Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть четвертая

Теория рядов

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.
Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч. 4. Теория рядов / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 100 с.

ISBN 978-985-439-265-3

Данное пособие посвящено числовым и функциональным рядам. В нем излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

ISBN 978-985-439-265-3

Содержание

Введение

Пособие «Теория рядов» является четвертой частью комплекса пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В нем рассматриваются числовые, функциональные, степенные ряды и ряды Фурье. Весь материал разбит на части, соответствующие одному практическому занятию. Вначале каждой части помещены определения, теоремы и формулы (без доказательств), необходимые для решения задач. Затем приводятся подробные решения типовых примеров, задания для аудиторной и домашней работ, варианты индивидуальных домашних заданий. Содержание данного пособия соответствует учебной программе по математическому анализу для физических специальностей и связано с курсом лекций.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991).

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по «Математическому анализу» и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

Тема 1 Числовые и функциональные ряды

Практическое занятие 1 Ряды с неотрицательными членами

1.1 Определение числового ряда, необходимый признак сходимости
1.2 Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши сходимости ряда
1.3 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

1.1 Определение числового ряда, необходимый признак сходимости

Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

называется *числовым рядом*, числа a_1, a_2, …, a_k, … – членами ряда, а число a_k – k-м или *общим членом* ряда.

Сумма конечного числа n первых членов

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-й *частичной суммой* данного ряда.

В частности,

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

……………………

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

………………………… .

Если для последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

называется *сходящимся*, а число S – *суммой* данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Если предел последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости числового ряда) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то предел общего члена равен нулю: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Выражение вида $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, представляющее собой числовой ряд, называется n-*м остатком* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и обозначается $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ или $r_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n .$$

Теорема 2 Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо и достаточно, чтобы любой его остаток r_n сходился.

Очевидно, что если числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, т. е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 .$$

Следовательно, отбрасывание любого конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

1.2 Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши сходимости ряда

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ , } a_k \geq 0 \quad \forall\ k \in \mathbf{N}$$

называется *рядом с неотрицательными членами*.

Для рядов с неотрицательными членами справедливы следующие свойства:

– перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость);

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \text{ .}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ называется *суммой рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot S \text{ .}$$

Ряд $\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *произведением ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *на число* α ;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то и ряд, полученный группировкой его членов без изменения порядка их расположения, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

Теорема 3 (критерий Коши сходимости ряда) *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $k > N(\varepsilon)$ *и всех* $\forall\, p \in \mathbf{N}$ *имело место неравенство:*

$$\left|a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+p}\right| < \varepsilon .$$

1.3 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема 4 *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм* (S_n) *этого ряда была ограничена.*

Теорема 5 (интегральный признак Коши) *Если неотрицательная интегрируемая функция* $f(x)$ *на промежутке* $[1;+\infty)$ *монотонно убывает, и члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *имеют вид* $a_k = f(k)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости имеет место неравенство:*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

Теорема 6 (признак сравнения) *Пусть для членов рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *справедливо неравенство* $0 \le a_k \le b_k$ $\forall k \ge n_0 \in \mathbf{N}$. *Тогда:*

1) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

Следствие (предельный признак сравнения) *Пусть для членов рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ $(b_k > 0)$ *существует конечный предел:*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = A, \ A \neq 0.$$

Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Для исследования на сходимость рядов с помощью признаков сравнения используются ряды:

– ряд из элементов геометрической прогрессии: $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $(a \neq 0)$, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geq 1$;

– обобщенный гармонический ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p \leq 1$.

Теорема 7 (признак Д'аламбера) Пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *существует предел*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L.$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Теорема 8 (признак Коши) Пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(* $a_k > 0$ *) существует предел*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L.$$

Тогда при $L < 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Из существования предела $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ следует, что существует и предел $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Обратное утверждение не всегда имеет место, т. е. признак Коши «сильнее» признака Д’аламбера.

Вопросы для самоконтроля

1 Какое выражение называется числовым рядом?

2 Что называется суммой ряда?

3 Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.

4 Какое выражение называется остатком ряда?

5 Перечислите простейшие свойства сходящихся числовых рядов.

6 Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.

7 Какие ряды называются рядами с неотрицательными членами?

8 Сформулируйте интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами.

9 Сформулируйте признаки сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами.

10 Сформулируйте признак Д’аламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.

11 Сформулируйте признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

Решение типовых примеров

1 Записать первые пять членов ряда, общий член которого задан формулой $a_k = \dfrac{k}{2^{k-1}(3k+1)}$.

Решение. Полагая в формуле общего члена $k=1$, 2, 3, 4, 5, получим

$$a_1 = \frac{1}{2^{1-1}(3\cdot 1+1)} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{2}{2^{2-1}(3\cdot 2+1)} = \frac{2}{14},$$

$$a_3 = \frac{3}{2^{3-1}(3\cdot 3+1)} = \frac{3}{40},$$

$$a_4 = \frac{4}{2^{4-1}(3\cdot 4+1)} = \frac{4}{104},$$

$$a_5 = \frac{5}{2^{5-1}(3\cdot 5+1)} = \frac{5}{256}.$$

Ряд можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}(3k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{14} + \frac{3}{40} + \frac{4}{104} + \frac{5}{256} + \ldots .$$

2 Найти общий член ряда

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots .$$

Решение. Показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени k-го члена равен k.

Числители дробей $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{4}{11}$, $\dfrac{5}{15}$, … образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1. Поэтому k-й числитель равен $k+1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Поэтому

k -й знаменатель равен $4k-1$. Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_k = \left(\dfrac{k+1}{4k-1}\right)^k$.

3 Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right),$$

то

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right),\ a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right),$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right),\ a_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Значит, ряд сходится и сумма ряда равна $\dfrac{1}{2}$.

4 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a q^{k-1}$, $a \neq 0$.

Решение. а) для ряда

$$a-a+a-a+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$$

составим частичные суммы:

$$S_1=a,\ S_2=0,\ \ldots,\ S_{2n-1}=a,\ S_{2n}=0,\ \ldots.$$

Последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда не имеет предела и поэтому данный ряд расходится;

б) сумма n первых членов ряда

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{k-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$$

имеет вид

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=\frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q},\ q\neq 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, \text{ если } |q|<1,\\ \infty, \text{ если } |q|>1,\end{cases}$$

то

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, \text{ если } |q|<1,\\ \infty, \quad\ \text{ если } |q|>1.\end{cases}$$

При $q=-1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ совпадает с рядом $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$, при $q=1$, $S_n=na$ и $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма $S=\dfrac{a}{1-q}$, при $|q|\geq 1$ он расходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^k$

Решение. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e \neq 0 .$$

Согласно теореме 1 не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Значит, данный ряд расходится.

6 Исследовать сходимость *гармонического ряда*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} .$$

Решение. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k}=0$, однако гармонический ряд расходится. Докажем, что гармонический ряд расходится двумя способами.

<u>1 способ</u>. Действительно, предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0 .$$

Из неравенства

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},\ n\in\mathbf{N},$$

предельным переходом по n получаем противоречие: $0\geq\frac{1}{2}$.

<u>2 способ</u>. Имеем:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|=\left|\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p}\right|=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+p} .$$

Для любого $t\in\mathbf{N}$ положим $k=t$ и $p=t$. Так как $\frac{1}{t+i}\geq\frac{1}{t+t}$, $i=1,2,\ldots,t$,то получим:

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|>\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}+\ldots+\frac{1}{2t}=\frac{1}{2} .$$

Таким образом, для любого $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ критерий Коши не выполняется. Следовательно, гармонический ряд расходится.

7 Исследовать сходимость *обобщенного гармонического ряда* (*ряда Дирихле*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \ p \in \mathbf{R}.$$

Решение. При $p = 1$ ряд совпадает с гармоническим рядом и расходится.

Если $p \le 0$, то $\frac{1}{k^p} \ge 1 \ \forall k \in \mathbf{N}$ и $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} \ne 0$. В этом случае ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $p > 0$ и $p \ne 1$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Известно, что несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

8 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{k+1}\right)^k$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{k}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^4}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$.

Р е ш е н и е. а) так как $\dfrac{1}{k^k} \le \dfrac{1}{k^2} \quad \forall k \ge 2$ и обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то согласно признаку сравнения сходится и данный ряд;

б) сравним ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\dfrac{\pi}{k}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi}{k}}{\dfrac{1}{k}} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi}{k}}{\dfrac{\pi}{k}} = \pi, \quad 0 < \pi < \infty,$$

и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд;

в) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}.$$

Так как $L = \dfrac{1}{e} < 1$, то по признаку Д'аламбера данный ряд сходится;

г) вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}k^4}{(k+1)^4 \cdot 2^k} = 2\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^4} = 2.$$

Так как $L = 2 > 1$, то согласно признаку Д'аламбера исходный ряд расходится;

д) так как

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k+1} = 2 > 1,$$

то согласно признаку Коши данный ряд расходится;

е) сравним ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}$ с обобщенным гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. Вычислим предел:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{3k^2+5k+1}{k^4-10k^2-5}}{\dfrac{1}{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(3k^2+5k+1\right)k^2}{k^4-10k^2-5}=3,\ 0<3<\infty.$$

Поскольку для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ имеем $p=2$, то исходный ряд сходится вместе с обобщенным гармоническим рядом.

Задания для аудиторной работы

1 Записать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_k=\dfrac{k}{3^k(2k+1)}$;

б) $a_k=\dfrac{k!}{2^k(2k-1)!!}$;

в) $a_k=\dfrac{3k+4}{4k-1}$;

г) $a_k=\dfrac{(2k+1)!!}{(k+1)2^k}$.

2 Записать формулу общего члена для рядов:

а) $1+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots$;

б) $\dfrac{10}{7}+\dfrac{100}{9}+\dfrac{1000}{11}+\dfrac{10000}{13}+\ldots$;

в) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}+\ldots$;

г) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}+\ldots$.

3 Найти суммы рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4k-3)(4k+1)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{k-1}}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+2)}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{5^{k-1}}$.

4 Используя необходимое условие, исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2k+1}{3k+2}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{5k-2}{5k+3}$.

5 С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^3 k}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+9}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k^3}$.

6 С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k+9}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+6}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{5^{2k}+7}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{\sqrt{k^4+9}}$;

д) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3-3k^2+5}{2k^5+9k}$.

7 С помощью признака Д'аламбера исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k5^{2k-1}}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k}{3^k(2k-1)}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k2^{k+1}}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^4}$.

