{a} = (y^2 + xz)\vec{i} + (yx - z)\vec{j} + (yz + x)\vec{k}$,

$\Omega = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = \sqrt{2}\}$.

8 Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

через поверхность цилиндра, заключенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$ (нормаль внешняя).

9 Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\vec{a}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^3+y^3\right)\vec{j}$;

б) $\vec{a}=xyz\vec{i}+\left(2x+3y+z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$.

10 Найти ротор векторных полей:

а) $\vec{a}=xyz\vec{i}+\left(2x+3y-z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$;

б) $\vec{a}=\left(2x-y+5z\right)\vec{i}+\left(x^2+y^2-8z^2\right)\vec{j}+\left(x^3-y^3+2z^3\right)\vec{k}$.

11 Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}=\left(z^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^2-z^2\right)\vec{j}+\left(y^2-x^2\right)\vec{k}$$

по контуру треугольника с вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$ по определению и с помощью формулы Стокса.

12 Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}=\left(x-y\right)\vec{i}+\left(y-z\right)\vec{j}+\left(z-x\right)\vec{k}$$

вдоль линии, состоящей из части винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\dfrac{bt}{2\pi}$ от точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;b)$ и прямолинейного отрезка BA по определению и с помощью формулы Стокса.

13 Выяснить, являются ли соленоидальными и потенциальными векторные поля:

а) $\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=y^2z\vec{i}+xz^2\vec{j}+x^2y\vec{k}$;

в) $\vec{a}=\left(yz-2x\right)\vec{i}+\left(xz+zy\right)\vec{j}+xy\vec{k}$;

г) $\vec{a}=\left(2xy+z\right)\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\vec{k}$.

В случае потенциальности найти потенциал.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U(x,y)=x^2-2y$;

б) $U(x,y,z)=x^2+y^2$.

Р е ш е н и е. а) функция, задающая потенциал поля, зависит от двух переменных. Следовательно, уравнения линий уровня поля имеют вид $x^2-2y=C$. С геометрической точки зрения, это множество парабол (рисунок 2. 19, а), определенное на всей плоскости Oxy;

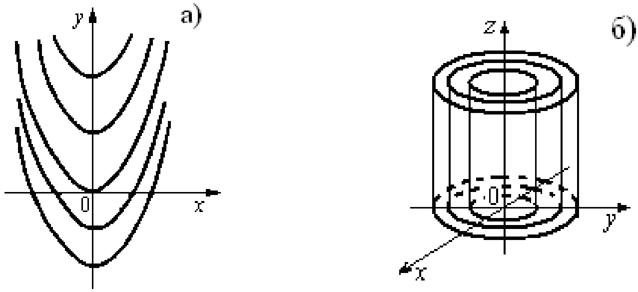

Рисунок 2. 19 – Линии (а) и поверхности (б) уровня
к типовому примеру 1

б) заданный потенциал определяет скалярное поле во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$. С геометрической точки зрения, это множество круговых цилиндров (рисунок 2. 19, б).

2 Найти производную скалярного поля $u = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(2;3;1)$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_0P_1} = (1;4;0)$, длина которого $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{17}$. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma = 0.$$

Вычислим значения частных производных функции $U = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = yz\Big|_{P_0} = -1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\Big|_{P_0} = 1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\Big|_{P_0} = -1.$$

Получаем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1\cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

3 Найти градиент поля $U = x^2 + xyz$ в точке $P_0(1;-1;2)$ и наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке.

Решение. Определим значения частных производных функции $U = x^2 + xyz$ в заданной точке:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = (2x + yz)\Big|_{P_0} = 0;$$

$$\frac{\partial U\left(P_0\right)}{\partial y}=xz\big|_{P_0}=2\,;\quad \frac{\partial U\left(P_0\right)}{\partial z}=xy\big|_{P_0}=-1\,.$$

Тогда имеем

$$\mathrm{grad}U\left(P_0\right)=2j-k\,;\quad \frac{\partial U}{\partial l_{\max}}=\sqrt{5}\,.$$

4 Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника, по которому проходит ток силой I .

Решение. Выберем направление оси Oz, совпадающее с направлением тока I . В этом случае вектор напряженности магнитного поля $\vec{\mathrm{H}}=\frac{2}{\rho^2}\vec{I}\times\vec{r}$, где $\vec{I}=I\cdot\vec{k}$ – вектор тока; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x;y;z)$; ρ – расстояние от оси проводника до точки M . Найдем $\vec{I}\times\vec{r}$:

$$\vec{I}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ 0 & 0 & I\\ x & y & z\end{vmatrix}=-yI\cdot\vec{\mathrm{i}}+xI\cdot\vec{\mathrm{j}}\,,$$

$$\vec{\mathrm{H}}=-\frac{2I}{\rho^2}y\cdot\vec{\mathrm{i}}+\frac{2I}{\rho^2}x\cdot\vec{\mathrm{j}}\,.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий имеет вид

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}\,.$$

Отсюда

$$\begin{cases}xdx+ydy=0,\\ dz=0,\end{cases}\ \text{и}\ \begin{cases}x^2+y^2=c_1,\\ z=c_1,\end{cases}$$

где $c_1\geq 0$.

Таким образом, векторными линиями магнитного поля бесконечного проводника являются окружности с центрами на оси Oz .

5 Вычислить поток вектора $\vec{a}=y^2\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности Ω, представляющую собой часть параболоида $z=x^2+y^2$, отсеченного плоскостью $z=2$ (рисунок 2. 20).

Решение. Рассмотрим функцию $U\left(x,y,z\right)=z-x^2-y^2$.

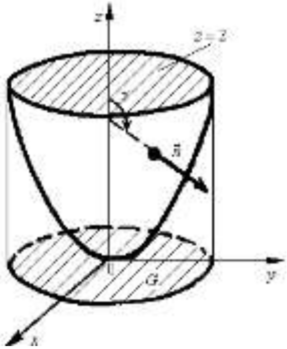

Рисунок 2. 20 – Поверхность к типовому примеру 5

Единичный нормальный вектор к внешней стороне поверхности Ω равен

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \right),$$

так как $\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \pi$.

Тогда поток равен

$$\Pi = \iint_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS = \left[\begin{aligned} &\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \\ &dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \\ &= \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy, \end{aligned} \right] =$$

$$= \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(2y^3 - z\right) dxdy == \left[z = x^2 + y^2 \right] = \iint_{G_{xy}} \left(2y^3 - x^2 - y^2\right) dxdy =$$

$$= \left[\begin{aligned} &x = r\cos\varphi, \\ &y = r\sin\varphi,\ J = r, \\ &0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{aligned} \right] = \iint_{G^*} \left(2r^3 \sin^3\gamma - r^2\right) r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r^4 \sin^3 \varphi - r^3\right) dr = -2\pi .$$

6 Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{a} = y^2 \cdot \vec{i} - \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{j} + +z\left(3y^2 + x\right) \cdot \vec{k}$$

в точках $M_1\left(-2;1;-2\right)$, $M_2\left(7;0;1\right)$, $M_3\left(0;0;0\right)$.

Решение. Заданное поле определено на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдем частные производные от функций

$$X = y^2 ,\ Y = \left(x^2 + y^2\right);\ Z = z\left(3y^2 + x\right)$$

являющихся координатами вектора $\vec{a}\left(M\right)$, и их значения в точках M_1, M_2 и M_3:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \equiv 0 ,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -2y ,\ \frac{\partial Z}{\partial z} = 3y^2 + x$$

$$\frac{\partial Y\left(M_1\right)}{\partial y} = -2 ,\ \frac{\partial Z\left(M_1\right)}{\partial z} = 1 ,$$

$$\frac{\partial Y\left(M_2\right)}{\partial y} = 0 ,\ \frac{\partial Z\left(M_2\right)}{\partial z} = 7 ,$$

$$\frac{\partial Y\left(M_3\right)}{\partial y} = 0 ,\ \frac{\partial Z\left(M_3\right)}{\partial z} = 0 .$$

Тогда

$$\mathrm{div}\vec{a}\left(M_1\right) = 0 - 2 + 1 = -1 ,$$

$$\mathrm{div}\vec{a}\left(M_2\right) = 0 + 0 + 7 = 7 ,$$

$$\mathrm{div}\vec{a}\left(M_3\right) = 0 + 0 + 0 = 0 .$$

Таким образом, данное поле в точке M_1 имеет сток, в точке M_2 – источник, а в точке M_3 нет ни источника, ни стока.

7 Используя теорему Остроградского - Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(\frac{x^2 y}{1 + y^2} + 6yz\right) \cdot \vec{i} + 2x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot \vec{j} - \frac{2xz\left(1 + y\right) + 1 + y^2}{1 + y^2} \cdot \vec{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$.

Р е ш е н и е . Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского - Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости Oxy , ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$.

Пусть Q – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Ω, состоящей из параболоида вращения $\Omega_1=\left\{(x;y;z)\middle| z=1-x^2-y^2\right\}$ и круга Ω_2 на плоскости Oxy (рисунок 2. 21).

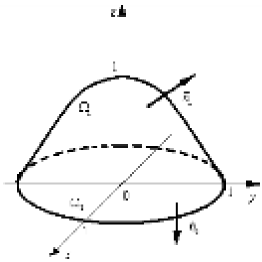

Рисунок 2. 21 – Поверхность к типовому примеру 7

Дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ по формуле (8.12) равна:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}\equiv 0 .$$

На основании формулы Остроградского - Гаусса поток Π через замкнутую поверхность Ω равен нулю.

С другой стороны, обозначим через Π_1 и Π_2 потоки через поверхности параболоида Ω_1 и круга Ω_2 соответственно. По свойству аддитивности поверхностного интеграла 2-го рода получим

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=\iint\limits_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}_1\,dS+\iint\limits_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}_2\,dS=0 .$$

Следовательно, искомый поток

$$\Pi_1=\iint\limits_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}_1\,dS=-\iint\limits_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}_2\,dS .$$

Так как $z=0$ на поверхности Ω_2 и $\vec{n}_2=-\vec{k}$, то

$$\vec{a}=\frac{x^2y}{1+y^2}\cdot\vec{i}+2x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot\vec{j}-\vec{k} ,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_2=1 .$$

Тогда поток через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$ равен

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\Omega_2} dS = -\pi \cdot 1^2 = -\pi .$$

8 Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = xy \cdot \vec{i} + yz \cdot \vec{j} + xz \cdot \vec{k}$$

вдоль линии Γ, являющейся пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 1$.

Решение. Линия Γ представляет собой эллипс. Параметрические уравнения Γ можно получить с учетом того, что все точки Γ проектируются на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = 1$, параметрические уравнения которой есть

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0; 2\pi],$$

и те же точки линии Γ лежат на плоскости $z = 1 - x - y$.

Следовательно, параметрические уравнения Γ имеют вид:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1 - \sin t - \cos t,$$

где $t \in [0; 2\pi]$.

Тогда

$$dx = -\sin t dt,\quad dy = \cos t dt,\quad dz = (-\cos t + \sin t)dt.$$

Согласно формуле (8.14), циркуляция равна

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \oint\limits_{\Gamma} xydx + yzdy + xzdz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + \sin t \cos t (1 - \cos t - \sin t) +$$

$$+ \cos t (1 - \cos t - \sin t)(\sin t - \cos t))dt = -\pi .$$

9 Найти ротор векторного поля

$$\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + +(z^2 + x^2)\vec{k}$$

в произвольной точке.

