Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т.А. ДЕНИСЕНКО, Л.Н. МАРЧЕНКО,
И.В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов**

В семи частях

Часть шестая

Интегральное исчисление

функции многих переменных

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.

Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч. 6. Интегральное исчисление функции многих переменных / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 191с.

ISBN 978-985-439-273-8

Данное пособие посвящено интегральному исчислению функции многих переменных. В нем излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

Содержание

Введение

Пособие «Интегральное исчисление функции многих переменных» является шестой частью комплекса пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В нем рассматриваются криволинейные интегралы 1 и 2-го рода, двойные и тройные интегралы, поверхностные интегралы 1 и 2-го рода, элементы векторного анализа, а также интегралы, зависящие от параметра.

Весь материал разбит на части, соответствующие одному практическому занятию. В каждое занятие включены некоторые сведения из теории (основные определения и теоремы без доказательств), решение типовых примеров, задания для аудиторной и домашней работ. Отдельно приведены индивидуальные домашние задания. Сформулированные в пособии задания различаются по трудности решения, что позволяет адаптировать сложность задания к уровню подготовки студента.

Содержание пособия соответствует учебной программе по математическому анализу для физических специальностей и связано с курсом лекций.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных» В. Ф. Бутузова (1988), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991).

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

Практическое занятие 1 Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода

1.1 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 1-го рода

1.2 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 2-го рода

1.1 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 1-го рода

Определение криволинейного интеграла 1 го рода. Пусть функция $f(x;y)$ определена и ограничена в точках $(x;y)$ гладкой или кусочно-гладкой кривой AB, лежащей в плоскости Oxy. Разобьем кривую AB точками $A=M_0<M_1<\ldots<M_n=B$ на n частичных дуг l_1, l_2, …, l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, …, Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_k, $k=1,2,\ldots,n$ точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$ (рисунок 1. 1).

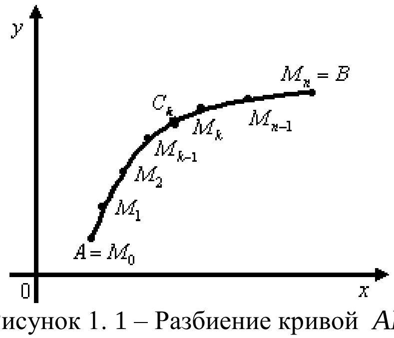

Рисунок 1. 1 – Разбиение кривой AB для определения криволинейного интеграла 1-го рода

Сумма

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\cdot\Delta l_k \tag{1.1}$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$

Криволинейным интегралом первого рода называется предел (если он существует) интегральной суммы (1.1) при $\lambda \to 0$ и обозначается

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\Delta l_k \ .$$

Подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* вдоль кривой AB, сама кривая AB – *контуром интегрирования,* A и B – *начальной* и *конечной* точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода) Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части и выбора точек на них.

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Криволинейный интеграл 1-го рода обладает следующими свойствами:

– $\int\limits_{AB} dl = L$, где L – длина кривой AB;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на кривой AB, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на кривой AB и справедливо равенство:

$$\int\limits_{AB} (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dl = \alpha \int\limits_{AB} f(x;y)dl + \beta \int\limits_{AB} g(x;y)dl \ ;$$

– *(аддитивность)* если кривая AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на кривой AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl \ ;$$

– *(оценка интеграла)* если на кривой AB имеет место неравенство $\left|f(x;y)\right| \le M$, то

$$\left|\int\limits_{AB} f(x;y)dl\right| \le M \cdot L,$$

где L – длина кривой AB;

– *(монотонность)* если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y) \ge g(x;y)$, то

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl \ge \int\limits_{AB} g(x;y)dl;$$

– криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления обхода кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода. Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$.

Тогда дифференциал длины дуги равен:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{1.2}$$

Полярное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$$

и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на $[\alpha;\beta]$.

Тогда дифференциал дуги равен $dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$ и криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi\,. \qquad (1.3)$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением $y=y(x)$, $a\le x\le b$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную $y'(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Дифференциал дуги имеет вид $dl=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{a}^{b} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\,. \qquad (1.4)$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной кривой AB:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl\,.$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t);z(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\,. \qquad (1.5)$$

Приложения криволинейного интеграла 1-го рода. Криволинейный интеграл 1-го рода используется для вычисления:

– *длины кривой*

$$L=\int\limits_{AB} dl\,; \qquad (1.6)$$

– *площади цилиндрической поверхности,* направляющей которой служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy , и образующая параллельна оси Oz

$$S = \int\limits_{AB} f(x;y)dl\,; \tag{1.7}$$

– *массы материальной кривой* AB с плотностью $\rho(x;y)$

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x;y)dl\,; \tag{1.8}$$

– *статических моментов* и *координат центра тяжести* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy

$$M_x = \int\limits_{AB} y\rho(x;y)dl\,, \qquad M_y = \int\limits_{AB} x\rho(x;y)dl\,;$$

$$x_0 = \frac{M_y}{m}\,, \qquad y_0 = \frac{M_x}{m}\,; \tag{1.9}$$

– *моментов инерции* материальной кривой AB с плотностью $\rho(x;y)$ относительно осей Ox и Oy , а также начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2\rho(x;y)dl\,,\ I_y = \int\limits_{AB} x^2\rho(x;y)dl\,, I_0 = I_x + I_y\,. \tag{1.10}$$

1.2 Определение, свойства, вычисление и приложения криволинейного интеграла 2-го рода

Определение криволинейного интеграла 2 го рода. Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены в каждой точке кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге $l_k = M_{k-1}M_k$, $k = 1,2,...,n$, точку $C_k(\xi_k;\eta_k)$. Проекциями дуги $l_k = M_{k-1}M_k$ на оси Ox и Oy являются Δx_k и Δy_k (рисунок 1. 2).

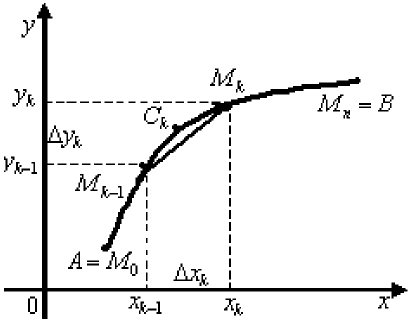

Рисунок 1. 2 – Разбиение кривой AB
для определения криволинейного интеграла 2-го рода

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\xi_k;\eta_k;\right)\cdot \Delta x_k \tag{1.11}$$

называется *интегральной суммой по переменной* x для функции $P(x;y)$; сумма

$$\sum_{i=1}^{n} Q\left(\xi_k;\eta_k;\right)\cdot \Delta y_k \tag{1.12}$$

называется *интегральной суммой по переменной* y для функции $Q(x;y)$.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$.

Криволинейным интегралом по координате x *по кривой* AB от функции $P(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (1.11) при $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_{AB} P\left(x;y\right)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P\left(\xi_k;\eta_k\right)\Delta x_k\ . \tag{1.13}$$

Криволинейным интегралом по координате y *по кривой* AB от функции $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (1.2) при $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_{AB} Q\left(x;y\right)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q\left(\xi_k;\eta_k\right)\Delta y_k\ . \tag{1.14}$$

Криволинейным интегралом 2-го рода по кривой AB от функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) при $\lambda \to 0$ интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_k;\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k;\eta_k)\Delta y_k ,$$

и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k . \quad (1.15)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + \int\limits_{AB} Q(x;y)dy .$$

Теорема 2 (существование криволинейного интеграла 2-го рода) Если кривая AB *гладкая, а функции* $P(x;y)$ *и* $Q(x;y)$ *непрерывны на кривой* AB, *то криволинейный интеграл 2-го рода существует*.

Пусть AB – *замкнутая кривая*, т. е. точка A совпадает с точкой B. Тогда для нее можно определить два направления обхода от точки A к точке B. Направление обхода замкнутой кривой называется *положительным*, если область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход (рисунок 1. 3, а). Противоположное направление называется *отрицательным* (рисунок 1. 3, б).

а) б)

Рисунок 1.3 – Положительно (а) и отрицательно (б) ориентированный контур

Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается как

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x;y)dx + Q(x;y)dy . \quad (1.16)$$

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода. Криволинейный интеграл 2-го рода обладает следующими свойствами:

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y)$ и $P_2(x;y)$ интегрируемы на кривой AB по переменной x, то функция $\alpha \cdot P_1(x;y)+\beta \cdot P_2(x;y)$ также интегрируема на дуге AB по переменной x и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB}(\alpha P_1(x;y)+\beta P_2(x;y))dx=\alpha\int\limits_{AB}P_1(x;y)dx+\beta\int\limits_{AB}P_2(x;y)dx.$$

Аналогично по переменной y;

– *(аддитивность)* если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB=AC\cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ интегрируемы, то функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ также интегрируемы на дуге AB и справедлива формула:

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int\limits_{AC}P(x;y)dx+Q(x;y)dy+\int\limits_{CB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy;$$

– *(ориентированность)* при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2-го рода изменяет свой знак на противоположный:

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=-\int\limits_{BA}P(x;y)dx+Q(x;y)dy;$$

– если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB}P(x;y)dx=0$; если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy, то $\int\limits_{AB}Q(x;y)dy=0$;

– интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

В ы ч и с л е н и е к р и в о л и н е й н о г о и н т е г р а л а 2 - г о р о д а . Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенного интеграла.

П а р а м е т р и ч е с к о е п р е д с т а в л е н и е к р и в о й и н т е г р и р о в а н и я . Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P \cdot x'(t) + Q \cdot y'(t) \right] dt. \qquad (1.17)$$

Я в н о е п р е д с т а в л е н и е к р и в о й и н т е г р и р о в а н и я . Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, где функции $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\left(x; y(x)\right) + Q\left(x; y(x)\right) y'(x) \right] dx. \qquad (1.18)$$

Т е о р е м а 3 (с в я з ь м е ж д у к р и в о л и н е й н ы м и и н т е г р а л а м и 1 - г о и 2 - г о р о д а) Пусть

1) кусочно-гладкая кривая AB, лежит в плоскости Oxy и задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, причем $A(x(\alpha); y(\alpha))$, $B(x(\beta); y(\beta))$;

2) функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ кусочно-непрерывны вдоль кривой AB;

3) вектор $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y)$, где α и β углы, составляемые с осями координат (рисунок 1. 5).

Тогда имеет место равенство:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta\right) dl \ . \qquad (1.19)$$

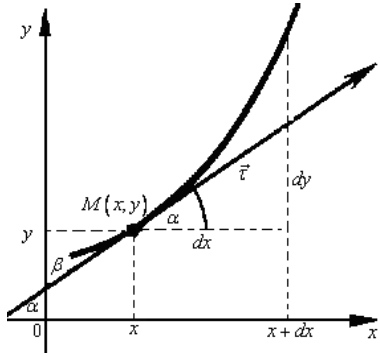

Рисунок 1. 4 – Связь криволинейных интегралов
1-го и 2-го рода

Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t),$$

где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$, $A(x(\alpha);y(\alpha);z(\alpha))$, $B(x(\beta);y(\beta);z(\beta))$, криволинейный интеграл 2-го рода вводится аналогично плоскому случаю:

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz \ . \qquad (1.20)$$

При этом формула, выражающая связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода имеет вид:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dl \ , \quad (1.21)$$

где $\vec{\tau} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y;z)$, α , β , γ углы, составляемые $\vec{\tau}$ с положительными направлениями осей координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B.

П р и л о ж е н и я к р и в о л и н е й н о г о и н т е г р а л а 2 - г о р о д а. Криволинейный интеграл 2-го рода используется для вычисления:

– *работы силы* $\vec{F}$ по перемещению материальной точки вдоль кривой AB от точки A до точки B:

$$A = \int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz, \qquad (1.22)$$

где $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно;

– *площади плоской фигуры*, ограниченной замкнутым контуром Γ:

$$S = \oint\limits_{\Gamma} xdy, \quad S = -\oint\limits_{\Gamma} ydx, \; S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx. \qquad (1.23)$$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется интегральной суммой для функции $f(x;y)$, определенной на кривой AB?

2 Дайте определение криволинейного интеграла 1-го рода.

3 Перечислите свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

4 Что общего и какие различия между свойствами криволинейного интеграла 1-го рода и определенного интеграла?

5 Как вычисляется криволинейный интеграл 1-го рода в следующих случаях задания плоской кривой: а) в параметрическом виде; б) в полярных координатах; в) в явном виде?

6 Перечислите геометрические и физические приложения криволинейного интеграла 1-го рода?

7 Сформулируйте определения:

а) интегральных сумм для криволинейного интеграла 2-го рода;

б) криволинейного интеграла 2-го рода.

8 Перечислите основные свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

9 Как вычисляется криволинейный интеграл 2-го рода в случаях: а) параметрического задания; б) явного задания кривой интегрирования?

10 Сформулируйте теорему, выражающую связь между криволинейными интегралами 1 и 2-го рода.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где

$$AB = \left\{ (x; y) \middle| x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их параметрические представления, имеем:

$$y^2 = a^2 \sin^2 t\,,$$

$$dl = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = a\,dt\,.$$

Тогда по формуле (1.2) получим:

$$\int\limits_{AB} y^2 dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t\,dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,dt = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3 \pi}{4}.$$

2 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} (x + y) dl$, где

$$AB = \left\{ (x; y) \middle| x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{\sin 2\varphi},\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их представления в полярных координатах, имеем:

$$dl = \sqrt{\sin 2\varphi + \frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{d\varphi}{r}\,.$$

Тогда по формуле (1.3) получим

$$\int\limits_{AB} (x + y) dl = \int\limits_0^{\pi/2} (r\sin\varphi + r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{r} = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin\varphi + \cos\varphi) d\varphi = 2\,.$$

3 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y\,dl$, где

$AB = \left\{ (x;y) \middle| y^2 = 2x \text{ от точки } O(0;0) \text{ до точки } M(2;2) \right\}.$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$y = \sqrt{2x}\,, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}\,, \quad dl = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}dx\,.$$

Тогда по формуле (1.4) получим:

$$\int_{AB} ydl = \int_0^2 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}dx = \int_0^2 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

4 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} xdx + xydy$, где

$$AB = \left\{ (x;y) \middle| x^2 + y^2 = 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0 \right\}.$$

Р е ш е н и е. Перейдем к параметрическому заданию окружности:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

где $r = 1$ и $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Точке A соответствует значение параметра $t = 0$, а точке B – значение $t = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $x'(t) = -\sin t$ и $y'(t) = \cos t$. Подставим в формулу (1.2)

$$\int_{AB} xdx + xydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos t \cdot \sin t + \cos t \cdot \sin t \cdot \cos t\right]dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = \frac{\cos^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

5 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} \left(x^2 + y\right)dx + xydy$, где (рисунок 1. 6) а) $AB=\left\{(x;y)\middle|\, y=x,\ 0\le x\le 1\right\}$,

б) $AB=\left\{(x;y)\middle|\, y=x^2,\ 0\le x\le 1\right\}$,

в) $AB=\left\{(x;y)\middle|\begin{array}{l}\text{ломаная, проходящая}\\ \text{через точки } A(0;0),\, C(1;0),\, B(1;1)\end{array}\right\}$.

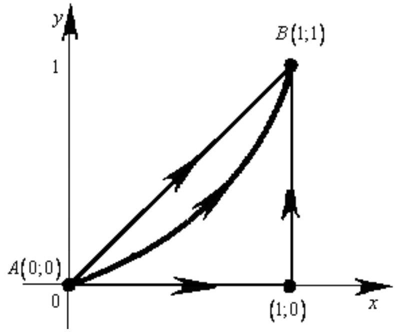

Рисунок 1. 5 – Различные кривые AB

Решение. а) по формуле (1.18) имеем:

$$\int_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x, \\ y'=1, \\ 0\le x\le 1.\end{bmatrix}=\int_0^1\left(x^2+x+x\cdot x\cdot 1\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6};$$

б) $$\int_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x^2, \\ y'=2x, \\ 0\le x\le 1.\end{bmatrix}=\int_0^1\left(x^2+x^2+x^2\cdot x\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+2x^4\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15};$$

в) используя свойство аддитивности криволинейного интеграла, имеем:

$$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\int\limits_{AC}\left(x^2+y\right)dx+xydy+\int\limits_{CB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=$$

$$=\begin{bmatrix} AC: y=0,\ 0\le x\le 1, \\ CB: x=1,\ 0\le y\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1\left(x^2+0\right)dx+\int\limits_0^1(1+y)\cdot 0+1\cdot ydy=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

6 Найти массу материальной дуги линии $y=x^2+1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке $M(x;y)$ пропорциональна абсциссе этой точки

Решение. Выражение для плотности имеет вид $\rho(x;y)=k\,x$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда по формуле (1.8) находим

$$m=\int\limits_{AB}\rho(x;y)\,dl=k\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{k}{8}\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,d\left(1+4x^2\right)=$$

$$=\left.\frac{k}{8}\frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{k}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

7 Вычислить длину дуги линии $x=t$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3$ при $0\le t\le 1$.

Решение. Имеем $x_t'=1$, $y_t'=\sqrt{2}t$, $z_t'=t^2$.

Тогда

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=\left(1+t^2\right)dt.$$

Значит, по формуле (1.6) длина дуги равна

$$L=\int\limits_{AB}dl=\int\limits_0^1\left(1+t^2\right)dt=\left.\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{4}{3}.$$

8 Найти работу, производимую силой $\vec{F}=4x^6\,\vec{i}+xy\,\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y=x^3$ от точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$.

Решение. По условию $P(x;y)=4x^6$, $Q(x;y)=xy$. Подставляя в формулу (1.22) для вычисления работы, получим

$$A=\int\limits_{AB}4x^6dx+xydy=\int\limits_0^1 4x^6dx+x\cdot x^3\cdot 3x^2dx=7\int\limits_0^1 x^6=x^7\Big|_0^1=1.$$

9 Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$$

Отсюда $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$.

Тогда по формуле (1.23) искомая площадь равна

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi\,ab.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

а) $\int\limits_\Gamma ydl$, где Γ – отрезок прямой $y=x$ между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$;

б) $\int\limits_\Gamma \dfrac{x^3}{y^2}dl$, где Γ – дуга линии $xy=1$ между точками $A(1;1)$ и $B\left(2;\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $\int\limits_\Gamma y^2dl$, где Γ – дуга линии $x=\ln y$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;e)$;

г) $\int\limits_\Gamma \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dl$, где Γ – дуга линии $y=\cos x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} \sin^4 x \cos x \, dl$, где Γ – дуга линии $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, dl$, где Γ – верхняя половина кардиоиды $r = 2(1 + \cos\varphi)$;

ж) $\int\limits_{\Gamma} x^2 y \, dl$, где Γ – дуга астроиды $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2 Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по данной линии в указанном направлении:

а) $\int\limits_{\Gamma} \sin^3 x \, dx + \frac{dy}{y^2}$, где Γ – дуга линии $y = \operatorname{ctg} x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^3 - y^2\right) dx + xy \, dy$, где Γ – дуга линии $y = 2^x$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

в) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + 3y} \, dy + \left(x - y\right) dx$, где Γ – дуга линии $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$;

г) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dx + xy \, dy$, где Γ – дуга эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} y \, dx - x \, dy$, где Γ – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$, где Γ – первая арка циклоиды $x = 3\left(t - \sin t\right)$, $y = 3\left(1 - \cos t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$;

ж) вычислить $\int\limits_{\Gamma} \left(y + z\right) dx + \left(x + z\right) dy + \left(x + y\right) dz$, Γ: $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t^6$, $0 \le t \le 1$;

и) вычислить $\int\limits_{\Gamma} zydx + zxdy + xydz$, Γ – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \dfrac{3t}{2\pi}$ от точки пересечения с плоскостью $z = 0$ до точки пересечения с плоскостью $z = 3$.

3 Вычислить длину дуги кривых:

а) $x = t$, $y = \sqrt{2}\ln t$, $z = \dfrac{1}{t}$, $1 \le t \le 10$;

б) $x = 6\cos t$, $y = 6\sin t$, $z = 8t$, $0 \le t \le 2\pi$.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром, образованным указанными линиями:

а) первой аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

б) лемнискатой Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$.

5 Найти массу материальной кривой с заданной плотностью:

а) $4y = x^4$, $0 \le x \le 1$, $\rho(x; y) = x^5 + 8xy$;

б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8\left(x^2 - y^2\right)$, $\rho(x; y) = x + y$.

6 Найти массу дуги кривой $x = t$, $y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, если линейная плотность $\rho(x, y, z) = x + z$.

7 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$ вдоль указанной линии:

а) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}$, L – отрезок между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

б) $\vec{F} = \left(x^3 + y\right)\vec{i} + \left(x + y^3\right)\vec{j}$, L – ломаная ABC, где $A(1;1)$ и $B(3;1)$, $C(3;5)$;

в) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + \dfrac{1}{y^2}\,\vec{j}$, L – дуга линии $xy = 1$ от $A(1;1)$ и $B\left(4; \dfrac{1}{4}\right)$;

г) $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$, L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$;

д) найти работу A переменной силы

$$F = \left(2 + xy^2\right)\vec{i} + \left(x^2 y - 3\right)\vec{j}$$

вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ от точки $B(-2{,}0)$ до точки $C(2{,}0)$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить криволинейные интегралы 1-го рода:

а) $\int\limits_{\Gamma} x dl$, где Γ – дуга линии $2y = x^2$ между точками $A\left(\sqrt{2};1\right)$ и $B\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{1 + x^6}\, dl$, где Γ – дуга линии $4y = x^4$ между точками $A(0;0)$ и $B\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$;

в) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\, dl$, где Γ – дуга линии $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$;

г) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{1 + \cos^4 x}\, x dl$, где Γ – дуга линии $y = \operatorname{tg} x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} \sin^2 x \cos^3 x\, dl$, где Γ – дуга линии $y = \ln\cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + 4}\, dl$, где Γ – дуга спирали Архимеда $r = 2\varphi$, между точками $A(0;0)$ и $B(4;2)$;

ж) $\int\limits_{\Gamma} xy^2 dl$, где Γ – дуга окружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

2 Вычислить криволинейные интегралы 2-го рода по кривой в указанном направлении:

а) $\int\limits_{\Gamma} \sin^2 x + y^2 dy$, где Γ – дуга линии $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \frac{xdx + ydy}{x^3 + y^3}$, где Γ – отрезок от точки $A(1;1)$ до $B(2;2)$;

в) $\int\limits_{\Gamma} \cos^2 x\,dx + \frac{dy}{y^3}$, где Γ – дуга линии $y = \operatorname{tg} x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

г) $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right)dx + xydy$, где Γ – дуга линии $y = e^x$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;e)$;

д) $\int\limits_{\Gamma} xydx + y^2 dy$, где Γ – дуга кривой $x = t^2$, $y = t$, $1 \le t \le 2\,4$

е) $\int\limits_{\Gamma} x^2 ydx + y^2 xdy$, где Γ – дуга кривой $x = t$, $y = t^3$, $1 \le t \le 1\,4$

ж) $\int\limits_{\Gamma} (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$, где Γ – дуга окружности $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

и) $\int\limits_{\Gamma} 2xydx + y^2 dy + z^2 dz$, Γ – дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ от точки $A(1{,}0{,}0)$ до точки $B(1{,}0{,}4\pi)$.

3 Вычислить длины дуг пространственных кривых:

а) $x = \frac{2}{3}t^3$, $y = t^2$, $z = t$, $0 \le t \le 3$;

б) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $z = t$, $0 \le t \le 1$.

4 Вычислить площади фигур, ограниченных замкнутыми контурами, образованными указанными линиями:

а) $y = x^4$, $y^4 = x$;

б) $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ (астроида).

5 Найти массы материальных дуг линий при заданной плотности:

а) $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, $\rho(x;y) = y$;

б) $x = 5(t - \sin t)$, $y = 5(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\rho(x;y) = x$;

в) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$;

$\rho(x, y, z) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

6 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$ вдоль кривой:

а) $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$, Γ – дуга линии $y = x^2$ от $A(1;1)$ и $B(3;9)$;

б) $\vec{F} = \cos^3 x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, Γ – дуга линии $y = \sin x$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

в) $\vec{F} = \cos^2 x\,\vec{i} + \dfrac{1}{y^3}\,\vec{j}$, Γ – дуга линии $y = \operatorname{tg} x$ $\dfrac{\pi}{4} \le t \le \dfrac{\pi}{3}$;

г) найти работу силы $F = (y - z, xz, x^2)$ вдоль отрезка прямой AB: $A(0,2,-1)$, $B(2,1,0)$.

Практическое занятие 2 **Двойной интеграл**

2.1 Определение и свойства двойного интеграла

2.2 Вычисление двойного интеграла путем сведения к повторному интегралу

2.1 Определение и свойства двойного интеграла

Пусть G замкнутая область (замкнутое связное множество) пространства $\mathbb{R}^2$, $f(x;y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная на этом множестве (рисунок 2. 1).

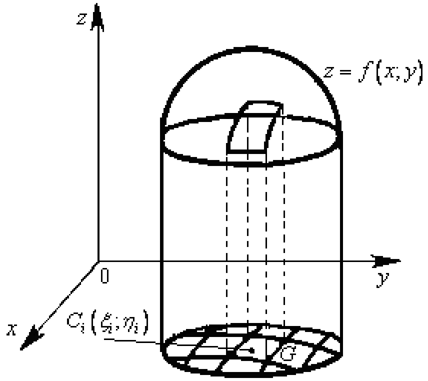

Рисунок 2. 1 – Разбиение множества G

Будем предполагать, что граница области G состоит из конечного числа непрерывных кривых, $y(x)$ или $x(y)$. И пусть $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{n}$, $G_i \underset{i \neq j}{\cap} G_j = \varnothing$, разбиение области G. Обозначим ΔS_i – площадь G_i, $d(G_i) = \sup\limits_{x,y \in G_i} \rho(x;y)$ – диаметр областей G_i, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ – мелкость разбиения. В каждой части G_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Тогда $f(\xi_i;\eta_i)$ – значение функции в этой точке.

Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta S_i \qquad (2.1)$$

называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x;y)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Если функция $f(x;y)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau = \{G_i\}$, $i = 1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y) \in G_i} f(x;y),\ M_i = \sup_{(x;y) \in G_i} f(x;y).$$

Суммы $s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta S_i$, $S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta S_i$ называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению τ.

Двойным интегралом от функции $f(x;y)$ по замкнутой области G называется предел (если он существует) интегральной суммы (2.1) при $\lambda \to 0$:

$$\iint_G f(x;y)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta S_i , \tag{2.2}$$

подынтегральная функция $f(x;y)$ называется *интегрируемой* на множестве G, множество G *– областью интегрирования*, x, y *– переменными интегрирования*, dS *– элементом площади.*

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $z = f(x;y)$ интегрируема на области G, то она ограничена на этом множестве.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна в области G, то она интегрируема в этой области.