8 С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{4k+5}\right)^k$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2k^2+5k+2}{3k^2+k+3}\right)^k$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k+2}{3k+4}\right)^k$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+6k+8}{2k^2-k+6}\right)^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\dfrac{k}{k+4} \right)^{k^2}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{3k}{k+5} \right)^k \left(\dfrac{k+2}{k+3} \right)^{k^2}$.

Задания для домашней работы

1 Записать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_k = \dfrac{k+1}{3^{k+1}(k+1)}$; в) $a_k = \dfrac{2k+3}{3k-1}$;

б) $a_k = \dfrac{k!}{2^k(2k^2-1)}$; г) $a_k = \dfrac{k^2+1}{k!}$.

2 Записать формулу общего члена для рядов:

а) $\dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{1\cdot 2} + \dfrac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$; в) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$;

б) $-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \ldots$; г) $1 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{13} + \dfrac{1}{17} + \ldots$.

3 Найти суммы рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3k-2)(3k+1)}$; в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3} \right)^{k-1}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\dfrac{4}{5} \right)^{k-1}$.

4 Используя необходимое условие, исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{4k-1}{3k+1}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{2k}{5k+4}$.

5 С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt[5]{k}}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2+4}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+9)\ln(2k+9)}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-k^4}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-2)\ln^4(k-2)}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(2n)}}$.

6 С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k+1}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^3+2}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-3}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2+k-6}{15k^3-2k+4}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4-k^2+10}}{3k^4+5k-6}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k(2^k+1)}$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^4+2k^2}}$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{3^k+7}$.

7 С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^k k^5$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{11}{10}\right)^k \frac{1}{k^5}$.

8 С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+2}{4k-1}\right)^k$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k^2+4k+1}{3k^2+2k+3}\right)^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \left(\frac{k}{2k-1}\right)^{k^2}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5k+1}{7k+4}\right)^k$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k^2+k+1}{3k^2+7k+16}\right)^k$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+4}\right)^k \left(\frac{2k-1}{k+3}\right)^{k^2}$.

Практическое занятие 2 **Знакопеременные ряды**

2.1 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница
2.2 Абсолютно и условно сходящиеся ряды
2.3 Признаки Дирихле и Абеля

2.1 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница

Знакочередующимся называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{k-1}a_k + \dots ,$$

где a_k, $k = 1,2,\dots$, – числа одного знака.

Теорема 1 (признак Лейбница) Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ удовлетворяют условиям:

1) $a_k \ge a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbf{N}$*;*

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т. е. $S \le a_1$.

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1 называется *рядом Лейбница*.

Остаток $r_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + \dots)$ ряда Лейбница удовлетворяет неравенству $|r_n| \le a_{n+1}$.

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными*.

2.2 Абсолютно сходящиеся ряды

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится.

Т е о р е м а 2 *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают *свойствами*:

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sigma$, то $|S| \le \sigma$;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ абсолютно сходится;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна сумме исходного ряда;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $a_k b_m$ членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся*.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ обозначим через a_1^+, a_2^+, …, a_k^+,… и a_1^-, a_2^-, …, a_k^-, … соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, члены которых неотрицательны.

Т е о р е м а 3 Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то оба ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *расходятся.*

Т е о р е м а 4 (Р и м а н а) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *условно сходится, то, каково бы ни было действительное число* s*, можно так переставить его члены, что сумма получившегося ряда будет равна* s.

2.3 Признаки Дирихле и Абеля

Для исследования сходимости знакопеременных рядов часто используются признаки Дирихле и Абеля.

Т е о р е м а 5 (п р и з н а к Д и р и х л е) Пусть

1) последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$,

2) последовательность сумм $(B_n)_{n=1}^{\infty}$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, *ограничена.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Т е о р е м а 6 (п р и з н а к А б е л я) Пусть

1) последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *ограничена и монотонна,*

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Вопросы для самоконтроля

1 Какой ряд называется знакочередующимся?
2 Сформулируйте признак Лейбница.
3 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
4 Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

5 Какой ряд называется условно сходящимся?
6 Какими свойствами обладают условно сходящиеся ряды?
7 Сформулируйте признак Дирихле.
8 Сформулируйте признак Абеля.

Решение типовых примеров

1 Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{k^2}>\frac{1}{(k+1)^2}$ $\forall k\in\mathbf{N}$ и $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^2}=0$, то данный ряд, согласно признаку Лейбница, сходится.

2 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Решение. а) ряд, составленный из абсолютных величин исходного ряда, имеет вид $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и является сходящимся. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}$ является абсолютно сходящимся;

б) по признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}$ сходится. С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ не является абсолютно сходящимся.

3 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$.

Решение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ является расходящимся, так как

$\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^k$ не существует.

Ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots$$

и

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots,$$

полученные из него путем объединения его членов, сходятся:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots=1.$$

Таким образом, для исходного ряда сумма ряда не существует, а ряды, полученные из него указанным объединением его членов, имеют конечные суммы.

4 Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\alpha}{k}$.

Р е ш е н и е. Последовательность $(a)_{n=1}^{\infty}=\left(\dfrac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывающая и $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}=0$.

Рассмотрим последовательность $(B_n)_{n=1}^{\infty}=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right)_{n=1}^{\infty}$. При $\alpha\neq 2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{3\alpha}{2}-\ldots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha\right| \le = \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}.$$

При $\alpha \ne 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, все рассматриваемые суммы ограничены. В силу признака Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}$ сходится.

При $\alpha = 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, все члены ряда обращаются в нуль и ряд также сходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos\frac{\pi}{k}$.

Решение. Последовательность $(a_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна. Ряд сходится по признаку Дирихле. Согласно признаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k}\cos\frac{\pi}{k}$ сходится.

6 Сколько членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001?

Решение. Этот ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница:

$$1 > \frac{1}{2^4} > \frac{1}{3^4} > \ldots > \frac{1}{k^4} > \ldots,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, поскольку ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$$

является сходящимся обобщенным гармоническим рядом ($p=4>1$).

Определим число членов, которые нужно взять, чтобы вычислить его сумму с заданной точностью.

Если

$$\frac{1}{k^4}<0{,}0001 \text{ или } \frac{1}{k^4}<\frac{1}{10000},$$

то $k>10$.

Следовательно, нужно взять 10 членов данного ряда.

Так как $a_{11}=\frac{1}{11^4}<\frac{1}{10^4}=0{,}0001$, то оценка ряда есть

$$R_{10}<a_{11}<0{,}0001 .$$

7 Составить сумму рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$. Сходится ли полученный ряд?

Решение. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ есть геометрический со знаменателем $q_1=\frac{1}{2}$, его сумма $S_1=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$, второй $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}$ геометрический ряд со знаменателем $q_2=-\frac{1}{3}$, его сумма $S_2=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$.

По определению суммы двух рядов полученный ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right).$$

Данный ряд сходится, его сумма

$$S=S_1+S_2=2{,}75 .$$

Задания для аудиторной работы

1 Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{3^k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)}{2}}}{k^2}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^k}{1+(-5)^{2k}}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k k}{3k-1}$;

в) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\ln k}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos k\alpha}{k^4}$.

2 Исследовать абсолютно или условно сходятся ряды:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{3k(3k-1)}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k\ln k)^2}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}(3^k+1)}{k\cdot 3^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k+2^k}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(2k)!!}{(k+1)^k}$.

3 С точностью до 0,001 вычислить сумму рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k!}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k\,2^k}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k^2}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k+1}}$.

4 Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4^k}+\dfrac{(-1)^k}{5^k}\right)$.

5 Составить ряд, полученный из разности соответствующих членов рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}$. Сходится ли полученный ряд?

6 Даны два ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}$. Записать первые пять членов их произведения. Сходится ли полученный ряд?

Задания для домашней работы

1 Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)(k-2)}{2}}}{5^k}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4)^k}{1+(-4)^{2k}}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{k}}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k^3}$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k^5}$.

2 Исследовать, абсолютно или условно сходятся ряды:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt[4]{k}}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k+5^k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}$.

3 С точностью до 0,001 вычислить сумму рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k!)^2}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{5^k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

4 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)$.

5 Составить ряд, полученный из разности соответствующих членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Сходится ли полученный ряд?

6 Даны два ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$. Записать первые пять членов их произведения. Сходится ли полученный ряд?

Практическое занятие 3 **Функциональные ряды**

3.1 Сходимость функциональных последовательностей
3.2 Функциональные ряды и их сходимость
3.3 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов
3.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

3.1 Сходимость функциональных последовательностей

Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(f_1(x); f_2(x); f_3(x); \ldots\right),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

Последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что $\forall n \in \mathbf{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство $\left|f_n(x)\right| \le M$:

$$\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty} - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \text{ и } \forall x \in X \quad \left|f_n(x)\right| \le M .$$

Последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ называется *поточечно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$, т. е. $\forall x \in X \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$:

$$\forall\ x \in X \ \ \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon)\ \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon .$$

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty$.

Функциональная последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех точек $x \in X$ имеет место неравенство $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon) \text{ и } \forall\ x \in X \Rightarrow\ \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon .$$

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ n \to \infty$.

Для того чтобы последовательность функций $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_X\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$.

Обозначим $r_n=\sup\limits_X\left|f_n(x)-f(x)\right|$.

Тогда последовательность $\left(r_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\sup\limits_X\left|f_n(x)-f(x)\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ является числовой последовательностью.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности. Для того чтобы последовательность функций $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех точек $x\in X$, всех $n>N(\varepsilon)$ и всех $p\in\mathbf{N}$ выполнялось неравенство $\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$:

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N(\varepsilon):\forall\ x\in X\ ,\forall\ n>N(\varepsilon)\ \forall\ p\in\mathbf{N}\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon$.

3.2 Функциональные ряды и их сходимость

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, … – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_k(x)+...=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется *функциональным*.

Каждому значению $x_0\in X$ соответствует числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x_0)$ сходится, то x_0 называется *точ-*

кой сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D \subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ конечная сумма $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ называется n-*й частичной суммой* и обозначается $S_n(x)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}(x)$ называется n-*м остатком* и обозначается $r_n(x)$.

Поточечная сходимость функциональных рядов. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *сходящимся поточечно* к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $S(x)$ на X, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x) \iff \forall\, x \in X \quad \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Функция $S(x)$ называется *суммой* ряда.