Решение. Заданное поле $\vec{a}(x; y; z)$ определено и непрерывно-дифференцируемо на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для координатных функций

$$X = x^2 + y^2,\ Y = y^2 + z^2,\ Z = z^2 + x^2$$

по формуле (8.16) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & x^2 + z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2z \cdot \vec{i} - 2x \cdot \vec{j} - 2y \cdot \vec{k} = -2\left(z \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}\right).$$

10 Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $a = y \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ по линии Γ, являющейся пересечением поверхностей $x^2 + y^2 = 4$ и $z = 3$.

Решение. Линия Γ представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $(0;0;3)$, лежащую в плоскости (рисунок 2. 22).

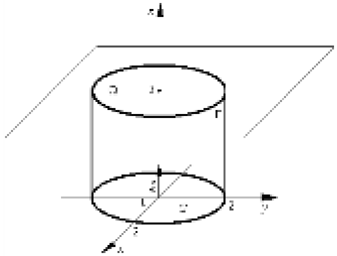

Рисунок 2. 22 – Поверхность к типовому примеру 10

Параметрические уравнения линии Γ имеют вид

$$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 3,\ t \in [0; 2\pi].$$

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса выберем какую-нибудь поверхность Ω, «натянутую» на Γ. Возьмем в качестве Ω круг, границей которого является окружность Γ. Согласно выбранной ориентации контура, нормалью $\vec{n}$ к кругу Ω является единичный вектор $\vec{k}$ оси Oz.

Ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x - 1) \cdot \vec{k}.$$

Тогда по формуле Стокса циркуляция равна

$$C=\iint_{\Omega}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}\right)dS=\iint_{\Omega}\left(2x-1\right)\cos\gamma\,dS=\iint_{G_{xy}}\left(2x-1\right)dxdy=$$

$$=\begin{bmatrix} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi,\ J=r, \\ 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r\left(2r\cos\varphi-1\right)dr=-4\pi\,.$$

11 Проверить, является ли потенциальным векторное поле

$$\vec{a}=2xyz\cdot\vec{i}++x^2z\cdot\vec{j}+x^2y\cdot\vec{k}\,.$$

Решение. Ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix}=\left(x^2-x^2\right)\vec{i}+\left(2xy-2xy\right)\vec{j}+\left(2xz-2xz\right)\vec{k}\equiv 0\,.$$

Следовательно, заданное поле потенциально.

12 Проверить, являются ли соленоидальными следующие поля:

а) $\vec{a}_1=x\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{i}+y\left(x^2-z^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{k}$;

б) $\vec{a}_2=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(3y^2+1\right)\cdot\vec{k}$.

Решение. а) имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_1=z^2-y^2+x^2-z^2+y^2-x^2\equiv 0\,.$$

Значит, поле $\vec{a}_1\left(M\right)$ соленоидально;

б) имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_2=-2y+3y^2+1\not\equiv 0\,.$$

Значит, поле $\vec{a}_2\left(M\right)$ не является соленоидальным.

Раздел 4 Интегралы, зависящие от параметра

Тема 1-3 Собственные и несобственный интегралы, зависящие от параметра,

1 Найти производные функций:

а) $F(x)=\int\limits_{x}^{x^2} e^{-xy^2}dy$; в) $F(x)=\int\limits_{0}^{x}(x+y)f(y)dy$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$; г) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}f(\alpha x)dx$.

2 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $a>0$, $b>0$, если $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_{a}^{b}x^y dy$;

б) $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.

3 Исследовать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\ -\infty<x<+\infty.$$

4 Вычислить несобственные интегралы, зависящие от параметра:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax\cos bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx$, $a>0$, $ac-b^2>0$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$, $\alpha>0$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Найти производную функции

$$\Phi(y)=\int\limits_{0}^{y}\left(x^2+y^2+xy\right)dx.$$

Решение. Имеем:

$$\Phi'(y)=\int_0^y (2y+x)dx+\left(y^2+y^2+y^2\right)\cdot 1-\left(y^2\right)\cdot 0=$$

$$=\left.\left(2xy-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^y+3y^2=2y^2+\frac{y^2}{2}+3y^2=5,5y^2.$$

2 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos xydx,\ y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Возьмем $\forall\ \varepsilon>0$. Покажем, что существует $b'=b'(y;\varepsilon)$.

Имеем

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x}\cos xydx\right|\le\int_\eta^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-\eta}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Положим $b'(y;\varepsilon)=\ln\frac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\forall\ \eta\in[b';+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_\eta^{+\infty} e^{-x}\cos xydx\right|<\varepsilon.$$

Согласно определению, интеграл сходится равномерно по параметру y на $\mathbb{R}$.

3 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Покажем, что определение равномерной сходимости не выполняется. Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{e}$. Тогда $\forall\ b'\in(0;+\infty)\ \exists\,\eta=b'$ и $y=\frac{1}{b'}$ такие, что

$$\int_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx=\int_{b'}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\begin{bmatrix} t=xy,\ y=\dfrac{t}{x}, \\ x=\dfrac{t}{y}, dx=dt \end{bmatrix}=$$

$$= \int_{b'\cdot y}^{+\infty} e^{-t}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-1} = \varepsilon .$$

Следовательно, интеграл $\int_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $Y = [0;+\infty)$.

4 Исследовать на равномерную сходимость интегралы

а) $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ при $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$ и $\alpha \in [0;+\infty)$;

б) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1}$, $y \in \mathbb{R}$.

Решение. а) пусть $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$. Так как $e^{-\alpha x^2} \le e^{-\alpha_0 x^2}$ и $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2}dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится равномерно по параметру α на $[\alpha_0;+\infty)$.

Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$. Покажем, что на $(0;+\infty)$ интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{e}$, $\forall\, b > 0$ возьмем $\eta_0 = b$, $\eta_0' = b + 1$, $\alpha_0 = \frac{1}{(b+1)^2}$. Тогда

$$\int_{\eta_0}^{\eta_0'} \varepsilon^{-\alpha_0 x^2}dx = \int_{b}^{b+1} e^{-\alpha_0 x^2}dx \ge e^{-\alpha_0 (b+1)^2}\int_{b}^{b+1} dx = \frac{1}{e} = \varepsilon_0 .$$

Следовательно, интеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ сходится неравномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$;

б) для подынтегральной функции $f(x;y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, для которой

$$f(x;y)=\frac{1}{x^2+y^2+1}\le\frac{1}{x^2+1}=g(x).$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}=\dfrac{\pi}{2}$ и является сходящимся для всех $x\in[0;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+y^2+1}$ сходится равномерно согласно признаку Вейерштрасса.

5 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx,\ \ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Пусть $f(x;y)=\sin x$, $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$.

Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x)=-\cos x.$$

При $x\ge 1$, $y\ge 0$ для функции $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)=-\frac{e^{-xy}}{x^2}(1+xy)<0,\qquad \frac{e^{-xy}}{x}<\frac{1}{x}=\psi(x),$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Значит, согласно признаку Дирихле, данный интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

6 Вычислить интеграл Пуассона $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$.

Решение. Имеем

$$I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\begin{bmatrix}t=xy, y>0,\\ dt=ydx\end{bmatrix}=y\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2y^2}dx.$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$ по y, получаем

$$I^2 = \int_0^{+\infty} I \cdot e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)} dx.$$

Так как $\left| ye^{-y^2\left(1+x^2\right)} \right| \le de^{-c^2\left(1+x^2\right)}$ и интеграл $\int_0^{+\infty} \left(de^{-c^2\left(1+x^2\right)} \right) dx$ сходится, то интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)} dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $\left[c;d\right] \subset \left(0;+\infty\right)$ согласно признаку Вейерштрасса.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)} dy$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $\left[a;b\right] \subset \left(0;+\infty\right)$. Следовательно, повторный интеграл $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)} dy$ сходится и справедлива изменение порядка интегрирования:

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)} dy = -\int_0^{+\infty} \left(\left. \frac{e^{-y^2\left(1+x^2\right)}}{2\left(1+x^2\right)} \right|_0^{+\infty} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

7 Вычислить интеграл $\int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f\left(x;y\right) = \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Интеграл $\Phi\left(y\right) = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ является несобственным, так как функция $f\left(x;y\right)$ не определена в точках $x=0$ и $x=1$.

При $x \to 0$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o(1)$, при $x \to 1$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Значит, интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ равномерно сходится, и функция $\Phi(y)$ является дифференцируемой. По теореме 10 имеем

$$\Phi'(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = z, \\ t = \operatorname{arctg} z \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(1+y^2\right)z^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1+y^2}} \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Тема 3-4 Интегралы Эйлера, интеграл Фурье

1 С помощью интегралов Эйлера вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^4}dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\,dx$; г) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $n > 0$.

2 Найти область определения и выразить через интегралы Эйлера интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^p dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$, $n > 0$.

3 Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-2x}$, $x \ge 0$.

4 Найти преобразование Фурье функций:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } |x|<\pi,\\ 0 \text{ при } |x|\ge\pi,\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}1+x \text{ при } -1<x\le 0,\\ 1-x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 0 \text{ при } |x|\ge 1.\end{cases}$

Примеры оформления решения

1 Используя интегралы Эйлера, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{t},\, t>0,\\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{t}},\\ x=0\Rightarrow t=0,\\ x=2\Rightarrow t=1\end{array}\right]=\int\limits_0^1 4t\cdot\frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=8\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt=8\cdot\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=8\cdot\frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=$$

$$=8\cdot\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=8\cdot\frac{\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!}=\pi .$$

2 Найти косинус- и синус- преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, и обратные к ним.

Решение. Функция $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют косинус- и синус- преобразования Фурье:

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B-u\int\limits_0^B e^{-t}\sin yt dt\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB+1-u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B+u\int\limits_0^B e^{-t}\cos yt dt\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-y^2\int\limits_0^\infty e^{-t}\cos yt dt\right).$$

Отсюда $F_c(y)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+y^2}$.

Аналогично получим

$$F_s\left(y\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}\sin ytdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y}{y^2+1}\,.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье равны:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos yx}{y^2+1}dy\,,\qquad e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y\sin yx}{y^2+1}dy\,.$$

Тестовые задания для рубежного контроля

Тест 1 Предел и непрерывность функции многих переменных

Вариант 1

1 Расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется равенством: ________________________.

2 Окрестностью точки $(1;1)$ является множество:

а) $(1;2)\times(1;1)$; б) $[0;2]\times[0;2]$; в) $(0;2)\times(0;2)$.

3 Всякая ли непрерывная функция на $[a;b]$ является ограниченной на нем? ________________.

4 Является ли непрерывной в точке $(0;0)$ функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0?\end{cases}$$ ________________.

5 Является ли ограниченной функция $f(x;y)=\dfrac{x^2}{x^2+y}$ в области определения? _____________________.

6 Предел последовательности $\left(\dfrac{\sin n}{n};\dfrac{n}{2^n};\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ равен:

а) $(1;1;0)$, б) $(0;0;0)$, в) $(1;0;0)$.

7 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ равен:

а) 0, б) ∞, в) 1.

8 Повторный предел $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin 2x}{\pi x+y^2}$ равен:

а) 1, б) π, в) $\dfrac{2}{\pi}$.

9 Областью определения функции $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin xy}$ является:

а) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0;0)\}$, б) $\mathbb{R}^2\backslash\{\,(x;y)\mid x=\pi n,\ y=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\,\}$,

в) $\mathbb{R}^2\backslash\{\,(x;y)\mid xy=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\,\}$.

10 Является ли функция $f(x;y)=\sin xy$ равномерно непрерывной на отрезке [0.1]? _________________.

Вариант 2

1 Длина вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется равенством: _________________________.

2 Окрестностью точки $(-1;1)$ является множество:

а) $(-1;2)\times(-1;1)$; б) $[-2;0]\times[-2;0]$; в) $(-2;0)\times(-2;0)$.