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{ G_i \}$ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнялось неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой на множестве G функции $f(x;y)$ предел интегральных сумм существует и не зависит от разбиения области на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования G на части прямыми, параллельными координатным осям (рисунок 2. 2). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Учитывая, что $dS = dxdy$, можно записать:

$$\iint_G f(x;y)\,dS = \iint_G f(x;y)\,dxdy .$$

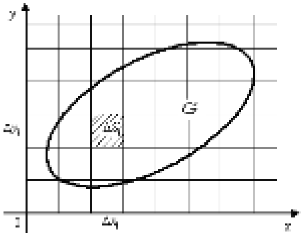

Рисунок 2. 2 – Разбиение области G на части прямыми, параллельными координатным осям

Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла:

– $\iint\limits_G dS = \iint\limits_G dxdy = S$, где S – площадь области G;

– *(линейность)* если α и β – произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые в области G, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство:

$$\iint\limits_G (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dxdy = \alpha \iint\limits_G f(x;y)dxdy + \beta \iint\limits_G g(x;y)dxdy;$$

– *(аддитивность)* если область G является объединением областей G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема в области G и справедлива формула:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x;y)dxdy;$$

– если в области G имеет место неравенство $f(x;y) \geq 0$, то справедливо неравенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy \geq 0;$$

– *(монотонность)* если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы в области G и $f(x;y) \leq g(x;y)$ в любой точке $(x;y) \in G$, то

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy \le \iint\limits_G g(x;y)dxdy;$$

– если функция $f(x;y)$ непрерывна в замкнутой области G, площадь которой S, то

$$m \cdot S \le \iint\limits_G f(x;y)dxdy \le M \cdot S,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве G;

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y)$ непрерывна в области G, площадь которой S, то существует такая точка $P_0(x_0;y_0) \in G$, что выполняется неравенство:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S;$$

– произведение интегрируемых в области G функций есть интегрируемая функция;

– если функция $f(x;y)$ интегрируема в области G, то функция $|f(x;y)|$ интегрируема в G и справедливо неравенство:

$$\left| \iint\limits_G f(x;y)dxdy \right| \le \iint\limits_G |f(x;y)|dxdy.$$

2.2 Вычисление двойного интеграла путем сведения к повторному интегралу

Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику

$$D = \{ (x;y) | a \le x \le b, c \le y \le d \}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1 Пусть

1) для функции $f(x;y)$ в прямоугольнике D существует двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$;

2) для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует определенный интеграл $I(x)=\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ *и справедливо равенство:*

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx. \qquad (2.3)$$

Повторный интеграл $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ можно записывать в виде $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Если в теореме 1 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx. \qquad (2.4)$$

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции и $\varphi(x)\le\psi(x)$ $\forall x\in[a;b]$.

Область $G=\left\{(x;y)\middle| a\le x\le b, \varphi(x)\le y\le\psi(x)\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Oy.

Область $G=\left\{(x;y)\middle|\alpha(y)\le x\le\beta(y), c\le y\le d\right\}$ называется *элементарной* относительно оси Ox. Здесь функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $\alpha(y)\le\beta(y)$.

Теорема 2 Пусть

1) функция $z=f(x;y)$ *определена в области* $G=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,\, y_1(x)\le y\le y_2(x)\right\}$*, где* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– непрерывные функции,* $y_1(x)\le y_2(x)$ *для любого* x *из отрезка* $[a;b]$*;*

2) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$*;*

3) для каждого x *из отрезка* $[a;b]$ *существует определенный интеграл* $I(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy\,. \qquad (2.5)$$

Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx\,. \qquad (2.6)$$

Если область интегрирования не удовлетворяет условиям теоремы 2 (прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2, и сводить к повторному каждый из соответствующих интегралов.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется интегральной суммой функции $f(x;y)$?

2 Какие суммы называются верхней и нижней суммой Дарбу?

3 Дайте определение двойного интеграла.

4 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции двух переменных.

5 В чем суть критерия интегрируемости?

6 Перечислите свойства двойного интеграла.

7 Сформулируйте теорему о вычислении двойного интеграла в случае прямоугольной области.

8 Сформулируйте теорему о вычислении двойного интеграла в случае произвольной области.

9 Как вычислить двойной интеграл по области, не являющейся элементарной?

Решение типовых примеров

1 Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область G (рисунок 2. 3) ограничена линиями $y = x^2$, $x = a$, $a > 0$, $y = 0$.

Решение. Областью интегрирования является криволинейная трапеция, ограниченная сверху параболой $y = x^2$, снизу – осью Ox, справа – прямой $x = a$, $a > 0$.

Если внутренний интеграл взять по y, то y изменяется от 0 до $y = x^2$, а x изменяется в пределах от 0 до a:

$$\iint_G f(x, y)\, ds = \int_0^a dx \int_0^{x_2} f(x, y)\, dy .$$

Если внутренний интеграл взять по x, то x изменяется от 0 до $x = \sqrt{y}$, а y изменяется в пределах от 0 до a^2:

$$\iint_G f(x, y)\, ds = \int_0^{a^2} dy \int_{\sqrt{y}}^{a} f(x, y)\, dx .$$

2 Представить двойной интеграл $\iint_G f(x, y)\, dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по x и по y, если область G ограничена линиями $y = 2x$, $x = 0$, $y + x = 3$ (рисунок 2. 4).

Решение. Областью интегрирования является треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(0;3)$; $B(1;2)$.

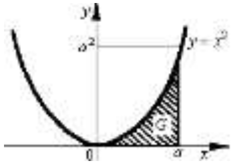

Рисунок 2. 3 – Область интегрирования для типового примера 1

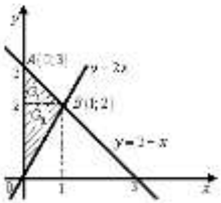

Рисунок 2. 4 – Область интегрирования для типового примера 2

Если внутренний интеграл взять по y, то область G рассмотрим как криволинейную трапецию, ограниченную слева прямой $x = 0$, справа – прямой $x = 1$; снизу – прямой $y = 2x$, сверху – прямой $y + x = 3$. Отсюда $0 \le x \le 1$, $2x \le y \le 3 - x$. Поэтому пределы расставятся следующим образом:

$$\iint_G f(x, y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x} f(x, y)\,dy$$

Если внутренний интеграл будем брать по x, то область G разбивается прямой $y = 2$ на две непересекающиеся области:

$$G_1 = \left\{ (x; y) \middle| 0 \le x \le \frac{y}{2},\ 0 \le y \le 2x \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (x; y) \middle| 0 \le x \le 3 - x,\ 2 \le y \le 3 \right\}.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим:

$$\iint_G f(x, y)\,dxdy = \iint_{G_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{G_2} f(x, y)\,dxdy =$$

$$= \int_0^2 dy \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx + \int_2^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y)\,dx.$$

3 Вычислить двойной интеграл $\iint_G x^2 y\,dxdy$ по области, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2x^3$, $x + y = 3$.

Р е ш е н и е. Область интегрирования G состоит из двух непересекающихся областей G_1 и G_2 (рисунок 2. 5).

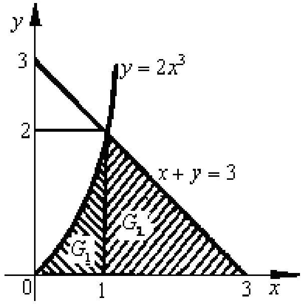

Рисунок 2. 5 – Область интегрирования для типового примера 3

Рассмотрим различный порядок интегрирования. Сначала вычислим внешний интеграл по переменной x. В этом случае исходный интеграл сводится к вычислению двух интегралов по областям

$$G_1 = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2x^3 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (x;y) \middle| 1 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 3 - x \right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x^3} x^2 y\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3-x} x^2 y\,dy$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$G = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le y \le 2,\, \sqrt[3]{\frac{1}{2}y} \le x \le 3 - y \right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} x^2 y\,dx = \int\limits_0^2 y\,dy \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^2 y\left((3-y)^3 - \frac{y}{2} \right) dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 y\left(27 - 27y + 9y^2 - y^3 - \frac{y}{2} \right) dy =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}y^2-\frac{1}{5}y^5+\frac{9}{4}y^4-\frac{275}{30}y^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{154}{45}.$$

4 Вычислить $\iint\limits_G \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, если G – прямоугольник

$$G=\left\{x\middle|\ 1\le x\le 2, 0\le y\le 1\right\}.$$

Решение. Относительно переменных $y=x$ и y интегралы $\int\frac{dx}{(x+y+1)^2}$ и $\int\frac{dy}{(x+y+1)^2}$ табличные, поэтому двойной интеграл сведем к следующему повторному:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}=\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1\frac{dy}{(x+y+1)^2}=\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1\frac{d(x+y+1)}{(x+y+1)^2}=$$

$$\int\limits_1^2\left(\left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\Bigg|_0^1\right)dx=\int\limits_1^2\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\left(-\ln(x+2)+\ln(x+1)\right)\Big|_1^2=-\ln 4+\ln 3+\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\ln\frac{9}{8}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, где G – область, ограниченная параболой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}x^2 \\ y=x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2-2x=0 \\ y=x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=0\,;x_2=2 \\ y=x \end{cases}$$

Получаем точки: $O(0;0)$ и $A(2;2)$

Итак, снизу область G ограничена параболой $y=\frac{1}{2}x^2$, сверху – прямой $y=x$:

$$G=\left\{x\middle|\ 0\le x\le 2, \frac{1}{2}x^2\le y\le x\right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\iint\limits_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{x} \frac{xdy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{x} \frac{dy}{x^2+y^2} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{x}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{\frac{1}{2}x^2}^{x} \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{\frac{1}{2}x^2}^{x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} x \Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx = \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}, & du = \dfrac{2dx}{x^2+4}, \\ dv = dx & v = x \end{array} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{2xdx}{x^2+4} \right) = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} 1 + \int\limits_0^2 \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^2 = \ln 8 - \ln 4 = \ln \frac{8}{4} = \ln 2 .$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

а) $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{y^2}$, $G = \left\{ (x;y) \middle|\ 1 \le x \le 2, 4 \le y \le 6 \right\}$;

б) $\iint\limits_G \left(x^2+y^2 \right) dxdy$, $G = \left\{ (x;y) \middle|\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \right\}$.

2 Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$ от функции $f(x;y)$, непрерывной в указанной области:

а) G ограничена линиями $y = x^2$, $y = 4$;

б) G определена неравенствами $x^2 + y^2 \le 9$, $x + y \ge 3$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\iint\limits_G (x-y)dxdy$, G ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$;

б) $\iint\limits_G (\cos 2x-\sin y)dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$;

в) $\iint\limits_G \left(x^2+2y\right)dxdy$, G ограничена линиями $y=x^2$, $y=4$;

г) $\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}dxdy$, G ограничена линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$;

д) $\iint\limits_G \left(6x^2y+8xy^3\right)dxdy$, G ограничена линиями $x^2+y=2$, $y^3=x^2$;

е) $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, G ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ (первая четверть).

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, предварительно изобразив на рисунке область интегрирования:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{2x-3} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_1^6 dx \int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)dy$;

г) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$;

д) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

е) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

а) $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{x^2}$, $G=\{(x;y)|\ 2\le x\le 4, 6\le y\le 8\}$;

б) $\iint\limits_D (3xy^2+4y^3)dxdy$, $G=\{(x;y)|\ 0\le x\le 1, 1\le y\le 2\}$.

2 Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$ от функции $f(x;y)$, непрерывной в указанной области:

а) G ограничена линиями $y=-x^2+2$, $y^3=x^2$, G ограничена линиями $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$);

б) G определена неравенствами $x^2+y^2\le 1$, $x^2+4y^2\ge 1$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\iint\limits_G (3x+y)dxdy$, G ограничена неравенствами $x^2+y^2\le 9$, $y\ge \frac{2}{3}x+3$;

б) $\iint\limits_G \sin(x+y)dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y=x$;

в) $\iint\limits_G (x+2y)dxdy$, G ограничена линиями $x=5$, $y^2=x+4$;

г) $\iint\limits_G (x^2+y)dxdy$, G ограничена линиями $y=x^2$, $y^2=x$;

д) $\iint\limits_G \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy$, G ограничена линиями $x=1$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=-x^3$;

е) $\iint\limits_G y^2 \sin\frac{xy}{2}dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$;

ж) $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$, где G – треугольник ABC: $A(0;0)$, $B(1;-1)$, $C(1;1)$.

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, предварительно изобразив на рисунке область интегрирования:

а) $\int\limits_{-6}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{0}^{\ln x}f(x,y)dy$;

г) $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x}f(x,y)dy$.

Практическое занятие 3 **Замена переменных в двойном интеграле**

3.1 Криволинейные координаты
3.2 Замена переменных в двойном интеграле
3.3 Полярные координаты
3.4 Геометрические и физические приложения двойных интегралов

3.1 Криволинейные координаты

Взаимно однозначное отображение

$$u = u(x;y), \quad v = v(x;y), \tag{3.1}$$

открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ на множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x;y) \in G$ пару чисел $(u;v) \in G^*$. Поэтому данное отображение можно рассматривать как переход к новым координатам u и v точки $(x;y)$ одной и той же плоскости G. В этом случае множество G^* представляет собой множество пар новых координат точек множества G.

Обратный переход от координат u и v к координатам x и y осуществляется с помощью отображения (рисунок 3. 1)

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v), \tag{3.2}$$

обратного отображению (3.1).

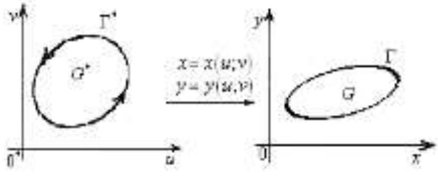

Рисунок 3. 1 – Отображение области G^* в область G при замене переменных $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется *координатной линией*.

При $u = u_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u_0; v),\ \ y = y(u_0; v);$$

при $v = v_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u; v_0),\ \ y = y(u; v_0).$$

В двух случаях получаются уравнения, являющиеся параметрическими уравнениями некоторых кривых. Координаты u и v называются *криволинейными координатами*.

3.2 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным по формулам (3.2). Функции (3.2) осуществляют отображение области $G^* \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на область $G \subset \mathbb{R}^2_{xy}$. Область G называется *образом* области, а область G^* – *прообразом* области G при отображении (3.2).

Т е о р е м а 1 Пусть

1) отображение $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ *переводит замкнутую ограниченную область* G^* *в замкнутую ограниченную область* G *и является взаимно однозначным;*

2) функции $x(u; v)$ *и* $y(u; v)$ *имеют в области* G^* *непрерывные частные производные первого порядка;*

3) якобиан отображения $J = \dfrac{D(x; y)}{D(u; v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ *во всех области* G^**;*

4) функция $f(x; y)$ *непрерывна в области* G.

Тогда справедлива формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_{G} f(x; y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(x(u; v); y(u; v))|J|dudv. \qquad (3.3)$$

Если условие 1) или условие 3) нарушается в отдельных точках или на отдельных кривых, то формула (3.2) остается в силе.

3.3 Полярные координаты

Если область G ограничена дугами окружности, то удобно переходить к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{3.4}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобиан перехода к полярным координатам равен:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(\rho;\varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Поэтому формула замены переменных запишется в виде:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r\, drd\varphi. \tag{3.5}$$

Если область G ограничена дугами эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, то удобно переходить к обобщенным полярным координатам

$$x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. При этом якобиан отображения равен

$$J = abr.$$

3.4 Геометрические и физические приложения двойных интегралов

Двойные интегралы используются для вычисления:

– *площади S плоской фигуры G*

$$S = \iint\limits_G dxdy; \tag{3.6}$$

– *площади S поверхности*, заданной уравнением $z = f(x;y)$

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy, \tag{3.7}$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy;

– *объема тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y) > 0$, снизу – плоскостью $z = 0$, с боковых сторон –

цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси Oz, а направляющей служит контур области G

$$V = \iint_G f(x;y)\,dxdy\,; \tag{3.8}$$

– *массы плоской пластины* G с плотностью $\rho(x;y)$

$$m = \iint_G \rho(x;y)\,dxdy\,; \tag{3.9}$$

– *статических моментов* S_x, S_y относительно осей Ox, Oy соответственно и *координат* $(x_c; y_c)$ *центра тяжести* плоской пластины G

$$S_x = \iint_G y\cdot\rho(x;y)\,dxdy\,, \quad S_y = \iint_G x\cdot\rho(x;y)\,dxdy\,, \tag{3.10}$$

$$x_c = \frac{S_y}{m}\,, \qquad y_c = \frac{S_x}{m}\,; \tag{3.11}$$

– *моментов инерции* плоской пластины G относительно осей Ox и Oy

$$I_x = \iint_G y^2\rho(x;y)\,dxdy\,, \qquad I_y = \iint_G x^2\rho(x;y)\,dxdy\,; \tag{3.12}$$

– *момента инерции* плоской пластины G относительно начала координат $O(0;0)$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_G \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)\,dxdy\,. \tag{3.13}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какие координаты называются криволинейными?

2 Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

3 Чему равен якобиан при переходе от декартовых координат к полярным?

4 Какие геометрические приложения имеет двойной интеграл?

5 Перечислите, при вычислении каких физических величин используется двойной интеграл.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\iint\limits_G y^3 dxdy$ по области

$$G=\left\{(x;y)\middle|\ y\ge x^2, y\le 2x^2, xy\ge 1, xy\le 2\right\}.$$

Решение. Область G представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$ (рисунок 3. 2, а).

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при $x\ge 0$ отображение вида:

$$u=\frac{y}{x^2},\ v=xy. \tag{3.14}$$

Образом области G^* является квадрат (рисунок 3. 2, б)

$$G^*=\left\{(u;v)\middle|\ 1\le u\le 2, 1\le v\le 2\right\}.$$

Данное отображение является взаимно однозначным, поскольку уравнения (3.14) разрешимы относительно x и y:

$$x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},\ y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}.$$

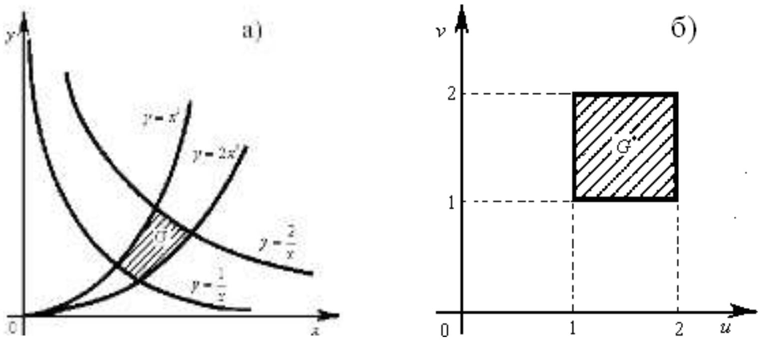

Рисунок 3. 2 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 1

Найдем якобиан отображения6

$$J=\frac{D(x;y)}{D(u;v)}==\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}\\ \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3u}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G y^3dxdy=\left[\begin{array}{l}x=u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}},\, y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}},\\ |J|=\frac{1}{3|u|}\end{array}\right]=\iint\limits_{G^*}uv^2\frac{1}{3|u|}dudv=$$

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{G^*}v^2dudv=\frac{1}{3}\int\limits_1^2du\int\limits_1^2v^2dv=\frac{1}{3}u\Big|_1^2\cdot\frac{v^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}(2-1)\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{9}.$$

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где

$$G=\left\{\,(x;y)\Big|x^2+y^2\le 1,\, x\ge 0,\ y\le 0\,\right\}.$$

Решение. Область G представляет собой часть круга радиуса 1, расположенного в первой четверти (рисунок 3. 3, а) Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам по формулам (3.4). При этом область G преобразуется в прямоугольник (рисунок 3. 3, б):

$$G^*=\left\{(r;\varphi)\Big|\,0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

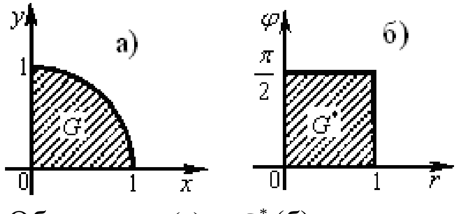

Рисунок 3. 3 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 2

По формуле (3.5) имеем:

$$\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{G^*} e^{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin\varphi}r\,drd\varphi=\iint\limits_{G^*} e^{r^2}r\,drd\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{r^2}d\left(r^2\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{2}e_0^1\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=4y-y^2,\; x+y=6.$$

Решение. Найдем координаты точек пересечения данных линий. Для этого решим систему:

$$\begin{cases}x=4y-y^2,\\ x+y=6,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4y-y^2,\\ 4y-y^2+y-6=0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4y-y^2,\\ y^2-5y+6=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4, x_2=3,\\ y_1=2, y_2=3.\end{cases}$$

Итак, имеем две точки пересечения $A(4;2)$ и $B(3;3)$.

Подставляя в формулу (3.6) вычисления площади, получим:

$$S=\iint\limits_G dxdy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int\limits_2^3\left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{6}.$$

4 Вычислить $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область G ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Преобразуем уравнение окружности:

$$x^2+y^2-2ax=0;\;(x-a)^2+y^2=a^2.$$

Область G представляет собой окружность с центром в точке $(a;0)$ и радиусом a (рисунок 3. 4).

Переходя к полярным координатам

$$x=r\cos\varphi,\; y=r\sin\varphi,\; -\pi/2\le\varphi\le\pi/2,$$

получаем уравнение окружности:

$$x^2+y^2=2ax\;\Rightarrow\; r^2=2ar\cos\varphi\;\Rightarrow\; r(r-2a\cos\varphi)=0.$$

Отсюда $r_1 = 0$; $r_2 = 2a\cos\varphi$, т. е.

$$0 \le r \le 2a\cos\varphi .$$

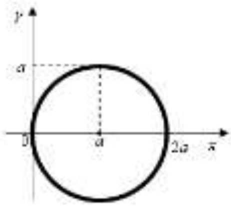

Рисунок 3. 4 – Область G для типового примера 5

Тогда

$$\iint_G \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \iint_{G^*} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2a\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^4 \cos^4\varphi d\varphi = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 4a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= a^4 \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^4\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{2}a^4\pi .$$

5 Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем

$$f_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рисунок 3. 5).

Тогда по формуле (3.7) площадь поверхности равна

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_G dxdy =$$

$$=\begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r dr = 2\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 4\sqrt{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2\sqrt{2}\left.\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

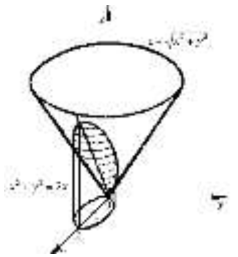

Рисунок 3. 5 – Рисунок для типового примера 6

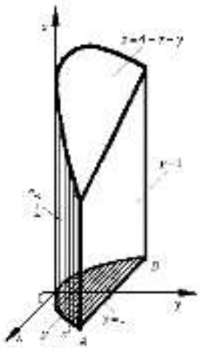

Рисунок 3. 6 – Рисунок для типового примера 7

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = x^2,\ x + y + z = 4,\ y = 1,\ z = 0.$$

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z = 4 - x - y$, снизу – частью плоскости, заключенной между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рисунок 3. 6).

Тогда по формуле (3.8) получим:

$$V = \iint\limits_G (4 - x - y) dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y) dx =$$

$$=\int_0^1\left(\left((4-y)x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)dy=2\int_0^1(4-y)\sqrt{y}\,dy=$$

$$=8\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy-2\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy=\frac{68}{15}.$$

7 Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2, $r_1<r_2$. Поместим полярный радиус системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей примут вид $r=r_1$ и $r=r_2$. Поверхностная плотность в любой точке кольца равна $\rho=\dfrac{k}{r^2}$.

Масса кольца по формуле (3.9) равна

$$m=\iint_G\frac{k}{x^2+y^2}dxdy=\begin{bmatrix}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,|J|=r,\\ 0\le\varphi\le 2\pi,r_1\le r\le r_2\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}\frac{k}{r^2}r\,dr=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr=k\int_0^{2\pi}\left(\ln r\Big|_{r_1}^{r_2}\right)d\varphi=$$

$$=k\ln\frac{r_1}{r_2}\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi k\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

8 Найти массу пластинки G, заданной неравенствами

$$1\le\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge\frac{3x}{2},$$

если поверхностная плотность $\rho(x,y)=\dfrac{9x}{y^3}$

Решение. Переходим к обобщенным полярным координатам

$$x=2r\cos\varphi,\ y=3r\sin\varphi.$$

Якобиан отображения равен $J=6r$.

Из неравенства $1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4$ получим $1 \le r^2 \le 4$, т. е. $1 \le r \le 2$.

Из уравнения прямой $y = \frac{3}{2}x$ имеем

$$3r\sin\varphi = 3r\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Поскольку $x \ge 0$, то очевидно, что $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Значит, по формуле (3.9) имеем

$$m = \iint\limits_G \frac{9x}{y^3}dxdy = \iint\limits_{G^*} \frac{9 \cdot 2r\cos\varphi}{27r^3\sin^3\varphi} \cdot 6rdrd\varphi =$$

$$= 4\iint\limits_{G^*} \frac{\cos\varphi}{r\sin^3\varphi}drd\varphi = 4\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}d\varphi \int\limits_1^2 \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{2}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \ln r\,\Big|_1^2 = (-2+4)\cdot(\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 2.$$

9 Найти центр масс равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительно его гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза AB (рисунок 3. 7).

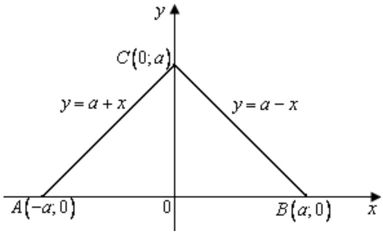

Рисунок 3. 7 – Рисунок для типового примера 10

Тогда относительно системы координат Oxy уравнения катетов AC и BC будут $y = x + a$ и $y = a - x$. Согласно условию задачи в точке $(x;y)$ треугольника ABC плотность имеет вид $\rho(x;y)=ky$.

По формуле (3.9) для массы получим:

$$m=\iint\limits_{ABC} ky\,dxdy=k\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_{y-a}^{a-y}dx=k\int\limits_0^a y\left(x\Big|_{y-a}^{a-y}\right)dy=$$

$$=k\int\limits_0^a y(a-y-y+a)dy=2k\int\limits_0^a\left(ay-y^2\right)dy=$$

$$=2k\left(\frac{ay^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ka^3}{3}.$$

По формулам (3.10) находим статические моменты:

$$S_x=\iint\limits_{ABC} y\cdot ky\,dxdy=k\int\limits_0^a y^2dy\int\limits_{y-a}^{a-y}dx=2k\int\limits_0^a y^2(a-y)dy=$$

$$=2k\left(\frac{ay^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ka^4}{6};$$

$$S_y=\iint\limits_{ABC} x\cdot ky\,dxdy=k\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_{y-a}^{a-y}x\,dx=0.$$

Координаты центра тяжести находятся по формулам (3.11):

$$x_c=0,\ y_c=\frac{a}{2}.$$

Момент инерции относительно гипотенузы AB представляет собой I_x. Поэтому по формуле (3.12) получим:

$$I_x=\iint\limits_{ABC} y^2\,ky\,dxdy=k\int\limits_0^a y^3dy\int\limits_{y-a}^{a-y}dx=2k\int\limits_0^a y^3(a-y)dy=$$

$$=2k\left(\frac{ay^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ka^5}{10}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линией $x^2+y^2=4y$.