Очевидно, что для поточечно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ его остаток $r_n(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_1 \subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| u_k(x) \right|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1 \subset D$, где D – область сходимости функционального ряда.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используются признаки Коши и Д'аламбера, для которых в рассматриваемом случае предел L, вообще говоря, будет функцией переменной x.

Равномерная сходимость функциональных рядов. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $\left(S_n(x)\right)$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows S(x) \Leftrightarrow S_n(x) \rightrightarrows S(x) \ \forall \ x \in X .$$

Для равномерно сходящегося ряда остаток удовлетворяет соотношению: $r_n(x) \rightrightarrows 0 \ \forall \ x \in X$.

Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер $N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т. е. $N = N(\varepsilon; x)$, а во втором – только от ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечн*ая сходимость называется также *неравномерной*.

Теорема 2 (критерий Коши равномерной сходимости ряда) Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что всех $n > N(\varepsilon)$, всех $p \in \mathbf{N}$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство

$$\left|u_{n+1}(x) + .. + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon .$$

3.3 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 3 (признак Вейерштрасса) Пусть

1) члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X .$$

2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_n \ge 0$, *сходится.*

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* X .

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $|u_k(x)| \le a_k \quad \forall k \in \mathbf{N}, \ \forall x \in X$, называется *мажорантным* рядом или *мажорантой* для функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется *мажорируемым* на множестве X .

Теорема 4 (признак Дирихле) Пусть

1) последовательность функций $\left(a_n(x)\right)$ *равномерно сходится к нулю на множестве* X *;*

2) $\left(a_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ *в каждой точке* $x \in X$ *монотонна;*

3) последовательность частичных сумм $\left(B_n(x)\right)$, $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$, *ограничена на* X .

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *равномерно сходится на* X .

Теорема 5 (признак Абеля). Пусть

1) последовательность функций $\left(a_n(x)\right)$ *ограничена на множестве* X *и в каждой точке* $x \in X$ *монотонна;*

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ *равномерно сходится на* X .

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *равномерно сходится на* X .

3.4 Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *(непрерывность)* если на множестве X функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма непрерывна на X и возможен предельный переход:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_k(x) \quad \forall x_0 \in X \ ;$$

– *(почленное интегрирование)* если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x] \subset [a;b]$ и справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\, dt \ ;$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t) dt$ сходится равномерно на $[a;b]$;

– *(почленное дифференцирование)* если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$ членами сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то ряд

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ и справедливо равенство;

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функциональная последовательность называется ограниченной?

2 Какая функциональная последовательность называется поточечно сходящейся на множестве X ?

3 Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности.

4 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательности.

5 Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.

6 Сформулируйте определения поточечной и равномерной сходимости функционального ряда.

7 Следует ли из равномерной сходимости ряда поточечная? Верно ли обратное?

8 Сформулируйте признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

9 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

10 Перечислите свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Решение типовых примеров

1 Доказать, что функциональная последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; x; x^2; \ldots\right)$, заданная на множестве $X = \left[0; \frac{1}{2}\right]$, является равномерно сходящейся на этом множестве.

Р е ш е н и е. Предел существует и $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 = f(x)$ для всех

$x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Так как $\sup\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} \left| x^n - 0 \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} \left| x^n - 0 \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 .$$

Поэтому последовательность $\left(x^n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(1; x; x^2; \ldots\right)$ сходится равномерно к нулю на отрезке $X = \left[0; \frac{1}{2}\right]$: $x^n \underset{\left[0;\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} 0$.

2 Найти область абсолютной сходимости функционального ряда $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$.

Решение. Зафиксируем точку x и применим признак Д’аламбера:

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{x^k}{x^{k-1}} \right| = |x| .$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x|^{k-1}$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Таким образом, областью абсолютной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ является интервал $(-1;1)$.

3 Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k$.

Решение. Применим признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов данного ряда.
Так как

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left|u_k(x)\right|} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^k \right|} = \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2k}}} = \left| \frac{x-1}{2x+1} \right|,$$

то ряд сходится, когда $\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right|<1$.

Решая данное неравенство, получим

$$-1<\frac{x-1}{2x+1}<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1\ge 0,\\ -(2x+1)<x-1<2x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1<0,\\ -(2x+1)>x-1>2x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge \dfrac{-1}{2},\\ x>0,\\ x>-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\dfrac{1}{2},\\ x<0,\\ x<-2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Итак, ряд сходится при $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

При $x=0$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, являющийся сходящимся, поскольку он удовлетворяет условиям Лейбница.

При $x=-2$ получим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, являющийся расходящимся как обобщенный гармонический ряд ($p=\dfrac{1}{2}<1$).

4 Исследовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$$

на а) поточечную, б) равномерную сходимость.

Решение. а) так как

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}+\ldots+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}},$$

то члены исходного ряда при $x\neq 0$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{1+x^2}<1$, а при $x=0$ все обращаются в нуль. Тогда

$$S(x)=\begin{cases}0, \text{если } x=0,\\ 1+x^2, \text{если } x\neq 0.\end{cases}$$

Следовательно, областью поточечной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ является вся числовая ось $\mathbf{R}$. При этом, хотя все члены ряда непрерывны на $\mathbf{R}$, сумма $S(x)$ разрывна в точке $x=0$;

б) пусть $0<\varepsilon<1$ и $x\neq 0$. Тогда

$$S_n(x)=\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right),$$

и неравенство

$$\left|S(x)-S_n(x)\right|=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon$$

выполняется при $n>N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Действительно,

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}<\varepsilon \;\Rightarrow\; \left(1+x^2\right)^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; (n-1)\ln\left(1+x^2\right)>-\ln\varepsilon.$$

Отсюда $n>1-\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}$.

Отсюда $N(\varepsilon,x)=1+\left[1-\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(1+x^2\right)}\right]$.

Поскольку $N(\varepsilon,x)\to+\infty$ при $x\to 0$ и $0<\varepsilon<1$, то при выбранном ε не существует конечного номера $N(\varepsilon)$, который не зависит от x, такого, чтобы выполнялось неравенство $\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon \quad \forall n>N(\varepsilon), \ \forall x\in\mathbf{R}$.

Значит, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}$ на $\mathbf{R}$ неравномерная.

5 Является ли сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}$ непрерывной функцией?

Решение. Каждый член $u_k(x)=\frac{\cos kx}{k^3}$, $k=1,2,...$, есть функция, непрерывная от x. Поскольку $\left|\frac{\cos kx}{k^3}\right|\le\frac{1}{k^3}$, то и мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ является сходящимся как обобщенный гармонический ряд, $p=3>1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}$ сходится равномерно на всей числовой оси. Поэтому сумма этого ряда непрерывна при всех x как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

6 Исследовать равномерную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+x^2}$.

Так как $\frac{1}{k^2+x^2}\le\frac{1}{k^2} \quad \forall x\in\mathbf{R}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $\mathbf{R}$. Интегрируя его почленно на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{k^2+t^2}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$.

7 Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$.

Решение. Очевидно, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ сходится при $|x|<1$ и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда сходится равномерно при $|x| \le q < 1$ на основании признака Вейерштрасса, так как он мажорируется числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$, сходящимся по признаку Д'аламбера. Используя свойство почленного дифференцирования, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \ \forall x \in (-1;1).$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что последовательность $\left(\frac{k^2}{k^2+x^2}\right)_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на отрезке $[-1;1]$.

2 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{2x-3}{4x+5}\right)^k$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)x^{2k-1}}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} k\,e^{kx}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^k$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$;

е) $\sum_{k=1}^{\infty} 4^k (3x+2)^{2k-1}$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5-x^2}{4}\right)^k$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-kx^2}$.

3 Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k}$.

4 Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+3^k}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2+k^2}$.

5 Исследовать непрерывность функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{x^2+k^2}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2}$.

6 Найти сумму функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

Задания для домашней работы

1 Доказать, что последовательность $\left(\frac{\operatorname{arctg} kx}{\sqrt{k+x}}\right)_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на промежутке $[0;+\infty)$.

2 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!!}\left(\frac{x+4}{2x+1}\right)^k$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\left(\frac{2x-5}{3x+1}\right)^k$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{x^4+k^4}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 5^k (x+2)^k$; ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-x}{x^2-4}\right)^k$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k^2}$.

3 Доказать равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+2k}$.

4 Исследовать равномерную сходимость функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^4}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k\sqrt[3]{k}}$.

5 Исследовать непрерывность функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + k^3}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k\left(1 + x^{2k}\right)}$.

6 Найти сумму функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)k}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Практическое занятие 4 Степенные ряды

4.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля
4.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда
4.3 Свойства сходящихся степенных рядов

4.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля

Ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_k(x - x_0)^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

называется *степенным рядом* по степеням $(x - x_0)$. Здесь a_k, x_0 – заданные действительные числа, x – переменная. Числа a_k называются *коэффициентами* степенного ряда.

При $x_0 = 0$ имеем *степенной ряд по степеням* x*:*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k .$$

Поскольку заменой $x - x_0 = \xi$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ можно свести к ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$, то не ограничивая общности можно рассматривать только ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема 1 (Абеля) Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *сходится в точке* $x_0 \neq 0$*, то он сходится абсолютно в интервале* $-|x_0| < x < |x_0|$ *и сходится равномерно на отрезке* $-q \le x \le q$, *где* $0 < q < |x_0|$. *Если в точке* $x_1 \neq 0$ *степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *рас-*

ходится, то он расходится во всех точках x*, таких, что* $|x| > |x_1|$.

4.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

Из теоремы Абеля вытекает, что если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

Число $R \geq 0$ называется *радиусом* сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R; R)$ и расходится при $|x| > R$. Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости*.

При $x = \pm R$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если ряд хотя бы в одной точке $x_1 = R$ или $x_2 = -R$ сходится, то эти точки вместе с интервалом сходимости образуют *область сходимости*.

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbf{R}$, то $R = \infty$.

Теорема 2 Пусть для коэффициентов ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *существует предел* $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \neq 0$. *Тогда радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара:*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Если существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$, то $R = \lim\limits_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_k + 1} \right|$.

Для степенного ряда общего вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ существует $R \in \mathbf{R}$, $R \geq 0$, такое, что данный ряд абсолютно сходится при $|x-x_0| < R$ и расходится при $|x-x_0| > R$. Здесь число $R \geq 0$ называют *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

4.3 Свойства сходящихся степенных рядов

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ обладает свойствами:

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то его сумма непрерывна на интервале сходимости $(-R; R)$;

– операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0; x] \subset (-R; R)$ степенного ряда не изменяют его радиуса сходимости;

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости;

– степенной ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0; x]$, принадлежащем интервалу сходимости:

Вопросы для самоконтроля

1 Какой ряд называется степенным?