3 Всякая ли ограниченная функция является непрерывной? ________________.

4 Является ли непрерывной в точке $(0;0)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{при } x^2+y^2<1,\\ 0 & \text{при } x^2+y^2\geq 1?\end{cases}$ ________________.

5 Является ли ограниченной функция $f(x;y)=\arccos xy$ в области определения? ____________________.

6 Предел последовательности $\left(\dfrac{(-1)^n-n}{n^2};\dfrac{n}{3^n};\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ равен:

а) $(0;0;0)$, б) $(1;1;0)$, в) $(1;0;0)$.

7 Предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4-x^3y+y^2}$ равен:

а) ∞, б) 0, в) 1.

8 Повторный предел $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin\pi x}{2x+y^2}$ равен:

а) 1, б) $\dfrac{\pi}{2}$, в) $\dfrac{2}{\pi}$.

9 Областью определения функции $f(x;y)=\dfrac{1}{\sin(x+y)}$ является:

а) $\mathbb{R}^2\backslash\{(0;0)\}$, б) $\mathbb{R}^2\backslash\{\ (x;y)\mid\ x+y=\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{N}\ \}$,

в) $\mathbb{R}^2\backslash\{\ (x;y)\mid\ x+y=\pi n,\ n\in\mathbb{N}\ \}$.

10 Является ли функция $f\left(x;y\right)=\dfrac{x^3}{x^2+y}$ равномерно непрерывной на отрезке [0.1]? ________________.

Тест 2 Дифференцирование функции многих переменных

Вариант 1

1 Условие дифференцируемости функции $f\left(x_1;x_2;...;x_n\right)$ в точке $\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ имеет вид ________________________.

2 Всякая ли дифференцируемая функция в точке непрерывна этой точке?

3 Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ функции $f\left(x;y\right)$, где $x=x\left(u;v\right)$, $y=y\left(u;v\right)$, находятся по формулам: _____________?

4 Функция Лагранжа для существования условного экстремума функции $f\left(x;y\right)$ удовлетворяет условиям:

а) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1$;

б) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0$;

в) $\dfrac{\partial L}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial L}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1$.

5 Частные производные 1-го порядка функции $f\left(x;y\right)=x^y$ равны:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^y\ln y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=y\,x^{y-1}$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^y$.

6 Дифференциал 1-го порядка функции $f\left(x;y\right)=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$ равен:

а) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2+y^2}$; б) $df=\dfrac{ydy+xdx}{x^2+y^2}$; в) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2-y^2}$.

7 Дифференциал 2-го порядка функции $f(x;y)=x^2y^3$ равен ___________________.

8 Уравнение касательной плоскости к графику функции $x^2+y^2-z^2=0$ в точке $A(3;4;5)$ имеет вид:

а) $-3x+4y-5z=0$; б) $3x+4y-5z=0$; в) $3x+4y+5z=0$.

9 Минимальное значение функции $f(x;y)=x^2+xy+y^2-13x-11y+7$ равно _________.

10 Значение выражения $(1,02)^3(0,97)^2$ приближенно равно _______________.

Вариант 2

1 По определению частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ функции $f(x_1;x_2;...;x_n)$ в точке $(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ равна _________________________.

2 Всякая ли непрерывная функция в точке дифференцируема этой точке?

3 Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявной функции $F(x;y;z)=0$ находятся по формулам: ______________?

4 Формула Тейлора для функция $f(x;y)$ имеет вид:

а) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$;

б) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x,y)$;

в) $f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{n!}d^nf(\xi,\eta)$.

5 Частные производные 1-го порядка функции $f(x;y)=\sin xy$ равны:

а) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-y\cdot\sin xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x\sin xy$;

б) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x\cdot\cos xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$;

в) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\cos xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\cos xy$.

6 Дифференциал 1-го порядка функции $f(x;y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ равен:

а) $df=\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$; б) $df=\dfrac{ydy+xdx}{x^2+y^2}$; в) $df=\dfrac{ydy-xdx}{x^2-y^2}$.

7 Дифференциал 2-го порядка функции $f(x;y)=x^3y^2$ равен ___________________.

8 Уравнение касательной плоскости к графику функции $2x^2+3y^2+4z^2=9$ в точке $A(1;-1;1)$ имеет вид:

а) $2x-3y+4z+9=0$; б) $2x-3y+4z-9=0$; в) $2x-3y+4z=0$.

9 Минимальное значение функции $f(x;y)=x^2+y^2-2x+4y+1$ равно ________.

10 Значение выражения $(1{,}02)^{3{,}01}$ приближенно равно _______________.

Тест 3 Криволинейные интегралы

Вариант 1

1 По определению криволинейный интеграл 2-го рода равен:

а) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$,

б) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$,

в) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{r(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$,

б) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$,

в) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{1+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$.

3 Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB} P(x;y)dx$ равен ______________________.

4 Интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid x = 2\cos t, y = 2\sin t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$ равен:

а) 2π, б) π, в) 3π.

5 Интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid y^2 = 2x, 0 \le x \le 2 \right\}$, равен:

а) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}+1)$, б) $\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)$, в) $\frac{1}{2}(5\sqrt{2}-1)$.

6 Интеграл $\int\limits_{AB} (x^2+y)dx + xydy$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid y = x, 0 \le x \le 1 \right\}$ равен:

а) $\frac{7}{6}$, б) $\frac{7}{5}$, в) $\frac{7}{3}$.

7 Интеграл $\int\limits_{AB} xdx + xydy$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 = 1, x \ge 0, y \ge 0 \right\}$ равен:

а) 1, б) $-\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{6}$.

8 Длина дуги $AB = \left\{ (x,y,z) \mid x = t, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}t^2, z = \dfrac{1}{3}t^3, 0 \le t \le 1 \right\}$ равна ________________________.

9 Работа, произведенная силой $\vec{F} = 4x^6\vec{i} + xy\vec{j}$ вдоль дуги $AB = \left\{ (x,y) \mid y = x^3, 0 \le x \le 1 \right\}$ равна ____________________.

10 Масса материальной дуги кривой $y = x^2 + 1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке дуги прямо пропорциональна абсциссе этой точки, равна ____________.

Вариант 2

1 По определению криволинейный интеграл 1-го рода равен:

а) $\int\limits_{AB} f(x,y)\, dl = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$,

б) $\int\limits_{AB} f(x,y)\, dl = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$,

в) $\int\limits_{AB} f(x,y)\, dl = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{y^2(x) + y'^2(x)}\,dx$,

б) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + y'(x)}\,dx$,

в) $\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_a^b f(x;y(x)) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx$.

3 Изменяется ли знак криволинейного интеграла 2-го рода при изменении направления пути интегрирования? ________________

4 Интеграл $\int\limits_{AB} xy^2 dl$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid x = 3\cos t, y = 3\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}$ равен:

а) $\frac{27}{4}$, б) 27, в) 28.

5 Интеграл $\int\limits_{AB} \sqrt{1+x^2}\,dl$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid 2y - x^2 = 0, 0 \le x \le 3 \right\}$, равен:

а) $\frac{32}{5}$, б) $\frac{32}{3}$, в) 32.

6 Интеграл $\int\limits_{AB} x^3 dx + x^2 dy$, где $AB = \left\{ (x,y) \mid y = x^2, 1 \le x \le 3 \right\}$ равен:

а) 50, б) 60, в) 55.

7 Интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dx + x^2 dy$ по дуге AB, где $AB = \left\{ (x,y) \mid x = t - \sin t, y - 1 - \cos t, 0 \le t \le 2\pi \right\}$ равен:

а) $\pi(5 - 2\pi)$, б) $\pi(5 + 2\pi)$, в) $5 - 2\pi$.

8 Длина дуги $AB = \left\{ (x,y,z) \mid x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, z = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi \right\}$ равна ______________________.

9 Работа, произведенная силой $\vec{F} = \left(x^2 + y\right)\vec{i} + \left(x + y^2\right)\vec{j}$ вдоль дуги $AB = \left\{ (x,y) \mid y = x, -1 \le x \le 0 \right\}$ равна ___________________.

10 Масса материальной дуги кривой $3y = x^3$ между точками $A(0;0)$ и $B\left(1;\frac{1}{3}\right)$, если линейная плотность в каждой точке дуги прямо пропорциональна кубу абсциссы этой точки, равна ________________.

Тест 4 Двойной интеграл

Вариант 1

1 Укажите верную формулу

а) $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$;

б) $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dx$;

в) $\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$.

2 Полярные координаты имеют вид:

а) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $-\infty < r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

б) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$;

в) $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{4}^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{y} f(x.y)dx$;

b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x.y)dx$;

c) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{4}^{x^2} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x.y)dx$ ·

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{1}^{6} dx \int\limits_{6/x}^{7-x} f(x,y)dy$:

а) $\int\limits_{1}^{6} dy \int\limits_{6/y}^{7-y} f(x,y)dx$; б) $\int\limits_{y/6}^{7-x} dy \int\limits_{1}^{6} f(x,y)dx$;в) $\int\limits_{6/y}^{7-x} dy \int\limits_{1}^{6} f(x,y)dx$.

5 Двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}\,dxdy$ по прямоугольнику $D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; 1 \le x \le 2,\ 4 \le y \le 6 \right\}$ равен:

а) 0,125; б) 0,115; в) 0,135.

6 Двойной интеграл $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$ по области G, ограниченной прямыми $y=4x+6,\ \ y=\dfrac{1}{2}x-1,\ \ x=-1$ равен:

а) $-4\dfrac{1}{10}$; б) $-4\dfrac{1}{12}$; в) $-4\dfrac{1}{14}$.

7 Двойной интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ равен:

а) 12π; б) 6π; в) $\dfrac{16\pi}{3}$.

8 Объем тела, ограниченного поверхностями $x+2y-z=0$, $x-2y-2=0$, $x=-1$, $x=3$, $z=0$ равен: ____________________.

9 Масса плоской пластинки ограниченной линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$) с плотностью $\rho(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ равна: __________________.

10 Площадь фигуры, ограниченная линиями $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$, $x^2+y^2=4$ равна ______________________.

Вариант 2

1 Укажите верную формулу

а) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G^*} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)J\,dudv$;

б) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f\left(x(u,v),y(u,v)\right)|J|dudv$;

в) $\iint\limits_G f(x,y)dxdy=\iint\limits_{G^*} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)|J|dudv$.

2 Якобиан перехода от декартовых координат к полярным равен:

а) $J=r^2$; б) $J=r$; в) $J=r\sin\varphi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^{3/2}}^{2-x^2} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

b) $\int_0^1 dx \int_{x^{3/2}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

c) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^{2/3}}^{2-x^2} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-y^{2/3}}^{y^{2/3}} f(x.y)dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$.

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_1^c dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$:

а) $\int_0^1 dy \int_e^{e^y} f(x,y)dx$; б) $\int_0^{\ln x} dy \int_e^{e^y} f(x,y)dx$; в) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

5 Двойной интеграл $\iint_D x\,y^2\,dxdy$ по прямоугольнику $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ равен:

а) 1,5; б) 0,5; в) 1/3.

6 Двойной интеграл $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ по области G, ограниченной прямыми $y=x$, $y=0$, $y=1$, $y=2$ равен:

а) 5; б) 7; в) 3.

7 Двойной интеграл $\iint_{x^2+y^2\le 16} \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$ равен:

а) 2π; б) 4π; в) π.

8 Объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$ равен: ____________________.

9 Масса плоской пластинки ограниченной линиями $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=0$, $4x-y=0$ с плотностью $\rho(x,y)=(x+y)^2$ равна: _________________.