2 Вычислить $\iint\limits_G 2\pi\left(x^2-y^2\right)\sin\pi(x-y)^2\,dxdy$, где G – параллелограмм: $x+y=2$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=2$.

3 Вычислить $\iint\limits_G \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где G – область, ограниченная линией $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

4 Вычислить $\iint\limits_G \sin\pi\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линиями $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ и $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$.

5 Вычислить $\iint\limits_G \dfrac{dxdy}{(x+y)^3}$, где G – трапеция $ABCD$: $A(1;3)$, $B(2;6)$, $C(6;2)$, $D(3;1)$.

6 Найти площадь области G, ограниченной линиями

$$3x-3y-7=0,\quad y^2+2y-3x=0.$$

7 Найти массу пластинки $y=x$, $y=x+3$, $x=0$, $x=1$, если поверхностная плотность равна сумме координат точки.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2=10x+25,\quad y^2=-6x+9.$$

9 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x,\quad x=2y,\quad x+y=1,\quad x+3y=1.$$

10 Вычислить площадь области, ограниченной кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2x^3.$$

11 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x-y=0$, $\sqrt{3}\,x-y=0$, $x^2+y^2=8$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$);

б) $x^2+y^2=4x$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$;

в) $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=3$;

г) $x^2+y^2=4$ отсекаемого плоскостями $z=0$, $z=3x$, $z\geq 0$.

12 Найти массу плоской пластинки G с плотностью $\rho(x;y)$ и ограниченной линиями:

а) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1$, $x\leq 0$, $y\geq -\dfrac{3}{2}x$, $\rho(x,y)=xy^2$;

б) $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=0$, $4x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^2$;

в) $x+y=1$, $x+y=2$, $3x-y=0$, $4x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^{-4}$.

13 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

а) $x+y=4$, $x-3y=0$, $x+5y=16$;

б) $y=x^2+1$, $x-y+3=0$;

в) $xy=12$, $x-3y=0$, $4x-3y=0$, $x\geq 0$, $y\geq 0$;

г) $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить $\iint\limits_G r^2 dr d\varphi$, где G – область, ограниченная линиями $r=3(1+\cos\varphi)$ и $r=3$ (область, не содержащая полюса).

2 Вычислить $\iint\limits_G \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$.

3 Вычислить $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где G – область, ограниченная линиями:

а) $x^2+y^2=1$; б) $x^2+y^2=4$.

4 Вычислить $\iint\limits_G xydxdy$, где G – область, ограниченная линиями $y=-x$, $y=x\sqrt{3}$, $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=3x$.

5 Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где G – трапеция $ABCD$: $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(3;4)$, $D(6;2)$.

6 С помощью двойного интеграла найти площадь области, ограниченной линиями $y^2=4+x$, $x+3y=0$.

7 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=x\sqrt{3}$.

8 Вычислить площадь области G: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=x$.

9 Найти площадь области $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

10 Вычислить площадь области G, ограниченной кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^2=18\left(x^2-y^2\right).$$

11 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x-y=0$, $\sqrt{3}x-y=0$, $x^2+y^2=8$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$);

б) $x^2+y^2=4x$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$;

в) конуса $z^2=2xy$, отсекаемого плоскостями $x=0$, $y=0$, $x+y=2$;

г) конуса $y^2+z^2=x^2$, отсекаемого цилиндром $x^2+y^2=4$.

12 Найти массу плоской пластинки G с плотностью $\rho(x;y)$ и ограниченной линиями:

а) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $x\le 0$, $y\ge 0$, $\rho(x,y)=\dfrac{y-4x}{x^2+y^2}$,

б) $x+y=1$, $x+y=3$, $5x-y=0$, $10x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^3$;

в) $x+y=1$, $x+y=3$, $2x-y=0$, $5x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^{-3}$.

13 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

а) $x-2y=0$, $x+y=8$, $y=8$, $x=3$;

б) $y^3=x^2$, $y=-x^2+2$;

в) $xy=8$, $x+y=9$;

г) $x^2+y^2=8$, $x-y=0$, $y=\sqrt{3}x$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

***Практическое занятие 4* Формула Грина**

4.1 Формула Грина

4.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

4.1 Формула Грина

Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая элементарная относительно оси Ox или Oy область G, ограниченная замкнутым контуром Γ.

Теорема 1 (формула Грина) Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в области G, то имеет место формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_\Gamma Pdx + Qdy\,, \qquad (4.1)$$

где контур Γ обходится в положительном направлении.

Формула Грина справедлива для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей. Формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

Площадь области G, ограниченной замкнутым контуром Γ, с помощью формулы Грина вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_G dxdy = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy - ydx\,. \qquad (4.2)$$

4.2 Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Плоская область G называется *односвязной*, если любой замкнутый контур Γ, лежащий внутри этой области, ограничивает область G_Γ, полностью принадлежащую G.

Т е о р е м а 2 Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области G. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в G, верно

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0\ ;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

не зависит от выбора пути интегрирования AB, целиком лежащего в G;

3) выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G:

$$Pdx + Qdy = dF\ ;$$

4) в области G всюду

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какая область называется односвязной?

2 Какие условия должны выполняться для того, чтобы была справедлива формула Грина?

3 Перечислите эквивалентные условия, если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где

$$\Gamma=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2=4\right\}.$$

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы Грина. Имеем

$$P(x;y)=x-y,\qquad Q(x;y)=x+y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Тогда

$$\oint\limits_{x^2+y^2=4}(x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(1+1)dxdy=2\pi\cdot 2^2=8\pi.$$

2 Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy$.

Решение. Здесь $P=y$, $Q=x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$. Согласно теореме 2, интеграл не зависит от пути интегрирования. Из выполнения условия 4) следует справедливость условия 3). Так как $d(xy)=xdy+ydx$, то

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy=xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)}=1-0=1.$$

3 Вычислить площадь, ограниченную астроидой

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$$

Решение. По формуле (4.2) находим

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{3a^2\pi}{8}.$$

4 Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)}\left(12xy + 4x^2\right)dx + \left(6x^2 + y\right)dy,$$

предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

Р е ш е н и е . Функции

$$P(x;y) = 12xy + 4x^2,\ Q(x;y) = 6x^2 + y$$

непрерывны вместе со своими частными производными в любой односвязной области, содержащей точки $(0;0)$ $(1;1)$.

Поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x,$$

то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, данный интеграл не зависит от пути интегрирования. По теореме 2 подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$:

$$dU = \left(12xy + 4x^2\right)dx + \left(6x^2 + y\right)dy.$$

С другой стороны

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Сравнивая два выражения для dU , получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 12xy + 4x^2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 + y.$$

Из первого равенства, считая y постоянным, находим

$$U(x;y)=6x^2y+\frac{4}{3}x^3+C(y).$$

Находим частную производную по переменной y

$$\frac{\partial U}{\partial y}=6x^2+C'(y).$$

Сравнивая полученное выражение с имеющимся для $\frac{\partial U}{\partial y}$, получим

$$6x^2+C'(y)=6x^2+y.$$

Отсюда $C'(y)=y$ и $C(y)=\frac{y^2}{2}$.

Поэтому

$$U(x;y)=6x^2y+\frac{4}{3}x^3+\frac{y^2}{2}.$$

Тогда данный интеграл равен

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)}\left(12xy+4x^2\right)dx+\left(6x^2+y\right)dy=U(1;1)-U(0;0)=6+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{51}{6}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Проверить, зависят ли следующие криволинейные интегралы от пути интегрирования:

а) $\int\limits_{\Gamma}2xe^{x^2+y^2}dx+3y^2e^{x^2+y^2}dy$;

б) $\int\limits_{\Gamma}8x\sin\left(4x^2-5y^2\right)dx-10y\sin\left(4x^2-5y^2\right)dy$;

в) $\int\limits_{\Gamma}\left(xy^3+x^2-2y^2\right)dx+\left(y^5-3x^3y^2+x^4\right)dy$.

2 Применив формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint\limits_{\Gamma}\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$, $\Gamma=\left\{\ (x;y)\middle|\ x^2+y^2=9\right\}$;

б) $\oint\limits_{\Gamma} 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, Γ – треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$;

в) $\oint\limits_{\Gamma} (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $\Gamma=\left\{\ (x;y) \mid \ x^2+y^2=ax\ \right\}$;

г) $\oint\limits_{\Gamma} 2xdx-ydx$**,** где Γ – замкнутый контур, ограниченный дугой параболы $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$ и отрезком прямой $y=x$ между точками $O(0;0)$ и $B(1;1)$.

3 Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение:

а) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \left(3y^2+4y\right)dx+(6xy+4x-4y)dy$;

б) $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)} \left(4x^3-3y^2+5y\right)dx+(5x-6xy-4y)dy$.

Задания для домашней работы

1 Проверить, зависят ли следующие криволинейные интегралы от пути интегрирования:

а) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2-1}\,dx+\ln\left(x^2+y^2+1\right)dy$;

б) $\int\limits_{\Gamma} \left(4x^3-12x^2y\right)dx+\left(5y^4-4x^3\right)dy$.

2 Применив формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint\limits_{\Gamma} (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $\Gamma=\left\{(x;y) \mid \ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$;

б) $\oint\limits_{\Gamma}(x+y)dx-(x-y)dy$, $\Gamma=\left\{(x;y)\middle|\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right\}$;

в) $\oint\limits_{\Gamma}e^{y^2-x^2}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy)$, $\Gamma=\left\{(x;y)\middle|\ x^2+y^2=16\right\}$;

г) $\oint\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy$, где Γ – контур прямоугольника с вершинами $A(3;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$, $D(3;4)$.

3 Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение:

а) $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)}\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+3y^2\right)dy$;

б) $\int\limits_{(0;2)}^{(1;3)}\left(4xy-15x^2y\right)dx+\left(2x^2-5x^3+7\right)dy$.

Практическое занятие 5 Тройной интеграл

5.1 Определение, свойства и вычисление тройного интеграла
5.2 Замена переменных в тройном интеграле
5.3 Цилиндрические и сферические координаты
5.4 Приложения тройного интеграла

5.1 Определение, свойства и вычисление тройного интеграла

Определение тройного интеграла. Пусть Q замкнутая область пространства $\mathbb{R}^3$, на котором задана непрерывная функция $f(x;y;z)$. И пусть $\tau = \{ Q_i \}$, $i = 1,2,...,n$, разбиение области Q на частичные области Q_1, Q_2, ..., Q_n с объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. При этом мелкость разбиения есть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(Q_i)$, где $d(Q_i)$ – диаметр частичной области Q_i, $i = 1,2,...,n$. В каждой малой части Q_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.

Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta V_i \qquad (5.1)$$

называется *интегральной суммой* Римана для функции $f(x;y;z)$ на множестве Q, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i \in Q_i$, $i = 1,2,...,n$.

Если функция $f(x;y;z)$, ограничена на Q, то для любого разбиения $\tau = \{ Q_i \}$, $i = 1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y;z) \in Q_i} f(x;y;z), \; M_i = \sup_{(x;y;z) \in Q_i} f(x;y;z).$$

Суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta V_i, \qquad S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta V_i$$

называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению $\tau = \{ Q_i \}$ множества Q.

Тройным интегралом от функции $f(x;y;z)$ по множеству Q называется предел (если он существует) интегральной суммы (5.1) при $\lambda \to 0$:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i \ , \qquad (5.2)$$

подынтегральная функция $f(x;y;z)$ называется *интегрируемой* по замкнутой области Q, множество Q – *областью интегрирования*, x, y, z – *переменными интегрирования*, dv – *элементом* объема.

Не ограничивая общности, можно считать, что $dv = dxdydz$. Поэтому можно записать:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iiint\limits_V f(x;y;z)dv \, .$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) Если функция $f(x;y;z)$ интегрируема в замкнутой области Q, то она ограничена в этой области.

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области Q, то она интегрируема в ней.

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $Q \subset \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $\tau = \{Q_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau) < \delta$ выполнялось неравенство $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$.

Свойства тройного интеграла. Для тройного интеграла справедливые следующие *свойства*:

– $\iiint\limits_Q dv = V$, где V – объем области Q;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы в области

Q, то функция $\alpha \cdot f(x;y;z)+\beta \cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема в Q и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_Q (\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dv =$$

$$= \alpha \iiint\limits_Q f(x;y;z)dv + \beta \iiint\limits_Q g(x;y;z)dv ;$$

– *(аддитивность)* если область Q является объединением областей Q_1 и Q_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых функция $f(x;y;z)$ интегрируема, то $f(x;y;z)$ также интегрируема на Q и справедлива формула:

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv = \iiint\limits_{Q_1} f(x;y;z)dv + \iiint\limits_{Q_2} f(x;y;z)dv ;$$

– *(монотонность)* если в области Q имеет место неравенство $f(x;y;z)\geq 0$, то

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv \geq 0 ;$$

– если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_Q f(x;y;z)dv \leq M \cdot V ,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве Q.

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то в этой области существует такая точка $P_0(x_0;y_0 z_0)$, что

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0)\cdot V .$$

Вычисление тройного интеграла. В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных.

Пусть функция $f(x;y;z)$ определена на измеримом множестве

$$Q = \left\{ (x;y;z) \middle| (x;y) \in G \subset Oxy,\, z_1(x;y) \le z \le z_2(x;y) \right\},$$

где $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ – непрерывные функции в области G. И пусть каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области Q не более чем в двух точках (рисунок 5. 1), т. е. пространственная область Q является элементарной относительно оси Oz.

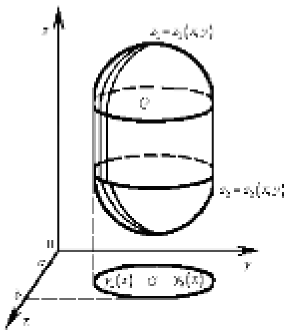

Рисунок 5. 1 – Пространственная область Q

Т е о р е м а 4 Пусть 1) существует тройной интеграл

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz;$$

2) $\forall (x;y) \in G$ существует определенный интеграл

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

(при постоянных x и y).

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_G I(x;y)dxdy = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz\,. \qquad (5.3)$$

Данная формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G.

Выражение

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz \qquad (5.4)$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области $G = \left\{ (x;y) \middle| a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_1(x) \right\}$, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, то, переходя от двойного интеграла $\iint\limits_G I(x;y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_1(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz\,. \qquad (5.5)$$

Если пространственная область Q не является элементарной, то ее необходимо разбить на конечное число элементарных областей, к которым можно применить формулу (5.5).

Порядок интегрирования в формуле при определенных условиях может быть иным, т. е. переменные x, y, z можно менять местами.

Пусть Q – прямоугольный параллелепипед

$$Q = \left\{ (x;y;z) \middle|\ a \le x \le b, c \le y \le d,\ p \le z \le q \right\},$$

$f(x,y,z)$ – непрерывная в Q функция. Тогда:

$$\iiint\limits_Q f\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f\,dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b dx \int\limits_p^q f\,dz = \int\limits_p^q dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f\,dx\,.$$

Если

$$f(x,y,z) = \varphi(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$$

и область Q – прямоугольный параллелепипед, то

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \varphi(x)dx\int\limits_c^d g(y)dy\int\limits_p^q h(z)dz\,. \tag{5.6}$$

5.2 Замена переменных в тройном интеграле

Замена переменных в тройном интеграле $\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz$ состоит в переходе от координат x, y, z к новым криволинейным координатам u, v, w по формулам

$$x = x(u;v;w),\ y = y(u;v;w),\ z = z(u;v;w), \tag{5.7}$$

где $(u;v;w) \in Q^* \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$.

Функции (5.7) осуществляют взаимно-однозначное отображение области $Q^* \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$ на область $Q \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$.

Теорема 5 Пусть 1) Q и Q^* замкнутые ограниченные области в пространствах $\mathbb{R}^3_{xyz}$ и $\mathbb{R}^3_{uvw}$ соответственно;

2) функция $f(x;y;z)$ ограничена и непрерывна в области Q ;

3) функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$, $z(u;v;w)$ имеют в области Q^* непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $J = \dfrac{D(x;y;z)}{D(u;v;w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ *в области* Q^*.

Тогда справедлива формула замены переменных в тройном интеграле

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_{Q^*} f(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w))|J|dudvdw. \tag{5.8}$$

5.3 Цилиндрические и сферические координаты

Цилиндрические координаты. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно определяется тройкой чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M', z – аппликата точки M (рисунок 5. 2). Тройка чисел $(r;\varphi;z)$ называется *цилиндрическими координатами* точки M.

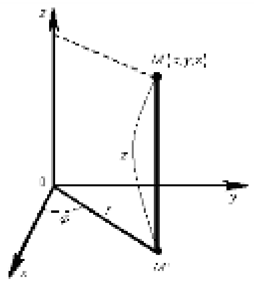

Рисунок 5. 2 – Связь декартовых и цилиндрических координат

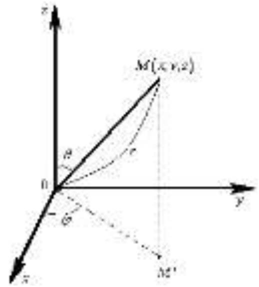

Рисунок 5. 3 – Связь декартовых и сферических координат

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к цилиндрическим координатам $(r;\varphi;z)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \tag{5.9}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi < \varphi \le \pi$.

Якобиан отображения есть

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(p,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\,.$$

С ф е р и ч е с к и е   к о о р д и н а т ы. Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно задается тройкой чисел $(r;\theta;\varphi)$, где r – расстояние точки M до точки O (начала координат), θ – угол между лучами OM и Oz, φ – полярный угол точки M' на плоскости Oxy (рисунок 5. 3).

Тройка чисел $(r;\theta;\varphi)$ называется *сферическими координатами* точки M.

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к сферическим координатам $(r;\theta;\varphi)$ задается формулами

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\sin\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\theta,\end{cases}\qquad(5.10)$$

где $0\le r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

Якобиан отображения есть:

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=r^2\sin\theta\,.$$

Если тело ограничено эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ или его частью, переходят к обобщенным сферическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = a\,r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\,r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\,r\cos\theta, \end{cases} \tag{5.11}$$

якобиан отображения равен

$$J = abcr^2\sin\theta .$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q^*} f(ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)abcr^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta .$$

5.4 Приложения тройного интеграла

Пусть Q материальное тело с плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда тройной интеграл используется для вычисления:

– *объема тела*

$$V = \iiint\limits_Q dxdydz ; \tag{5.12}$$

– *массы тела*

$$m = \iiint\limits_Q \rho(x;y;z)dxdydz ; \tag{5.13}$$

– *статических моментов* M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy соответственно:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint\limits_Q x\rho(x;y;z)dxdydz ; \\ M_{zx} &= \iiint\limits_Q y\rho(x;y;z)dxdydz ; \\ M_{xy} &= \iiint\limits_Q z\rho(x;y;z)dxdydz ; \end{aligned} \tag{5.14}$$

– *координат центра* $(x_c; y_c; z_c)$ тяжести тела:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}; \tag{5.15}$$

– *моментов инерции* I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy соответственно:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \iiint\limits_Q x^2 \rho(x;y;z)\,dxdydz; \\ I_{zx} &= \iiint\limits_Q y^2 \rho(x;y;z)\,dxdydz; \\ I_{xy} &= \iiint\limits_Q z^2 \rho(x;y;z)\,dxdydz; \end{aligned} \tag{5.16}$$

– *моментов инерции* I_x, I_y, I_z, I_0 тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$\begin{gathered} I_x = I_{zx} + I_{xy}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx}; \\ I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy}. \end{gathered} \tag{5.17}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определения: а) интегральной суммы, б) нижней и верхней сумм Дарбу.

2 Что называется тройным интегралом?

3 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x;y;z)$.

4 Перечислите свойства тройного интеграла.

5 Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.

6 Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

7 Какие координаты называются цилиндрическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим?

8 Какие координаты называются сферическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к сферическим?

9 При вычислении каких величин используется тройной интеграл?

Решение типовых примеров

1 Вычислить $\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz$, где

$$Q=\{(x;y;z)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\}.$$

Решение. Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед. По формуле (5.6) получим:

$$\iiint\limits_Q (x+y+z)\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 (x+y+z)\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^3 dy=\int_0^1 dx\int_0^2\left(3x+3y+\frac{9}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(3xy+\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{2}y\right)\Big|_0^2 dx=\int_0^1 (6x+6+9)\,dx=$$

$$=\int_0^1 (6x+15)\,dx=\left(3x^2+15x\right)\Big|_0^1=3+15=18.$$

2 Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz$, область Q ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$.

Решение. Область Q проектируется на плоскость Oxy в область G, которая представляет собой треугольник (рисунок 5. 4): $G=\{(x;y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$.

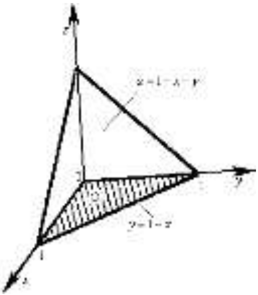

Рисунок 5.4 – Область интегрирования для типового примера 2

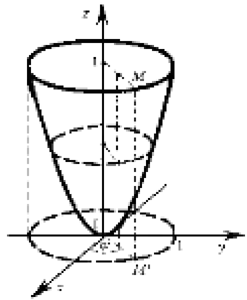

Рисунок 5.5 – Область интегрирования для типового примера 3

Имеем

$$\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(2 - 3x + x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

3 Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область Q ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (рисунок 5. 5).

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к цилиндрическим координатам по формулам (5.9).

Область Q проектируется в круг $x^2 + y^2 \le 1$. Поэтому $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r \le 1$. Постоянному значению r в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2 + y^2 = r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью Q, получаем изменение координаты z от точек, лежащих на параболоиде, до значений тех точек, лежащих на плоскости $z=1$, т. е. $r^2 \le z \le 1$.

Имеем:

$$\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{\rho^2}^1 r^2 \cdot r dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r^3 z\right)\Big|_{\rho^2}^1 dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

4 Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область Q есть шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ (рисунок 5. 6).

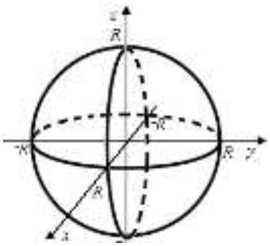

Рисунок 5. 6 – Область интегрирования для типового примера 4

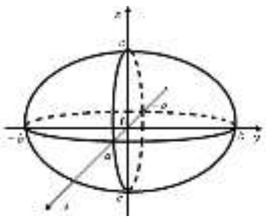

Рисунок 5. 7 – Область интегрирования для типового примера 5

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к сферическим координатам по формулам (5.10).

Из вида области Q следует, что

$$0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

В этом случае подынтегральная функция примет вид:

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta =$$

$$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2.$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta =$$

$$= 4\pi \int_0^R r^4 dr = 4\pi \left. \frac{r^5}{5} \right|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

5 Вычислить $\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 dxdydz$, где Q – эллипсоид (рисунок 5. 7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

Решение. Переходя к обобщенным сферическим координатам по формулам (5.11), получим уравнение эллипсоида

$$r^2 = 1.$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^3 dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q^*} r^6 \cdot r^2 \sin\theta \, abc \, drd\varphi d\theta = abc \iiint\limits_{Q^*} r^8 \sin\theta \, drd\varphi d\theta =$$

$$= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^1 r^8 dr = abc \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta) \Big|_0^\pi \cdot \frac{r^9}{9} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{abc}{9} \cdot 2\pi(1+1) = \frac{4\pi abc}{9}.$$

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Решение. Тело Q ограничено снизу параболоидом вращения с осью симметрии Oz, вершиной в начале координат, сверху – плоскостью $z = 2$. Проекция тела на плоскость Oxy – область, ограниченная окружностью

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам по формулам (5.9):

Так как $\dfrac{x^2+y^2}{2} \le z \le 2$, то $\dfrac{r^2}{2} \le z \le 2$.

Очевидно, что $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$.

Тогда по формуле (5.12) объем тела равен

$$V = \iiint\limits_{Q} dxdydz = \iiint\limits_{Q^*} r\, drd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{2} rdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rz \Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^{2} dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2r - \frac{r^3}{2}\right)dr = \int\limits_0^{2\pi}\left(r^2 - \frac{r^4}{8}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}(4-2)d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi \Big|_0^{2\pi} = 4\pi .$$

7 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до начала координат.

Решение. По условию $\rho(x,y,z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ и тогда по формуле (5.13) масса равна

$$m = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dxdydz .$$

Уравнение сферической поверхности приведем к каноническому виду

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rz;$$

$$x^2+y^2+z^2-2Rz+R^2 = R^2;$$

$$x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2.$$

Сфера с центром в точке $(0;0;R)$ радиуса R. Проекция тела на плоскость $z=0$ – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=R^2$.

Переходим к сферическим координатам (5.10) .Из уравнения сферической поверхности находим пределы для r:

$$x^2+y^2+z^2-2Rz=0 \;\Rightarrow\; r^2-2Rr\cos\theta=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; r\left(r-2R\cos\theta\right)=0 \;\Rightarrow\; 0\le r\le 2R\cos\theta .$$

При этом $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

Тогда масса равна

$$m=\iiint\limits_{Q}\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz=k\iiint\limits_{Q^*}\frac{r^2\sin\theta}{r}\,drd\varphi\,d\theta=$$

$$=k\iiint\limits_{Q^*}r\sin\theta drd\varphi\,d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}r\sin\theta\,dr=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2R\cos\theta}d\theta=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot 4R^2\cdot\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}\left(0-\frac{1}{3}\right)d\varphi=\frac{2}{3}kR^2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}k\pi R^2 .$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить следующие тройные интегралы по указанным пространственным областям:

а) $\iiint\limits_Q \left(5x+\frac{3}{2}z\right)dxdydz$, $Q:$ $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=0$, $z=x^2+15y^2$;

б) $\iiint\limits_Q \left(x+y+z^2\right)dxdydz$, $Q:\ -1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$, $2\le z\le 3$;

в) $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, $Q:\ x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

г) $\iiint\limits_Q (4x-y+z)dxdydz$, Q $z=2-x^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

д) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, $Q:$ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=0$, $y=x$, $y=2x$, $x=\frac{1}{2}$;

е) $\iiint\limits_Q ydxdydz$, $Q:$ $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;

ж) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, $Q:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z\ge 0$;

и) $\iiint\limits_Q 8y^2ze^{-xyz}dxdydz$, $Q:\ x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=0$, $z=0$, $z=2$;

к) $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^6}$, $Q:\ x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

л) $\iiint\limits_Q (1-2y)dxdydz$, $Q:\ z=y^2$, $z+2x=6$, $x=0$, $z=4$;

м) $\iiint\limits_Q x^2y^2dxdydz$, $Q:\ x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le x^2+y^2$.