2 Сформулируйте теорему Абеля.

3 Что называется радиусом сходимости, интервалом сходимости, областью сходимости степенного ряда?

4 По каким формулам вычисляется радиус сходимости степенного ряда?

5 Перечислите свойства сходящихся степенных рядов.

Решение типовых примеров

1 Найти радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$.

Решение. Имеем:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0\ .$$

Значит, ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

2 Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k \cdot 5^k}$.

Решение. Имеем:

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k\cdot 5^k}}{\frac{1}{(k+1)\cdot 5^{k+1}}} = 5\cdot$$

Значит, интервал сходимости $-5 < x-3 < 5$ или $-2 < x < 8$. В точке $x = -2$ получаем условно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, а в точке $x = 8$ – расходящийся гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Таким образом, область сходимости ряда есть полуинтервал $[-2;8)$.

3 Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^k x^{2k} + \ldots ,$$

полученный почленным дифференцированием исходного ряда. Так как члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(-x^2\right)$, то его сумма $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$, если $|x| < 1$.

Интегрируя ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ почленно на отрезке $[0;x] \subset (-1;1)$, получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

.

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg} x, \ |x|<1.$$

Таким образом, функция $y=\operatorname{arctg} x$ является суммой исходного ряда.

Задания для аудиторной работы

1 Найти радиус сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{7^k}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k3^k x^k$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k^2}}{k!}(x+3)^k$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{1}{k})^{k^2}(x-e)^k$;

д) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k 5^k x^k$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k!(x-2)^k$;

ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}(x+1)^k$;

и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^k$.

2 Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2k-1}}{k\cdot 7^k}$;

в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k(5^k+1)}$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k\sqrt{k+1}}$.

Задания для домашней работы

1 Найти радиус степенных рядов:

а) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{2k}}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k k 2^{2k} x^k$;

д) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k 3^{2k} x^2$;

е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+6)^k}{k!}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^k}\,(x-1)^k$;

ж) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}(x-1)^k$);

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2k}}{k^2}$;

и) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{k+5}\right)^{k^2} x^k$.

2 Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2k}}{k}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^k}{k^4}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} (1-\frac{1}{k})^{k^2}\,\frac{x^{2k}}{2k}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!\,k^k}{K(k!)^2}$.

Практическое занятие 5 Ряды Тейлора и Маклорена

5.1 Разложение функций в степенные ряды
5.2 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена
5.3 Приложения степенных рядов

5.1 Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0)+ f'(x_0)+(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+ f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

и называется *рядом Маклорена*.

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

допустим знак равенства, т. е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен. Если $S(x)= f(x)$ на $(x_0-R; x_0+R)$, то говорят, что функция $f(x)$ *разложима в ряд Тейлора в окрестности точки* x_0.

Частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
представляют собой многочлены Тейлора для $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 1 (Тейлора) Пусть

1) функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(R;x_0)$ точки x_0 производные любого порядка;

2) $\forall x\in U(R;x_0)$ выполняется условие
$$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\,\frac{k!}{R^n},\ k=0,1,2,\ldots .$$
Тогда функция $f(x)$ разлагается на множестве $U(R;x_0)$ единственным образом:
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots .$$
Следствие 1 Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы остаток в формуле Тейлора стремился к нулю:
$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$
Следствие 2 Если для любых $x\in(x_0-R;x_0+R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x-x_0|<R$.

5.2 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

При $x_0=0$ формула Тейлора имеет вид:
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$
и называется формулой *Маклорена*.

Основные разложения в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1;1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{a(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ x \in (-1;1).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

называется *биномиальным*, так как при $\alpha = n \in \mathbf{N}$ все коэффициенты данного ряда, начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{n!} x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k .$$

5.3 Приложения степенных рядов

Ряды Тейлора и Маклорена используются при вычислении приближенных значений функций, интегралов, решении дифференциальных уравнений.

П р и б л и ж е н н о е в ы ч и с л е н и е з н а ч е н и й ф у н к ц и й . Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступают следующим образом. Функцию $f(x)$ раскладывают в ряд по степеням $x - x_1$ в интервале сходимости, содержащим точку x_0. Точка x_1 – это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной x придается значение x_0. В полученном числовом ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_1)^n$ оставляются только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определяется из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

П р и б л и ж е н н о е в ы ч и с л е н и е и н т е г р а л о в . Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

И н т е г р и р о в а н и е д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й . Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

Вопросы для самоконтроля

1 Какой степенной ряд называется рядом Тейлора для функции $y = f(x)$? Как из него получить ряд Маклорена?

2 Сформулируйте теорему Тейлора о разложении функции в ряд Тейлора.

3 Приведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.

Решение типовых примеров

1 Разложить функцию $f(x) = 2^x$ в степенной ряд.

Решение. Найдем значение функции и ее производных в точке $x=0$:

$$f(x)=2^x, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=2^x\ln 2, \qquad f'(0)=\ln 2,$$
$$f''(x)=2^x\ln^2 2, \qquad f''(0)=\ln^2 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2, \qquad f^{(n)}(0)=\ln^n 2.$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном x имеет место неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$$

при любом n. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Тейлора

$$2^x=1+x\cdot\ln 2+\frac{x^2\cdot\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\cdot\ln^3 2}{3!}+\ldots.$$

2 Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в степенной ряд.

Решение. Функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно записать в виде

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Заменим $\cos 2x$ его разложением в ряд Маклорена

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$
$$=1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Подставляя, получим

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right)=$$
$$=\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

3 Разложить функцию $f(x)=e^{-x^2}$ в степенной ряд.

Решение. В разложении

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

заменим x на $\left(-x^2\right)$. Получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ \forall\ x\in\mathbf{R}.$$

4 Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в степенной ряд по степеням $(x-1)$.

Решение. В разложении $\forall x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

заменим x на $(x-1)$. Получим $\forall x\in(0;2)$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots.$$

5 Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в степенной ряд по степеням $(x-2)$.

Решение. Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}.$$

Правую часть можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей прогрессии с первым членом $a_1=\dfrac{1}{2}$ и и знаменателем $q=-\dfrac{x-2}{2}$.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots,$$

Тогда

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+\dots .$$

Поскольку ряд сходится при $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, то разложение имеет место для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x<4$.

6 Разложить по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 функцию

$$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2} .$$

Решение. Используем разложение $\forall x\in(-1;1)$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots$$

для разложения функций

$$f_1(x)=\left(1+x^3-2x\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } f_2(x)=\left(1+x^2-3x\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Для первой функции имеем

$$f_1(x)=\left(1+\left(x^3-2x\right)\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(x^3-2x\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(x^3-2x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(x^3-2x\right)^3+o\left(\left(x^3-2x\right)^3\right)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right),$$

так как $o\left(x^3-2x\right)=o\left(x^3\right)$.

Для второй функции аналогично получим

$$f_2(x)=\left(1+\left(x^2-3x\right)\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(x^2-3x\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(x^2-3x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(x^2-3x\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$=1-\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)=1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right).$$

Тогда

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)-\left(1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

(воспользовались тем, что $o\left(x^3\right)-o\left(x^3\right)=o\left(x^3\right)$).

7 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ число e.

Решение. Так как

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{k!}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\xi<x,\ \forall x\in\mathbf{R},$$

то из оценки

$$\left|R_n(1)\right|=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\le 0{,}01$$

следует, что $n\ge 5$, т. е. $n_0=5$. Полагая $x_0=1$, $x_1=0$, получим

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\approx 2+0{,}500+0{,}167+0{,}042+0{,}008=2{,}717\ .$$

8 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

Решение. Заменим e^x и $\sin x$ их разложением в ряд Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}\ldots+}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+\frac{2x}{4!}\ldots+}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=2\,.$$

9 Вычислить $\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Имеем $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

Тогда

$$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^{1/3} x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} .$$

Отсюда

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}} \le 0{,}001 \;\Rightarrow\; n \ge 1 \Rightarrow n_0 = 1$$

$$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} \approx 0{,}3333 - 0{,}0123 = 0{,}3210 .$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx 0{,}321$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

10 Найти решение уравнения

$$yy' = \sin y ,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение $yy' = \sin y$ допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx .$$

Однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности $x_0 = 0$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n .$$

Так как $y(0)=\frac{\pi}{2}$ и $y'=\frac{\sin y}{y}$, то $y'(0)=\frac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства $y'=\frac{\sin y}{y}$, находим

$$y''=\frac{(y'\cos y)y-y'\sin y}{y^2}=\frac{y'(y\cos y-\sin y)}{y^2}.$$

Откуда

$$y''(0)=\frac{-y'(0)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^3.$$

Дифференцируя обе части найденного равенства для y'', находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y=y(x)$:

$$y=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}x-\frac{2^2}{\pi^3}x^2+\ldots .$$

Задания для аудиторной работы

1 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x)=4^x$;

б) $f(x)=\sqrt{1-x}$;

в) $f(x)=\ln(2+x)$;

г) $f(x)=\operatorname{sh}^2 x$;

д) $f(x)=\operatorname{tg} x$;

е) $f(x)=(1+x)e^{-x^2}$.

2 Вычислить с точностью 0,0001 значение функций:

а) $\sqrt{24}$;

б) $\cos 18^\circ$;

в) $\operatorname{arctg} 0{,}9$;

г) $\ln 3$;

д) $\sqrt[3]{e}$;

е) $\sqrt[4]{17}$.

3 Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

4 С точность до 0,0001 вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+x^4}dx$;

б) $\int\limits_0^1 \cos^3 x dx$; г) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{e^x-1}{x}dx$.

5 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

а) $y'x+y+2=0$, $y(1)=2$;

б) $y'(x-3)+y=0$, $y(-6)=-6$;

в) $y'-y=e^x$, $y(0)=1$;

г) $y''=2x-\operatorname{sh} x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Задания для домашней работы

1 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x)=\cos^2 x$; г) $f(x)=\operatorname{ch}^2 x$;

б) $f(x)=\sqrt[5]{1+x^2}$; д) $f(x)=\operatorname{ctg} x$;

в) $f(x)=\ln(1+x^4)$; е) $f(x)=\dfrac{\sin x^3}{x^2}$.