10 Площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2 = 3(x^3-3xy^2)$ равна ______________________.

Тест 5 Тройной интеграл

Вариант 1

1 Укажите верную формулу

а) $\iiint_Q f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$;

б) $\iiint\limits_Q f\left(x,y,z\right)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dz \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f\left(x,y,z\right)dy$;

в) $\iiint\limits_Q f\left(x,y,z\right)dxdydz = \int\limits_a^b f\left(x,y,z\right)dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz$.

2 Сферические координаты имеют вид:

а) $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$;

б) $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$;

в) $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $-\infty < r < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^y dz \int\limits_0^{1-z} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dz \left\{ \int\limits_0^z dy \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^y dz \int\limits_0^{1-z} f(x,y,z)dx + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx \right\}$.

4 Повторный интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz$ равен:

а) 0,125; б) 0,15; в) 0,25.

5 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q (6x+8y+4z+5)dxdydz$ по кубу $Q = \left\{ \left(x,y,z\right) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \right\}$ равен:

а) 10; б) 14; в) 15.

6 Объем тела, ограниченного поверхностями $2y + 3z = 6$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $z = 0$, равен ________________________.

7 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y^2 + z^2 = 4$, $x = 0$, $x = 2$, равен:

а) $\frac{40\pi}{3}$; б) $\frac{80\pi}{9}$; в) $\frac{80\pi}{3}$.

8 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz$ по области, ограниченной поверхностью $x^2+y^2+z^2=9$, $z\ge 0$, равен:

а) $\dfrac{81\pi}{2}$; б) $\dfrac{27\pi}{2}$; в) 243π.

9 Масса тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=2$, с плотностью $\rho(x,y,z)=(x^2+y^2+z)^2$ равна ______________.

10 Тройной интеграл $\iiint\limits_Q \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 dxdydz$ по области Q, ограниченной поверхностью $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ равен:

а) $\dfrac{4\pi abc}{7}$; б) $\dfrac{\pi abc}{4}$; в) $\dfrac{3\pi abc}{4}$.

Вариант 2

1 Укажите верную формулу

а) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)|J|dudvdw$;

б) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)dudvdw$;

в) $\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)J\,dudvdw$.

2 Цилиндрические координаты имеют вид:

а) $x=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi$, $z=r$, $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

б) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $-\infty<r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$;

в) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$, $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

3 Укажите верное равенство

а) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{|y|}^{y}dx\int\limits_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}}f(x,y,z)dz$;

б) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dz\int\limits_{-z}^{z}dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz=\int\limits_0^1 dz\int\limits_{-1}^{z}dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{1}f(x,y,z)dx$.

4 Повторный интеграл $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-x}^{0} dy \int\limits_{-1-x-y}^{0} \frac{dz}{(4x+3y+z+2)^5}$ равен:

а) 0; б) 10; в) 7.

5 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} (7x-5y+3z+1)dxdydz$ по параллелепипеду $Q = \left\{ \left(x, y, z\right) \ \middle|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \right\}$ равен:

а) 156; б) 56; в) 140.

6 Объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$, $z = 3$, $z = 0$, равен ______________________.

7 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} (x^2 + y^2 + z^2)^3 dxdydz$ по области, ограниченной поверхностями $y^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$, равен:

а) 431π; б) 422π; в) 420π.

8 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ по области, ограниченной поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, равен:

а) $\frac{972\pi}{7}$; б) $\frac{927\pi}{2}$; в) $\frac{972\pi}{5}$.

9 Масса тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$ с плотностью $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ равна _____________.

10 Тройной интеграл $\iiint\limits_{Q} \frac{dxdydz}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1}$ по области Q, ограниченной поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \ge 0$, равен:

а) $\frac{4-\pi}{4}$; б) $\frac{4-\pi}{8}abc$; в) $\frac{2-\pi}{2}abc$.

Тест 6 Поверхностный интеграл

Вариант 1

1 По определению поверхностный интеграл 1-го рода равен:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\dfrac{1}{|F'_z|}\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\,dxdy$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\dfrac{1}{|F'_x|}\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\,dxdy$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z)\dfrac{1}{F'_z}\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}\,dxdy$.

3 Изменяется ли знак поверхностного интеграла 2-го рода при выборе ориентации поверхности? ___________________

4 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,dS$, где поверхность $\Omega = \{(x,y,z) \mid 4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ равен:

а) $\dfrac{\sqrt{29}}{9}$, б) $\dfrac{\sqrt{29}}{8}$, в) $\sqrt{29}$.

5 Площадь поверхности $z = x^2 + y^2$, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$, равна:

а) $\dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-3)$, б) $\dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$, в) $\dfrac{\pi}{3}(5\sqrt{5}+1)$.

6 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dS$ по верхней половине сферы $x^2+y^2+z^2=25$ равен:

а) $\dfrac{25}{3}\pi$, б) $\dfrac{100}{3}\pi$, в) $\dfrac{95}{3}\pi$.

7 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ равен:

а) 4, б) 3, в) 5.

8 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + (y+z)dzdx + (z-y)dxdy$, где Ω внешняя часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 2$, равен:

а) π, б) 2π, в) 4π.

9 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл $\oint\!\!\int\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

10 С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} x^2y^3dx + dy + zdz$, где $\Gamma = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0 \right\}$, используя в качестве поверхности вернюю часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

__________________.

Вариант 2

1 По определению поверхностный интеграл 2-го рода равен:

а) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz = \lim\limits_{\lambda\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(\Omega_k)_{xy}$,

б) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(\Omega_k)_{xy}$,

в) $\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(\Omega_k)_{yz}$.

2 Укажите верное равенство:

а) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Omega} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$,

б) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_y' + z_y'}\,dxdy$,

в) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{G} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$.

3 Изменяется ли знак поверхностного интеграла 1-го рода при выборе ориентации поверхности? __________________

4 Интеграл $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dS$, где поверхность $\Omega = \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; z = 1 - x^2 - y^2,\ z = 0 \right\}$ равен:

а) 3π, б) π, в) 4π.

5 Площадь поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, равна:

а) $\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$, б) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$, в) $2\pi\left(\sqrt{2}+1\right)$.

6 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}(3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2)dS$ по поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостью $y = 1$, равен:

а) $\sqrt{2}\pi$, б) $3\sqrt{2}\pi$, в) $2\sqrt{2}\pi$.

7 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(5x^2 + 5y^2 + 3z^2\right)dxdy$ по верхней стороне поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсеченной плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ равен:

а) -4π, б) -3π, в) 4π.

8 Интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где Ω внешняя часть поверхности $z = 4 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$, отсекаемая плоскостью $z = 0$, равен:

а) 90π, б) 96π, в) -96π.

9 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где Ω – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, отсекаемая плоскостями $z = 0$, $z = 4$.

10 С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, где Γ – окружность, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox, $\Gamma = \left\{ \left(x, y, z\right) \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\, x + y + z = 0 \right\}$.

Тест 7 Элементы векторного анализа

Вариант 1

1 Линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии, называется ________________.

2 Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется соленоидальным, если в любой точке M справедливо равенство ________________.

3 Укажите верную формулу:

а) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$;

б) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$;

в) $\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}$.

4 Выбрать верное утверждение:

а) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{grad}\vec{a}(M)=0$;

б) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$;

в) для того чтобы векторное поле $\vec{a}(M)$ было потенциальным в односвязной области Q, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0$;

5 Линии уровня скалярного поля $U=x^2+y^2$ имеют вид ________________.

6 Поверхности уровня скалярного поля $U=x+y+z$ имеют вид __________________.

7 Производная функции $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $P=(1,1,1)$ по направлению вектора $\vec{l}=(2,1,0)$ равна:

а) 1; б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **;** в) $\frac{\sqrt{14}}{5}$.

8 Градиент скалярного поля $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$ в точке $P(1;-1;1)$ равен:

а) $2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$; б) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$; 4 в) $2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$.

9 Циркуляция векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вдоль замкнутой линии Γ, образованной осями координат и частью астроиды $\vec{r} = R\cos^3 t\,\vec{i} + R\sin^3 t\,\vec{j}$, лежащей в первой четверти, равна:

а) $-\dfrac{3}{16\pi R^2}$; б) $\dfrac{3}{16\pi R^2}$; в) $\dfrac{3}{14\pi R^2}$.

10 Поток векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$ через часть плоскости $2x + y + z = 2$, лежащей в первом октанте равен ______________________.

Вариант 2

1 Множество точек скалярного поля, в каждой из которых потенциал сохраняет постоянное значение, называется _________.

2 Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется потенциальным, если существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$ такая, что ___________________.

3 Укажите верную формулу:

а) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$;

б) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}$;

в) $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial Y}{\partial z} + \dfrac{\partial Z}{\partial x}$.

4 Выбрать верное утверждение:

а) если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность равен нулю;

б) векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное тогда и только тогда, когда поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность равен нулю;

в) если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность равен нулю;

5 Линии уровня скалярного поля $U = x^2 - y^2$ имеют вид ____________________.

6 Поверхности уровня скалярного поля $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ имеют вид ____________________.

7 Производная функции $f = x^2 y + xz^2 - 2$ в точке $P = (1, 1, -1)$ по направлению вектора $\vec{l} = (1, -2, 4)$ равна:

а) 1; б) 9; в) -9.

8 Градиент скалярного поля $U = x^2 - 2y^2 + 4z^2 - 2xz + yz - 2xy$ в точке $P(-1;1;1)$ равен:

а) $-6\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$; б) $6\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$; 4 в) $-6\vec{i} + \vec{j} - 11\vec{k}$.

9 Циркуляция векторного поля $\vec{a} = y^2 \vec{i}$ вдоль замкнутой линии Γ, образованной правой половиной эллипса $\vec{r} = b\cos t\,\vec{i} + c\sin t\,\vec{j}$ и осью Oy, равна:

а) 1; б) 0; в) – 1.

10 Поток векторного поля $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ равен _________________________.

Задания к контрольным работам

Контрольная работа по разделу «Дифференциальное исчисление функции многих переменных»

Вариант 1

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y}$.

2 Найти дифференциал 1-го порядка в точке $M(0;0;2)$ функции $z(x;y)$, заданной уравнением $z^3+3xyz=8$.

3 Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ до членов 2-го порядка функции $z(x;y)=e^x\sin y$.

4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;y)=x^2+2xy-y^2-4x$ на компакте $\bar{D}$, ограниченном кривыми $x-y+1=0$, $x=3$, $y=0$.

5 Решить дифференциальное уравнение $y\dfrac{dz}{dx}-x\dfrac{dz}{dy}=0$ с помощью замены переменных $\xi=x$, $\eta=x^2+y^2$.

Вариант 2

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}$.

2 Найти дифференциал 1-го порядка в точке $M(0;0;1)$ функции $z(x;y)$, заданной уравнением $e^z-xyz=e$.

3 Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $(0;0)$ до членов 2-го порядка функции $z(x;y)=e^x\cos y$.

4 Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z(x;y)=x^2+y^2-2x-2y+8$ на компакте $\bar{D}$, ограниченном кривыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$.

5 Решить дифференциальное уравнение $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}=0$ с помощью замены переменных $\xi = x$, $\eta = x-y$, $\zeta = z-x$.

Контрольная работа по разделу «Интегральное исчисление функции многих переменных»

Вариант 1

1 Найти массу материальной кривой $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, с плотностью $\rho(x;y)=x$.

2 Найти работу A переменной силы $\vec{F}=y\vec{i}+x\vec{j}$ вдоль дуги астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$, $0\le t\le \frac{\pi}{4}$.