2 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$.

3 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, если плотность $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

4 Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x$, если плотность

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

5 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $z = 2y^2$, $z = 3y^2$ $(y \ge 0)$, $z = 4x$, $z = 5x$, $z = 3$, с плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

6 Вычислить объем тела Q, ограниченного поверхностями $2z = y^2$, $2x + 3y = 12$, $x = 0$, $z = 0$.

7 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 10x$, $x^2 + y^2 = 13x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y \ge 0$.

8 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $12z = x^2 + y^2$.

9 Найти массу однородного тела Q, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$

10 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностью $9x^2 + 2y^2 + 18z^2 = 18$, если плотность

$$\rho(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right)\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + z^2} .$$

Задания для домашней работы

1 Вычислить следующие тройные интегралы по указанным пространственным областям:

а) $\iiint\limits_Q (6x + 8y + 4z + 5)dxdydz$, $Q:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz$, Q: $x+y=a$, $z=0$, $z=c$, $x=0$, $y=0$;

в) $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, Q: $y^2+z^2=b^2$, $x=0$, $x=a$;

г) $\iiint\limits_Q (x^2+y^2+z)^3 dxdydz$, Q: $z=x^2+y^2$, $z=c$ $(c>0)$;

д) $\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}dxdydz$, Q: верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$;

е) $\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, Q: внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

ж) $\iiint\limits_Q (5x-3z)dxdydz$, Q: $x^2+y^2=1$, $z=4$, $z+2x-3y=0$;

и) $\iiint\limits_Q (2x+y)dxdydz$, Q: $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=1$, $z=1+x^2+y^2$;

к) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, Q: $\frac{x^2+y^2}{R^2}=\frac{z^2}{h^2}$ и $z=h$ $(h>0)$;

л) $\iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, Q: $x^2+y^2+z^2=y$;

м) $\iiint\limits_Q \frac{xdxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, Q: $1\le x^2+y^2+z^2 \le 9$, $y\le x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

2 Вычислить массу тела Q расположенного в первом октанте и ограниченного цилиндрическими поверхностями $z=2x^2$,

$z=3-x^2$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=2$, если $\rho(x,y,z)=xy^2$.

3 Найти массу пирамиды, ограниченной плоскостями $x-y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если $\rho(x,y,z)=x$.

4 Найти массу тела Q, ограниченного поверхностями $z=x^2+10y^2$, $z=20-x^2-10y^2$, если плотность равна $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

5 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностью $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, с плотностью $\rho(x,y,z)=\sqrt{\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}\right)^3}$.

6 Вычислить объем тела Q, ограниченного поверхностями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$, $z=0$, $z=3$.

7 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $y^2=x+1$, $y^2=1-x$, $x+y+z=3$, $z=0$.

8 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями

$$y=12-x^2-z^2,\ y=\sqrt{z^2+x^2}.$$

Практическое занятие 6 Поверхностные интегралы

6.1 Определение, свойства, вычисление и приложения поверхностного интеграла 1-го рода

6.2 Определение, свойства и вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

6.1 Определение, свойства, вычисление и приложения поверхностного интеграла 1-го рода

Определение поверхностного интеграла 1 го рода. Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности $\Omega \in \mathbb{R}^3$, с площадью S определена непрерывная ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. В каждой частичной поверхности Ω_i, $i = 1, 2, ..., n$, возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ (рисунок 6. 1).

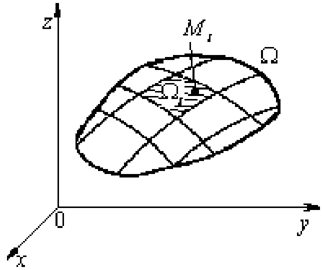

Рисунок 6. 1 – Разбиение поверхности Ω.

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta S_i \qquad (6.1)$$

называется *интегральной суммой* для функции $f(x;y;z)$ по поверхности Ω.

Поверхностным интегралом 1-го рода от функции $f\left(x;y;z\right)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (6.1) при $\lambda \to 0$:

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(x;y;z\right)dS = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right)\cdot \Delta S_i\ , \qquad (6.2)$$

функция $f\left(x;y;z\right)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω, поверхность Ω – *поверхностью интегрирования,* dS – *элемент поверхности*.

Свойства поверхностного интеграла 1-го рода. Основными *свойствами* поверхностного интеграла 1 го рода являются:

– $\iint\limits_{\Omega} dS = ½$, где S – площадь поверхности Ω;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f\left(x;y;z\right)$ и $g\left(x;y;z\right)$ интегрируемы на поверхности Ω, то функция $\alpha\cdot f\left(x;y;z\right)+\beta\cdot g\left(x;y;z\right)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\alpha f+\beta g\right)dS = \alpha\iint\limits_{\Omega} f\,dS+\beta\iint\limits_{\Omega} g\,dS\ ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $f\left(x;y;z\right)$ интегрируема на Ω_1 и Ω_2, то функция $f\left(x;y;z\right)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедлива формула:

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(x;y;z\right)dS = \iint\limits_{\Omega_1} f\left(x;y;z\right)dS+\iint\limits_{\Omega_2} f\left(x;y;z\right)dS\ ;$$

– *(монотонность)* если на поверхности Ω выполнено неравенство $f\left(x;y;z\right)\le g\left(x;y;z\right)$, то

$$\iint\limits_{\Omega} f\left(x;y;z\right)dS \le \iint\limits_{\Omega} g\left(x;y;z\right)dS\ ;$$

– *(оценка интеграла)* $\left|\iint\limits_{\Omega} f\left(x;y;z\right)dS\right| \le \iint\limits_{\Omega}\left|f\left(x;y;z\right)\right|dS\ ;$

– *(теорема о среднем)* если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = f(x_0;y_0;z_0)\cdot S,$$

где S – площадь поверхности Ω.

Вычисление поверхностного интеграла 1 го рода. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода сводится к вычислению двойного интеграла по области G, являющейся проекцией поверхности Ω на плоскость Oxy.

Параметрическое задание поверхности. Поверхность Ω задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v),\; y = y(u,v),\; z = z(u,v),\; (u,v)\in W.$$

Тогда поверхностный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega} f(x,y,z)\,dS = \iint_{W} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv, \quad (6.3)$$

где $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$; $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$; $F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$.

Явное задание поверхности Ω. Пусть Ω поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$. Здесь функция $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x' и z_y' в замкнутой области G. И пусть функция $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, и, следовательно, интегрируема на ней. Учитывая, что элемент поверхности есть $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$, имеем

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)\,dS = \iint_{G} f\big(x;y;z(x;y)\big)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy. \quad (6.4)$$

Неявное задание поверхности. Поверхность Ω задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F_z' \neq 0$, $\forall (x,y,z)\in\Omega$. Функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы о существовании неявной функции. Поэтому уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет функцию $z=z(x,y)$, для которой $z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}$; $z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}$.

Тогда из (6.4) имеем

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dS=\iint\limits_{G} f(x,y,z)\frac{1}{|F'_z|}\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}\,dxdy, \qquad (6.5)$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy $(z=0)$. Для вычисления интеграла z выражается из уравнения поверхности.

Приложения поверхностных интегралов 1 го рода. Поверхностные интегралы 1-го рода применяются для вычисления:

– *площади поверхности* Ω

$$\iint\limits_{\Omega} dS=\mathrm{S}; \qquad (6.6)$$

– *массы материальной поверхности* Ω с непрерывно распределенным веществом известной плотности $\rho(x;y;z)$

$$m=\iint\limits_{\Omega}\rho(x;y;z)\,dS; \qquad (6.7)$$

– *статических моментов* S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} материальной поверхности Ω относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Ozx соответственно:

$$S_{xy}=\iint\limits_{\Omega} z\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$

$$S_{yz}=\iint\limits_{\Omega} x\cdot\rho(x;y;z)\,dS; \qquad (6.8)$$

$$S_{zx}=\iint\limits_{\Omega} y\cdot\rho(x;y;z)\,dS;$$

– *координат центра тяжести* $(x_c;y_c;z_c)$ материальной поверхности Ω

$$x_c=\frac{S_{yz}}{m},\ y_c=\frac{S_{zx}}{m},\quad z_c=\frac{S_{xy}}{m}; \qquad (6.9)$$

– *моментов инерции* M_x, M_y, M_z, M_0 материальной поверхности Ω относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$M_x = \iint_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x;y;z)\,dS;$$
$$M_y = \iint_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho(x;y;z)\,dS; \qquad (6.10)$$
$$M_z = \iint_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x;y;z)\,dS;$$
$$M_0 = \iint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x;y;z)\,dS.$$

6.2 Определение, свойства и вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Определение поверхностного интеграла 2 го рода. Пусть двусторонняя поверхность Ω с выбранным направлением единичного вектора нормали $\vec{n}$ задана явно непрерывно-дифференцируемой функцией $z(x;y)$ в области $G \subset Oxy$. И пусть в точках поверхности Ω определена непрерывная функция $R(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности Ω разобьем на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n. Обозначим σ_1, σ_2, ..., σ_n проекции этих частей на плоскость Oxy. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i = \left(\Omega_i\right)_{xy}$, берется со знаком «$+$», если выбрана внешняя сторона Ω^+ поверхности (нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне составляет с осью Oz острый угол), со знаком «–», если выбрана внутренняя сторона Ω^- поверхности.

Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta\sigma_i \qquad (6.11)$$

называется *интегральной суммой* для функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d\left(\Omega_i\right)$.

Поверхностным интегралом 2-го рода от функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности называется предел (если он существует) интегральной суммы (6.11) при $\lambda \to 0$:

$$\iint\limits_{\Omega} R(x;y;z)\,dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \Delta\sigma_i\,, \tag{6.12}$$

функция $R(x;y;z)$ называется *интегрируемой по поверхности* Ω по переменным x и y.

Аналогично определяются поверхностные интегралы 2-го рода по выбранной стороне поверхности Ω по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности Ω, соответственно:

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \left(\Omega_i\right)_{yz}\;; \tag{6.13}$$

$$\iint\limits_{\Omega} Q(x;y;z)\,dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q\left(\xi_i;\eta_i;\zeta_i\right) \cdot \left(\Omega_i\right)_{zx}\,. \tag{6.14}$$

Общим поверхностным интегралом 2-го рода называется интеграл вида

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)\,dydz + Q(x;y;z)\,dzdx + R(x;y;z)\,dxdz\,. \tag{6.15}$$

Если Ω – замкнутая двусторонняя поверхность, то поверхностный интеграл 2-го рода по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_{\Omega^+}$, по внутренней – $\oiint\limits_{\Omega^-}$.

Свойства поверхностного интеграла 2-го рода. Поверхностный интеграл 2-го рода обладает следующими *свойствами*:

– для общего поверхностного интеграла 2-го рода справедливо равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint\limits_{\Omega} Pdydz + \iint\limits_{\Omega} Qdzdx + \iint\limits_{\Omega} Rdxdy\,;$$

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y;z)$ и $P_2(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне поверхности Ω, то функция $\alpha\cdot P_1(x;y;z)\pm\beta\cdot P_2(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедливо равенство:

$$\iint\limits_{\Omega}(\alpha P_1\pm\beta P_2)dydz=\alpha\iint\limits_{\Omega}P_1dydz\pm\beta\iint\limits_{\Omega}P_2\,dydz\ ;$$

– *(аддитивность)* если поверхность Ω, из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $P(x;y;z)$ интегрируема по выбранным сторонам Ω_1 и Ω_2, то функция $P(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega}P(x;y;z)dydz=\iint\limits_{\Omega_1}P(x;y;z)dydz+\iint\limits_{\Omega_2}P(x;y;z)dydz\ ;$$

– *(оценка интеграла)* если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне двусторонней поверхности Ω и $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\le M$ во всех точках поверхности, то

$$\left|\iint\limits_{\Omega}P(x;y;z)dydz+Q(x;y;z)dzdx+R(x;y;z)dxdz\right|\le M\cdot ½\ ,$$

где S – площадь поверхности;

– *(ориентированность)* если Ω^- противоположная сторона к стороне Ω^+ поверхности Ω, то

$$\iint\limits_{\Omega^+}Pdydz+Qdzdx+Rdxdz=-\iint\limits_{\Omega^-}Pdydz+Qdzdx+Rdxdz\ .$$

В ы ч и с л е н и е п о в е р х н о с т н о г о и н т е г р а л а 2 г о р о д а. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению двойного интеграла, учитывая проекции поверхности на соответствующие плоскости:

а) $$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,dxdy = \pm\iint\limits_{G_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy, \qquad (6.16)$$

где G_{xy} – проекция Ω на плоскость Oxy; знак “+” берется в случае, если $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$ (γ угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oz);

б) $$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,dydz = \pm\iint\limits_{G_{yz}} R\big(x(y,z),y,z\big)\,dydz, \qquad (6.17)$$

где G_{yz} – проекция Ω на плоскость Oyz; знак “+” берется в случае, если $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ (α угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Ox);

в) $$\iint\limits_{\Omega} R(x,y,z)\,dzdx = \pm\iint\limits_{G_{xz}} R\big(x,y(x,z),z\big)\,dzdx, \qquad (6.18)$$

где G_{xz} – проекция G на плоскость Oxz; знак “+” берется в случае, если $\beta < \dfrac{\pi}{2}$ и “–”, если $\beta > \dfrac{\pi}{2}$ (β угол между вектором $\vec{n}$ и положительным направлением оси Oy).

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} Pdxdz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} Pdydz \pm \iint\limits_{G_{xz}} Qdzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} Rdxdy \qquad (6.19)$$

Общий поверхностный интеграл 2-го рода и поверхностный интеграл 1-го рода связаны соотношением:

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iint\limits_{\Omega} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dS, \qquad (6.20)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ координаты единичного вектора $\vec{n}$ нормали к поверхности Ω.

Координаты вектора $\vec{n}$ определяются заданием поверхности Ω (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Координаты вектора $\vec{n}$ в зависимости от задания поверхности Ω

Вид задания поверхности Ω	Угол между вектором нормали $\vec{n}$ и соответствующей координатной осью	Координаты вектора нормали
$z = z(x;y)$	$\gamma < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \left(-\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}};-\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}};1\right)$
$x = x(y,z)$	$\alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \left(1;-\frac{x'_y}{\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}};-\frac{x'_z}{\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}}\right)$
$y = y(x,z)$	$\beta < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \left(-\frac{y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}};1;-\frac{z'_z}{\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}}\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_z \neq 0$	$\gamma < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \frac{1}{F'_z}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_y \neq 0$	$\beta < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \frac{1}{F'_y}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$
$F(x,y,z)=0$, $F'_x \neq 0$	$\alpha < \frac{\pi}{2}$	$\vec{n} = \frac{1}{F'_x}\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)$
$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$		$\vec{n} = \left(\left\lvert\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right\rvert;\left\lvert\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right\rvert;\left\lvert\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\rvert\right)$

Замечание. Если угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$ ($\alpha > \frac{\pi}{2}, \beta > \frac{\pi}{2}$), то вектор нормали равен ($-\vec{n}$).

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение поверхностного интеграла 1-го рода.

2 Перечислите свойства поверхностного интеграла 1-го рода.

3 Как вычисляется поверхностный интеграл 1-го рода в случаях: а) параметрического, б) явного, в) неявного заданий поверхности?

4 Для вычисления каких величин используется поверхностный интеграл 1-го рода?

5 Дайте определение поверхностного интеграла 2-го рода.

6 Перечислите свойства поверхностного интеграла 2-го рода.

7 Как вычисляется поверхностный интеграл 2-го рода?

8 Какой формулой выражается связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода?

Решение типовых примеров

1 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS$, где поверхность Ω – верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Решение. Параметрические уравнения верхней полусферы имеют вид

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\ y=a\sin\theta\sin\varphi,\ z=a\cos\theta,$$

где $0\le\theta\le\pi/2$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Частные производные по переменным θ и φ равны:

$x'_\theta=a\cos\theta\cos\varphi$, $y'_\theta=a\cos\theta\sin\varphi$, $z'_\theta=-a\sin\theta$;

$x'_\varphi=-a\sin\theta\sin\varphi$, $y'_\varphi=a\sin\theta\cos\varphi$, $z'_\varphi=0$.

Тогда

$$E=a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+a^2\sin^2\varphi=$$
$$=a^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=a^2;$$

$$G=a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi=a^2\sin^2\theta;$$

$$F=-a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi=0;$$

$$EG-F^2=a^2\cdot a^2\sin^2\theta=a^4\sin^2\theta.$$

Подставляя в формулу (6.3), получим

$$\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS=\iint\limits_{W}a^2\sin^2\theta\cdot\sqrt{a^4\sin^2\theta}d\varphi d\theta=\iint\limits_{W}a^4\sin^3\theta\,d\varphi d\theta=$$

$$=a^4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=-a^4\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-2a^4\pi\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2a^4\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}a^4\pi\ .$$

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega}\left(x-3y+2z\right)ds$, где

$$\Omega=\left\{\left(x;y;z\right)\middle|\,4x+3y+2z-4=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}.$$

Решение. Данная поверхность Ω представляет собой часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенную в первом октанте (рисунок 6. 2).

Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\dfrac{3}{2}y$. Тогда $z_x^{'}=-2$, $z_y^{'}=-\dfrac{3}{2}$.

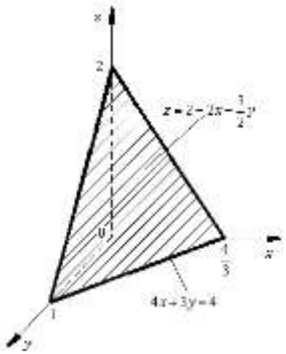

Рисунок 6. 2 – Поверхность интегрирования
к типовому примеру 2

Используя формулу (6.4), имеем

$$\iint\limits_{\Omega}\left(x-3y+2z\right)dS=$$

$$=\iint_G\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint_G(4-3x-6y)dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx\int_0^{\frac{4}{3}(1-x)}(4-3x-6y)dy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-2x^2+4\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

3 Вычислить площадь поверхности Ω, заданной уравнением $z=x^2+y^2$ и расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

Решение. По условию $z=x^2+y^2$. Тогда

$$z'_x=2x,\ z'_y=2y.$$

По формуле (6.6) получаем

$$S=\iint_\Omega dS=\iint_G\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy=\iint_G\sqrt{1+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy,$$

где G – проекция Ω на плоскость Oxy.

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Так как область G есть круг $x^2+y^2\le1$, то $0\le r\le1$, $0\le\varphi\le2\pi$.

Отсюда имеем

$$S=\iint_{G^*}\sqrt{1+4r^2}\,r\,drd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}dr=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{1+4r^2}d\left(1+4r^2\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+4r^2\right)^3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

4 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, где Ω – часть конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Поверхность Ω задана неявно уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Проекция Ω на плоскость $z = 0$ представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$.

Так как $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, то

$$F'_x = 2x;\ F'_y = 2y;\ F'_z = 2z,$$

$$dS = \frac{1}{2z}\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy.$$

По формуле (6.5) получим

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,dS = \iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)}\,dxdy =$$

$$= \sqrt{2}\iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ J = r \end{array}\right] = \sqrt{2}\iint\limits_{G^*} r^2\,drd\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2\,dr = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} y^2 z\,dxdy + xz\,dydz + x^2 y\,dxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 2$.

Решение. Поверхность Ω представляет собой параболоид, заданный явно уравнением $z = x^2 + y^2$. Поэтому вектор нормали равен

$$\vec{n} = (2x, 2y, -1),$$

так как сторона внешняя и угол $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$.

Линия пересечения параболоида с плоскостью $z=2$ есть окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R=\sqrt{2}$:

$$x^2+y^2=2.$$

Тогда по формуле (6.16) получим

$$\iint\limits_{\Omega} y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(xz\cdot 2x+x^2y\cdot 2y+y^2z\cdot(-1)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^2\left(x^2+y^2\right)+2x^2y^2-y^2\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^4+2x^2y^2+2x^2y^2-y^2x^2-y^4\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(2x^4+3x^2y^2-y^4\right)dxdy.$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{2},$$

якобиан отображения равен $J=r$.

Тогда

$$\iint\limits_{G}\left(2x^4+3x^2y^2-y^4\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G^*}\left(2r^4\cos^4\varphi+3r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi-r^4\sin^4\varphi\right)rdrd\varphi=$$

$$=\iint\limits_{G^*}r^5\left(2\cos^4\varphi+3\cos^2\varphi\sin^2\varphi-\sin^4\varphi\right)drd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{2}}r^5dr\int\limits_0^{2\pi}\left(2\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sin^2 2\varphi-\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2\right)d\varphi=$$

$$=\left.\frac{r^6}{6}\right|_0^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{2}+\frac{3(1-\cos 4\varphi)}{8}-\frac{1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3\cos 4\varphi}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi-\frac{1+\cos 4\varphi}{8}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\cos 2\varphi-\frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\varphi+\frac{3}{4}\sin 2\varphi-\frac{1}{16}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi .$$

6 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=16$, лежащая в первом октанте.

Решение. Поверхность задана неявно уравнением $F(x,y,z)=0$, $F'_z\neq 0$ $z\geq 0$. По условию, нормаль к внешней стороне образует угол $\gamma<\dfrac{\pi}{2}$:

$$\vec{n}=\frac{1}{F'_z}\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)=\frac{1}{2z}\left(2x,2y,2z\right)=\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right);$$

при этом $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy=\iint\limits_{G}\left(x^2\cdot\frac{x}{z}+y^2\cdot\frac{y}{z}+z^2\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(\frac{1}{z}\left(x^3+y^3\right)+z^2\right)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{G}\left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+16-x^2-y^2\right)dxdy .$$

Область G – часть круга, лежащая в первой четверти: $x^2+y^2\leq 16$, так как по условию $x\geq 0$, $y\geq 0$. Перейдем к полярным координатам:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\leq r\leq 4,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},$$

якобиан отображения есть $J=r$.

Тогда

$$I=\iint\limits_{G^*} r\left(\frac{r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi}{\sqrt{16-r^2}}+16-r^2\right)drd\varphi=$$

$$=\iint\limits_{G^*}\left(\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)+16r-r^3\right)drd\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)d\varphi\int\limits_0^4\frac{r^4}{\sqrt{16-r^2}}dr+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^4 r\left(16-r^2\right)dr=$$

$$=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi\right)\int\limits_0^4\frac{r^4dr}{\sqrt{16-r^2}}+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(\frac{16r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^4=\begin{bmatrix} r=4\sin t\\ dr=4\cos tdt\\ 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\left(\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4^4\cdot\sin^4 t\cdot 4\cos tdt}{4\cos t}+\frac{\pi}{2}\cdot\left(2\cdot 64-64\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot 64\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2t\right)^2dt+32\pi=\frac{4\cdot 64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt+$$

$$+32\pi=\frac{256}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos 2t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\left(\frac{3}{2}t-\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+32\pi=$$

$$=\frac{256}{3}\cdot\frac{3\pi}{4}+32\pi=64\pi+32\pi=96\pi\ .$$

7 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=9$.

Решение. Зададим поверхность Ω параметрическими уравнениями

$$x=3zin\theta\cos\varphi\ ,\ \ y=3\sin\theta\sin\varphi\ ,\ \ z=3\cos\theta\ ,$$

где $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Имеем:

$$\left|\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}\right|=9\sin^2\theta\cos\varphi\ ;$$

$$\left|\frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}\right|=9\sin^2\theta\sin\varphi\ ;$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}\right|=9\cos\theta\sin\theta\ .$$

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz+(y+z)dzdx+(z-y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\big(3\sin\theta\cos\varphi\cdot\sin^2\theta\cos\varphi+$$

$$+(3\sin\theta\sin\varphi+3\cos\theta)9\sin^2\theta\sin\varphi+$$

$$+(3\cos\theta-3\sin\theta\sin\varphi)9\cos\theta\sin\theta)d\theta=$$

$$=27\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\theta+\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta=$$

$$=27\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=54\pi(1-\cos\theta)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=54\pi\cdot 1=54\pi\ .$$

8 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x+z-1=0$, отсеченной плоскостями $y=0$ и $y=4$ и лежащей в первом октанте (рисунок 6. 3).

Решение. По определению

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \pm\iint\limits_{G_{yz}} xdydz \pm \iint\limits_{G_{zx}} ydzdx \pm \iint\limits_{G_{xy}} zdxdy .$$

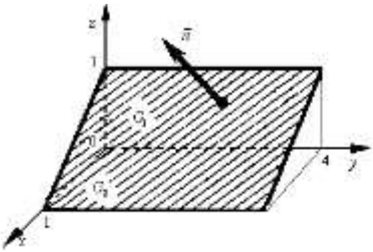

Рисунок 6. 3 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 8

Найдем значения направляющих косинусов

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0;$$

$$\cos\beta = \frac{0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = 0;$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 .$$

Интеграл $\iint\limits_{G_{zx}} ydzdx = 0$, так как плоскость Ω параллельна оси Oy (нормаль и ось Oy перпендикулярны), первый и третий интегралы нужно взять со знаком “+”.

Тогда находим

$$\iint\limits_{\Omega^+} zdxdy = \iint\limits_{G_{xy}} (1-x)\,dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-x)\,dx = 2 ,$$

$$\iint\limits_{\Omega^+} xdydz = \iint\limits_{G_{yz}} (1-z)\,dydz = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^1 (1-z)\,dz = 2\,.$$

Следовательно, $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = 4$.

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить поверхностные интегралы 1-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}\left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)dS$, где Ω – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, лежащая в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dS$, где Ω – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где Ω – боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=0$ $(0\le z\le 3)$;

г) $\iint\limits_{\Omega} x(y+z)\,dS$, где Ω – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{4-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=1$;

д) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2-1\right)dS$, где Ω – поверхность $2y=9-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0$;

е) $\iint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+5z^2\right)dS$, где Ω – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостью $z=1$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^3+z^2\right)dS$, где Ω – часть сферы $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$.

2 Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

3 Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2x$, вырезанную из него сферой $x^2+y^2+z^2=4$.