2 Вычислить с точностью 0,0001 значение функций:

а) $\sqrt{83}$; г) $\ln 1{,}9$;

б) $\sqrt[4]{e}$; д) $\operatorname{arctg} 0{,}95$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; е) $\sin 10^\circ$;

3 Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\operatorname{tg} x}{\ln\left(1+x^3\right)}$.

4 С точность до 0,0001 вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{5}}\dfrac{\cos x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{8}}\sqrt{1-x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_0^{1}\sin x^3 dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{1}{6}}\dfrac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

5 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

а) $y' + y = x$, $y(0)=0$;

б) $y'\sin x - y\cos x = \sin x - x\cos x$, $y(0)=0$;

в) $y'' + xy = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;

г) $y'' = x^2 - \cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Тема 2 Ряды Фурье

Практическое занятие 1 **Ряды Фурье по ортогональным системам функций**

1.1 Пространство кусочно-непрерывных функций
1.2 Обобщенный ряд Фурье
1.3 Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье

1.1 Пространство кусочно-непрерывных функций

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция. В любой точке разрыва $x_0 \in [a;b]$ такой функции существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$. Поэтому на каждом участке непрерывности существуют определенные интегралы Римана $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b f^2(x)dx$. Значит, кусочно-непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема вместе со своим квадратом на $[a;b]$. Функция $f(x)$ в этом случае называется *функцией с интегрируемым квадратом*.

Так как на множестве кусочно-непрерывных функций определены линейные операции, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства, то это множество образует линейное пространство.

Скалярным произведением функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

На рассматриваемом множестве скалярное произведение функций (φ,ψ) существует и обладает следующими свойствами:

– $(\varphi,\psi)=(\psi,\varphi)$;
– $(\varphi_1+\varphi_2,\psi)=(\varphi_1,\psi)+(\varphi_2,\psi)$;
– $(\lambda\varphi,\psi)=\lambda(\varphi,\psi)\ \ \forall\lambda\in\mathbf{R}$;
– $(\varphi,\varphi)\geq 0$, $(\varphi,\varphi)=0\Leftrightarrow\varphi=0$,

т. е. удовлетворяет аксиомам евклидова пространства.

Множество всех кусочно-непрерывных на $[a;b]$ функций со скалярным произведением (φ,ψ) называется *пространством* L_2 и обозначается $L_2[a;b]$.

Неотрицательное число

$$\|\varphi\|=\sqrt{\int_a^b\varphi^2(x)dx}$$

называется *нормой* функции $\varphi(x)$ в $L_2[a;b]$.

Учитывая, что

$$\int_a^b\varphi^2(x)dx=(\varphi,\varphi),$$

норму функции можно записать в виде:

$$\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}.$$

Функция $\varphi(x)$ называется *нормированной*, если ее норма равна единице.

Две функции $\varphi(x)\in L_2[a;b]$ и $\psi(x)\in L_2[a;b]$ называются *ортогональными* на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на $[a;b]$ равно нулю:

$$(\varphi,\psi)=\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=0.$$

Система функций

$$(\varphi_n(x))=(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots)$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной* на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на этом отрезке, т. е.

$$(\varphi_m,\varphi_n)=0,\ \forall m\neq n,\ m,n\in\mathbf{N}\ .$$

Ортогональная система функций ($\varphi_n(x)$) на отрезке $[a;b]$ называется *ортонормированной*, если

$$\|\varphi\|^2=(\varphi_n,\varphi_n)=\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=1 \quad \forall n\in \mathbf{N} \ .$$

Любую ортогональную на $[a;b]$ систему функций ($\varphi_n(x)$) с $\|\varphi\|\neq 0 \quad \forall n\in N$ можно нормировать. Для этого достаточно разделить каждую функцию системы ($\varphi_n(x)$) на ее норму. В результате получим ортонормированную систему функций $\left(\dfrac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right)$.

Основной тригонометрической системой функций на отрезке $[-l;l]$ называется система

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right).$$

Основная тригонометрическая система функций является ортогональной на любом отрезке длиной $2l$.

1.2 Обобщенный ряд Фурье

При изучении возможности представления функции рядом Тейлора в точке x_0 предполагалось, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности этой точки. Представление же функций рядами Фурье допускает более широкий класс кусочно-непрерывных функций.

Пусть ($\varphi_n(x)$) – ортогональная система функций в $L_2[a;b]$.

Выражение

$$c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)\,.$$

называется *обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций* ($\varphi_n(x)$). Если ($\varphi_n(x)$) – основная тригонометрическая система функций, то ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье*.

Метрикой ρ *(расстоянием)* в пространстве $L_2[a;b]$ называется величина

$$\rho(f,\varphi)=\sqrt{\int_a^b (f(x)-\varphi(x))^2 dx}\,.$$

Величина $\rho(f,\varphi)$ характеризует близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ *в среднем квадратичном*.

Используя определение нормы функции, имеем

$$\rho(f,\varphi)=\|f(x)-\varphi(x)\|.$$

Ортогональным многочленом Фурье называется частичная сумма

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x).$$

Если в качестве ортогональной системы функций выбрана основная тригонометрическая система, то многочлен Фурье называется *тригонометрическим* и обозначается $T_n(x)$.

1.3 Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье

Теорема 1 (об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье) Среди всех обобщенных многочленов вида $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$, $\alpha_k\in\mathbf{R}$, *наилучшей средней квадратичной аппроксимацией функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *является многочлен Фурье, коэффициенты которого находятся по формулам* $\alpha_k=c_k=\dfrac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Теорема 2 (неравенство Бесселя) Если $f(x)\in L_2[a;b]$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ *ее обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций (*$\varphi_n(x)$*), то справедливо неравенство*

$$\int_a^b f^2(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 .$$

Ряд Фурье $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* к функции $f(x) \in L_2[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться равенство

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b].$$

Из равномерной сходимости следует, что при $n \to \infty$

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - S_n(x)| \to 0 .$$

Ряд Фурье называется *сходящимся в среднем квадратичном* к функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если последовательность его частичных сумм ($S_n(x)$) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0 .$$

Понятие сходимости в среднем квадратичном является обобщением понятия равномерной сходимости.

Теорема 3 Если обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *функции* $f(x)$ *сходится на отрезке* $[a;b]$ *равномерно к функции* $f(x) \in L_2[a;b]$, *то он сходится к* $f(x)$ *на* $[a;b]$ *и в среднем квадратичном.*

Теорема 4 Для того чтобы обобщенный ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *функции* $f(x) \in L_2[a;b]$ *сходился к* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля – Стеклова:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx.$$

Ортогональная система функций ($\varphi_k(x)$), для которой выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, называется *замкнутой* в $L_2[a;b]$, а само равенство – *уравнением замкнутости*.

Из теоремы 4 следует, что любая функция $f(x) \in L_2[a;b]$ может быть разложена в сходящийся к ней в среднем квадратичном ряд Фурье по ортогональной на $[a;b]$ системе функций ($\varphi_k(x)$), если эта система является замкнутой в $L_2[a;b]$.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется кусочно-непрерывной?

2 Что называется скалярным произведением функций и какими свойствами оно обладает?

3 Какая система функций называется ортогональной и ортонормированной?

4 Запишите основную тригонометрическую систему и докажите ее ортогональность.

5 Какое выражение называется обобщенным рядом Фурье?

6 Как измерить близость функций? Что называется среднеквадратичным уклонением функций?

7 Какое выражение называется ортогональным многочленом Фурье? Запишите тригонометрический многочлен Фурье.

8 Сформулируйте теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.

9 Что можно сказать о сходимости обобщенного ряда Фурье, если для него выполняется неравенство Бесселя?

10 Какая ортогональная система функций называется замкнутой?

Решение типовых примеров

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$.

Решение. Имеем:

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

2 Вычислить норму функции $\varphi(x)=\sin x$ в $L_2[0;\pi]$.

Решение. Так как

$$\|\varphi\|^2=\int_0^\pi \sin^2 xdx=\left.\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\right|_0^\pi=\frac{\pi}{2},$$

то $\|\varphi\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3 Проверить ортогональны ли функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ на отрезках а) $[-1;1]$, б) $[0;1]$.

Решение.

а) функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ являются ортогональными на отрезке $[-1;1]$, так как

$$(\varphi,\psi)=\int_{-1}^1 xx^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^1=0;$$

б) функции $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=x^2$ не являются ортогональными на отрезке $[0;1]$, поскольку

$$(\varphi,\psi)=\int_0^1 x\cdot x^2dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}\neq 0.$$

4 Доказать, что основная тригонометрическая система функций

$$\left(1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},...,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},...\right)$$

на отрезке $[-l;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

Р е ш е н и е . Докажем, что система ортогональна. Имеем:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{l}{m-n}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}+\frac{1}{2}\frac{l}{m+n}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=0\ .$$

Аналогично доказывается равенство нулю остальных интегралов:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall\ n\in\mathbf{N}\ ,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall\ n\in\mathbf{N}\ ,$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall m,n\in\mathbf{N}\ ,\ m\neq n\,,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall m,n\in\mathbf{N}\ ,\ m\neq n\,,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0\quad\forall m,n\in\mathbf{N}\ ,\ m\neq n\,.$$

Вычислим норму первого члена основной тригонометрической системы функций. Так как

$$\|1\|^2=\int_{-l}^{l}(1)^2\,dx=x\Big|_{-l}^{l}=2l\ ,$$

то $\|1\|=\sqrt{2l}$.

Найдем норму произвольного члена системы, содержащего косинусы:

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2\pi nx}{l}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x+\frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2\pi nx}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}=l\Rightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}\,,\ \forall\ n\in\mathbf{N}\ .$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l}\quad\forall\ n\in\mathbf{N}\ .$$

Разделим каждый член ортогональной на $[-l;l]$ системы на соответствующую ему норму. В результате получается ортонормированная на отрезке $[-l;l]$ *система функций:*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\ldots\right).$$

5 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=e^x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Решение. Ортогональная на $[-1;1]$ система многочленов Лежандра задается условием:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n=0,1,\ldots$$

Первые три члена этой системы имеют вид:

$$P_0(x)=1,$$
$$P_1(x)=x,$$
$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$$

Запишем обобщенный ряд Фурье для функции $f(x)=e^x\in L_2[-1;1]$:

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

и найдем три первых члена искомого разложения, использовав формулы:

$$c_0 = \frac{(f, P_0(x))}{\|P_0(x)\|^2},\ c_1 = \frac{(f, P_1(x))}{\|P_1(x)\|^2},\ c_2 = \frac{(f, P_2(x))}{\|P_2(x)\|^2}$$

Вычислим квадраты нормы многочленов Лежандра:

$$\|P_0(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

$$\|P_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\|P_2(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) dx = \frac{2}{5}.$$

Тогда

$$c_0 = \frac{1}{2}(f, P_0(x)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right),$$

$$c_1 = \frac{3}{2}(f, P_1(x)) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^x x dx = \frac{3}{e},$$

$$c_2 = \frac{5}{2}(f, P_2(x)) = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} e^x \frac{1}{2}(3x^2 - 1) dx = \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right).$$

Обобщенный ряд Фурье, порожденный функцией $f(x) = e^x \in L_2[-1;1]$, запишется в виде

$$e^x \sim \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) + \frac{3}{e}x + \frac{5}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)\frac{1}{2}(3x^2 - 1) + \ldots$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x^3$ и $\psi(x)=x^4+1$ на отрезке $[0;1]$.