3 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=25$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 4$, если его плотность $\rho(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5 Найти площадь части поверхности параболоида $x=1-y^2-z^2$, вырезанной цилиндром $y^2+z^2=1$.

6 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma=\{(x;y;z)\mid x=\cos t; y=\sin t; z=2\}$.

8 Выяснить, является ли соленоидальным и потенциальным векторное поле $\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}$.

9 Найти производную $\frac{dF}{dy}$ функции $F(y)=\int\limits_{y^2}^{\sin y}\ln(2y^2-x)dx$.

10 С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

Вариант 2

1 Найти массу материальной кривой $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, с плотностью $\rho(x;y)=2x$.

2 Найти работу A переменной силы $\vec{F}=y\vec{i}-3x\vec{j}$ вдоль дуги астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le \frac{\pi}{6}$.

3 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=9$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 9$, если его плотность $\rho(x;y;z)=\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$.

5 Найти площадь части поверхности параболоида $y=1-x^2-z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$.

6 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz-y^2dzdx-z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

7 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ вдоль контура $\Gamma=\left\{(x;y;z)\,\middle|\; x=\cos t; y=\sin t; z=3\right\}$.

8 Выяснить, является ли соленоидальным и потенциальным векторное поле $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

9 Найти производную $\frac{dF}{dy}$ функции $F(y)=\int\limits_{y^2}^{\sin y}\ln\left(x+y^2\right)dx$.

10 С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^3}dx$.

Примерный перечень вопросов к экзамену

(* отмечены вопросы, содержащие теорему с доказательством)

1 Определение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, сходимость последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

2 Подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, компакт.

3 Предел функции многих переменных.

4* Повторные пределы.

5 Непрерывность функции.

6 Частные и полные приращения функции многих переменных.

7 Частные производные функции двух переменных и их геометрический и механический смысл.

8* Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

9* Дифференцируемость функций многих переменных, необходимое условие дифференцируемости.

10* Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных.

11.* Дифференцирование сложной функции многих переменных.

12 Полный дифференциал функции двух переменных и его геометрический смысл.

13* Теорема о равенстве смешанных производных.

14. Дифференциалы высших порядков функции двух переменных.

15* Формула Тейлора для функции двух переменных.

16* Локальный экстремум функции многих переменных, необходимые условия локального экстремума.

17* Достаточные условия локального экстремума функции двух переменных.

18 Неявные функции двух переменных, определяемые одним уравнением, теоремы существования и дифференцирования.

19 Неявные функции многих переменных, определяемые системой уравнений, достаточное условие независимости.

20 Условный экстремум, метод исключения части переменных.

21* Необходимое условие Лагранжа условного экстремума.

22 Глобальный экстремум функции двух переменных на компакте.

23 Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла 1-го рода.

24 Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

25 Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.

26 Задача о работе переменной силы.

27 Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

28 Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.

29* Связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.

30 Множества, измеримые по Жордану, критерий измеримости.

31 Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

32 Определение и свойства двойного интеграла.

33* Вычисление двойного интеграла (случай прямоугольной области).

34* Вычисление двойного интеграла (случай криволинейной области).

35* Формула Грина.

36* Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

37* Замена переменных в двойном интеграле, полярные координаты.

38 Задача о массе пространственного тела.

39 Определение и свойства тройного интеграла.

40 Вычисление тройного интеграла.

41 Замена переменных в тройном интеграле, цилиндрические координаты.

42 Замена переменных в тройном интеграле, сферические координаты.

43 Способы задания поверхности, простые поверхности, особые точки поверхности.

44 Касательная и нормаль к поверхности.

45 Площадь поверхности

46 Ориентация поверхности, односторонние и двусторонние поверхности.

47 Задача о массе изогнутой пластины.

48 Определение и свойства поверхностного интеграла 1-го рода.

49 Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.

50 Задача о потоке жидкости.

51 Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода.

52 Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.

53 Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го родов.

54* Формула Остроградского-Гаусса.

55* Формула Стокса.

56 Поверхности и линии уровня скалярного поля.

57. Производная по направлению скалярного поля, градиент.

58 Определение векторного поля, векторные линии.

59 Дивергенция векторного поля.

60 Циркуляция векторного поля и ее физический смысл.

61 Ротор векторного поля.

62* Определение и непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.

63* Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

64 Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.

65* Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

66* Признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

67 Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра (непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость).

68. Определение и свойства гамма-функции.

69 Определение и свойства бета-функции.

70* Преобразование Фурье и его свойства.

Типовые задачи к экзамену

1 Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$.

2 Построить линии уровня функции $z = 4x^2 + 9y^2$.

3 Вычислить предел функции $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin 2xy}{y}$.

4 Вычислить повторные пределы $\lim\limits_{x \to \infty} \lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{x^2 + 3y^2}{x^2 + y^3}$ и $\lim\limits_{y \to \infty} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3y^2}{x^2 + y^3}$.

5 Найти частные производные функции 2-го порядка $z = y^2 \cos(x + 2y)$.

6 Найти полный дифференциал функции $z = 2x^2 y^4 - 2xy$ в точке $M(1;3)$.

7 Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ сложной функции $z = 5u^2 + uv^2$, где $u = x^3 + \cos y$, $v = xy - \sin x$.

8 Найти уравнения касательной и нормали к поверхности Ω, заданной уравнением $x^2 + 4y^2 + z^2 - 8z - 4y + 8 = 0$ в точке $M(3;1;-1)$.

9 Проверить, удовлетворяет ли уравнению $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ функция $u = \dfrac{y}{x}$.

10 Исследовать на локальный экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

11 Найти экстремум функции $z = x^2 - y^2$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $y = 2x - 6$.

12 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + y - xy$ в области $\bar{D} = \left\{ (x; y) \middle| y = x,\ y = 4,\ x = 0 \right\}$.

13 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x;y)dy$.

14 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где $G = \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 \le 16 \right\}$.

15 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, где $G = \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 \le 16,\, x^2 + y^2 \ge 4 \right\}$.

16 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(2x + y - 3z)^2}$ по области $Q = \left\{ (x;y;z) \mid x + y + z = 1,\, x = 0,\, y = 0,\, z = 0 \right\}$.

17 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_Q \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 dxdydz$ по области $Q = \left\{ (x;y;z) \mid x^2 + y^2 = 4,\, z = 0,\, z = 4 \right\}$, переходя к цилиндрическим координатам.

18 Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_Q \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 dxdydz$ по области $Q = \left\{ (x;y;z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \right\}$, переходя к сферическим координатам.

19 Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma ydl$, где $\Gamma = \left\{ (x;y) \mid y = 2x,\, 1 \le x \le 2 \right\}$.

20 Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl$, где $\Gamma = \left\{ (x;y) \middle| x = \cos^3 t,\, y = \sin^3 t,\, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

21 Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где Γ нижняя половина кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

22 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \sin^2 x dx + y^2 dy$, где $\Gamma = \left\{ (x;y) \middle| y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi \right\}$

23 Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} ydx - xdy\, dl$, где

$$\Gamma = \left\{ (x;y) \middle|\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

24 Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \left(1 - x^2\right) y dx + x\left(1 + y^2\right) dy$, где $\Gamma = \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 = 9 \right\}$.

25 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds$ по поверхности $\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \right\}$.

26 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right) dxdy$ по верхней стороне поверхности $\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| z = \sqrt{25 - x^2}, 0 \le y \le 4 \right\}$.

27 Используя формулу Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Omega^+} 4x^3 dydz + 4y^3 dxdz - 6z^4 dxdy$ по внешней стороне поверхности $\Omega = \left\{ (x;y;z) \middle| x^2 + y^2 = 25,\ 0 \le z \le 4 \right\}$.

28 Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} ydx + z^2 dy + x^2 dz$, где Γ – пересечение плоскостей $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = \sqrt{3}$.

29 Вычислить производную по направлению функции $z = x^2 y - 3xy$ в направлении вектора от точки $O(0;0)$ к точке $A(2;1)$.

30 Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $A(2;-1;3)$.

31 Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xyz \cdot \vec{i} + \left(3x^2 + 3y^2\right) \cdot \vec{j} + (x + 2y - z) \cdot \vec{k}$.

32 Найти ротор векторного поля $\vec{a} = xyz \cdot \vec{i} + (2x + 3y - z) \cdot \vec{j} + (x^2 + y^2) \cdot \vec{k}$.

33 Найти $F'(y)$ для функции $F(y) = \int\limits_{y}^{y^2} e^{-yx^2} dx$.

34 Исследовать равномерную сходимость интеграла $F(y) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos yx}{1 + x^2} dx$.

35 Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-2x}$, $x \geq 0$.

Индивидуальные домашние задания по теме «Приложения двойных интегралов»

1 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1.1 а) $y = 3/x, y = 4e^x, y = 3, y = 4$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ \ y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}\,x$.

1.2 а) $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x/\sqrt{3}.$

1.3 а) $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \le 0)$;

б) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x/\sqrt{2}, y = \sqrt{2}\,x$.

1.4 а) $x = 8 - y^2, x = -2y$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

1.5 а) $y = \dfrac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8$;

б) $y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \dfrac{x}{2}, y = 2x.$

1.6 а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}, y = \dfrac{1}{2x}, x = 16$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$

1.7 а) $x = 5 - y^2, x = -4y$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$

1.8 а) $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6y} = x^2 (y \le 0)$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0, y = x, y = 2x.$

1.9 а) $y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0 (x \ge 0)$;

б) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$

1.10 а) $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y = \dfrac{3}{2x}, x = 9$;

б) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = x/5, y = 5x.$

1.11 а) $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3y} = x^2, x = 0 (x \ge 0)$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = 2x, x = 0.$

1.12 а) $y=\sin x, y=\cos x, x=0 (x\geq 0)$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=x/3, y=3x.$

1.13 а) $y=20-x^2, y=-8x$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=x/4, y=4x.$

1.14 а) $y=\sqrt{18-x^2}, y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=3x, x=0.$

1.15 а) $y=32-x^2, y=-4x$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=x/4, x=0.$

1.16 а) $y=2/x, y=5e^x, y=2, y=5$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=x/3.$

1.17 а) $x^2+y^2=36, 3\sqrt{2y}=x^2 (y\geq 0)$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/2, y=2x.$

1.18 а) $y=3\sqrt{x}, y=3/x, x=4$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x/2.$

1.19 а) $y=6-\sqrt{36-x^2}, y=\sqrt{36-x^2}, x=0 (x\geq 0)$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/5, y=5x.$

1.20 а) $y=25/-x^2, y=x-5/2$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x.$

1.21 а) $y=\sqrt{x}, y=1/x, x=16$;

б) $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=x, x=0.$

1.22 а) $y=2/x, y=7e^x, y=2, y=7$;

б) $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=4x.$

1.23 а) $x=27-y^2, x=-6y$;

б) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=2x.$

1.24 а) $\sqrt{72-y^2}, 6x=y^2, y=0 (y\geq 0)$;

б) $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

1.25 а) $y=\sqrt{6-x^2}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$;

б) $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

1.26 а) $y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 4$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = x/2, y = 2x.$

1.27 а) $y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \le 0)$;

б) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = 3x, x = 0.$

1.28 а) $y = \frac{1}{x}, y = 6e^x, y = 1, y = 6$;

б) $x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = x/4, y = 4x.$

1.29 а) $y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 9$;

б) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x/2, x = 0.$

1.30 а) $y = 11 - x^2, y = -10x$;

б) $x^2 - 6x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0, y = x/3, y = 3x.$

2 Найти площади:

2.1 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2y$.

2.2 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

2.3 части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

2.4 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 3y$.

2.5 части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2$.

2.6 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

2.7 части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4y$.