4 Вычислить площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

5 Вычислить поверхностные интегралы 2-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}(y+2z)dxdy$, Ω – верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega}zdxdy$, где Ω – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2+4y^2\right)dxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=3$;

г) $\iint\limits_{\Omega}zdydz-4ydzdx+8x^2dxdy$, где Ω – часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$ (нормаль внешняя),

д) $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dydz+(y-x)dzdx+(z-2)dxdy$, где Ω – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$, отсекаемая плоскостью $z=1$;

е) $\iint\limits_{\Omega}xdydz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона боковой поверхности цилиндра $y=\sqrt{4-x^2}$, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=2$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ $0\le z\le 1$;

и) $\iint\limits_{\Omega}\left(4y^2+4x-5z^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона части поверхности $y^2=4x$, отсеченной плоскостями $x=4$, $z=0$, $z=3$;

к) $\iint\limits_{\Omega} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона на поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

л) $\iint\limits_{\Omega}\left(x+z^2\right)dydz+\left(2x^2+y\right)dxdz$, где Ω – внешняя сторона части параболоида $y=x^2+z^2$, отсеченной плоскостью $y=2$ и расположенной над плоскостью Oxy;

м) $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydxdz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=4$ с основаниями $z=0$ и $z=H$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить поверхностные интегралы 1-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dS$, где Ω – часть поверхности $z=1-x^2-y^2$, отсеченная плоскостью $z=0$;

б) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^2+3y^2+z^2+5\right)dS$, где Ω – часть поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченная плоскостями $y=0$, $y=2$;

в) $\iint\limits_{\Omega}\left(x^4+y^2+2x^2z^2+z^4\right)dS$, где Ω – часть плоскости $x+y+z=4$, вырезанная цилиндром $x^2+z^2=4$;

г) $\iint\limits_{\Omega} y\left(x+z\right)dS$, где Ω – часть поверхности $y=\sqrt{9-z^2}$, отсеченная плоскостями $x=0$, $x=2$;

д) $\iint\limits_{\Omega} zdS$, где Ω – часть поверхности $2z = x^2 + y^2$, вырезанная поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

е) $\iint\limits_{\Omega} \frac{x^2 + y + 2z}{\sqrt{1 + 4x^2}} dS$, где Ω – часть цилиндрической поверхности $y = x^2 - 4$, отсеченная плоскостями $z = -2y$, $z = 0$.

2 Найти площадь части плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$, заключенной между координатными плоскостями.

3 Найти массу части цилиндрической поверхности $y = \sqrt{9 - z^2}$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $x = 2$, если $\rho(x, y, z) = y(x + z)$.

4 Вычислить площадь части поверхности параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

5 Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанную цилиндром $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$.

6 Вычислить поверхностные интегралы 2-го рода по поверхностям:

а) $\iint\limits_{\Omega} z^2 dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$;

б) $\iint\limits_{\Omega} yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где Ω – внешняя сторона плоскости $x + y + z = 4$, отсеченной координатными плоскостями;

в) $\iint\limits_{\Omega} x^2 dydz + zdxdy$, где Ω – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 4$;

г) $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где Ω – внешняя сторона части поверхности $z=4-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}$, отсеченной плоскостью $z=0$;

д) $\iint\limits_{\Omega}\left(ax^2+by^2+cz^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона поверхности $x=\sqrt{y^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $x=0$, $x=a$;

е) $\iint\limits_{\Omega}\left(ax^2+by+cz^2\right)dxdz$, где Ω – внутренняя сторона поверхности $x^2=2y$, отсеченной плоскостями $y=2$, $z=0$, $z=2$;

ж) $\iint\limits_{\Omega}\left(2x^2+3y^2+5z^2\right)dydz$, где Ω – внутренняя сторона части полусферы $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вырезанной конусом $x=\sqrt{y^2+z^2}$;

и) $\iint\limits_{\Omega}xdydz+z^3dxdy$, где Ω – сфера $x^2+y^2+z^2=1$ (внешняя нормаль);

к) $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$;

л) $\iint\limits_{\Omega}2xdydz-ydxdz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона замкнутой поверхности, образованной параболоидом $3z=x^2+y^2$ и полусферой $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Практическое занятие 7 **Кратные и поверхностные интегралы**

7.1 Формула Остроградского-Гаусса
7.2 Формула Стокса

7.1 Формула Остроградского-Гаусса

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами 2-го рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью.

Теорема 1 Пусть

1) Q – элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;

2) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iiint_{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \quad (7.1)$$

Формула Остроградского-Гаусса (7.1) справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей. Также формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов 2-го рода по замкнутым поверхностям.

Для вычисления объема тела, ограниченного замкнутой поверхностью Ω, используется формула:

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy \,. \quad (7.2)$$

7.2 Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами.

Теорема 2 Пусть

1) Ω – элементарная относительно оси Oz поверхность, заданная уравнением $z = z(x;y)$, где функции $z(x;y)$, $z_x(x;y)$, $z_y(x;y)$ – непрерывны в замкнутой области G, проекции Ω на Oxy;

2) Γ – контур, ограничивающий область Ω, Γ_1 – его проекция на плоскость Oxy, являющаяся контуром, ограничивающим область G;

3) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx. \tag{7.3}$$

Следствие. Если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \text{ то}$$

1) $\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$;

2) подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(z;y;z)$, для которой:

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU.$$

Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число элементарных областей указанного вида.

Учитывая, что

$$\cos\gamma\, dS = dxdy,\ \cos\beta\, dS = dzdx,\ \cos\alpha\, dS = dydz,$$

формулу Стокса можно записать в виде:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right] dS.$$

Данную формулу легко запомнить, используя для подынтегрального выражения определитель:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Напишите формулу Остроградского-Гаусса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

2 Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

Решение типовых примеров

1 Вычислить интеграл $\oiint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где поверхность Ω есть внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рисунок 7. 1).

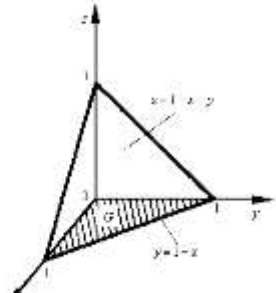

Рисунок 7. 1 – Поверхность интегрирования

к типовому примеру 1

Решение. Используя формулу Остроградского-Гаусса (7.1), имеем

$$\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint\limits_{V} (1+1+1)\,dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz =$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(z\Big|_0^{1-x-y} \right) dy = 3\int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= 3\int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

2 Вычислить

$$I = \iint\limits_{\Omega} \left(e^{2y} + x\right) dydz + (x - 2y)\, dzdx + \left(y^2 + 3z\right) dxdy,$$

где Ω – внешняя сторона поверхности шара

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 9.$$

Решение. Имеем:

$P(x,y,z) = e^{2y} + x$; $Q(x,y,z) = x - 2y$; $R(x,y,z) = y^2 + 3z$.

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - 2 + 3 = 2.$$

По формуле Остроградского-Гаусса (7.1) получим

$$I = 2\iiint\limits_{Q} dxdydz = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 72\pi,$$

так как $\iiint\limits_{Q} dxdydz$ численно равен объему шара радиуса $R = 3$.

3 Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + zdz$, используя формулу Стокса, где

$$\Gamma = \left\{ (x;y;z) \,\middle|\, x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0 \right\},$$

взяв в качестве поверхности полусферу (рисунок 7. 2)

$$\Omega = \left\{ (x;y;z) \,\middle|\, z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Р е ш е н и е . Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2,\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,$$

по формуле Стокса (7.3), получаем

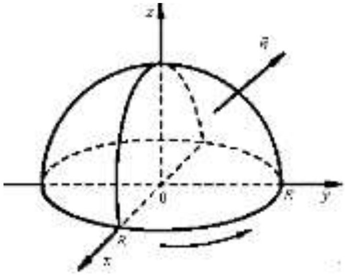

Рисунок 7. 2 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 3

$$\oint\limits_{\Gamma^+} x^2y^3dx+dy+zdz=-3\iint\limits_{\Omega^+} x^2y^2dxdy=-3\iint\limits_{G} x^2y^2dxdy=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi,\\ J=r. \end{array}\right]=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,dr=$$

$$=-3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R r^5dr=-\frac{R^6}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{R^6}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi=-\frac{R^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi}+0=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

4 Вычислить

$$I=\oint\limits_{\Gamma}\left(x+y\right)dx+\left(x-z\right)dy+\left(y+z\right)dz$$

по контуру, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

Р е ш е н и е . Имеем

$$P=x+y,\ Q=x-z,\ R=y+z.$$

Тогда по формуле Стокса (7.3) получим

$$I = \iint\limits_{\Omega} (1+1)\,dydz + (0-0)\,dzdx + (1-1)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} 2dtdz = 2\iint\limits_{G} dydz = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

где G – плоскость ΔABC (внешняя сторона); это плоскость, отсекающая на осях координат отрезки длины единицы. Так как нормаль к внешней стороне плоскости образует с осью Ox угол $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то по правилу вычисления поверхностных интегралов 2-го рода можно записать:

$$\iint\limits_{\Omega} dydz = \iint\limits_{D} dydz .$$

Имеем $\iint\limits_{D} dydz = S$, где D – треугольник прямоугольный в плоскости $x=0$ с катетами длины 1 (D – проекция плоскости ΔABC на плоскость $x=0$), а S – площадь этого треугольника

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

1 По внешней стороне замкнутой поверхности Ω тела Q, заданного неравенствами $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$, вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega} x^2 zdydz + ydzdx + zdxdy$.

2 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} (x+3y+2z)\,dx + (2x+z)\,dy + (x-y)\,dz$, где Γ – контур ΔABC с вершинами $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,1)$ в положительном направлении.

4 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}\left(z^2-x^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy+\left(y^2-z^2\right)dz$ по контуру Γ, являющимся линией пересечения поверхностей $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2+z^2=4$ и пробегаемый в положительном направлении ($z>0$).

5 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}2\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y\right)^2dy$, где Γ – контур ΔABC: $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$, пробегаемый в положительном направлении.

6 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя полная поверхность конуса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$ $\left(0\le z\le 3\right)$.

7 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=25$.

8 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}y^2dx-x^2dy+z^2dz$, где Γ – линия пересечения параболоида $x^2+z^2=1-y$ с координатными плоскостями.

9 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}\left(y+z\right)dx+\left(z+x\right)dy+\left(x+y\right)dz$, где Γ – окружность $x^2+y^2+z^2=9$, $x+y+z=0$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона поверхности куба $0\le x\le 5$, $0\le y\le 5$, $0\le z\le 5$.

2 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}xdydz+ydzdx+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma} zdx+\left(x+y\right)dy+ydz$, где Γ – контур треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x+y+2z=2$ с координатными плоскостями в положительном направлении.

4 Вычислить $\oint\limits_{\Gamma}\left(y-z\right)dx+\left(z-x\right)dy+\left(x-y\right)dz$, где Γ – эллипс $x^2+y^2=1, x+z=1$.

5 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} xdydz-ydzdx+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона замкнутой поверхности: $x^2+y^2=3z$, $x^2+y^2+z^2=4$ (часть сферы, накрывающая параболоид).

6 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} 2xydydz-y^2dzdx+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона замкнутой поверхности $x^2+y^2+z^2=4z$, $\sqrt{x^2+y^2}=z\sqrt{3}$.

Практическое занятие 8 Скалярные и векторные поля

8.1 Скалярные поля и их основные характеристики
8.2 Векторные поля и их основные характеристики
8.3 Потенциальное и соленоидальное векторные поля

8.1 Скалярные поля и их основные характеристики

Стационарным скалярным полем называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ которого определена скалярная функция

$$U(P) = U(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{8.1}$$

Функция $U(P)$ независимо от ее физического смысла называется *потенциалом* скалярного поля.

Скалярными полями являются:

– поле температур тела;

– поле плотности заряда на поверхности или в среде,

– поле плотности масс тела.

Основными характеристиками скалярного поля являются: поверхности (линии) уровня, производная по направлению и градиент.

Поверхностью уровня скалярного поля называется множество точек, в каждой из которых его потенциал $U(P)$ сохраняет постоянное значение.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнение поверхности уровня (*эквипотенциальной поверхности*) записывается в виде

$$U(x_1, x_2, x_3) = C, \tag{8.2}$$

где постоянная величина C принимает такие значения, при которых равенство (8.2) имеет геометрический смысл.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривают *линии уровня*, уравнения которых имеют вид

$$U(x_1, x_2) = C. \tag{8.3}$$

Пусть в области Q задано скалярное поле $U(P)$. Рассмотрим точку $P_0 \in Q$ и какое-либо фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\tau}$. Через точку P_0 проведем прямую l, параллельную вектору $\vec{\tau}$, и выберем на ней точку P (рисунок 8. 1).

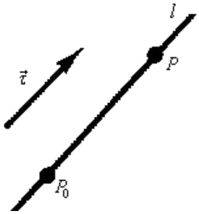

Рисунок 8. 1 – Изменение потенциального поля $U(P)$ в направлении $\vec{\tau}$

Производной по направлению вектора $\vec{\tau}$ функции $U(P)$ в точке P_0 называется предел (если он существует) отношения приращения функции $\Delta U = U(P) - U(P_0)$ к величине перемещения $|P_0P|$ при $|P_0P| \to 0$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \lim_{|P_0P| \to 0} \frac{\Delta U}{|P_0P|}. \tag{8.4}$$

Величина $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ характеризует скорость изменения скалярного поля $U(P)$ в точке P_0 по выбранному направлению $\vec{\tau}$. Если $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l} > 0$, то скалярное поле в точке P_0 возрастает, в противном случае – убывает.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ вектор $\vec{\tau}$ имеет координаты

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (рисунок 8.2).

Тогда производная по направлению $\dfrac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ выражается через декартовы координаты:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\cos\gamma. \tag{8.5}$$

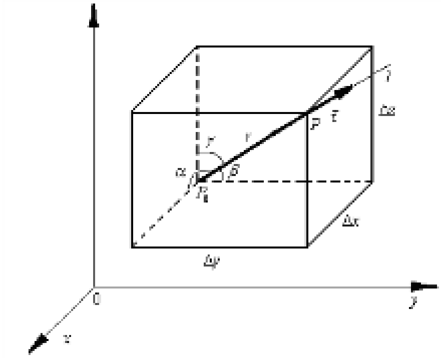

Рисунок 8. 2 – Единичный вектор $\vec{\tau}$
в пространстве $\mathbb{R}^3$

Градиентом скалярного поля $U(P)$ называется вектор $\mathrm{grad}U(P_0)$, проекциями которого на оси Ox, Oy, Oz являются соответствующие частные производные функции $U(P)$:

$$\mathrm{grad}U(P_0) = \frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\vec{k}\ . \quad (8.6)$$

Из равенства (8.5) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \left|\mathrm{grad}U\right| \cdot \cos\left(\mathrm{grad}U; \vec{\tau}\right). \quad (8.7)$$

Из формулы (8.7) следует, что величина $\frac{\partial U}{\partial l}$ достигает наибольшего значения при $\cos\left(\mathrm{grad}U; \vec{\tau}\right)=1$. Поэтому направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в точке.

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}} = \left|\mathrm{grad}U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\ , \quad (8.8)$$

то модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания потенциала скалярного поля $U(P)$ в точке.

8.2 Векторные поля и их основные характеристики

Стационарным векторным полем называется пространство $\mathbb{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке M которого определена векторная функция

$$\vec{a} = \vec{a}(M).$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ векторная функция $\vec{a}(M)$, $M(x;y;z)$, определяется проекциями $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ вектора $\vec{a}(M)$ соответственно на координатные оси Ox, Oy, Oz:

$$\vec{a}(M) = X(M)\vec{i} + Y(M)\vec{j} + Z(M)\vec{k}. \qquad (8.9)$$

Будем считать, что $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями координат точки M. Тогда векторная функция $\vec{a}(M)$ называется *непрерывно дифференцируемой в области* Q.

Векторными полями являются:

– электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности;

– магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции;

– поле тяготения, создаваемое системой масс, характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения;

– поле скоростей потока жидкостей, описываемое в каждой точке вектором скорости.

Основными характеристиками векторного поля являются: векторные линии, поток, дивергенция, циркуляция и вихрь.

Векторные линии. *Векторной (силовой) линией* Γ векторного поля $\vec{a}(M)$ называется линия, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии.

Векторными линиями в движущейся жидкости являются линии скоростей, в электростатическом поле – силовые линии, в магнитном поле – линии, соединяющие северный и южный полюсы, в поле $\mathrm{grad}U$ – линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям скалярного поля $U(M)$.

Пусть векторная линия Γ задана уравнением

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} .$$

Тогда вектор $d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ в каждой точке направлен по касательной к линии Γ и потому коллинеарен вектору $\vec{a}(M)$. Следовательно, координаты векторов $d\vec{r}$ и $\vec{a}(M)$ пропорциональны:

$$\frac{dx}{X(x;y;z)} = \frac{dx}{Y(x,y,z)} = \frac{dx}{Z(x,y,z)} . \tag{8.10}$$

Система дифференциальных уравнений (8.10) определяет векторные линии поля $\vec{a}(M)$. Общий интеграл системы (8.10) имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = c_1, \\ \varphi_2(x,y,z) = c_2. \end{cases}$$

С *геометрической* точки зрения данная система задает два семейства поверхностей, которые в совокупности определяют искомые векторные линии.

Если в некоторой области Q для системы уравнений (8.10) выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то через каждую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = \varphi_1(x_0,y_0,z_0), \\ \varphi_2(x,y,z) = \varphi_2(x_0,y_0,z_0). \end{cases}$$

П о т о к в е к т о р н о г о п о л я. Пусть $\vec{a}(M)$ векторное поле в некоторой области Q и $\Omega \subset Q$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность.

Потоком Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность Ω называется число, равное значению поверхностного интеграла 2-го рода:

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS . \tag{8.11}$$

Поток Π зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\vec{n}$) и обладает всеми свойствами поверхностного интеграла 2-го рода.

Поток Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность Ω равен сумме потоков по внешней и внутренней сторонам этой поверхности:

$$\Pi = \oiint_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\Omega^+} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\Omega^-} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS .$$

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\vec{a}(M)$. В частности, он определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости через область Q, ограниченную поверхностью Ω. Если $\Pi > 0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри области Q имеются *источники*. Если $\Pi < 0$, то внутри области Q имеются *стоки*, так как вытекает меньше жидкости, чем поступает.

Дивергенция векторного поля. *Дивергенцией* (*расходимостью*) $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная функция, равная

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial X(M)}{\partial x} + \frac{\partial Y(M)}{\partial y} + \frac{\partial Z(M)}{\partial z} . \qquad (8.12)$$

Дивергенция характеризует мощность находящегося в точке M источника при $\operatorname{div}\vec{a}(M) > 0$ или стока при $\operatorname{div}\vec{a}(M) < 0$. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни источника, ни стока.

Теорема 1 (Остроградского - Гаусса) Если векторная функция $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируема в области Q, ограниченной замкнутой поверхностью Ω, то поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность Ω в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области Q от дивергенции этого векторного поля:

$$\oiint_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\; dS = \iiint_{Q} \operatorname{div}\vec{a}\; dxdydz . \qquad (8.13)$$

Данная теорема является аналитическим выражением *теоремы Остроградского - Гаусса в векторной форме*.

Циркуляция векторного поля и ее физический смысл. Рассмотрим область $Q \subset \mathbb{R}^3$, ориентированную линию Γ и векторное поле $\vec{a}(M)$, определенное на Γ. И пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к дуге Γ.

Циркуляцией C векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой Γ называется число, равное значению криволинейного интеграла 1-го рода:

$$C = \oint_{\Gamma} (\vec{a} \cdot \vec{\tau})\, dl\,. \qquad (8.14)$$

Циркуляция обладает всеми свойствами криволинейного интеграла 1-го рода.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности Γ (рисунок 8. 5).

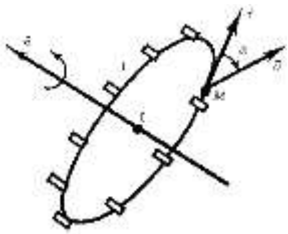

Рисунок 8. 3 – Физический смысл циркуляции

Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость $\vec{\omega}$ вращения пластинки вокруг оси, проходящей через центр окружности Γ. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии Γ.

Ротор векторного поля. Локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, является ротор (вихрь).

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M_0 называется векторная функция

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (8.15)$$

Символическая форма записи $\operatorname{rot}\vec{a}$ имеет вид:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \qquad (8.16)$$

Теорема 2 (Стокса) Циркуляция C непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутому положительно-ориентированному контуру Γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность Ω, опирающуюся на Γ:

$$\oint_{\Gamma}(\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl=\iint_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS\,. \qquad (8.17)$$

8.3 Потенциальное и соленоидальное векторные поля

Потенциальное векторное поле. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным (безвихревым),* если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$, что

$$\vec{a}=\operatorname{grad}U(M). \qquad (8.18)$$

Функция $U(M)$ называется в этом случае *потенциалом* векторного поля $\vec{a}(M)$.

Потенциальное поле является наиболее простым среди векторных полей, так как оно определяется одной скалярной функцией $U(M)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле.

Например, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для потенциального векторного поля

$$\vec{a}(M)=X(x,y,z)\cdot\vec{i}+Y(x,y,z)\cdot\vec{j}+Z(x,y,z)\cdot\vec{k}\,,$$

выполняется равенство

$$\vec{a}(M)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (8.19)$$

Свойства потенциальных векторных полей:

– если векторное поле $\vec{a}(M)$, потенциально, то его потенциал $U(M)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого;

– если векторное поле $\vec{a}(M)$ задано в односвязной области Q, то необходимым и достаточным условием его потенциальности является обращение в нуль ротора поля в любой точке M:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0. \qquad (8.20)$$

Примером потенциального поля является поле тяготения.

Соленоидальное векторное поле. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным (трубчатым),* если в любой точке M дивергенция равна 0:

$$\operatorname{div}\vec{a}(\mathrm{M})=0. \qquad (8.21)$$

Свойства соленоидальных полей:

– соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков;

– из формулы Остроградского – Гаусса следует, что если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность Ω равен нулю;

– (*принцип сохранения интенсивности векторной трубки*) потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой;

– в соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля);

– в односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность Ω, опирающуюся на замкнутый контур Γ, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура Γ.

Примером соленоидального поля является магнитное поле, создаваемое током в проводнике.

Гармоническое поле. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *гармоническим (лапласовым)*, если оно является как потенциальным, так и соленоидальным.

Гармоническое векторное поле описывается скалярной функцией $U(M)$, которая является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0\,. \qquad (8.22)$$

Уравнение (8.22) получается из равенств (8.20) и (8.21). Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

Вопросы для самоконтроля

1 Какое поле называется скалярным? Приведите примеры скалярных полей.

2 Что называется поверхностью уровня скалярного поля?

3 Что называется производной по направлению?

4 Что называется градиентом скалярного поля?

5 Какое поле называется стационарным векторным полем? Приведите примеры стационарных векторных полей.

6 Дайте определение векторной линии.

7 Что называется потоком векторного поля? В чем состоит его физический смысл?

8 Что называется дивергенцией векторного поля? В чем состоит физический смысл дивергенции?

9 Сформулируйте теорему Остроградского - Гаусса в векторной форме.

10 Что называется циркуляцией векторного поля и в чем состоит ее физический смысл?

11 Что называется ротором векторного поля?

12 Сформулируйте теорему Стокса в векторной форме.

13 Какое поле называется потенциальным? Перечислите свойства потенциальных полей.

14 Какое поле называется соленоидальным? Перечислите свойства соленоидальных полей.

15 Какое поле называется гармоническим?

Решение типовых примеров

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U(x,y)=x^2-2y$;

б) $U(x,y,z)=x^2+y^2$.

Решение. а) функция, задающая потенциал поля, зависит от двух переменных. Следовательно, уравнения линий уровня поля имеют вид $x^2-2y=C$. С геометрической точки зрения, это множество парабол (рисунок 8. 4, а), определенное на всей плоскости Oxy;

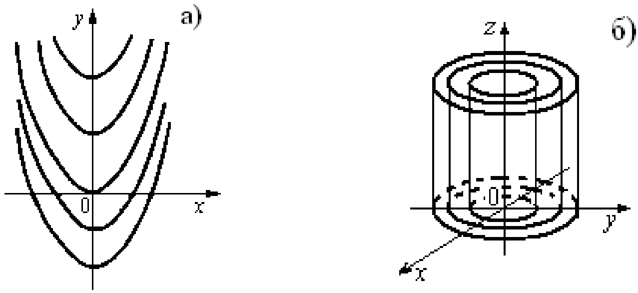

Рисунок 8.4 – Линии (а) и поверхности (б) уровня к типовому примеру 1

б) заданный потенциал определяет скалярное поле во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид $x^2+y^2=C$, $C>0$. С геометрической точки зрения, это множество круговых цилиндров (рисунок 8. 4, б).

2 Найти производную скалярного поля $u=xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(2;3;1)$.

Решение. Найдем направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{P_0P_1}=(1;4;0)$, длина которого $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|=\sqrt{17}$. Имеем

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma=0.$$

Вычислим значения частных производных функции $U = xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = yz\big|_{P_0} = -1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\big|_{P_0} = 1,\ \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\big|_{P_0} = -1.$$

По формуле (8.5) получаем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} - 1\cdot 0 = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

3 Найти градиент поля $U = x^2 + xyz$ в точке $P_0(1;-1;2)$ и наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке.

Решение. Определим значения частных производных функции $U = x^2 + xyz$ в заданной точке:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = (2x + yz)\big|_{P_0} = 0;$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\big|_{P_0} = 2;$$

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\big|_{P_0} = -1.$$

Тогда по формулам (8.6) и (8.8) имеем

$$\mathrm{grad}U(P_0) = 2j - k;$$

$$\frac{\partial U}{\partial l_{\max}} = \sqrt{5}.$$

4 Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника, по которому проходит ток силой I.

Решение. Выберем направление оси Oz, совпадающее с направлением тока I. В этом случае вектор напряженности магнитного поля $\vec{\mathrm{H}} = \frac{2}{\rho^2}\vec{I}\times\vec{r}$, где $\vec{I} = I\cdot\vec{k}$ – вектор тока; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x;y;z)$; ρ – расстояние от оси проводника до точки M. Найдем $\vec{I}\times\vec{r}$:

$$\vec{I}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ 0 & 0 & I\\ x & y & z\end{vmatrix}=-yI\cdot\vec{\mathrm{i}}+xI\cdot\vec{\mathrm{j}},$$

$$\vec{\mathrm{H}}=-\frac{2I}{\rho^2}y\cdot\vec{\mathrm{i}}+\frac{2I}{\rho^2}x\cdot\vec{\mathrm{j}}.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий (8.10) имеет вид

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} xdx+ydy=0,\\ dz=0,\end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2+y^2=c_1,\\ z=c_1,\end{cases}$$

где $c_1\geq 0$. Таким образом, векторными линиями магнитного поля бесконечного проводника являются окружности с центрами на оси Oz.

5 Вычислить поток вектора $\vec{a}=y^2\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности Ω, представляющую собой часть параболоида $z=x^2+y^2$, отсеченного плоскостью $z=2$ (рисунок 8. 5).