2 Доказать, что система $\sin\frac{\pi x}{l}$, $\sin\frac{2\pi x}{l}$, …, $\sin\frac{n\pi x}{l}$, … на отрезке $[0;l]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

3 Доказать, что система *многочленов Лежандра*, определяемая следующим образом:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-n\right)^n,\ n=0,1,\dots,$$

на отрезке $[-1;1]$ является ортогональной.

4 Записать первые три члена разложения функции $f(x)=x$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Задания для домашней работы

1 Вычислить скалярное произведение функций $\varphi(x)=x$ и $\psi(x)=e^x$ на отрезке $[0;1]$.

2 Доказать, что система 1, $\cos x$, $\cos 2x$, …, $\cos nx$, … на отрезке $[0;\pi]$ является ортогональной и построить соответствующую ей ортонормированную систему.

3 Записать первые пять членов разложения функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-1;1]$ по ортогональным многочленам Лежандра.

Практическое занятие 2 **Ряды Фурье по тригонометрической системе**

2.1 Ряд Фурье для периодической функции с периодом T
2.2 Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье
2.3 Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций
2.4 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

7.1 Ряд Фурье для периодической функции с периодом T

Период $T = 2l$. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом $T = 2l$. Рассмотрим основную тригонометрическую систему функций, ортогональную на $[-l;l]$:

$$\left(1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots\right), \quad (2.1)$$

для которой:

$$\|1\| = \sqrt{2l}, \ \|\sin nx\| = \|\cos nx\| = \sqrt{l}.$$

Основная тригонометрическая система функций обладает полнотой, т. е. для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом, имеет место равенство Парсеваля – Стеклова при $a = -l$, $b = l$:

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2. \quad (2.2)$$

Поэтому периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2l$ можно разложить в ряд Фурье, который будет сходиться к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) =$$

$$= c_0 + c_1 \cos\frac{\pi x}{l} + c_2 \sin\frac{\pi x}{l} + c_3 \cos\frac{2\pi x}{l} + c_4 \sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots.$$

С учетом того, что коэффициенты при косинусах принято обозначать буквой a, при синусах – буквой b, а начальный коэффициент – буквой $c_0 = \frac{a_0}{2}$, ряд Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{(1, f)}{\|1\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{\left(f, \cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \; n \in \boldsymbol{N} \tag{2.3}$$

$$b_n = \frac{\left(f, \sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \; n \in \boldsymbol{N}\ .$$

Тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{2.4}$$

коэффициенты которого определяются по формулам (2.3), называется *тригонометрическим рядом Фурье* для периодической функции $f(x) \in L_2[a;b]$.

Для тригонометрического ряда Фурье справедливо *уравнение Ляпунова*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\|f\|^2. \tag{2.5}$$

П е р и о д $T = 2\pi$. Пусть $f(x) \in L_2[-\pi;\pi]$. Ряд Фурье для такой функции получается из ряда (2.4) при $l = \pi$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{2.6}$$

где коэффициенты ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n \in \mathbf{N}\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n \in \mathbf{N}\ .$$

2.2 Признаки сходимости тригонометрических рядов Фурье

Каждой периодической с периодом $T = 2l$ функции $f(x) \in L_2[-l;l]$ можно поставить в соответствие ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n находятся по соответствующим формулам.

Важными являются два вопроса о сходимости рядов Фурье:

– при каких условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, ряд Фурье сходится в том или ином смысле к этой функции и, следовательно, в соотношениях (2.4) и (2.6) справедливы знаки равенства?

– как влияют свойства функции $f(x)$ на характер сходимости ее ряда Фурье?

Ответ на эти вопросы будет дан в следующих теоремах.

Теорема 1 Если $f(x) \in L_2[-l;l]$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2.4) сходится к функции $f(x)$ в среднем квадратичном:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right)dx = 0\,.$$

Теорема 2 Если $f(x) \in L_2[-l;l]$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-l;l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (2.4) сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы ряда

Фурье справедливы следующие соотношения:

1) $S(x)=f(x)$*, если* x *– точка непрерывности функции* $f(x)$*;*

2) $S(x)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$*, если* x_0 *– точка разрыва первого рода функции* $f(x)$*;*

3) $S(-l)=S(l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

На рисунке 2. 1 дана геометрическая интерпретация условий 1), 2), 3) теоремы 2.

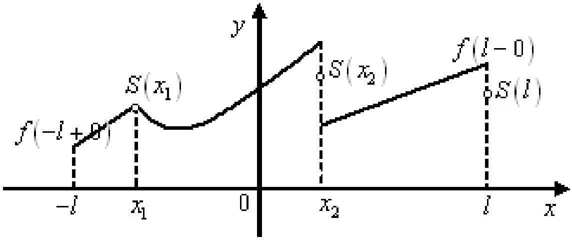

Рисунок 2. 1 – Сходимость ряда Фурье в различных точках

Так, например, условие 2) означает, что в точках разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна среднему арифметическому пределов функции справа и слева.

Т е о р е м а 3 *Если функция* $f(x)\in L_2[a;b]$ *является кусочно-гладкой и непрерывной на отрезке* $[-l;l]$*, а на концах этого отрезка удовлетворяет условию* $f(-l)=f(l)$*, то ее тригонометрический ряд Фурье на* $[-l;l]$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Теоремы 1 – 3 показывают, как свойства функции $f(x)\in L_2[a;b]$ влияют на сходимость ее ряда Фурье:

– если $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция с периодом $T=2l$, то ее ряд Фурье сходится к ней в среднем;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая функция, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точке разрыва, т.е. сумма ряда не везде совпадает с $f(x)$;

– если $f(x)$ – кусочно-гладкая и непрерывная функция, то ее ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$.

2.3 Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций

Рассмотрим частные случаи.

Четная функция. Для четной функции имеет место равенство:

$$f(-x)=f(x)\ \ \forall x\in[-l;l].$$

В этом случае произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – нечетной. Поэтому коэффициенты ряда Фурье для четной функции находятся по формулам:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=0,\ n\in\mathbf{N}\ .$$

а сам ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы и свободный член:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\ .$$

Нечетная функция. Для нечетных функций имеет место равенство:

$$f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in[-l;l].$$

В этом случае произведение $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – четной. Таким образом, коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для нечетной функции находятся по формулам:

$$a_0 = a_n = 0,\ n \in \mathbf{N}\ ,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in \mathbf{N}\ ,$$

а сам тригонометрический ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\ .$$

Непериодическая функция. Если кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$, то ее можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по *косинусам* ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ четным образом (рисунок 2. 2):

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-x)\ \forall x \in [-l;0], \\ f(x)\ \forall x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

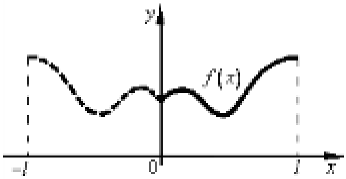

Рисунок 2. 2 – Продолжение непериодической функции четным образом

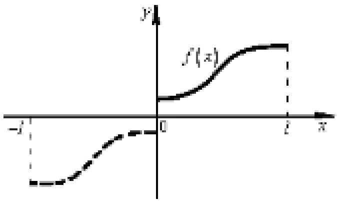

Рисунок 2. 3 – Продолжение непериодической функции нечетным образом

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

где $a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $n \in \mathbf{N}$.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд по *синусам* ее продолжают на отрезок $[-l;0]$ нечетным образом (рисунок 2. 3):

$$f^*(x) = \begin{cases} -f(-x) \text{ при } x \in [-l;0], \\ f(x) \text{ при } x \in [0;l], \end{cases}$$

которую затем периодически продолжают на всю числовую ось.

В этом случае ряд Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[0;l]$ содержит только косинусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

где $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, $n \in \mathbf{N}$.

2.4 Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье

Пусть $f(x) \in L_2[-l;l]$, $2l$-периодическая функция, которая представима сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В электро- и радиотехнике для такой функции используется *комплексная форма* тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} \qquad (2.7).$$

Коэффициенты c_n, $n = 0, \pm 1, \ldots$, ряда (2.7) находятся по формулам:

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots.$$

Выражения $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ называются *гармониками*, числа $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$ – *волновыми числами*, множество всех волновых чисел – *спектром*, коэффициенты c_n – *комплексными амплитудами*.

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются коэффициенты тригонометрического ряда Фурье для периодических функций?

2 При выполнении каких условий тригонометрический ряд Фурье сходится к функции?

3 В чем особенность вычисления коэффициентов Фурье для четных и нечетных функций?

4 Как разложить в ряд Фурье непериодическую функцию?

Решение типовых примеров

1 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию (рисунок 2.4)

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } -\pi<x<0,\\ 1, & \text{если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

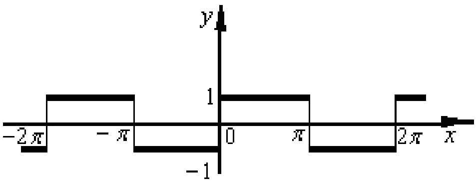

Рисунок 2. 4 – График функции

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } -\pi<x<0,\\ 1, & \text{если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{\pi}dx\right)=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos n\pi}{n}\Bigg|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi n}, \text{ если } n = 2k+1, \end{cases}$$

где $k \in \mathbf{N}$.

Таким образом, для рассматриваемой функции ряд Фурье имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + ... + \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x + ...\right).$$

На рисунках 2. 5, 2. 6, 2. 7 изображены графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$ соответственно.