2.8 части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

2.9 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.10 части конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $y^2+z^2=1$.

2.11 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=y$.

2.12 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=4$.

2.13 части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри конуса $x^2+z^2=y^2$.

2.14 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

2.15 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=9$.

2.16 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.17 части сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$.

2.18 части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=16$.

2.19 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри конуса $y^2+z^2=x^2$.

2.20 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=2z$.

2.21 части конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $y^2+z^2=1$.

2.22 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+z^2=y^2$.

2.23 части сферы $x^2+y^2+z^2=25$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=5z$.

2.24 части конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=4$.

2.25 части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, заключенной внутри конуса $x^2+y^2=z^2$.

2.26 части сферы $x^2+y^2+z^2=9$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=3x$.

2.27 части конуса $2z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

2.28 части сферы $x^2+y^2+z^2=36$, заключенной внутри конуса $y^2+z^2=x^2$.

2.29 части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, заключенной внутри цилиндра $x^2+z^2=z$.

2.30 части конуса $3z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.

3 Найти массу, статические моменты, координаты центра тяжести, моменты инерции пластинки D, ограниченной кривыми с поверхностной плотностью ρ:

3.1 D: $x=1, y=0, y^2=4x\ (y\ge 0)$, $\rho=7x^2+y.$

3.2 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,\ x=0, y=0,\ x\ge 0, y\ge 0$,

$\rho=\left(x+y\right)/\left(x^2+y^2\right).$

3.3 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+5y$.

3.4 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\ge 0)$,

$\rho=(2x+5y)/(x^2+y^2)$.

3.5 D: $x=2, y=0, y^2=2x(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/8+2y$.

3.6 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0, (x\ge 0, y\ge 0)$,

$\rho=(x+y)/(x^2+y^2)$.

3.7 D: $x=2, y=0, y^2=x/2(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+6y$.

3.8 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0, (x\ge 0, y\le 0)$,

$\rho=(2x-3y)/(x^2+y^2)$.

3.9 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\ge 0)$, $\rho=x+3y$.

3.10 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\le 0)$,

$\rho=(x-y)/(x^2+y^2)$.

3.11 D: $x=1, y=0, y^2=x(y\ge 0)$, $\rho=3x+6y^2$.

3.12 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0(x\le 0, y\ge 0)$,

$\rho=(2y-x)/(x^2+y^2)$.

3.13 D: $x=2$, $y=0$, $y^2=x/2$, $(y\ge 0)$, $\rho=2x+3y^2$.

3.14 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\le 0, y\ge 0)$,

$\rho=(2y-3x)/(x^2+y^2)$.

3.15 D: $x=1/2, y=0, y^2=8x(y\ge 0)$, $\rho=7x+3y^2$.

3.16 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\le 0, y\ge 0)$,

$\rho=(2y-5x)/(x^2+y^2)$.

3.17 D**:** $x=1, y=0, y^2=4x$, $\rho=7x^2+2y$.

3.18 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\le 0, y\ge 0)$,

$\rho=(x+3y)/(x^2+y^2)$.

3.19 D: $x=2, y^2=2x, y=0(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/4+y/2$.

3.20 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\ge 0)$,

$\rho=(x+2y)/(x^2+y^2)$.

3.21 D: $x=2, y=0, y^2=2x(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/4+y$.

3.22 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\le 0)$,

$\rho=(2x-y)/(x^2+y^2)$.

3.23 D: $x=2, y=0, y^2=x/2(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+8y$.

3.24 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\le 0)$,

$\rho=(x-4y)/(x^2+y^2)$.

3.25 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\ge 0)$, $\rho=6x+3y^2$.

3.26 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,
$\rho=(3x-y)/(x^2+y^2)$.

3.27 D: $x=2, y=0, y^2=x/2$, $\rho=4x+6y^2$.

3.28 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=\left(y-4x\right)/\left(x^2+y^2\right)$.

3.29 D: $x=1/2, y=0, y^2=2x (y\ge 0)$, $\rho=4x+9y^2$.

3.30 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,
$\rho=-2x/\left(x^2+y^2\right)$.

4 Найти массу пластинки D, заданной неравенствами, с поверхностной плотностью ρ:

4.1 D: $x^2+y^2/4\le 0$, $\rho=y^2$.

4.2 D: $1\le x^2/9+y^2/4\le 2$, $y\ge 0, y\le \dfrac{2}{3}x$, $\rho=y/x$.

4.3 D: $1\le x^2/4+y^2\le 25$, $x\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=x/y^3$.

4.4 D: $x^2/9+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=x^2y$.

4.5 D: $x^2/9+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=7x^2y/18$.

4.6 D: $1\le x^2/4+y^2\le 4$, $y\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=8y/x^3$.

4.7 D: $x^2/9+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $\rho=7xy^6$.

4.8 D: $x^2/4+y^2\le 1$, $\rho=4y^4$.

4.9 D: $1\le x^2/4+y^2/9\le 4$, $x\ge 0, y\ge 3x/2$, $\rho=x/y$.

4.10 D: $1\le x^2/16+y^2/4\le 4$, $x\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=x/y$.

4.11 D: $x^2/4+y^2/9\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=x^3y$.

4.12 D: $x^2/4+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=6x^3y^3$.

4.13 D: $x^2/9+y^2/4\le 1$, $\rho=x^2y^2$.

4.14 D: $x^2/16+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=5xy^7$.

4.15 D: $x^2/4+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=30x^3y^7$.

4.16 D: $1\le x^2/9+y^2/4\le 3$, $y\ge 0, y\le \dfrac{2}{3}x$, $\rho=y/x$.

4.17 D: $x^2 + y^2/25 \le 1,\ y \ge 0,\ \rho = 7x^4 y$.

4.18 D: $x^2 + y^2/9 \le 1,\ y \ge 0,\ \rho = 35x^4 y^3$.

4.19 D: $x^2/4 + y^2/9 \le 1,\ \rho = x^2$.

4.20 D: $1 \le x^2 + y^2/16 \le 9,\ y \le 0, y \le 4x,\ \rho = y/x^3$.

4.21 D: $x^2/9 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ \rho = 11xy^8$.

4.22 D: $1 \le x^2/4 + y^2/16 \le 5,\ x \ge 0, y \ge 2x,\ \rho = x/y$.

4.23 D: $1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 5,\ x \ge 0, y \ge 2x/3,\ \rho = x/y$.

4.24 D: $x^2/4 + y^2/9 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0,\ \rho = x^5 y$.

4.25 D: $x^2/4 + y^2/25 \le 1,\ \rho = x^4$.

4.26 D: $x^2 + y^2/16 \le 9,\ x \ge 0, y \ge 0,\ \rho = 15x^5 y^3$.

4.27 D: $1 \le x^2/4 + y^2/9 \le 36,\ x \ge 0, y \ge \dfrac{3}{2}x,\ \rho = 9x/y^3$.

4.28 D: $x^2/100 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0,\ \rho = 6xy^9$.

4.29 D: $x^2/16 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0,\ \rho = 105x^3 y^9$.

4.30 D: $1 \le x^2/9 + y^2/16 \le 2,\ y \ge 0, y \le \dfrac{4}{3}x,\ \rho = 27y/x^5$.

5 Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

5.1 $x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 3y, z = 0.$

5.2 $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$

5.3 $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, z = 15x.$

5.4 $y = 5\sqrt{x}, y = 5x/3, z = 0, z = 5 + 5\sqrt{x/3}.$

5.5 $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0.$

5.6 $x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 1/2.$

5.7 $x = 5\sqrt{y/2}, x = 5y/6, z = 0, z = \dfrac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$

5.8 $x = \dfrac{5}{6}\sqrt{y}, x = \dfrac{5}{18}y, z = 0, z = \dfrac{5}{18}(3 + \sqrt{y})$

5.9 $x+y=6, x=\sqrt{3y}, z=4x/5, z=0.$

5.10 $x=19\sqrt{2y}, x=4\sqrt{2y}, z=0, z+y=2.$

5.11 $x^2+y^2=8, x=\sqrt{2y}, x=0, \quad z=30y/11, z=0$.

5.12 $x+y=4, x=\sqrt{2y}, z=3x/5, z=0.$

5.13 $y=6\sqrt{3x}, y=\sqrt{3x}, z=0, x+z=3.$

5.14 $y=\frac{5}{6}\sqrt{x}, y=\frac{5}{18}x, z=0, z=\frac{5}{18}(3+\sqrt{x}).$

5.15 $x^2+y^2=18, y=\sqrt{3x}, y=0, z=0, z=5x/11.$

5.16 $x+y=6, y=\sqrt{3x}, z=4y, z=0.$

5.17 $x=7\sqrt{3y}, x=2\sqrt{3y}, z=0, z+y=3.$

5.18 $x=5\sqrt{y/3}, x=5y/9, z=0, z=5(3+\sqrt{y})/9.$

5.19 $x^2+y^2=18, x=\sqrt{3y}, x=0, z=0, z=10y/11.$

5.20 $x=17\sqrt{2y}, x=2\sqrt{2y}, z=0, z+y=1/2.$

5.21 $y=\sqrt{15x}, y=\sqrt{15x}, z=0, z=\sqrt{15}(1+\sqrt{x}).$

5.22 $x^2+y^2=50, y=\sqrt{5x}, y=0, z=0, z=3x/11.$

5.23 $x+y=8, y=\sqrt{4x}, z=3y, z=0.$

5.24 $x=16\sqrt{2y}, x=\sqrt{2y}, z+y=2, z=0.$

5.25 $x=15\sqrt{y}, x=15y, z=0, z=15(1+\sqrt{y}).$

5.26 $x^2+y^2=50, x=\sqrt{5y}, x=0, z=0, z=6y/11.$

5.27 $x^2+y^2=2y, z=\frac{13}{4}-x \ , z=0.$

5.28 $x^2+y^2=2y, z=\frac{9}{4}-x^2, z=0.$

5.29 $x^2+y^2=8\sqrt{2x}, z=x^2+y^2-64, z=0, (z\geq 0).$

5.30 $x^2+y^2=2y, z=5/4-x^2, z=0.$

6 Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz):

6.1

$\vec{a} = 7x\vec{i} + (5\pi y + 2)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$,

$P: \quad x + y/2 + 4z = 1.$

6.2

$\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + j + 3z\vec{k}$,

$P: \quad x/3 + y + z = 1.$

6.3

$\vec{a} = 2\pi x\vec{i} + (7y + 2)\vec{j} + 7\pi z\vec{k}$,

$P: x + y/2 + z/3 = 1.$

6.4

$\vec{a} = (2x + 1)\vec{i} + y\vec{j} + 3\pi z\vec{k}$,

$P: \quad x/3 + y + 2z = 1.$

6.5

$\vec{a} = 7x\vec{i} + 9\pi y\vec{j} + \vec{k}$,

$P: \quad x + y/3 + z = 1.$

6.6

$\vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11\pi z\vec{k}$,

$P: \quad x + y + z/3 = 1.$

6.7

$\vec{a} = 5\pi x\vec{i} + (9y + 1)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$,

$P: \quad x/2 + y/3 + z/2 = 1.$

6.8

$\vec{a} = x\vec{i} + (\pi z - 1)\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/2 + z/3 = 1.$

6.9

$$\vec{a} = 2\vec{i} - y\vec{j} + \frac{3\pi z}{2}\vec{k},$$

$P: \quad x/3 + y + z/4 = 1.$

6.10

$\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + (5y + 1)\vec{j} + 2\pi z\vec{k}$,