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $U(x,y,z)=z-x^2-y^2$.

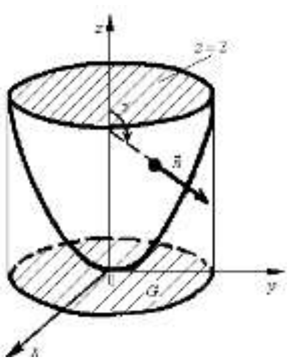

Рисунок 8. 5 – Поверхность к типовому примеру 5

Единичный нормальный вектор к внешней стороне поверхности Ω равен

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \right),$$

так как $\dfrac{\pi}{2} \le \gamma \le \pi$ (см. практическое занятие 6).

Тогда по формуле (8.11) поток равен

$$\Pi = \iint_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS = \left[\begin{array}{l} \cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \\ dS = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \\ = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy, \end{array} \right] =$$

$$= \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(2y^3 - z\right) dxdy == \left[z = x^2 + y^2 \right] = \iint_{G_{xy}} \left(2y^3 - x^2 - y^2\right) dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi,\ J = r, \\ 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right] = \iint_{G^*} \left(2r^3 \sin^3\gamma - r^2\right) r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r^4 \sin^3\varphi - r^3\right) dr = -2\pi\ .$$

6 Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{a} = y^2 \cdot \vec{i} - \left(x^2 + y^2\right) \cdot \vec{j} + +z\left(3y^2 + x\right) \cdot \vec{k}$$

в точках $M_1(-2;1;-2)$, $M_2(7;0;1)$, $M_3(0;0;0)$.

Решение. Заданное поле определено на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Найдем частные производные от функций

$$X = y^2,\ Y = \left(x^2 + y^2\right);\ Z = z\left(3y^2 + x\right)$$

являющихся координатами вектора $\vec{a}(M)$, и их значения в точках M_1, M_2 и M_3:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -2y, \ \frac{\partial Z}{\partial z} = 3y^2 + x$$

$$\frac{\partial Y(M_1)}{\partial y} = -2, \ \frac{\partial Z(M_1)}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial Y(M_2)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial Z(M_2)}{\partial z} = 7,$$

$$\frac{\partial Y(M_3)}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial Z(M_3)}{\partial z} = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1) = 0 - 2 + 1 = -1,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_2) = 0 + 0 + 7 = 7,$$

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_3) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Таким образом, данное поле в точке M_1 имеет сток, в точке M_2 – источник, а в точке M_3 нет ни источника, ни стока.

7 Используя теорему Остроградского - Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz\right)\cdot\vec{i} + 2x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot\vec{j} - \frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\cdot\vec{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского - Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости Oxy, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть Q – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Ω, состоящей из параболоида вращения $\Omega_1 = \left\{(x;y;z) \middle| z = 1 - x^2 - y^2\right\}$ и круга Ω_2 на плоскости Oxy (рисунок 8. 6).

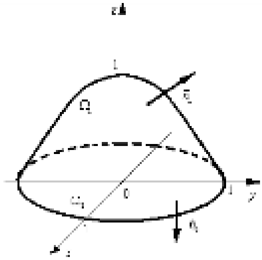

Рисунок 8. 6 – Поверхность к типовому примеру 7

Дивергенция $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ по формуле (8.12) равна:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}\equiv 0 .$$

На основании формулы Остроградского - Гаусса (8.13) поток Π через замкнутую поверхность Ω равен нулю.

С другой стороны, обозначим через Π_1 и Π_2 потоки через поверхности параболоида (Ω_1) и круга (Ω_2) соответственно. По свойству аддитивности поверхностного интеграла 2-го рода получим

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2=\iint\limits_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}_1\,dS+\iint\limits_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}_2\,dS=0 .$$

Следовательно, искомый поток

$$\Pi_1=\iint\limits_{\Omega_1}\vec{a}\cdot\vec{n}_1\,dS=-\iint\limits_{\Omega_2}\vec{a}\cdot\vec{n}_2\,dS .$$

Так как $z=0$ на поверхности Ω_2 и $\vec{n}_2=-\vec{k}$, то

$$\vec{a}=\frac{x^2y}{1+y^2}\cdot\vec{i}+2x\cdot\operatorname{arctg} y\cdot\vec{j}-\vec{k} ,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_2=1 .$$

Тогда поток через внешнюю сторону поверхности $z=1-x^2-y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$ равен

$$\Pi_1=-\iint\limits_{\Omega_2}dS=-\pi\cdot 1^2=-\pi .$$

8 Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = xy \cdot \vec{i} + yz \cdot \vec{j} + xz \cdot \vec{k}$$

вдоль линии Γ, являющейся пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = 1$.

Решение. Линия Γ представляет собой эллипс. Параметрические уравнения Γ можно получить с учетом того, что все точки Γ проектируются на плоскость Oxy в окружность $x^2 + y^2 = 1$, параметрические уравнения которой есть

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0; 2\pi],$$

и те же точки линии Γ лежат на плоскости $z = 1 - x - y$.

Следовательно, параметрические уравнения Γ имеют вид:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1 - \sin t - \cos t,$$

где $t \in [0; 2\pi]$.

Тогда

$$dx = -\sin t dt,\quad dy = \cos t dt,\quad dz = (-\cos t + \sin t) dt.$$

Согласно формуле (8.14), циркуляция равна

$$C = \oint_\Gamma \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_\Gamma X dx + Y dy + Z dz = \oint_\Gamma xy dx + yz dy + xz dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + \sin t \cos t (1 - \cos t - \sin t) +$$

$$+ \cos t (1 - \cos t - \sin t)(\sin t - \cos t)) dt = -\pi.$$

9 Найти ротор векторного поля

$$\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + +(z^2 + x^2)\vec{k}$$

в произвольной точке.

Решение. Заданное поле $\vec{a}(x; y; z)$ определено и непрерывно-дифференцируемо на всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для координатных функций

$$X = x^2 + y^2,\ Y = y^2 + z^2,\ Z = z^2 + x^2$$

по формуле (8.16) имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & x^2+z^2\end{vmatrix}=$$

$$=-2z\cdot\vec{i}-2x\cdot\vec{j}-2y\cdot\vec{k}=-2\left(z\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}\right).$$

10 Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $a=y\cdot\vec{i}+x^2\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ по линии Γ, являющейся пересечением поверхностей $x^2+y^2=4$ и $z=3$.

Решение. Линия Γ представляет собой окружность радиусом 2 с центром в точке $(0;0;3)$, лежащую в плоскости (рисунок 8. 7).

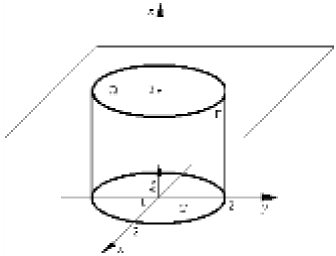

Рисунок 8. 7 – Поверхность к типовому примеру 10

Параметрические уравнения линии Γ имеют вид

$$x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=3,\ t\in[0;2\pi].$$

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса выберем какую-нибудь поверхность Ω, «натянутую» на Γ. Возьмем в качестве Ω круг, границей которого является окружность Γ. Согласно выбранной ориентации контура, нормалью $\vec{n}$ к кругу Ω является единичный вектор $\vec{k}$ оси Oz.

По формуле (8.16) ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & x^2 & -z\end{vmatrix}=(2x-1)\cdot\vec{k}\ .$$

Тогда по формуле Стокса (8.17) циркуляция равна

$$C=\iint_{\Omega}(\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS=\iint_{\Omega}(2x-1)\cos\gamma\,dS=\iint_{G_{xy}}(2x-1)\,dxdy=$$

$$=\begin{bmatrix}x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\ J=r,\\ 0\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{bmatrix}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r(2r\cos\varphi-1)\,dr=-4\pi\ .$$

11 Проверить, является ли потенциальным векторное поле

$$\vec{a}=2xyz\cdot\vec{i}++x^2z\cdot\vec{j}+x^2y\cdot\vec{k}\ .$$

Решение. По формуле (8.16) ротор равен

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz & x^2z & x^2y\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2-x^2\right)\vec{i}+(2xy-2xy)\,\vec{j}+(2xz-2xz)\vec{k}\equiv 0\ .$$

Следовательно, заданное поле потенциально.

12 Проверить, являются ли соленоидальными следующие поля:

а) $\vec{a}_1=x\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{i}+y\left(x^2-z^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{k}$;

б) $\vec{a}_2=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(3y^2+1\right)\cdot\vec{k}$.

Решение. а) имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_1=z^2-y^2+x^2-z^2+y^2-x^2\equiv 0\ .$$

Значит, поле $\vec{a}_1(M)$ соленоидально;

б) имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_2=-2y+3y^2+1\not\equiv 0\ .$$

Значит, поле $\vec{a}_2(M)$ не является соленоидальным.

Задания для аудиторной работы

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U = xy$; в) $U = x - y - z$;

б) $U = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$; г) $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2 Найти производную в точке M по заданному направлению $\overrightarrow{MM_1}$ скалярных полей:

а) $U = y^3 + 4xy^2 - 3x + 6y - 1$, $M(2;1;0)$, $M_1(-1;5;0)$;

б) $U = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$, $M(1;1;1)$, $M_1(-1;0;3)$.

3 Найти градиент и его модуль скалярных полей:

а) $U = x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y + 9$; б) $U = xyze^{x+y+z}$.

4 Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; б) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

5 Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$$

через сторону треугольника Ω, вырезанного из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

6 Найти поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность части параболоида $1 - z = x^2 + y^2$, отсекаемой от него плоскостью $z = 0$ (нормаль внешняя).

7 Вычислить поток для векторных полей $\vec{a}$ и положительно ориентированных замкнутых поверхностей Ω:

а) $\vec{a} = z^2\vec{i} + (xy - 1)\vec{j} - (z - y)\vec{k}$,

$\Omega = \{3x + 2y + z = 6, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$;

б) $\vec{a} = (y^2 + xz)\vec{i} + (yx - z)\vec{j} + (yz + x)\vec{k}$,

$\Omega = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = \sqrt{2}\}$.

8 Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$$

через поверхность цилиндра, заключенную между плоскостями $z=0$ и $z=2$ (нормаль внешняя).

9 Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\vec{a}=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^3+y^3\right)\vec{j}$;

б) $\vec{a}=xyz\vec{i}+\left(2x+3y+z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$.

10 Найти ротор векторных полей:

а) $\vec{a}=xyz\vec{i}+\left(2x+3y-z\right)\vec{j}+\left(x^2+z^2\right)\vec{k}$;

б) $\vec{a}=\left(2x-y+5z\right)\vec{i}+\left(x^2+y^2-8z^2\right)\vec{j}+\left(x^3-y^3+2z^3\right)\vec{k}$.

11 Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}=\left(z^2-y^2\right)\vec{i}+\left(x^2-z^2\right)\vec{j}+\left(y^2-x^2\right)\vec{k}$$

по контуру треугольника с вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$ по определению и с помощью формулы Стокса.

12 Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}=\left(x-y\right)\vec{i}+\left(y-z\right)\vec{j}+\left(z-x\right)\vec{k}$$

вдоль линии, состоящей из части винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\dfrac{bt}{2\pi}$ от точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;b)$ и прямолинейного отрезка BA по определению и с помощью формулы Стокса.

13 Выяснить, являются ли соленоидальными и потенциальными векторные поля:

а) $\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=y^2z\vec{i}+xz^2\vec{j}+x^2y\vec{k}$;

в) $\vec{a}=\left(yz-2x\right)\vec{i}+\left(xz+zy\right)\vec{j}+xy\vec{k}$;

г) $\vec{a}=\left(2xy+z\right)\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\vec{k}$.

В случае потенциальности найти потенциал.

Задания для домашней работы

1 Найти линии и поверхности уровня скалярных полей:

а) $U=\sqrt{x^2+y^2}$; в) $U=x^2+y^2-z^2$;

б) $U=\dfrac{2x-y+1}{x^2}$; г) $U=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2 Найти производную в точке M по заданному направлению $\overrightarrow{MM_1}$ скалярных полей:

а) $U=x^3y-3x^2y^2+2xy^3-5xy+7$, $M(1;2;0)$, $M_1(3;5;6)$;

б) $U=xy+xz+yz$, $M(2;3;4)$, $M_1(4;6;0)$.

3 Найти градиент и его модуль скалярных полей:

а) $U=x^2+4xy+4y^2+6x-3y+2$;

б) $U=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

4 Найти векторные линии векторных полей:

а) $\vec{a}=2x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(y-x)\vec{k}$.

5 Найти поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через нижнюю сторону треугольника с вершинами $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$.

6 Найти поток векторного поля $\vec{a}=y^2\vec{j}+z\vec{k}$ через внутреннюю часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсеченной плоскостью $z=2$.

7 Найти дивергенцию векторных полей:

а) $\vec{a}=x^2\vec{i}-xy\vec{j}+xyz\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(x+y+z)\vec{i}+\left(x^2+y^2+z^2\right)\vec{j}+\left(x^3+y^3+z^3\right)\vec{k}$.

8 Найти поток векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z^2\vec{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ на плоскости $z=2$.

9 Найти поток векторного поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ по внешней стороне части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной в первом октанте.

10 Найти поток векторных полей:

а) $\vec{a} = 3xy^2\vec{i} - \left(1 + yz^2\right)\vec{j} + \left(2 - zx^2\right)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $\Omega = \left\{ x^2 + z^2 = y^2, y = 1, y \geq 0 \right\}$;

б) $\vec{a} = \left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + \left(yx^2 - z^2\right)\vec{j} + \left(zy^2 - x^2\right)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности

$$\Omega = \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

11 Найти ротор векторных полей

а) $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$;

б) $\vec{a} = \left(x^3y - 5y^2z^2 + 3x^2z\right)\vec{i} + \left(y^3z + 4x^2z^2 - 7y^2xz\right)\vec{j} +$
$+\left(z^3x - 2z^2x^2y + 6z^4\right)\vec{k}$.

12 Вычислить по определению и с помощью формулы Стокса циркуляцию векторных полей:

а) $\vec{a} = z\vec{i} + \left(x + y\right)\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями;

б) $\vec{a} = \left(2z^2 - y^3\right)\vec{i} + \left(x^3 - 2y^2z^2\right)\vec{j} + \left(2xyz - x^2y^2\right)\vec{k}$ по контуру $\Gamma = \left\{ x^2 + y^2 = 4, 2x + z = 4 \right\}$.

13 Выяснить, являются ли соленоидальными и потенциальными векторные поля:

а) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

б) $\vec{a} = x^2\vec{i} - xy\vec{j} + xyz\vec{k}$;

в) $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$;

г) $\vec{a} = \left(yz + 1\right)\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$.

В случае потенциальности найти потенциал.

Практическое занятие 9 Интегралы, зависящие от параметра

9.1 Определение и свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

9.2 Определение, сходимость и свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

9.3 Интегралы Эйлера

9.4 Интеграл Фурье

9.1 Определение и свойства собственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть на множестве $Y \subset \mathbb{R}$ определены функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$. И пусть на множестве

$$Q = \left\{ (x;y) \middle| \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, y \in Y \right\}$$

определена функция $f(x;y)$, которая при любом значении параметра $y \in Y$ интегрируема по Риману. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ представляет собой функцию параметра y, определенную на множестве Y.

Собственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx, \qquad (9.1)$$

переменная y называется *параметром*.

В частности, если $\varphi(y) = a$ и $\psi(y) = b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, то собственный интеграл, зависящий от параметра y примет вид

$$\Phi(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx. \qquad (9.2)$$

Пусть $Y=[c;d]\subset\mathbb{R}$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[c;d]$. Рассмотрим область $\bar{G}$, образованную графиками функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и прямыми $y=c$, $y=d$

$$\bar{G}=\left\{(x;y)\middle|\varphi(y)\le x\le\psi(y),-\infty<c\le y\le d<\infty\right\},$$

которая является областью определения функции $\Phi(y)$.

Теорема 1 (непрерывность) Пусть

1) функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$, причем $\varphi(y)\le\psi(y)$,

2) функция $f(x;y)$ непрерывна на множестве $\bar{G}$.

Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ есть непрерывная на $[c;d]$ функция и справедлива формула

$$\lim_{\lambda\to 0}\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx=\int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)}\lim_{y\to y_0} f(x;y)dx\,. \tag{9.3}$$

Теорема 2 (дифференцирование по параметру) Пусть 1) функции $f(x;y)$ и $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике $\Pi=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,c\le y\le d\right\}$ и $\bar{G}\subset\Pi$; 2) функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ непрерывно-дифференцируемы на отрезке $[c;d]$. Тогда интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ является дифференцируемой функцией на $[c;d]$ и справедлива формула

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx\right)= \\ =\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx+f(\psi(y);y)\psi'(y)-f(\varphi(y);y)\varphi'(y) \tag{9.4}$$

Теорема 3 (интегрирование по параметру) *Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на прямоугольнике Π.*

Тогда интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ является интегрируемой функцией и справедливо равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy . \qquad (9.5)$$

9.2 Определение, сходимость и свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть функция $f(x;y)$ определена на множестве

$$\Pi_\infty = \left\{ (x;y) \middle| -\infty < a \le x \le b \le +\infty,\ y \in Y \right\}.$$

И пусть функция $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ удовлетворяет условиям:

1) $-\infty < a < b \le +\infty$ (b может быть конечным или бесконечным);

2) для любого $y \in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a;\eta]$, где $a < \eta < b \le +\infty$.

Если b *конечно*, то $\lim\limits_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x;y)dx$ есть несобственный интеграл от неограниченной функции; если b *бесконечно*, то $\int_a^{+\infty} f(x;y)dx$ есть несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Не ограничивая общности, будем рассматривать случай $b = +\infty$.

Несобственным интегралом, зависящим от параметра, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int_a^{+\infty} f(x;y)dx , \qquad (9.6)$$

где переменная y называется *параметром*.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы, зависящие от параметра y:

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{b} f(x;y)\,dx,\ \Phi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)\,dx.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, $\int_a^b f(x;y)\,dx$ называется *сходящимся (поточечно)*, если $\forall\ y\in Y$ и $b\le+\infty$ существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to b-0}\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx$:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx=\int_a^b f(x;y)\,dx\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ y\in Y\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\int_a^b f(x;y)\,dx-\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Поточечная сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x;y)\,dx$, зависящего от параметра y определяет сходимость его при каждом фиксированном $y\in Y$ как несобственного.

Поскольку

$$\int_a^b f(x;y)\,dx=\int_a^{\eta} f(x;y)\,dx+\int_{\eta}^{b} f(x;y)\,dx,$$

то для сходящегося интеграла справедливо равенство

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{b} f(x;y)\,dx=0.$$

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)\,dx$ называется *равномерно сходящимся по параметру* y *на множестве* Y, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $b'(y;\varepsilon)>0$, $a\le b'<b$, что для всех $y\in Y$ и всех η, $b'<\eta<b$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b'}^{b} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon$:

$$\int\limits_a^{\eta} f(x;y)\,dx \underset{\to}{\to} \int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx, \text{ при } \eta\to b, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ y\in Y \text{ и } \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int\limits_{b'}^{b} f(x;y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Обозначим $\Phi(y;\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x;y)\,dx$, где $a<\eta<b\le+\infty$. Тогда интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ равномерно сходится, когда $\Phi(y;\eta)\underset{\to}{\to}\Phi(y)$ при $\eta\to b$.

Теорема 4 (критерий Коши) Для того чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x;y)\,dx$ *сходился равномерно по параметру y на множестве* $Y\in \square$ *, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'\in[a,b)$ *такое, что* $\forall\ \eta,\eta'\in[b';b)$ *и* $\forall\ y\in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x;y)\,dx\right|<0.$$

Следствие. Если $\exists\varepsilon_0>0$ *такое, что* $\forall b'\in[a,b)$ $\exists\eta_0,\eta_0'\in[b';b)$ *и* $\exists y_0\in Y$ *такие, что*

$$\left|\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0'} f(x;y)\,dx\right|\ge\varepsilon_0,$$

то интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ *не сходится равномерно по параметру* y *на множестве* Y *.*

Т е о р е м а   5   (В е й е р ш т р а с с а) Пусть существует функция $g(x) \ge 0$*, удовлетворяющая условиям:*

1) $g(x)$ *определена на* $[a;b)$ *и интегрируема на* $[a;\eta]$*,* $a < \eta < b \le +\infty$ *;*

2) $|f(x;y)| \le g(x)$ *для* $\forall x \in [a;b)$ *и* $\forall y \in Y$ *;*

3) $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится.*

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ *сходится абсолютно и равномерно на* Y *.*

Пусть интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)\,dx$ (равномерно) сходится на множестве Y. И пусть последовательность (η_n), $n = 1,2,3,\ldots$, $a \le \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, сходится к b. Тогда последовательность функций $\Phi_n(y) = \int\limits_a^{\eta_n} f(x;y)\,dx$ (равномерно) сходится на множестве Y к функции $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)\,dx$.

Т е о р е м а   6   (Д и р и х л е) Пусть

1) $\forall y \in Y$ *функции* $f(x;y)$, $g(x;y)$ *и* $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны как функции* x *на полуинтервале* $[a;+\infty)$*;*

2) функция $F(x;y)$*, являющаяся при любом* $y \in Y$ *первообразной по* x *функции* $f(x;y)$*, ограничена при* $y \in Y$ *,* $x \in [a;+\infty)$*;*

3) $\dfrac{\partial g}{\partial x} \le 0$ *при* $y \in Y$ *, и* $x \in [a;+\infty)$*;*

4) существует непрерывная на $[a;+\infty)$ функция $\psi(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$ и $|g(x;y)|\le\psi(x)$ для $y\in Y$ и $x\in[a;+\infty)$.

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x;y)\,g(x;y)dx$$

сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

Теорема 7 (непрерывность) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике

$$\Pi_\infty=\{(x;y)|-\infty<a\le x\le b\le+\infty,\, c\le y\le d\},$$

а интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является непрерывной функцией переменной y на отрезке $[c;d]$ и справедлива формула

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x;y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)dx. \qquad (9.7)$$

Теорема 8 (интегрирование по параметру) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике Π_∞, а интеграл $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда функция $\int\limits_a^b f(x;y)dx$ является интегрируемой на Π_∞ и существует интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x;y)dx$.

Теорема 9 (о перестановке порядка интегрирования) Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на множе-

стве Π_∞ *и выполнены следующие условия:1) несобственный интеграл* $\int_a^b \left|f(x;y)\right|dx$ *сходится равномерно по параметру* y *на любом отрезке* $[c';d']\subset(c;d)$*; 2) несобственный интеграл* $\int_c^d \left|f(x;y)\right|dy$ *сходится равномерно по параметру* x *на любом отрезке* $[a';b']\subset(a;b)$*; 3) один из двух повторных интегралов*

$$\int_c^d dy\int_a^b \left|f(x;y)\right|dx,\ \int_a^b dx\int_c^d \left|f(x;y)\right|dy$$

сходится. Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx$, $\int_a^b dx\int_c^d f(x;y)dy$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x;y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx\,. \tag{9.8}$$

Т е о р е м а 10 (д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е п о п а р а- м е т р у) Пусть функции $f(x;y)$ *и* $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ *непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике* Π_∞*, а интеграл* $\int_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ *равномерно сходится на отрезке* $[c;d]$*. Тогда интеграл* $\int_a^b f(x;y)dx$ *является дифференцируемой на отрезке* $[c;d]$ *функцией и справедливо равенство*

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x;y)dx\right)=\int_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\,. \tag{9.9}$$

9.3 Интегралы Эйлера

Определение и свойства гамма-функции. Функция

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx\,,\qquad s>0\,, \tag{9.10}$$

называется *гамма-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

Гамма-функция обладает следующими свойствами:

– гамма-функция является непрерывной функцией переменной s;

– $\Gamma(s)>0$;

– $\Gamma(1)=1$;

– $\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$;

– (*формула понижения*) $\Gamma(n)=(n-1)!\quad \forall\ n\in\mathbb{N}$;

– $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$;

– гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка k, $k\in\mathbb{N}$, и справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^k\,dx\,;$$

– *(интеграл Пуассона)* $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$;

– (*формула дополнения*) если $0<p<1$, то

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi\,p}\,;$$

– (*формула Стирлинга*) при $s\to+\infty$ справедливо

$$\Gamma(s+1)\approx\sqrt{2\pi\,s}\cdot\left(\frac{s}{e}\right)^s.$$

Определение и свойства бета-функции. Функция

$$\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,,\qquad p>0\,,\qquad q>0 \qquad (9.11)$$

называется *бета-функцией,* а ее значение представляет собой интеграл Эйлера.

Бета-функция обладает следующими *свойствами*:

– бета-функция является непрерывной функцией и обладает частными производными любого порядка;

– $\mathrm{B}(p;q)=\mathrm{B}(q;p)$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1)$, $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1;q)$;

– $\mathrm{B}(p;1)=\dfrac{1}{p}$;

– $\mathrm{B}(p;n)=\mathrm{B}(n;p)=\dfrac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)} \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(m;n)=\dfrac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \forall\ n,m\in\mathbb{N}$;

– $\mathrm{B}(p;q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz$;

– $\mathrm{B}(p;1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}$;

– (*связь гамма- и бета- функций*) $\mathrm{B}(p;q)=\dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

9.4 Интеграл Фурье

Пусть функция локально интегрируема. *Интегралом в смысле главного значения* называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)\,dx\,,\ b>0\,. \qquad (9.12)$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx \qquad (9.13)$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения (9.12) есть предел того же интеграла, но при $a = b$.

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл (9.13), то и существует интеграл в смысле главного значения (9.12). Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения (9.12) может существовать, а несобственный интеграл (9.13) – нет.

Рассмотрим множество $L^1(-\infty;\infty)$ кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$.

Интегралом Фурье функции $f(x)$ называется функция вида

$$\hat{f}(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx\,. \qquad (9.14)$$

Поскольку

$$\left|f(x)e^{-iyx}\right| = \left|f(x)\right|\cdot\left|e^{-iyx}\right| = \left|f(x)\right|\cdot\left|\cos yx - i\sin yx\right| =$$

$$= \left|f(x)\right|\cdot\sqrt{\cos^2 yx + \sin^2 yx} = \left|f(x)\right|$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$, то на основании признака сравнения несобственных интегралов, данный интеграл сходится при любом $u \in \mathbb{R}$.

Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$ функцию $\hat{f}(y)$ и определяемое формулой (9.14), называется *преобразованием Фурье* и обозначается

$$F[f](y) = \hat{f}(y)\,.$$

Отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции $\hat{f}(y)$ функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{iyx}dy\,. \qquad (9.15)$$

называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается

$$F^{-1}[f](y) = f(x).$$

Функция $F[f]$ называется *образом Фурье* функции $f(x)$.