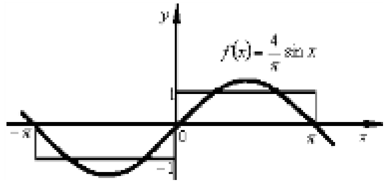

Рисунок 2. 5 – График $S_1(x)$

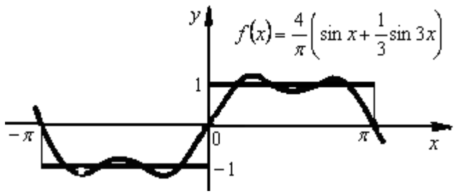

Рисунок 2. 6 – График $S_2(x)$

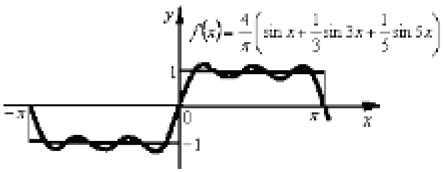

Рисунок 2. 7 – График $S_3(x)$

Видно, как частичные суммы S_n, ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n \to \infty$.

2 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ равенством $f(x) = |x|$.

Решение. Данная функция является чётной (рисунок 2. 8), поэтому её ряд Фурье содержит только косинусы.

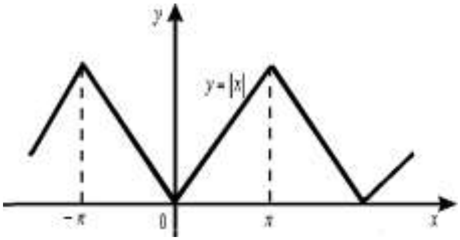

Рисунок 2. 8 – График 2π периодичной функции $f(x) = |x|$

Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi\,,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos(nx)dx = dv,\ v = \dfrac{1}{n}\sin(nx), \\ u = x,\ du = dx \end{array}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin(nx)}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin x\,dx\right) = \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \quad n = 2k, k = 1, 2, ..., \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, \text{ если } \quad n = 2k+1, k = 0, 1, ... \end{cases}$$

Следовательно,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

3 Для функции $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ (рисунок 2. 9) записать ряд Фурье.

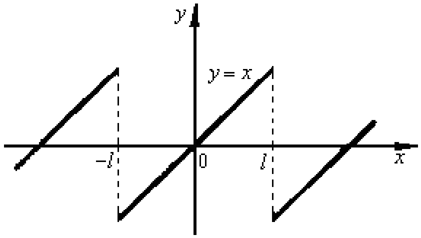

Рисунок 2. 9– График $2l$ -периодической функции $f(x)=x$

Решение. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

Следовательно, ряд Фурье, соответствующий функции $f(x)=x$ имеет вид:

$$x\sim\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Так как функция $f(x)=x$ на интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$, но сходимость является не равномерной, а поточечной (во всех внутренних точках отрезка $[-l;l]$). На концах этого отрезка ряд Фурье не является сходящимся к $f(x)$, поскольку, согласно теореме 2, его сумма

$$S(-l)=S(l)=\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}=0.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$x=\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\quad \forall x\in(-l;l).$$

4 Разложить функцию $f(x)=x$ на отрезке $[0;\pi]$ в тригонометрический ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам.

Решение. а) продолжим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi;0]$ четным образом, т. е. построим вспомогательную функцию $f^*(x)$, определенную на $[-\pi;\pi]$ следующим образом: $f^*(x)=|x|$. Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)$$

Откуда

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)\quad \forall x\in[-\pi;\pi]$$

или $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots;$$

б) продолжим функцию $f(x)=x$ теперь на отрезок $[-\pi;0]$ нечетным образом, т.е. построим вспомогательную функцию

$f^*(x)=x$, $|x|<\pi$. Вычислим коэффициенты Фурье b_n (так как для нечетной функции $a_0=a_n=0$):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

Тогда $\forall x\in[0;\pi]$

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx=2\sin x-\sin 2x+\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots .$$

Задания для аудиторной работы

1 Разложить на промежутке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=5x-1$;

б) $f(x)=3x^2$;

в) $f(x)=|\sin 2x|$;

г) $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0 \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=2x+3x^2$.

3 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ -x \text{ при } \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi;\end{cases}$

б) $f(x)=6-2x$.

4 Разложить на промежутке $[0;\ln 2]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sh}x$, доопределив ее на $[-\ln 2;0]$ а) четным, б) нечетным способами.

5 Разложить на промежутке $[-1;1]$ в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{при } -1\le x\le 0,\\ 1-x & \text{при } 0<x\le 1.\end{cases}$$

Задания для домашней работы

1 Разложить на промежутке $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье функции:

а) $f(x)=2-3x$;

б) $f(x)=x-x^2$;

в) $f(x)=|\cos x|$;

г) $f(x)=\begin{cases}4 & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 & \text{при } 0<x\le \pi.\end{cases}$

2 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по косинусам функции.

а) $f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ б) $f(x)=4x-3$.

3 Разложить на промежутке $[0;\pi]$ в ряд Фурье по синусам функции:

а) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ x & \text{при } \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi;\end{cases}$ б) $f(x)=4+\dfrac{1}{2}x$.

4 Разложить на промежутке $[0;3]$ в ряд Фурье функцию $f(x)=3x-x^2$, доопределив ее на $[-3;0]$ а) четным, б) нечетным способами.

5 Разложить на промежутке $[-1;1]$ в ряд Фурье функцию:

$$f(x)=\begin{cases}4x & \text{при } -1\le x\le 0,\\ -1-x & \text{при } 0<x\le 1,\end{cases},$$

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ – 1 Числовые и функциональные ряды

1 Найти суммы рядов:

1.1 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{9k^2+12k-5}$.

1.2 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{9k^2+6k-8}$.

1.3 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{4k^2+8k+3}$.

1.4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-2}$.

1.5 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{9k^2-12k-5}$.

1.6 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{9k^2+21k-8}$.

1.7 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14}{49k^2-28k-45}$.

1.8 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{49k^2-7k-12}$.

1.9 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14}{49k^2-14k-48}$.

1.10 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{36k^2-24k-5}$.

1.11 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2+4k-3}$.

1.12 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{9k^2+3k-20}$.

1.13 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2-8k-15}$.

1.14 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{25k^2+5k-6}$.

1.15 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{49k^2-35k-6}$.

1.16 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{36k^2+12k-35}$.

1.17 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{9k^2-3k-2}$.

1.18 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2+8k-15}$.

1.19 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{36k^2-12k-35}$.

1.20 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14}{49k^2-70k-24}$.

1.21 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14}{49k^2-84k-13}$.

1.22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{49k^2+35k-6}$.

1.23 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{14}{49k^2-42k-40}$.

1.24 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{49k^2-21k-10}$.

1.25 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{6}{4k^2-9}$.

1.26 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k-2}$.

1.27 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{7}{49k^2+21k-10}$.

1.28 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{5}{25k^2-5k-6}$.

1.29 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{14}{49k^2-56k-33}$.

1.30 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{7}{49k^2+7k-12}$.

2 Исследовать сходимость рядов с неотрицательными членами:

2.1

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k(k-1)!}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{3k-4}\right)^{k-2}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(3k)}$.

2.2

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k!)}{2^{k^2}}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{3k+4}\right)^{2k}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\ln(k+2)}$.

2.3

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(k^3+1)}{(k+1)!}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k-4}$, в) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$.

2.4

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{4k-3}\right)^{k+5}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$.

2.5

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(2k+1)!}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{4k-1}\right)^{2k+3}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\ln^2(k+2)}$.

2.6

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}k^2}{(k+2)!}$, б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k}{4k-1}\right)^{-k}$, в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 2k}$.

2.7

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{k!3^{k+4}}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{3k+5}\right)^{k+4}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+3)\ln^2(k+3)}$.

2.8

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6^k}{(2k)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+3}{3k-1}\right)^{4k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2(3k)}$.

2.9

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k\left(k^2-1\right)}{(2k)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{4k+1}\right)^{-k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)\ln^2(k+2)}$.

2.10

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}k^2}{(2k+1)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+2}{4k-5}\right)^{k+4}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^3(k+1)}$.

2.11

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k(k+1)!}{(2k)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^5 3^k}{(2k+1)^k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+3)\ln(k+3)}$.

2.12

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k\left(k^2-1\right)}{(k+3)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{2^k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2(4k)}$.

2.13

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!(2k+1)!}{(3k)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(5k)}$.

2.14

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k\left(k^2+2\right)}{(2k-1)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{4k+2}\right)^{k+5}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2(3k)}$.

2.15

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+1}k!}{5^k(2k+1)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^{4k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+3)\ln(k+3)}$.

2.16

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{3^k(k+1)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+11}\right)^{k+3}$, в) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$.

2.17

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3k+2)!}{10^k k^2}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k+4}{10k-1}\right)^{k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(4k)}$.

2.18

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!\sqrt[3]{k}}{3^k}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{3k+5}\right)^{-k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-1)\ln(3k-1)}$.

2.19

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)!2^k}{3^k(k+2)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{4k+3}\right)^{k^2}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)\ln(3k+1)}$.

2.20

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!5^k}{(3k)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{5k-1}\right)^{k+2}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$.

2.21

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^{k+2}}{4^k(k^2+1)}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{3k+6}\right)^{3k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+4)\ln^2(k+4)}$.

2.22

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!\sqrt[3]{k+3}}{5^k}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k}{4k+1}\right)^{4k-1}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-1)\ln(4k-1)}$.

2.23

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!2^{k+2}}{6^k}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^{k^2}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$.

2.24

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k(k^2+4)}{(k+1)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{3k+5}\right)^{-k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-1)\ln(3k-1)}$.

2.25

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!3^k}{5^k(k+2)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{4^k}$, в) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$.

2.26

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!2^{k-1}}{6^k k!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+3}{k+1}\right)^{k^2}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\ln(2k+1)}$.

2.27

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^k}{3^k(k+1)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{k^2}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k\ln 4k}$.

2.28

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{5^k k!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{2^k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$.

2.29

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)!2^k}{(2k+2)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{3k+1}\right)^{k+1}$, в) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$.

2.30

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)!2^k}{(2k+2)!}$, б) $\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\mathrm{e}^{-k}$, в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+5)\ln(k+5)}$.

3 Исследовать сходимость рядов. В случае сходимости ряда, вычислить его сумму с точностью α.

3.1 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3k^2+1}$, $\alpha=0{,}01$. **3.2** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$, $\alpha=0{,}01$.

3.3 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(3k)^2}$, $\alpha=0{,}01$. **3.4** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}(2k+1)}{k^3(k+1)}$, $\alpha=0{,}01$.