$P: \quad 3x + y + z/9 = 1.$

6.11

$\vec{a} = 7\pi x\vec{i} + 2\pi y\vec{j} + (7z + 2)\vec{k}$,

$P: \quad x + y + z/2 = 1.$

6.12

$\vec{a} = \pi y\vec{j} + (4z - 2)\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/3 + z/4 = 1.$

6.13

$\vec{a} = (3\pi - 1)x\vec{i} + (9\pi y + 1)\vec{j} + 6\pi z\vec{k}$,

$$P: \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1.$$

6.14

$$\vec{a} = \pi x\vec{i} + \frac{\pi}{2}y\vec{j} + (4z - 2)\vec{k},$$

$P: \quad x + y/3 + z/4 = 1.$

6.15

$\vec{a} = (27\pi - 1)\vec{i} + (34\pi y + 3)\vec{j} + 20\pi z\vec{k}$,

$P: \quad 3x + y/9 + z = 1.$

6.16

$\vec{a} = 9\pi y\vec{j} + (7z + 1)\vec{k}$,

$P: \quad x + y + z = 1.$

6.17

$\vec{a} = \pi y\,\vec{j} + (1 - 2z)\,\vec{k}$,

$P: \quad x/4 + y/3 + z = 1.$

6.18

$\vec{a} = (5y + 3)\,\vec{j} + 11\pi z\,\vec{k}$,

$P: \quad x + y/3 + 4z = 1.$

6.19

$\vec{a} = \pi x\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\pi z\,\vec{k}$,

$P: \quad x/2 + y/3 + z = 1.$

6.20

$\vec{a} = 4\pi x\,\vec{i} + 7\pi y\,\vec{j} + (2z + 1)\,\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/3 + 2z = 1.$

6.21

$\vec{a} = 3\pi x\,\vec{i} + 6\pi y\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y + z/3 = 1.$

6.22

$\vec{a} = \pi x\, i - 2y\,\vec{j} + \vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/6 + z = 1.$

6.23

$\vec{a} = (21\pi - 1)\,\vec{i} + 62\pi y\,\vec{j} + (1 - 2\pi z)\,\vec{k}$,

$P: \quad 8x + y/2 + z/3 = 1.$

6.24

$\vec{a} = \pi x\,\vec{i} + 2\pi y\,\vec{j} + 2\vec{k}$,

$P: \quad x/2 + y/4 + z/3 = 1.$

6.25

$\vec{a} = 9\pi x\,\vec{i} + 2\pi y\,\vec{j} + 8\vec{k}$,

$P: \quad 2x + 8y + z/3 = 1.$

6.26

$\vec{a} = 7\pi x\,\vec{i} + (4y + 1)\,\vec{j} + 2\pi z\,\vec{k}$,

$P: \quad x/3 + 2y + z = 1.$

6.27

$\vec{a} = (\pi - 1)x\,\vec{i} + 2\pi y\,\vec{j} + (1 - \pi z)\,\vec{k}$,

$P: \quad x/4 + y/2 + z/3 = 1.$

6.28

$\vec{a} = 6\pi x\,\vec{i} + 3\pi y\,\vec{j} + 10\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/2 + z/3 = 1.$

6.29

$\vec{a} = \dfrac{\pi}{2} x\,\vec{i} + \pi y\,\vec{j} + (4 - 2z)\,\vec{k}$,

$P: \quad x + y/3 + z/4 = 1.$

6.30

$\vec{a} = 7\pi x\,\vec{i} + 4\pi y\,\vec{j} + 2(z + 1)\,\vec{k}$,

$P: \quad x/3 + y/4 + z = 1.$

7 Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность Ω (нормаль внешняя):

7.1 $\vec{a} = (e^z + 2x)\vec{i} + e^x\vec{j} + e^y\vec{k}$,
$\Omega: \quad x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.2 $\vec{a} = (3z^2 + x)\vec{i} + (e^x - 2y)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1, \quad z = 4.$

7.3 $\vec{a} = (\ln y + 7x)\vec{i} + (\sin z - 2y)\vec{j} + (e^{y} - 2z)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$

7.4 $\vec{a} = (\cos z + 3x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (3z - y^2)\vec{k}$,
$\Omega: \quad z^2 = 36(x^2 + y^2), \quad z = 6.$

7.5 $\vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$,
$\Omega: \quad 2x + y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.6 $\vec{a} = (6x - \cos y)\vec{i} - (e^{x} + z)\vec{j} - (2y + 3z)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1, \quad z = 2.$

7.7 $\vec{a} = (4x - 2y^2)\vec{i} + (\ln z - 4y)\vec{j} + (x + 3z/4)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$

7.8 $\vec{a} = (1 + \sqrt{z})\vec{i} + (4y - \sqrt{x})\vec{j} + xy\vec{k}$,
$\Omega: \quad z^2 = 4(x^2 + y^2), \quad z = 3.$

7.9 $\vec{a} = (\sqrt{z} - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y^2 - z)\vec{k}$,
$\Omega: \quad 3x - 2y + z = 6, \quad x = 0. \quad y = 0. \quad z = 0.$

7.10 $\vec{a} = (yz + x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (xy^2 + z)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.11 $\vec{a} = (e^{2y} + x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (y^2 + 3z)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x - y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.12 $\vec{a} = (\sqrt{z} - 2x)\vec{i} + (e^{x} + 3y)\vec{j} + \sqrt{y + x}\,\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 2, \quad z = 5.$

7.13 $\vec{a} = (e^{z} + x/4)\vec{i} + (\ln x + y/4)\vec{j} + z/4\,\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2.$

7.14 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (1 + 2z)\vec{k}$,
$\Omega: \quad z^2 = 4(x^2 + y^2), \quad z = 2.$

7.15 $\vec{a} = (e^{y} + 2x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (2z - 1)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x + 2y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.16 $\vec{a} = (x + y^2)\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + (\sqrt{x^2 + 1} + z)\vec{k},$

$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 2, \quad z = 3.$

7.17 $\vec{a} = (e^y + 2x)\vec{i} + (xz - y)\vec{j} + (1/4)(e^{xy} - z)\vec{k},$

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$

7.18 $\vec{a} = (\sqrt{z} + y)\vec{i} + 3x\vec{j} + (3z + 5x)\vec{k},$

$\Omega: \quad z^2 = 8(x^2 + y^2), \quad z = 2.$

7.19 $\vec{a} = (8yz - x)\vec{i} + (x^2 - 1)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k},$

$\Omega: \quad 2x + 3y - z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.20 $\vec{a} = (y + z^2)\vec{i} + (x^2 + 3y)\vec{j} + xy\vec{k},$

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$

7.21 $\vec{a} = (2yz - x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k},$

$\Omega: \quad x - y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

7.22 $\vec{a} = (\sin z + 2x)\vec{i} + (\sin x - 3y)\vec{j} + (\sin y + 2z)\vec{k},$

$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 3, \quad z = 6.$

7.23 $\vec{a} = (\cos z + x/4)\vec{i} + (e^x + y/4)\vec{j} + (z/4 - 1)\vec{k},$

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$

7.24 $\vec{a} = (\sqrt{x} + 1 + x)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (\sin x + z)\vec{k},$

$\Omega: \quad \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases}$

7.25 $\vec{a} = (5x - 6y)\vec{i} + (11x^2 + 2y)\vec{j} + (x^2 - 4z)\vec{k},$

$\Omega: \quad \begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \end{cases}$

7.26 $\vec{a} = (y^2 + z^2 + 6x)\vec{i} + (e^z - 2y + x)\vec{j} + (x + y - z)\vec{k},$

$\Omega: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 1, \quad z = 3. \end{cases}$

7.27 $\vec{a} = \frac{1}{2}(x + z)\vec{i} + \frac{1}{4}(xz + y)\vec{j} + (xy - 2)\vec{k},$

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$

7.28 $\vec{a} = (3yz - x)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j} + (6z - 1)\vec{k}$,

$\Omega: \begin{cases} z^2 = 9(x^2 + y^2), \\ z = 3. \end{cases}$

7.29 $\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (\sin x + y)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$,

$\Omega: \begin{cases} x + 2y - 3z = 6, \\ x = 0, \quad y = 0. \quad z = 0. \end{cases}$

7.30 $\vec{a} = (8x + 1)\vec{i} + (zx - 4y)\vec{j} + (e^x - z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$

8 Найти работу силы $\vec{F} = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L от точки $M(x;y)$ к точке $N(x;y)$:

8.1

$\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(-4,0)$, $N(0,2)$.

8.2

$\vec{F} = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$,

L: $x^2 + y^2 = 4$ $(y \ge 0)$,

$M(2,0)$, $N(-2,0)$.

8.3

$\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)j$,

L: отрезок MN,

$M(-4,0)$, $N(0,2)$.

8.4

$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$,

L: $x^2 + y^2 = 4$ $(y \ge 0)$,

$M(2,0)$, $N(-2,0)$.

8.5

$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$,

L: $2x^2 + y^2 = 1$ $(y \ge 0)$,

$M(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $N(\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$.

8.6

$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$,

L: $y = x^2$,

$M(-1,1)$, $N(1,1)$.

8.7

$\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$,

L: $x^2 + y^2 = 9 (y \ge 0)$,

$M(3,0)$, $N(-3,0)$.

8.8

$\vec{F} = x^2 y\vec{i} - y\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(-1,0)$, $N(0,1)$.

8.9

$\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$,

$L:\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1\ (x \ge 0,\ \ y \ge 0)$,

$M(1{,}0),\ \ N(0{,}3)$.

8.10

$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 1\ (y \ge 0)$,

$M(1{,}0),\ \ N(-1{,}0)$.

8.11

$\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j}$,

$L: \begin{cases} x, \text{ при } \ 0 \le x \le 1, \\ 2-x, \text{ при } \ 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$M(2{,}0),\ \ N(0{,}0)$.

8.12

$\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 2\ (y \ge 0)$,

$M(\sqrt{2}{,}0),\ \ N(-\sqrt{2}{,}0)$.

8.13

$\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 1\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$,

$M(1{,}0),\ \ N(0{,}1)$.

8.14

$\vec{F} = (x^2+y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$,

$L:\ x^2 + y^2 = R^2\ \ (y \ge 0)$,

$M(R{,}0),\ \ N(-R{,}0)$.

8.15

$\vec{F} = (x + y\sqrt{x^2+y^2})\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2+y^2})\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 1\ (x \ge 0,\ \ y \ge 0)$,

$M(1{,}0),\ \ N(-1{,}0)$.

8.16

$\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 4$,

$M(2{,}0),\ N(0{,}2)$.

8.17

$\vec{F} = (x + y\sqrt{x^2+y^2})\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2+y^2})\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 16\ \ (x \ge 0,\ \ y \ge 0)$,

$M(4{,}0),\ N(0{,}4)$.

8.18

$F = xy\vec{i}$,

$L:\ y = \sin x$,

$M(\pi{,}0),\ \ N(0{,}0)$.

8.19

$\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$,

$L: x^2 + y^2 = 9\ (x \ge 0, y \ge 0)$,

$M(3{,}0),\ \ N(0{,}3)$.

8.20

$\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - (x+y)^2\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(1{,}0),\ \ N(0{,}1)$.

8.21

$\vec{F} = x^2\vec{i}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 9\ (x \ge 0,\ \ \ y \ge 0)$,

$M(3{,}0),\ \ N(0{,}3)$.

8.22

$\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} + y^2\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(2{,}0),\ N(0{,}2)$.

8.23

$\vec{F} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 4\ (x \ge 0,\quad y \ge 0)$,

$M(2,0),\ \ N(0,2)$.

8.24

$\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} - x\vec{j}$,

$L:\ y = 2x^2$,

$M(0,0),\ \ N(1,2)$.