Теорема 11 (формула обращения) Если функция $f(x) \in L^1$ и существуют правая $f_-^{'}(x)$ и левая $f_+^{'}(x)$ производные, то справедлива формула

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f\,.$$

Формула обращения может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)e^{iyx}dy$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(x-t)y}dt\,.$$

Используя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin x$, интеграл Фурье можно записать в виде

$$F[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos yx - i\sin yx)dx =$$

$$= v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yxdx - v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yxdx\,.$$

Обратное преобразование Фурье примет вид

$$f(x) = F^{-1}[f](x) =$$

$$= v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yxdy + v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yxdy\,.$$

Косинус-преобразованием Фурье называется действительная часть преобразования Фурье:

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos yx\,dx\,. \qquad (9.16)$$

Синус-преобразованием Фурье называется мнимая часть преобразования Фурье:

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin yx\,dx\ . \tag{9.17}$$

Очевидно, что $F[f] = F_c[f] - iF_s[f]$.

Если $f(x)$ – четная функция, то функция $f(x)\sin yx$ – нечетная функция. Тогда $F_s[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = F_c[f](y),$$

при этом

$$F_c[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos yx\,dx\ ,$$

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\cos yxdy = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F_c(y)\cos yxdy\ .$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то функция $f(x)\cos yx$ – четная функция. Тогда $F_c[f](y) = 0$ и

$$F[f](y) = -iF_s[f](y),$$

при этом

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yxdx = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F_s(y)\sin yxdx\ .$$

Преобразование Фурье обладает *свойствами:*

– (*линейность*) $F[\alpha\cdot f + \beta\cdot g] = \alpha\cdot F[f] + \beta\cdot F[g]$,

$$F^{-1}[\alpha\cdot f + \beta\cdot g] = \alpha\cdot F^{-1}[f] + \beta\cdot F^{-1}[g];$$

– (*преобразование Фурье от сдвига*)

$$F\left[f(x-a)\right] = e^{iay}\cdot F[f];$$

– (*преобразование Фурье от производной*) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, то

$$F\left[f'\right]=iy\cdot F[f];$$

– если функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)$ принадлежат пространству $L^1(-\infty;\infty)$ и $f^{(n)}(x)$ – кусочно-непрерывна на любом отрезке, то

$$F\left[f^{(n)}\right]=(iy)^n\cdot F[f];$$

– пусть $f(x)$ и ее первообразная $g(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$, $f(x)$ – непрерывна, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. Тогда

$$F[g]=\frac{F[f]}{iy};$$

– (*дифференцирование преобразования Фурье*) пусть функции $f(x)$, $xf(x)$ абсолютно интегрируемые функции на $(-\infty;+\infty)$. Тогда функция $\hat{f}(y)=F[f](y)$ имеет на $(-\infty;+\infty)$ непрерывную производную, причем

$$\frac{d}{dy}\left(F[f]\right)=F\left[(-ix)f\right];$$

– если $f(x)$ непрерывна, а функции $xf(x)$, $x^2f(x)$, …, $x^nf(x)$ – абсолютно интегрируемы, то

$$\frac{d^n}{dy^n}\left(F[f]\right)=F\left[(-ix)^n f\right];$$

– если $F[f]=F[g]$, то $f(x)=g(x)$;

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)\in L^1(-\infty;\infty)$. Функция (если несобственный интеграл сходится $\forall x\in \mathbb{R}$)

$$(f*g)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \qquad (9.18)$$

называется *сверткой* функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 12 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то свертка $f*g$ есть непрерывная ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$.

Теорема 13 Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g].$$

Свертка обладает *свойствами*:

– (*коммутативность*) $f*g=g*f$;

– (*распределительный закон*) $(f+g)*h=f*h+g*h$;

– (*сочетательный закон*): $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение собственного интеграла, зависящего от параметра.

2 Перечислите свойства собственного интеграла, зависящего от параметра.

3 Дайте определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4 Дайте определения: а) поточечной сходимости, б) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

5 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

6 Сформулируйте признаки Вейерштрасса и Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

7 Перечислите свойства несобственного интеграла по параметру.

8 Дайте определение гамма-функции и перечислите ее свойства.

9 Дайте определение бета-функции и перечислите ее свойства.

10 Для каких функций существует преобразование Фурье?

11 Дайте определение прямого и обратного преобразования Фурье.

12 В чем суть теоремы обращения?

13 Что называется косинус-, синус- преобразованиями Фурье?

14 В чем особенность преобразования Фурье для четных и нечетных функций?

15 Какими свойствами обладает преобразование Фурье?

16 Что называется сверткой функций?

17 Чему равно преобразование Фурье от свертки функций?

Решение типовых примеров

1 Найти производную функции

$$\Phi(y)=\int_0^y\left(x^2+y^2+xy\right)dx .$$

Решение. Имеем:

$$\Phi'(y)=\int_0^y(2y+x)dx+\left(y^2+y^2+y^2\right)\cdot 1-\left(y^2\right)\cdot 0=$$

$$=\left.\left(2xy-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^y+3y^2=2y^2+\frac{y^2}{2}+3y^2=5,5y^2 .$$

2 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos xy dx ,\ y\in\mathbb{R} .$$

Решение. Возьмем $\forall\ \varepsilon>0$. Покажем, что существует $b'=b'(y;\varepsilon)$.

Имеем

$$\left|\int_\eta^{+\infty}e^{-x}\cos xy dx\right|\le\int_\eta^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-\eta}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon .$$

Положим $b'(y;\varepsilon)=\ln\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\forall\ \eta\in[b';+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,dx\right| < \varepsilon .$$

Согласно определению, интеграл сходится равномерно по параметру y на $\mathbb{R}$.

3 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx\,,\;\; y\in\left[0;+\infty\right).$$

Решение. Покажем, что определение равномерной сходимости не выполняется. Возьмем $\varepsilon=\dfrac{1}{e}$. Тогда $\forall\;\; b'\in\left(0;+\infty\right)$ $\exists\,\eta=b'$ и $y=\dfrac{1}{b'}$ такие, что

$$\int\limits_{\eta}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\int\limits_{b'}^{+\infty} ye^{-xy}dx=\left[\begin{array}{c} t=xy,\; y=\dfrac{t}{x}, \\ x=\dfrac{t}{y}, dx=dt \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{b'\cdot y}^{+\infty} e^{-t}dt=\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-t}dt=e^{-1}=\varepsilon .$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $Y=\left[0;+\infty\right)$.

4 Исследовать на равномерную сходимость интегралы

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$ при $\alpha\in\left[\alpha_0;+\infty\right)$, $\alpha_0>0$ и $\alpha\in\left[0;+\infty\right)$;

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+y^2+1}$, $y\in\mathbb{R}$.

Решение. а) пусть $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$. Так как $e^{-\alpha x^2} \le e^{-\alpha_0 x^2}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2} dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится равномерно по параметру α на $[\alpha_0;+\infty)$.

Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$. Покажем, что на $(0;+\infty)$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{e}$, $\forall\, b > 0$ возьмем $\eta_0 = b$, $\eta_0^{'} = b+1$, $\alpha_0 = \frac{1}{(b+1)^2}$. Тогда

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0^{'}} \varepsilon^{-\alpha_0 x^2} dx = \int\limits_b^{b+1} e^{-\alpha_0 x^2} dx \ge e^{-\alpha_0 (b+1)^2} \int\limits_b^{b+1} dx = \frac{1}{e} = \varepsilon_0 .$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится неравномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$;

б) для подынтегральной функции $f(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, для которой

$$f(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2+1} \le \frac{1}{x^2+1} = g(x).$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ и является сходящимся для всех $x \in [0;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$ сходится равномерно согласно признаку Вейерштрасса.

5 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx, \ y\in[0;+\infty).$$

Решение. Пусть $f(x;y)=\sin x$, $g(x;y)=\frac{e^{-xy}}{x}$.

Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную

$$F(x)=-\cos x.$$

При $x\ge 1$, $y\ge 0$ для функции $g(x;y)=\frac{e^{-xy}}{x}$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)=-\frac{e^{-xy}}{x^2}(1+xy)<0, \qquad \frac{e^{-xy}}{x}<\frac{1}{x}=\psi(x),$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Значит, согласно признаку Дирихле, данный интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

6 Вычислить интеграл Пуассона

$$I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Решение. Имеем

$$I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\begin{bmatrix} t=xy, y>0, \\ dt=ydx \end{bmatrix}=y\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2y^2}dx.$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$ по y, получаем

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty} I\cdot e^{-y^2}dy=\int\limits_0^{+\infty}dy\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dx. \qquad (9.19)$$

Так как $\left|ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}\right| \le de^{-c^2\left(1+x^2\right)}$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\left(de^{-c^2\left(1+x^2\right)}\right)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c;d]\subset(0;+\infty)$ согласно признаку Вейерштрасса.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[a;b]\subset(0;+\infty)$. Следовательно, повторный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится.

Переставляя порядок интегрирования в равенстве (9.19), получаем

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy = -\int\limits_0^{+\infty}\left(\left.\frac{e^{-y^2\left(1+x^2\right)}}{2\left(1+x^2\right)}\right|_0^{+\infty}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

7 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x;y) = \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ является несобственным, так как функция $f(x;y)$ не определена в точках $x=0$ и $x=1$.

При $x \to 0$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o(1)$, при $x \to 1$ функция $\dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial y} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Значит, интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ равномерно сходится, и функция $\Phi(y)$ является дифференцируемой. По теореме 10 имеем

$$\Phi'(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = z, \\ t = \operatorname{arctg} z \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(1+y^2\right)z^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

8 Используя интегралы Эйлера, вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = 2\sqrt{t},\ t > 0, \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{t}}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 4t \cdot \frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= 8\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot (1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = 8 \cdot \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = 8 \cdot \frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} =$$

$$= 8 \cdot \frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 8 \cdot \frac{\dfrac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\dfrac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!} = \pi.$$

9 Найти косинус- и синус- преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, и обратные к ним.

Решение. Функция $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют косинус- и синус- преобразования Фурье:

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\cos yt dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B-u\int_0^B e^{-t}\sin yt dt\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB+1-u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B+u\int_0^B e^{-t}\cos yt dt\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-y^2\int_0^\infty e^{-t}\cos yt dt\right).$$

Отсюда

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}.$$

Аналогично получим

$$F_s(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t}\sin yt dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+1}.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье равны:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos yx}{y^2+1}dy,$$

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{y\sin yx}{y^2+1}dy.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти производные функций:

а) $F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$; в) $F(x)=\int_0^x(x+y)f(y)dy$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$; г) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} f(\alpha x)dx$.

2 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, $a>0$, $b>0$, если $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int\limits_a^b x^y dy$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$.

3 Исследовать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx,\ -\infty<x<+\infty.$$

4 Вычислить несобственные интегралы, зависящие от параметра:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax\cos bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(ax^2+2bx+c\right)}dx$, $a>0$, $ac-b^2>0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$, $\alpha>0$.

5 С помощью интегралов Эйлера вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,dx$; г) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, $n>0$.

6 Найти область определения и выразить через интегралы Эйлера интегралы:

а) $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx$, $n>0$.

7 Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-2x}$, $x \ge 0$.

8 Найти преобразование Фурье функций:

а) $f(x)=\begin{cases} \sin x \text{ при } |x|<\pi, \\ 0 \text{ при } |x| \ge \pi, \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 1+x \text{ при } -1<x \le 0, \\ 1-x \text{ при } 0<x \le 1, \\ 0 \text{ при } |x| \ge 1. \end{cases}$

Задания для домашней работы

1 Найти производные функций:

а) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha} f(x+\alpha; x-\alpha)dx$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$; г) $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\cos\alpha x}{x}dx$.

2 Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$, $a>0$, $b>0$, если $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int\limits_{a}^{b} e^{-xy}dy$;

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^3 dx$.

3 Исследовать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ n \ge 0.$$

4 Вычислить несобственные интегралы, зависящие от параметра:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$, $a>0$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$;

г) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

5 С помощью интегралов Эйлера вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

б) $\int\limits_{0}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, $a > 0$;

г) $\int\limits_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$, $n > 0$.

6 Найти область определения и выразить через интегралы Эйлера интегралы:

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$, $n > 0$;

б) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^m e^{-x^n}\, dx$, $n > 0$.

7 Найти синус- и косинус- преобразования Фурье функции

$$f(x) = e^{-3x},\ x \geq 0.$$

8 Найти преобразование Фурье функций:

а) $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ при } 0 < x \leq \pi, \\ 0 \text{ при } x > \pi, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } 0 < x < 3, \\ 1 \text{ при } x = 3, \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ-1 Двойной и тройной интегралы

1 Изменить порядок интегрирования (сделать чертеж):

1.1 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} fdx$.

1.2 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx$.

1.3 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} fdx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} fdx$.

1.4 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} fdx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} fdx$.

1.5 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} fdy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} fdy$.

1.6 $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} fdx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} du \int\limits_{0}^{\arccos y} fdx$.

1.7 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits^{\sqrt{2+y}} fdx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} fdx$.

1.8 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} fdx$.

1.9 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} fdy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} fdy$.

1.10 $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}-2}^{\sqrt{4-x^2}-2} fdy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}-2}^{-\sqrt{4-x^2}} fdy$.

1.11 $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} fdy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} fdy$.

1.12 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} fdx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} fdx$.

1.13 $\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} fdx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} fdx$.

1.14 $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} fdy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} fdy$.

1.15 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} fdx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} fdx$.

1.16 $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} fdx$.

1.17 $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} fdx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx$.

1.18 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^3} fdx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} fdx$.

1.19 $\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{\sqrt{4-x^2}} fdy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} fdy$.

1.20 $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} fdx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} fdx$.

1.21 $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} fdx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} fdx$.

1.22 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

1.23 $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f dy$.

1.24 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f dx$.

1.25 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f dy$.

1.26 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}-2}^{-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}-2}^{\sqrt{4-x^2}-2} f dy$.

1.27 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^{0} f dy$.

1.28 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x} f dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f dy$.

1.29 $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

1.30 $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f dy$.

1.31 $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{\sqrt{4-x^2}} f dy$.

2 Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

2.1 $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

2.2 $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$

2.3 $\iint\limits_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt[3]{y}, y=-x^3.$

2.4 $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.5 $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.6 $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt[2]{x}, y=-x^2.$

2.7 $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$

2.8 $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$

2.9 $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$

2.10 $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$

2.11 $\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$

2.12 $\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.13 $\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.14 $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$

2.15 $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$

2.16 $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$

2.17 $\iint\limits_D (24xy - 48x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$

2.18 $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy,\ D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$

2.19 $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$

2.20 $\iint\limits_D (4xy+16x^3y^3)dxdy, \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.21 $\iint\limits_D (44xy+16x^3y^3)dxdy, \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.22 $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$

2.23 $\iint\limits_D (xy-4x^3y^3)dxdy, \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$

2.24 $\iint\limits_D (4xy+176x^3y^3)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3.$

2.25 $\iint\limits_D (6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4)dxdy, \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}.$

2.26 $\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^3y^4)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2.$

2.27 $\iint\limits_D (3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3.$

2.28 $\iint\limits_D (9x^2y^2+25x^4y^4)dxdy, \quad D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.29 $\iint\limits_D (54x^2y^2+150x^4y^4)dxdy, \quad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}.$

2.30 $\iint\limits_D (xy-9x^5y^5)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2.$

3 Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

3.1 $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy, \quad D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4.$

3.2 $\iint\limits_D y^2 \sin\frac{xy}{2}dxdy, \quad D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}.$

3.3 $\iint\limits_D y\cos xydxdy, \quad D: y=\pi/2, y=\pi, x=1, x=2.$

3.4 $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/4} dxdy,\ D: x=0, y=2, y=x.$

3.5 $\iint\limits_D y \sin xydxdy,\ D: y=\pi/2, y=\pi, x=1, x=2.$

3.6 $\iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2} dxdy,\ \ D: x=0, y=\sqrt{\pi/2}, x=x/2.$

3.7 $\iint\limits_D 4ye^{2xy} dxdy,\ \ D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1.$

3.8 $\iint\limits_D 4y^2 \sin xydxdy,\ D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x.$

3.9 $\iint\limits_D y\cos 2xydxdy,\ \ D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1.$

3.10 $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/8} dxdy,\ \ D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}.$

3.11 $\iint\limits_D 12y\sin 2xydxdy,\ \ D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=2, x=3.$

3.12 $\iint\limits_D y^2 \cos xydxdy,\ \ D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x.$

3.13 $\iint\limits_D ye^{xy/4} dxdy,\ \ \ D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8.$

3.14 $\iint\limits_D 4y^2 \sin 2xydxdy,\ \ D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x.$

3.15 $\iint\limits_D 2y\cos 2xydxdy,\ \ D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=1, x=2.$

3.16 $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/2} dxdy,\ \ D: x=0, y=\sqrt{2}, y=x.$

3.17 $\iint\limits_D y\sin xydxdy,\ D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1.$

3.18 $\iint\limits_D y^2 \cos 2xydxdy,\ \ D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}.$

3.19 $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy,\quad D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\dfrac{1}{4}, x=\dfrac{1}{2}.$

3.20 $\iint\limits_D 3y^2e^{-xy/2}dxdy,\quad D: x=0, y=1, y=\dfrac{x}{2}.$

3.21 $\iint\limits_D y\cos xydxdy,\quad D: y=\pi, y=3\pi, x=1/2, x=1.$

3.22 $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy,\quad D: x=0, y=1, y=\dfrac{x}{2}.$

3.23 $\iint\limits_D y\sin 2xydxdy,\quad D: y=\pi/2, y=3\pi/2, x=1/2, x=2.$

3.24 $\iint\limits_D y^2\cos xydxdy,\quad D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=2x.$

3.25 $\iint\limits_D 6ye^{xy/3}dxdy,\quad D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6.$

3.26 $\iint\limits_D y^2\sin\dfrac{xy}{2}dxdy,\quad D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x.$

3.27 $\iint\limits_D y\cos 2xydxdy,\quad D: y=\pi/2, y=3\pi/2, x=1/2, x=2.$

3.28 $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy,\quad D: y=\pi/2, y=3\pi, x=1, x=3.$

3.29 $\iint\limits_D 3y\sin xydxdy, D: y=\pi/2, y=3\pi, x=1, x=3.$

3.30 $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}dxdy,\quad D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x.$

4 Вычислить тройной интеграл по области Q, ограниченной указанными линиями:

4.1 $\iiint\limits_Q 2y^2e^{xy}dxdy,\ Q: \begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ z=0, z=1. \end{cases}$

4.2 $\iiint\limits_Q x^2z\sin(xyz)dxdydz,\ Q: \begin{cases} x=2, y=\pi, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.3 $\iiint\limits_Q y^2 \operatorname{ch}(2xy)dxdydz,\ Q:\begin{cases} x=0, y=-2, y=4x, \\ z=0, z=2. \end{cases}$

4.4 $\iiint\limits_Q 8y^2 ze^{2xyz}dxdydz,\ Q:\begin{cases} x=-1, y=2, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.5 $\iiint\limits_Q x^2 \operatorname{sh}(3xy)dxdydz,\ Q:\begin{cases} x=1, y=2x, y=0, \\ z=0, z=36. \end{cases}$

4.6 $\iiint\limits_Q y^2 z\cos xyzdxdydz,\ Q:\begin{cases} x=1, y=\pi, z=2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.7 $\iiint\limits_Q y^2 \cos(\frac{\pi}{4}xy)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} x=0, y=-1, y=x/2, \\ z=0, z=-\pi^2. \end{cases}$

4.8 $\iiint\limits_Q x^2 z\sin\frac{xyz}{4}dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} x=1, y=2\pi, z=4, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.9 $\iiint\limits_Q y^2 e^{-xy}dxdydz,\ Q:\begin{cases} x=0, y=-2, y=4x, \\ z=0, z=1. \end{cases}$

4.10 $\iiint\limits_Q 2y^2 ze^{xyz}dxdydz,\ Q:\begin{cases} x=1, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.11 $\iiint\limits_Q y^2 \operatorname{ch}(2xy)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} x=0, y=1, y=x, \\ z=0, z=8. \end{cases}$

4.12 $\iiint\limits_Q x^2 z\operatorname{ch}(xyz)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} x=2, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.13 $\iiint\limits_Q y^2 e^{xy/2}dxdydz,\ \ \ Q:\begin{cases} x=0, y=2, y=2x, \\ z=0, z=-1. \end{cases}$

4.14 $\iiint\limits_Q y^2 z\cos\frac{xyz}{3}dxdydz,\ \ \ Q:\begin{cases} x=3, y=1, z=2\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.15 $\iiint\limits_Q y^2 \cos(\frac{\pi xy}{2})dxdydz,\ \ \ Q:\begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2\pi^2. \end{cases}$

4.16 $\iiint\limits_Q 2x^3 zsh(xyz)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=1, y=-1, z=1, \\ x=0, y=0, y=0. \end{cases}$

4.17 $\iiint\limits_Q y^2\cos(\pi xy)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=0, y=1, y=0, \\ z=0, z=8. \end{cases}$

4.18 $\iiint\limits_Q 2x^2 z\,\mathrm{ch}(2xyz)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=2, y=1/2, z=1/2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.19 $\iiint\limits_Q x^2\,\mathrm{sh}(2xy)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=-1, y=x, y=0, \\ z=0, z=8. \end{cases}$

4.20 $\iiint\limits_Q x^2 z\sin\frac{xyz}{2}dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=1, y=4, z=\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.21 $\iiint\limits_Q y^2\,\mathrm{ch}(xy)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=0, y=-1, y=x, \\ z=0, z=2. \end{cases}$

4.22 $\iiint\limits_Q y^2 z\,\mathrm{ch}(xyz)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=1, y=1, z=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.23 $\iiint\limits_Q x^2\sin(\frac{\pi}{2}xy)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=3, y=x, y=0, \\ z=0, z=\pi. \end{cases}$

4.24 $\iiint\limits_Q y^2 z\cos\frac{xyz}{2}dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=9, y=1, z=2\pi, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.25 $\iiint\limits_Q x^2\sin(\pi xy)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=1, y=2x, y=0, \\ z=0, z=4\pi. \end{cases}$

4.26 $\iiint\limits_Q y^2 z\,\mathrm{ch}(\frac{xyz}{2})dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=2, y=-1, z=2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.27 $\iiint\limits_Q y^2\,\mathrm{ch}(3xy)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=0, y=2, y=6x, \\ z=0, z=-3. \end{cases}$

4.28 $\iiint\limits_Q 2y^2 z\,\mathrm{ch}(2xyz)dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=\frac{1}{2}, y=2, z=-1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

4.29 $\iiint\limits_{Q} x^2 \sin(4\pi xy)dxdydz,\ Q:\begin{cases} x=1, y=x/2, y=0, \\ z=0, z=8\pi. \end{cases}$

4.30 $\iiint\limits_{Q} 8y^2 ze^{-xyz}dxdydz,\quad Q:\begin{cases} x=2, y=-1, z=2, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5 Вычислить тройной интеграл по области Q, ограниченной указанными линиями:

5.1 $\iiint\limits_{Q} xdxdydz,\ Q:\begin{cases} z=xy, z=0, \\ y=10x, y=0, x=1. \end{cases}$

5.2 $\iiint\limits_{Q} \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8})},\ Q:\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.3 $\iiint\limits_{Q} 15(y^2+z^2)dxdydz,\ Q:\begin{cases} z=x+y, x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.4 $\iiint\limits_{Q} (3x+4y)dxdydz,\ Q:\begin{cases} y=x, y=0, x=1, \\ z=5(x^2+y^2), z=0. \end{cases}$

5.5 $\iiint\limits_{Q} (1+2x^3)dxdydz,\ Q:\begin{cases} y=9x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.6 $\iiint\limits_{Q} (27+54y^3)dxdydz,\ Q:\begin{cases} y=x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.7 $\iiint\limits_{Q} ydxdydz,\ Q:\begin{cases} y=1, y=0, x=1, \\ z=xy, z=0. \end{cases}$

5.8 $\iiint\limits_{Q} \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3})^5},\ Q:\begin{cases} \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.9 $\iiint\limits_Q (3x^2+y^2)dxdydz,\ Q:\begin{cases} z=10x, y+x=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.10 $\iiint\limits_Q (15x+30z)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} z=x^2+3y^2, z=0, \\ y=x, y=0, x=1. \end{cases}$

5.11 $\iiint\limits_Q (4+8z^3)dxdydz\,, Q:\begin{cases} y=x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.12 $\iiint\limits_Q (1+2x^3)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} y=36x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.13 $\iiint\limits_Q 21xzdxdydz,\ \ Q:\begin{cases} y=x, y=0, x=2, \\ z=xy, z=0. \end{cases}$

5.14 $\iiint\limits_Q \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}\right)^6},\ \ Q:\begin{cases} x/10+y/8+z/3=1, \\ x=0, y=0. \end{cases}$

5.15 $\iiint\limits_Q (x^2+3y^2)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} z=10x, x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.16 $\iiint\limits_Q (60y+90z)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} y=x, y=0, x=1, \\ z=x^2+y^2, z=0. \end{cases}$

5.17 $\iiint\limits_Q (\dfrac{10}{3}x+\dfrac{5}{3})dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} y=9x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.18 $\iiint\limits_Q (9+18z)dxdydz,\ \ Q:\begin{cases} y=4x, y=0, x=1, \\ z=\sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.19 $\iiint\limits_Q 3y^2dxdydz,\ Q:\begin{cases} y=2x, y=0, x=2, \\ z=xy, z=0. \end{cases}$

5.20 $\iiint\limits_Q \dfrac{dxdydz}{(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6})^4},\ \ Q:\begin{cases} x/2+y/4+z/6=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.21 $\iiint\limits_Q x^2 dxdydz, \quad Q: \begin{cases} z = 10(x+3y), x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.22 $\iiint\limits_Q (8y+12z)dxdydz, \quad Q: \begin{cases} y = x, y=0, x=1, \\ z = 3x^2+2y^2, z=0. \end{cases}$

5.23 $\iiint\limits_Q 63(1+2\sqrt{y})dxdydz, \quad Q: \begin{cases} y = x, y=0, x=1, \\ z = \sqrt{xy}, z=0. \end{cases}$

5.24 $\iiint\limits_Q (x+y)dxdydz, \quad Q: \begin{cases} y = x, y=0, x=1, \\ z = 30x^2+60y^2, z=0. \end{cases}$

5.25 $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16})^5}, \quad Q: \begin{cases} x/6+y/4+z/16=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.26 $\iiint\limits_Q xyzdxdydz, \quad Q: \begin{cases} y = x, y=0, x=2, \\ z = xy, z=0. \end{cases}$

5.27 $\iiint\limits_Q y^2 dxdydz, \quad Q: \begin{cases} z = 10(3x+y), x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.28 $\iiint\limits_Q (5x+\frac{3z}{2})dxdydz, \quad Q: \begin{cases} y = x, y=0, x=1, \\ z = x^2+15y^2, z=0. \end{cases}$

5.29 $\iiint\limits_Q (x^2+4y^2)dxdydz, \quad Q: \begin{cases} z = 20(2x+y), x+y=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

5.30 $\iiint\limits_Q \frac{dxdydz}{(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5})^6}, \quad Q: \begin{cases} x/8+y/3+z/5=1, \\ x=0, y=0, z=0. \end{cases}$

***ИДЗ –2* Геометрические и физические приложения двойных и тройных интегралов**

1 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1.1 $y = 3/x, y = 4e^x, y = 3, y = 4$.