3.5 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}k}{2^k}$, $\alpha=0{,}1$. **3.6** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!!}$, $\alpha=0{,}001$.

3.7 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{3^k}$, $\alpha=0{,}01$.

3.8 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}$, $\alpha=0{,}001$.

3.9 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k^2+1}$, $\alpha=0{,}01$.

3.10 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!}$, $\alpha=0{,}001$.

3.11 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^k}{(k+1)^k}$, $\alpha=0{,}01$.

3.12 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$, $\alpha=0{,}01$.

3.13 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!(2k+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

3.14 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}$, $\alpha=0{,}0001$.

3.15 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k^2}{3^k}$, $\alpha=0{,}1$.

3.16 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!!}$, $\alpha=0{,}0001$.

3.17 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^k}{5^k}$, $\alpha=0{,}01$.

3.18 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3k!}$, $\alpha=0{,}01$.

3.19 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^k}{3^k}$, $\alpha=0{,}1$.

3.20 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{3k^2}$, $\alpha=0{,}01$.

3.21 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k k!}$, $\alpha=0{,}001$.

3.22 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k+3)}$, $\alpha=0{,}01$.

3.23 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^k}{5^k}$, $\alpha=0{,}01$.

3.24 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k^2}{4^k}$, $\alpha=0{,}1$.

3.25 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{1+k^3}$, $\alpha=0{,}01$.

3.26 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+3)^3}$, $\alpha=0{,}01$.

3.27 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^k}{k^2+1}$, $\alpha=0{,}01$.

3.28 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^k}$, $\alpha=0{,}01$.

3.29 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^k}{6^k}$, $\alpha=0{,}01$.

3.30. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}3^k}{(k+1)^k}$, $\alpha=0{,}01$.

4 Найти область сходимости функциональных рядов:

4.1 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$.

4.2 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^k$.

4.3 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k+3}\left(\frac{x-1}{3x}\right)^k$.

4.4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}(2x+3)^k$.

4.5 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+2}(x-3)^k$.

4.6 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{3^k(k+1)!}$.

4.7 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(x+2)^k}{3^k}$.

4.8 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{(3k+1)2^k}$.

4.9 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{3k+8}$.

4.10 $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{k^2} x^{k^2}$.

4.11 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{(3k^2+1)4^k}$.

4.12 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{3^k(2k+1)}$.

4.13 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{(k+1)5^k}$.

4.14 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{(k+1)!}(x+5)^k$.

4.15 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{2^k k^2}$.

4.16 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2+1)(x+4)^k}{5^k}$.

4.17 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+3)^k}{4^k(3k-1)}$.

4.18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(x-2)^k}{3^{k+1}}$.

4.19 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(2k)!}(x+1)^k$.

4.20 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(2x-1)^k$.

4.21 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k)!}(x-4)^k$.

4.22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{(k^2+1)2^k}$.

4.23 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(x-1)^k}{(3k+1)5^k}$.

4.24 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{4^k}$.

4.25 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k(x+4)^k}{k^2+1}$.

4.26 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k(x-3)^k}{k^2+k}$.

4.27 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)^2}{(2k-1)!}(x-1)^k$.

4.28 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{(k+1)!}(x-4)^k$.

4.29 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{5k+1}$.

4.30 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k(x-5)^k}{(3k+8)2^k}$.

5 Найти область сходимости и область равномерной сходимости функциональных рядов:

5.1 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{x+1}\cos kx}{\sqrt[k]{k^5+1}}$.

5.2 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k-1}\left(\frac{2x}{x+1}\right)^k$.

5.3 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k+3}\left(\frac{x-1}{3x}\right)^k$.

5.4 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}(2x+3)^k$.

5.5 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^3+2}(x-3)^k$.

5.6 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{3^k(k+1)!}$.

5.7 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(x+2)^k}{3^k}$.

5.8 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{(3k+1)2^k}$.

5.9 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-5)^k}{(3k+8)^2}$.

5.10 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}3^{k^2}x^{k^2}$.

5.11 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{(3k^2+1)\,4^k}$.

5.12 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{3^k(2k+1)}$.

5.13 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{(k+1)5^k}$.

5.14 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+5)^k}{6^{k+1}}$.

5.15 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{2^k k^2}$.

5.16 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k^2+1)(x+4)^k}{5^k}$.

5.17 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+3)^k}{4^k(3k-1)}$.

5.18 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(x-2)^k}{3^{k+1}}$.

5.19 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{(2k)!}(x+1)^k$.

5.20 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(2x-1)^k$.

5.21 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k)!}(x-4)^k$.

5.22 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+1)^k}{(k^2+1)\,2^k}$.

5.23 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k(x-1)^k}{(3k+1)5^k}$.

5.24 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{4^k}$.

5.25 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2+1)(x+4)^k}{2^k}$.

5.26 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k (x-3)^k}{k^2+k}$.

5.27 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)^2}{(2k-1)!}(x-1)^k$.

5.28 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{(k+1)!}(x-4)^k$.

5.29 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{5k+1}$.

5.30 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k (x-5)^k}{(3k+8)2^k}$.

ИДЗ - 2 Ряды Фурье

1 На промежутке $[0;\pi]$ разложить в ряд Фурье а) по косинусам, б) по синусам функции (нарисовать в обоих случаях графики суммы рядов для $n=1$, 2, 3):

1.1 $f(x) = 4x + 6.$ **1.2** $f(x) = 6x - 3.$

1.3 $f(x) = 2x + 8.$ **1.4** $f(x) = -x + 2.$

1.5 $f(x) = 3x + 5.$ **1.6** $f(x) = -x + 1.$

1.7 $f(x) = 4x + 3.$ **1.8** $f(x) = 9x + 4.$

1.9 $f(x) = 5x + 5.$ **1.10** $f(x) = 2x + 7.$

1.11 $f(x) = 3x + 6.$ **1.12** $f(x) = 7x - 6.$

1.13 $f(x) = 3x - 6.$ **1.14** $f(x) = 2x + 6.$

1.15 $f(x) = 3x + 6.$ **1.16** $f(x) = 4x - 6.$

1.17 $f(x) = 2x - 6.$ **1.18** $f(x) = x + 6.$

1.19 $f(x) = -9x + 1.$ **1.20** $f(x) = 9x - 6.$

1.21 $f(x) = 2x - 9.$ **1.22** $f(x) = 3x - 9.$

1.23 $f(x) = x + 5.$ **1.24** $f(x) = -8x - 1.$

1.25 $f(x) = 3x + 1.$ **1.26** $f(x) = 8x + 3.$

1.27 $f(x) = 5x - 7.$ **1.28** $f(x) = 4x + 6.$

1.29 $f(x) = -x + 6.$ **1.30** $f(x) = 5x + 6.$

2 На отрезке $[-1;1]$ разложить в ряд Фурье функции:

2.1 $f(x) = 2|x| - 3.$ **2.2** $f(x) = 2|x| + 1.$

2.3 $f(x) = |x| - 5.$ **2.4** $f(x) = -3|x| + 2.$

2.5 $f(x) = 4|x| + 8.$ **2.6** $f(x) = -|x| - 6.$

2.7 $f(x) = -5|x| + 1.$ **2.8** $f(x) = -2|x| - 4.$

2.9 $f(x) = 3|x| + 7.$ **2.10** $f(x) = -2|x| + 5.$

2.11 $f(x) = 7|x| - 1.$ **2.12** $f(x) = |x| + 9.$

2.13 $f(x) = |x| + 1.$

2.14 $f(x) = 5|x|.$

2.15 $f(x) = –6|x| +2.$

2.16 $f(x) = –3|x| + 1.$

2.17 $f(x) = 5|x| + 2.$

2.18 $f(x) = –|x| – 6.$

2.19 $f(x) = |x| – 8.$

2.20 $f(x) = –4|x| + 1.$

2.21 $f(x) = –5|x| + 7.$

2.22 $f(x) = 2|x| – 8.$

2.23 $f(x) = 7|x| + 2.$

2.24 $f(x) = |x| + 8.$

2.25 $f(x) = –3|x| + 7.$

2.26 $f(x) = –|x| + 1.$

2.27 $f(x) = 5|x| + 2.$

2.28 $f(x) = |x| – 6.$

2.29 $f(x) = |x| – 8.$

2.30 $f(x) = 4|x| + 1.$

3 Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции (нарисовать графики суммы рядов для $n=1$, 2, 3):

3.1

$$f(x)=\begin{cases}1+x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.2

$$f(x)=\begin{cases}-1+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.3

$$f(x)=\begin{cases}2-x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.4

$$f(x)=\begin{cases}-1-2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 0 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.5

$$f(x)=\begin{cases}-x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.6

$$f(x)=\begin{cases}5+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.7

$$f(x)=\begin{cases}x+3 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 7 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.8

$$f(x)=\begin{cases}4-x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.9

$$f(x)=\begin{cases}1+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.10

$$f(x)=\begin{cases}3-x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ -2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.11

$$f(x)=\begin{cases}-3 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1+2x \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.12

$$f(x)=\begin{cases}5x-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.13

$$f(x)=\begin{cases}-1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ x-1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.14

$$f(x)=\begin{cases}-2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.15

$$f(x)=\begin{cases}4 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ x-1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.16

$$f(x)=\begin{cases}1-2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 3 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.17

$$f(x)=\begin{cases}4x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.18

$$f(x)=\begin{cases}-2+x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.19

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2x-6 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.20

$$f(x)=\begin{cases}3+2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 7 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.21

$$f(x)=\begin{cases}3 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 2x-5 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.22

$$f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 9 \text{ при } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

3.23

3.24

$$f(x)=\begin{cases}2 \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ 5x-3 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}7+2x \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ 4 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

3.25

$$f(x)=\begin{cases}-3 \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ x-1 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

3.26

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ 2 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

3.27

$$f(x)=\begin{cases}6+2x \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ -1 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

3.28

$$f(x)=\begin{cases}-2x \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ 9 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

3.29

$$f(x)=\begin{cases}5+x \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ -2 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

3.30

$$f(x)=\begin{cases}1-3x \text{ при } -\pi \le x \le 0,\\ 3 \text{ при } 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

Литература

1. Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

2. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3. Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев и [др.] – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

4. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1984.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

6. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть четвертая

Теория рядов

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04
Подписано в печать 11.10.07 Бумага писчая №1.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл. печ. л. 5,92. Уч. - изд. л. 6,37. Тираж 100 экз.
Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104