8.25

$\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 9\ (\quad y \ge 0)$,

$M(3,0),\ \ N(-3,0)$.

8.26

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(1,0),\ \ N(0,3)$.

8.27

$\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}$,

$L:\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1(x \ge 0,\quad y \ge 0)$,

$M(1,0),\ \ N(0,3)$.

8.28

$\vec{F} = (xy - x)\vec{i} - \dfrac{x^2}{2}\vec{j}$,

$L:\ y = 2\sqrt{x}$,

$M(0,0),\ \ N(1,2)$.

8.29

$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$,

$L:\ x^2/4 + y^2/4 = 1(y \ge 0)$,

$M(0,0),\ \ N(1,2)$.

8.30

$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$,

$L:\ y = x^3$,

$M(0,0),\ \ N(2,8)$.

9 Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t):

9.1

$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$,

$$\Gamma:\begin{cases} x = \sqrt{2}/2\cos t,\ \ y = \sqrt{2}/2\cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

9.2

$\vec{a} = -x^2 y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$,

$$\Gamma:\begin{cases} x = \sqrt[3]{4}\cos t,\ \ y = \sqrt[3]{4}\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

9.3

$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$,

$$\Gamma:\begin{cases} x = \cos t,\ \ y = \sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

9.4

$\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$,

$$\Gamma:\begin{cases} x = \cos t,\ \ y = (\sqrt{2}\sin t)/2, \\ z = (\sqrt{2}\cos t)/2. \end{cases}$$

9.5

$$\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(z-y)\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=4\cos t,\;\; y=4\sin t,\\ z=1-\cos t.\end{cases}$$

9.6

$$\vec{a}=2y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\;\; y=2\sin t,\\ z=2-2\cos t-2\sin t.\end{cases}$$

9.7

$$\vec{a}=2z\vec{i}-x\vec{j}+y\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\;\; y=2\sin t,\\ z=1.\end{cases}$$

9.8

$$\vec{a}=y\vec{i}+-x\vec{j}+z\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\;\; y=\sin t,\\ z=3.\end{cases}$$

9.9

$$\vec{a}=x\vec{i}+z^2\vec{j}+y\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\;\; y=2\sin t,\\ z=2\cos t-2\sin t-1.\end{cases}$$

9.10

$$\vec{a}=3y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\;\; y=3\sin t,\\ z=3-3\cos t-3\sin t.\end{cases}$$

9.11

$$\vec{a}=-x^2y^3\vec{i}+2\vec{j}+xz\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\;\; y=\sqrt{2}\sin t,\\ z=1.\end{cases}$$

9.12

$$\vec{a}=6z\vec{i}-x\vec{j}+xy\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\;\; y=3\sin t,\\ z=3.\end{cases}$$

9.13

$$\vec{a}=z\vec{i}+y^2\vec{j}-x\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\;\; y=2\sin t,\\ z=\sqrt{2}\cos t.\end{cases}$$

9.14

$$\vec{a}=x\vec{i}+2z^2\vec{j}+y\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\;\; y=3\sin t,\\ z=2\cos t-3\sin t-2.\end{cases}$$

9.15

$$\vec{a}=x\vec{i}-\frac{1}{3}z^2\vec{j}+y\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=(\cos t)/2,\;\; y=(\sin t)/3,\\ z=\cos t-(\sin t)/3-1/4.\end{cases}$$

9.16

$$\vec{a}=4y\vec{i}-3x\vec{j}+x\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=4\cos t,\;\; y=4\sin t,\\ z=4-4\cos t-4\sin t.\end{cases}$$

9.17

$$\vec{a}=-z\vec{i}-x\vec{j}+zx\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=5\cos t,\;\; y=5\sin t,\\ z=4.\end{cases}$$

9.18

$$\vec{a}=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k},$$

$$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\;\; y=2\sin t,\\ z=0.\end{cases}$$

9.19

$\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=3\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=2(1-\cos t).\end{cases}$

9.20

$\vec{a}=2y\vec{i}-z\vec{j}+x\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=4-\cos t-\sin t.\end{cases}$

9.21

$\vec{a}=xz\vec{i}+x\vec{j}+z^2\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=\sin t.\end{cases}$

9.22

$\vec{a}=-x^2y^3\vec{i}+3\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t.\\ z=5.\end{cases}$

9.23

$\vec{a}=7z\vec{i}-x\vec{j}+yz\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=6\cos t,\ \ y=6\sin t,\\ z=1/3.\end{cases}$

9.24

$\vec{a}=xy\vec{i}+x\vec{j}+y^2\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=\sin t,\\ z=\sin t.\end{cases}$

9.25

$\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=3(1-\cos t).\end{cases}$

9.26

$\vec{a}=x\vec{i}-z^2\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=3\sin t,\\ z=4\cos t-3\sin t-3.\end{cases}$

9.27

$\vec{a}=-2z\vec{i}-x\vec{j}+x^2\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=(\cos t)/3,\ \ y=(\sin t)/3,\\ z=8.\end{cases}$

9.28

$\vec{a}=x\vec{i}-3z^2\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ \ y=4\sin t,\\ z=2\cos t-4\sin t+3.\end{cases}$

9.29

$\vec{a}=x\vec{i}-2z^2\vec{j}+y\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=\cos t,\ y=4\sin t.\\ z=6\cos t-4\sin t+1.\end{cases}$

9.30

$\vec{a}=-x^2y^3\vec{i}+4\vec{j}+x\vec{k}$,

$\Gamma:\begin{cases}x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\\ z=4.\end{cases}$

10 Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a}$:

10.1 $\vec{a}=(x^2-y)\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k}$.

10.2 $\vec{a}=zx\vec{i}-\vec{j}+y\vec{k}$.

10.3 $\vec{a}=yz\vec{i}+2xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

10.4 $\vec{a}=x\vec{i}+yz\vec{j}-x\vec{k}$.

10.5 $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$.

10.6 $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z^2\vec{k}$.

10.7 $\vec{a}=yz\vec{i}+2xz\vec{j}+y^2\vec{k}$.

10.8 $5\vec{a}=xy\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$.

10.9 $\vec{a} = y\vec{i} + (1-x)\vec{j} - z\vec{k}$.

10.10 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.11 $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k}$.

10.12 $\vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.13 $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$.

10.14 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 5x\vec{j} + 3z\vec{k}$.

10.15 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 2xz\vec{j} - 2yz\vec{k}$.

10.16 $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.17 $\vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$.

10.18 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} - x^2\vec{k}$.

10.19 $\vec{a} = 4x\vec{i} - yz\vec{j} + x\vec{k}$.

10.20 $\vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

10.21 $\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.22 $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$.

10.23 $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} - xz\vec{k}$.

10.24 $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$.

10.25 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}$.

10.26 $\vec{a} = x^2\vec{i} + yz\vec{j} + 2z\vec{k}$.

10.27 $\vec{a} = y\vec{i} - 2x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

10.28 $\vec{a} = 3z\vec{i} - 2y\vec{j} + 2y\vec{k}$.

10.29 $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j} + 6\vec{k}$.

10.30 $\vec{a} = 4\vec{i} + 3x\vec{j} + 3xz\vec{k}$.

Деловые игры

Деловая игра «$1\times2\times4\times8$» по теме «Приложения двойных интегралов»

Ц е л ь :

– совместить индивидуальную и групповую работу;

– развить умение принимать групповое решение;

– выработать навыки использования двойных интегралов при решении геометрических и физических задач.

К о л и ч е с т в о у ч а с т н и к о в : до 24 человек.

П р о в е д е н и е :

Шаг 1 Преподаватель заранее предлагает студентам подобрать и решить по 5 задач.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы, в рамках каждой группы рассчитываются на первый-двенадцатый и объединяются в пары: «первый» номер из 1-ой группы с «первым» из 2-ой группы, «второй» номер из 1-ой группы со «вторым» из 2-ой группы и так далее. Студенты в парах обмениваются заданиями и решают. Затем они сверяют полученные решения с готовыми ответами и выставляют друг другу оценки.

Шаг 3 Из имеющихся заданий каждая пара составляет новое задание из 5 задач и обменивается ими с другой случайным образом выбранной парой. Сверяя полученные решения с правильными ответами, каждая пара оценивает соответствующую ей пару.

Шаг 4 Завершив работу по парам, студенты объединяются в «четверки», чтобы выработать новое задание и продолжить процесс дальше.

Шаг 5 На данном этапе «четверки» объединяются в «восьмерки» (всего три группы). Преподаватель предлагает каждой группе по одной новой задаче. В результате обсуждения студенты должны выработать решение. Затем педагог предоставляет слово каждой группе с целью презентации полученного результата.

П р и м е ч а н и е :

– преподавателю необходимо четко определить количество времени для проведения каждого этапа;

– желательно контролировать каждый этап;

– задания не должны быть сложными, чтобы студенты могли в течении отведенного времени их решить;

– работу можно остановить на этапе «четверок», если процесс решения задач занимает много времени;

– в результате игры каждый студент получает оценку, состоящую из баллов, полученных за составленное задание, за работу в паре, четверке, восьмерке.

Деловая игра «Карусель» по теме Интеграл Фурье

Ц е л ь :

– сочетать работу в парах;

– усвоить теоретический материал.

К о л и ч е с т в о у ч а с т н и к о в : до 30 человек.

В р е м я п р о в е д е н и я : 45 минут

П р о в е д е н и е :

Шаг 1 Преподаватель предлагает студентам самостоятельно изучить тему «Интеграл Фурье», подробно разобрать доказательства свойств интеграла Фурье, воспользовавшись литературой, приведенной в списке литературы данного пособия.

Шаг 2 По просьбе педагога студенты случайным образом разбиваются на 2 группы. Студенты садятся друг напротив друга, образуя 2 круга – внешний и внутренний. Таким образом у каждого студента есть партнер для общения.

Шаг 3 Преподаватель формулирует одно из свойств интеграла Фурье, предлагает студентам в течение нескольких минут доказать его друг другу.

Шаг 4 Студенты внешнего круга перемещаются на один стул по ходу часовой стрелки и образуют новые пары, в которых снова проводится доказательство того же свойства.

Шаг 5 Студенты внутреннего круга перемечаются на один стул против часовой стрелки. Вновь образуются новые пары. Итак далее несколько раз.

Шаг 6 Предлагается для доказательства следующее свойство интеграла Фурье с последующим выполнение шагов 3, 4, 5.

Шаг 7 После рассмотрения всех свойств интеграла Фурье, преподаватель делит студентов на несколько групп, предлагает каждой группе сформулировать и записать доказательство отдельных свойств (заранее выбранных преподавателем), проводит оценивание записанных доказательств.

Литература

1. Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу: учебное пособие для вузов. В 2-х ч. / Ю. С. Богданов. – Мн., 1974.
2. Богданов, Ю. С. Математический анализ: учебное пособие для вузов / Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица, Ю. Б. Сыроид. – М., 2003.
3. Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях / И. А. Виноградова, [и др.]. – М. : Из-во Московскго университета, 1991.
4. Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.
5. Ильин, В. А. Математический анализ: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М., 1985.
6. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
7. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 3. Функции нескольких переменных/ Л. Д. Кудрявцев, [и др.]. – Санкт-Петербург, 1994.
8. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменнных : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1988.
9. Никольский, С. М. Курс математического анализа: учебник для вузов: в 2 т. Т. 2. / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1983.
10. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебно-методический комплекс

В трех частях

Часть 2

Функции действительной переменной. Ряды

В авторской редакции

Подписано в печать 22.01.09(3) Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 16,7. Уч-изд. л. 12,9. Тираж 25 экз.

Отпечатано в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104