1.2 $x = \sqrt{36 - y^2}, x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$.

1.3 $x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \le 0)$.

1.4 $x = 8 - y^2, x = -2y$.

1.5 $y = \dfrac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8$.

1.6 $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}, y = \dfrac{1}{2x}, x = 16$.

1.7 $x = 5 - y^2, x = -4y$.

1.8 $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 (y \le 0)$.

1.9 $y = \sqrt{12 - x^2}, y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, x = 0 (x \ge 0)$.

1.10 $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y = \dfrac{3}{2x}, x = 9$.

1.11 $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x = 0 (x \ge 0)$.

1.12 $y = \sin x, y = \cos x, x = 0 (x \ge 0)$.

1.13 $y = 20 - x^2, y = -8x$.

1.14 $y = \sqrt{18 - x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}$.

1.15 $y = 32 - x^2, y = -4x$.

1.16 $y = 2/x, y = 5e^x, y = 2, y = 5$.

1.17 $x^2 + y^2 = 36, 3\sqrt{2}y = x^2 (y \ge 0)$.

1.18 $y = 3\sqrt{x}, y = 3/x, x = 4$.

1.19 $y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, y = \sqrt{36 - x^2}, x = 0 (x \ge 0)$.

1.20 $y = 25/- x^2, y = x - 5/2$.

1.21 $y=\sqrt{x}, y=1/x, x=16$.

1.22 $y=2/x, y=7e^{x}, y=2, y=7$.

1.23 $x=27-y^{2}, x=-6y$.

1.24 $\sqrt{72-y^{2}}, 6x=y^{2}, y=0 (y\geq 0)$.

1.25 $y=\sqrt{6-x^{2}}, y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^{2}}$.

1.26 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{2x}, x=4$.

1.27 $y=\sin x, y=\cos x, x=0 (x\leq 0)$.

1.28 $y=\dfrac{1}{x}, y=6e^{x}, y=1, y=6$.

1.29 $y=3\sqrt{x}, y=3/x, x=9$.

1.30 $y=11-x^{2}, y=-10x$.

2 Найти площади фигур, ограниченных линиями:

2.1 $y^{2}-2y+x^{2}=0$, $y^{2}-4y+x^{2}=0$, $y=x/\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}\,x$.

2.2 $x^{2}-4x+y^{2}=0, x^{2}-8x+y^{2}=0, y=0, y=x/\sqrt{3}.$

2.3 $y^{2}-6y+x^{2}=0, y^{2}-8y+x^{2}=0, y=x/\sqrt{2}, y=\sqrt{2}\,x.$

2.4 $x^{2}-2x+y^{2}=0, x^{2}-8x+y^{2}=0, y=0, y=x.$

2.5 $y^{2}-8y+x^{2}=0, y^{2}-10y+x^{2}=0, y=\dfrac{x}{2}, y=2x.$

2.6 $x^{2}-4x+y^{2}=0, x^{2}-8x+y^{2}=0, y=0, y=x.$

2.7 $y^{2}-4y+x^{2}=0, y^{2}-6y+x^{2}=0, y=x, x=0.$

2.8 $x^{2}-2x+y^{2}=0, x^{2}-10x+y^{2}=0, y=x, y=2x.$

2.9 $y^{2}-6y+x^{2}=0, y^{2}-10y+x^{2}=0, y=x, x=0.$

2.10 $x^{2}-2x+y^{2}=0, x^{2}-4x+y^{2}=0, y=x/5, y=5x.$

2.11 $y^{2}-2y+x^{2}=0, y^{2}-4y+x^{2}=0, y=3x, x=0.$

2.12 $x^{2}-2x+y^{2}=0, x^{2}-6x+y^{2}=0, y=x/4, y=4x.$

2.13 $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=2x, x=0.$

2.14 $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=x/3, y=3x.$

2.15 $y^2-2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0, y=x/4, x=0.$

2.16 $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=x/3.$

2.17 $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/2, y=2x.$

2.18 $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x/2.$

2.19 $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/5, y=5x.$

2.20 $x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=0, y=x.$

2.21 $y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=x, x=0.$

2.22 $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0, y=0, y=4x.$

2.23 $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

2.24 $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=0, y=2x.$

2.25 $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=x, x=0.$

2.26 $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0, y=x/2, y=2x.$

2.27 $y^2-4y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0, y=3x, x=0.$

2.28 $x^2-4x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, y=x/4, y=4x.$

2.29 $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0, y=x/2, x=0.$

2.30 $x^2-6x+y^2=0, x^2-10x+y^2=0, y=x/3, y=3x.$

3 Найти массу пластинки D, ограниченной кривыми с поверхностной плотностью ρ:

3.1 D: $x=1, y=0, y^2=4x\ (y\ge 0)$, $\rho=7x^2+y.$

3.2 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,\ x=0, y=0,\ x\ge 0, y\ge 0$,

$\rho=(x+y)/\left(x^2+y^2\right).$

3.3 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\ge 0)$, $\rho=7x^2/2+5y$.

3.4 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\ge 0, y\ge 0)$,

$\rho=(2x+5y)/(x^2+y^2)$.

3.5 D: $x=2, y=0, y^2=2x(y\geq 0)$, $\rho=7x^2/8+2y$.

3.6 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0, (x\geq 0, y\geq 0)$,

$\rho=(x+y)/(x^2+y^2)$.

3.7 D: $x=2, y=0, y^2=x/2(y\geq 0)$, $\rho=7x^2/2+6y$.

3.8 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0, (x\geq 0, y\leq 0)$,

$\rho=(2x-3y)/(x^2+y^2)$.

3.9 D: $x=1, y=0, y^2=4x(y\geq 0)$, $\rho=x+3y$.

3.10 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0(x\geq 0, y\leq 0)$,

$\rho=(x-y)/(x^2+y^2)$.

3.11 D: $x=1, y=0, y^2=x(y\geq 0)$, $\rho=3x+6y^2$.

3.12 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0(x\leq 0, y\geq 0)$,

$\rho=(2y-x)/(x^2+y^2)$.

3.13 D: $x=2$, $y=0$, $y^2=x/2$, $(y\geq 0)$, $\rho=2x+3y^2$.

3.14 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\leq 0, y\geq 0)$,

$\rho=(2y-3x)/(x^2+y^2)$.

3.15 D: $x=1/2, y=0, y^2=8x(y\geq 0)$, $\rho=7x+3y^2$.

3.16 D: $x^2+y^2=9, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\leq 0, y\geq 0)$,

$\rho=(2y-5x)/(x^2+y^2)$.

3.17 D: $x=1, y=0, y^2=4x$, $\rho=7x^2+2y$.

3.18 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0(x\leq 0, y\geq 0)$,

$\rho=(x+3y)/(x^2+y^2)$.

3.19 D: $x=2, y^2=2x, y=0(y\geq 0)$, $\rho=7x^2/4+y/2$.

3.20 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4$, $x=0, y=0(x\geq 0, y\geq 0)$,

$\rho=(x+2y)/(x^2+y^2)$.

3.21 D: $x=2, y=0, y^2=2x(y\geq 0)$, $\rho=7x^2/4+y$.

3.22 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0(x\geq 0, y\leq 0)$,

$\rho=(2x-y)/(x^2+y^2)$.

3.23 D: $x=2, y=0, y^2=x/2(y\geq 0)$, $\rho=7x^2/2+8y$.

3.24 D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=25$, $x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,

$\rho=(x-4y)/(x^2+y^2)$.

3.25 D: $x=1, y=0, y^2=4x (y\ge 0)$, $\rho=6x+3y^2$.

3.26 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=16$, $x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0)$,

$\rho=(3x-y)/(x^2+y^2)$.

3.27 D: $x=2, y=0, y^2=x/2$, $\rho=4x+6y^2$.

3.28 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,

$\rho=\left(y-4x\right)/\left(x^2+y^2\right)$.

3.29 D: $x=1/2, y=0, y^2=2x (y\ge 0)$, $\rho=4x+9y^2$.

3.30 D: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$, $x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0)$,

$\rho=-2x/\left(x^2+y^2\right)$.

4 Найти массу пластинки D, заданной неравенствами, с поверхностной плотностью ρ:

4.1 D: $x^2+y^2/4\le 0$, $\rho=y^2$.

4.2 D: $1\le x^2/9+y^2/4\le 2$, $y\ge 0, y\le \dfrac{2}{3}x$, $\rho=y/x$.

4.3 D: $1\le x^2/4+y^2\le 25$, $x\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=x/y^3$.

4.4 D: $x^2/9+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=x^2y$.

4.5 D: $x^2/9+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=7x^2y/18$.

4.6 D: $1\le x^2/4+y^2\le 4$, $y\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=8y/x^3$.

4.7 D: $x^2/9+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $\rho=7xy^6$.

4.8 D: $x^2/4+y^2\le 1$, $\rho=4y^4$.

4.9 D: $1\le x^2/4+y^2/9\le 4$, $x\ge 0, y\ge 3x/2$, $\rho=x/y$.

4.10 D: $1\le x^2/16+y^2/4\le 4$, $x\ge 0, y\ge x/2$, $\rho=x/y$.

4.11 D: $x^2/4+y^2/9\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=x^3y$.

4.12 D: $x^2/4+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=6x^3y^3$.

4.13 D: $x^2/9+y^2/4\le 1$, $\rho=x^2y^2$.

4.14 D: $x^2/16+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=5xy^7$.

4.15 D: $x^2/4+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=30x^3y^7$.

4.16 D: $1\le x^2/9+y^2/4\le 3$, $y\ge 0, y\le \frac{2}{3}x$, $\rho=y/x$.

4.17 D: $x^2+y^2/25\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=7x^4y$.

4.18 D: $x^2+y^2/9\le 1$, $y\ge 0$, $\rho=35x^4y^3$.

4.19 D: $x^2/4+y^2/9\le 1$, $\rho=x^2$.

4.20 D: $1\le x^2+y^2/16\le 9$, $y\le 0, y\le 4x$, $\rho=y/x^3$.

4.21 D: $x^2/9+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $\rho=11xy^8$.

4.22 D: $1\le x^2/4+y^2/16\le 5$, $x\ge 0, y\ge 2x$, $\rho=x/y$.

4.23 D: $1\le x^2/9+y^2/4\le 5$, $x\ge 0, y\ge 2x/3$, $\rho=x/y$.

4.24 D: $x^2/4+y^2/9\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=x^5y$.

4.25 D: $x^2/4+y^2/25\le 1$, $\rho=x^4$.

4.26 D: $x^2+y^2/16\le 9$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=15x^5y^3$.

4.27 D: $1\le x^2/4+y^2/9\le 36$, $x\ge 0, y\ge \frac{3}{2}x$, $\rho=9x/y^3$.

4.28 D: $x^2/100+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=6xy^9$.

4.29 D: $x^2/16+y^2\le 1$, $x\ge 0, y\ge 0$, $\rho=105x^3y^9$.

4.30 D: $1\le x^2/9+y^2/16\le 2$, $y\ge 0, y\le \frac{4}{3}x$, $\rho=27y/x^5$.

5 Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

5.1 $x+y=4, y=\sqrt{2x}, z=3y, z=0.$

5.2 $y=16\sqrt{2x}, y=\sqrt{2x}, z=0, x+z=2.$

5.3 $x^2+y^2=2, y=\sqrt{x}, y=0, z=0, z=15x.$

5.4 $y=5\sqrt{x}, y=5x/3, z=0, z=5+5\sqrt{x/3}.$

5.5 $x+y=2, y=\sqrt{x}, z=12y, z=0.$

5.6 $x=20\sqrt{2y}, x=5\sqrt{2y}, z=0, z+y=1/2.$

5.7 $x = 5\sqrt{y/2}, x = 5y/6, z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$

5.8 $x = \frac{5}{6}\sqrt{y}, x = \frac{5}{18}y, z = 0, z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{y})$

5.9 $x + y = 6, x = \sqrt{3y}, z = 4x/5, z = 0.$

5.10 $x = 19\sqrt{2y}, x = 4\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 2.$

5.11 $x^2 + y^2 = 8, x = \sqrt{2y}, x = 0, \quad z = 30y/11, z = 0$.

5.12 $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, z = 3x/5, z = 0.$

5.13 $y = 6\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, z = 0, x + z = 3.$

5.14 $y = \frac{5}{6}\sqrt{x}, y = \frac{5}{18}x, z = 0, z = \frac{5}{18}(3 + \sqrt{x}).$

5.15 $x^2 + y^2 = 18, y = \sqrt{3x}, y = 0, z = 0, z = 5x/11.$

5.16 $x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0.$

5.17 $x = 7\sqrt{3y}, x = 2\sqrt{3y}, z = 0, z + y = 3.$

5.18 $x = 5\sqrt{y/3}, x = 5y/9, z = 0, z = 5(3 + \sqrt{y})/9.$

5.19 $x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, x = 0, z = 0, z = 10y/11.$

5.20 $x = 17\sqrt{2y}, x = 2\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 1/2.$

5.21 $y = \sqrt{15x}, y = \sqrt{15x}, z = 0, z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$

5.22 $x^2 + y^2 = 50, y = \sqrt{5x}, y = 0, z = 0, z = 3x/11.$

5.23 $x + y = 8, y = \sqrt{4x}, z = 3y, z = 0.$

5.24 $x = 16\sqrt{2y}, x = \sqrt{2y}, z + y = 2, z = 0.$

5.25 $x = 15\sqrt{y}, x = 15y, z = 0, z = 15(1 + \sqrt{y}).$

5.26 $x^2 + y^2 = 50, x = \sqrt{5y}, x = 0, z = 0, z = 6y/11.$

5.27 $x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{13}{4} - x \ , z = 0.$

5.28 $x^2 + y^2 = 2y, z = \frac{9}{4} - x^2, z = 0.$

5.29 $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2x}, z = x^2 + y^2 - 64, z = 0, (z \geq 0).$

5.30 $x^2 + y^2 = 2y, z = 5/4 - x^2, z = 0.$

ИДЗ-3 Векторный анализ

1 Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz):

1.1

$\vec{a} = 7x\vec{i} + (5\pi y + 2)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$,

$P:\quad x + y/2 + 4z = 1.$

1.2

$\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + j + 3z\vec{k}$,

$P:\quad x/3 + y + z = 1.$

1.3

$\vec{a} = 2\pi x\vec{i} + (7y + 2)\vec{j} + 7\pi z\vec{k}$,

$P: x + y/2 + z/3 = 1.$

1.4

$\vec{a} = (2x+1)\vec{i} + y\vec{j} + 3\pi z\vec{k}$,

$P:\quad x/3 + y + 2z = 1.$

1.5

$\vec{a} = 7x\vec{i} + 9\pi y\vec{j} + \vec{k}$,

$P:\quad x + y/3 + z = 1.$

1.6

$\vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11\pi z\vec{k}$,

$P:\quad x + y + z/3 = 1.$

1.7

$\vec{a} = 5\pi x\vec{i} + (9y + 1)\vec{j} + 4\pi z\vec{k}$,

$P:\quad x/2 + y/3 + z/2 = 1.$

1.8

$\vec{a} = x\vec{i} + (\pi z - 1)\vec{k}$,

$P:\quad 2x + y/2 + z/3 = 1.$

1.9

$\vec{a} = 2\vec{i} - y\vec{j} + \dfrac{3\pi z}{2}\vec{k}$,

$P:\quad x/3 + y + z/4 = 1.$

1.10

$\vec{a} = 9\pi x\vec{i} + (5y + 1)\vec{j} + 2\pi z\vec{k}$,

$P:\quad 3x + y + z/9 = 1.$

1.11

$\vec{a} = 7\pi x\vec{i} + 2\pi y\vec{j} + (7z + 2)\vec{k}$,

$P:\quad x + y + z/2 = 1.$

1.12

$\vec{a} = \pi y\vec{j} + (4z - 2)\vec{k}$,

$P:\quad 2x + y/3 + z/4 = 1.$

1.13

$\vec{a} = (3\pi - 1)x\vec{i} + (9\pi y + 1)\vec{j} + 6\pi z\vec{k}$,

$P:\quad \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{9} = 1.$

1.14

$\vec{a} = \pi x\vec{i} + \dfrac{\pi}{2}y\vec{j} + (4z - 2)\vec{k}$,

$P:\quad x + y/3 + z/4 = 1.$

1.15

$\vec{a} = (27\pi - 1)\vec{i} + (34\pi y + 3)\vec{j} + 20\pi z\vec{k}$,

$P:\quad 3x + y/9 + z = 1.$

1.16

$\vec{a} = 9\pi y\vec{j} + (7z + 1)\vec{k}$,

$P:\quad x + y + z = 1.$

1.17

$\vec{a} = \pi y\,\vec{j} + (1-2z)\,\vec{k}$,

$P: \quad x/4 + y/3 + z = 1.$

1.18

$\vec{a} = (5y+3)\,\vec{j} + 11\pi z\,\vec{k}$,

$P: \quad x + y/3 + 4z = 1.$

1.19

$\vec{a} = \pi x\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\pi z\,\vec{k}$,

$P: \quad x/2 + y/3 + z = 1.$

1.20

$\vec{a} = 4\pi x\,\vec{i} + 7\pi y\,\vec{j} + (2z+1)\,\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/3 + 2z = 1.$

1.21

$\vec{a} = 3\pi x\,\vec{i} + 6\pi y\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y + z/3 = 1.$

1.22

$\vec{a} = \pi x\,i - 2y\,\vec{j} + \vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/6 + z = 1.$

1.23

$\vec{a} = (21\pi - 1)\,\vec{i} + 62\pi y\,\vec{j} + (1 - 2\pi z)\,\vec{k}$,

$P: \quad 8x + y/2 + z/3 = 1.$

1.24

$\vec{a} = \pi x\,\vec{i} + 2\pi y\,\vec{j} + 2\vec{k}$,

$P: \quad x/2 + y/4 + z/3 = 1.$

1.25

$\vec{a} = 9\pi x\,\vec{i} + 2\pi y\,\vec{j} + 8\vec{k}$,

$P: \quad 2x + 8y + z/3 = 1.$

1.26

$\vec{a} = 7\pi x\,\vec{i} + (4y+1)\,\vec{j} + 2\pi z\,\vec{k}$,

$P: \quad x/3 + 2y + z = 1.$

1.27

$\vec{a} = (\pi - 1)x\,\vec{i} + 2\pi y\,\vec{j} + (1 - \pi z)\,\vec{k}$,

$P: \quad x/4 + y/2 + z/3 = 1.$

1.28

$\vec{a} = 6\pi x\,\vec{i} + 3\pi y\,\vec{j} + 10\vec{k}$,

$P: \quad 2x + y/2 + z/3 = 1.$

1.29

$\vec{a} = \dfrac{\pi}{2}x\,\vec{i} + \pi y\,\vec{j} + (4-2z)\,\vec{k}$,

$P: \quad x + y/3 + z/4 = 1.$

1.30

$\vec{a} = 7\pi x\,\vec{i} + 4\pi y\,\vec{j} + 2(z+1)\,\vec{k}$,

$P: \quad x/3 + y/4 + z = 1.$

2 Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность Ω (нормаль внешняя):

2.1 $\vec{a} = (e^z + 2x)\vec{i} + e^x\vec{j} + e^y\vec{k}$,
$\Omega: \quad x + y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2.2 $\vec{a} = (3z^2 + x)\vec{i} + (e^x - 2y)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}$,
$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1, \quad z = 4.$

2.3 $\vec{a} = (\ln y + 7x)\vec{i} + (\sin z - 2y)\vec{j} + (e^y - 2z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2.$

2.4 $\vec{a} = (\cos z + 3x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (3z - y^2)\vec{k}$,

$\Omega: \quad z^2 = 36(x^2 + y^2), \quad z = 6.$

2.5 $\vec{a} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$,

$\Omega: \quad 2x + y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2.6 $\vec{a} = (6x - \cos y)\vec{i} - (e^x + z)\vec{j} - (2y + 3z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 1, \quad z = 2.$

2.7 $\vec{a} = (4x - 2y^2)\vec{i} + (\ln z - 4y)\vec{j} + (x + 3z/4)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$

2.8 $\vec{a} = (1 + \sqrt{z})\vec{i} + (4y - \sqrt{x})\vec{j} + xy\vec{k}$,

$\Omega: \quad z^2 = 4(x^2 + y^2), \quad z = 3.$

2.9 $\vec{a} = (\sqrt{z} - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y^2 - z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad 3x - 2y + z = 6, \quad x = 0. \quad y = 0. \quad z = 0.$

2.10 $\vec{a} = (yz + x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (xy^2 + z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2.11 $\vec{a} = (e^{2y} + x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (y^2 + 3z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x - y + z = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2.12 $\vec{a} = (\sqrt{z} - 2x)\vec{i} + (e^x + 3y)\vec{j} + \sqrt{y + x}\,\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 2, \quad z = 5.$

2.13 $\vec{a} = (e^z + x/4)\vec{i} + (\ln x + y/4)\vec{j} + z/4\,\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2.$

2.14 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (1 + 2z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad z^2 = 4(x^2 + y^2), \quad z = 2.$

2.15 $\vec{a} = (e^y + 2x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (2z - 1)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x + 2y + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

2.16 $\vec{a}=(x+y^2)\vec{i}+(xz+y)\vec{j}+(\sqrt{x^2+1}+z)\vec{k},$

$\Omega:\quad x^2+y^2=z^2,\quad z=2,\quad z=3.$

2.17 $\vec{a}=(e^y+2x)\vec{i}+(xz-y)\vec{j}+(1/4)(e^{xy}-z)\vec{k},$

$\Omega:\quad x^2+y^2+z^2=2y+3.$

2.18 $\vec{a}=(\sqrt{z}+y)\vec{i}+3x\vec{j}+(3z+5x)\vec{k},$

$\Omega:\quad z^2=8(x^2+y^2),\quad z=2.$

2.19 $\vec{a}=(8yz-x)\vec{i}+(x^2-1)\vec{j}+(xy-2z)\vec{k},$

$\Omega:\quad 2x+3y-z=6,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

2.20 $\vec{a}=(y+z^2)\vec{i}+(x^2+3y)\vec{j}+xy\vec{k},$

$\Omega:\quad x^2+y^2+z^2=2x.$

2.21 $\vec{a}=(2yz-x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+(x^2+z)\vec{k},$

$\Omega:\quad x-y+z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

2.22 $\vec{a}=(\sin z+2x)\vec{i}+(\sin x-3y)\vec{j}+(\sin y+2z)\vec{k},$

$\Omega:\quad x^2+y^2=z^2,\quad z=3,\quad z=6.$

2.23 $\vec{a}=(\cos z+x/4)\vec{i}+(e^x+y/4)\vec{j}+(z/4-1)\vec{k},$

$\Omega:\quad x^2+y^2+z^2=2z+3.$

2.24 $\vec{a}=(\sqrt{x}+1+x)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+(\sin x+z)\vec{k},$

$$\Omega:\quad \begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=1. \end{cases}$$

2.25 $\vec{a}=(5x-6y)\vec{i}+(11x^2+2y)\vec{j}+(x^2-4z)\vec{k},$

$$\Omega:\quad \begin{cases} x+y+2z=2, \\ x=0,\quad y=0,\quad z=0. \end{cases}$$

2.26 $\vec{a}=(y^2+z^2+6x)\vec{i}+(e^z-2y+x)\vec{j}+(x+y-z)\vec{k},$

$$\Omega:\quad \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=1,\quad z=3. \end{cases}$$

2.27 $\vec{a} = \frac{1}{2}(x+z)\vec{i} + \frac{1}{4}(xz+y)\vec{j} + (xy-2)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$

2.28 $\vec{a} = (3yz - x)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j} + (6z-1)\vec{k}$,

$\Omega: \quad \begin{cases} z^2 = 9(x^2+y^2), \\ z = 3. \end{cases}$

2.29 $\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (\sin x + y)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 6, \\ x = 0, \quad y = 0. \quad z = 0. \end{cases}$

2.30 $\vec{a} = (8x+1)\vec{i} + (zx - 4y)\vec{j} + (e^x - z)\vec{k}$,

$\Omega: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$

3 Найти работу силы $\vec{F} = P(x;y)\vec{i} + Q(x;y)\vec{j}$ при перемещении вдоль линии L от точки $M(x;y)$ к точке $N(x;y)$:

3.1

$\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(-4{,}0)$, $N(0{,}2)$.

3.2

$\vec{F} = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$,

$L: \; x^2 + y^2 = 4 \; (y \ge 0)$,

$M(2,0)$, $N(-2,0)$.

3.3

$\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\,j$,

L: отрезок MN,

$M(-4{,}0)$, $N(0{,}2)$.

3.4

$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$,

$L: \; x^2 + y^2 = 4 \, (y \ge 0)$,

$M(2{,}0)$, $N(-2{,}0)$.

3.5

$\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$,

$L: \; 2x^2 + y^2 = 1 \; (y \ge 0)$,

$M(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $N(\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$.

3.6

$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$,

$L: \; y = x^2$,

$M(-1{,}1)$, $N(1{,}1)$.

3.7

$\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$,

$M(3,0),\ \ N(-3,0)$.

3.8

$\vec{F} = x^2 y\,\vec{i} - y\,\vec{j}$,

$L:$ отрезок MN,

$M(-1,0),\ \ N(0,1)$.

3.9

$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$,

$L:\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1\ (x \geq 0,\ \ y \geq 0)$,

$M(1,0),\ \ N(0,3)$.

3.10

$\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 1\ (y \geq 0)$,

$M(1,0),\ \ N(-1,0)$.

3.11

$\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}$,

$L: \begin{cases} x, \text{ при } & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, \text{ при } & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$

$M(2,0),\ \ N(0,0)$.

3.12

$\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 2\ (y \geq 0)$,

$M(\sqrt{2},0),\ \ N(-\sqrt{2},0)$.

3.13

$\vec{F} = xy\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 1\ (x \geq 0,\ y \geq 0)$,

$M(1,0),\ \ N(0,1)$.

3.14

$\vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j})$,

$L:\ x^2 + y^2 = R^2\ (y \geq 0)$,

$M(R,0),\ \ N(-R,0)$.

3.15

$\vec{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 1\ (x \geq 0,\ \ y \geq 0)$,

$M(1,0),\ \ N(-1,0)$.

3.16

$\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 4$,

$M(2,0),\ N(0,2)$.

3.17

$\vec{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\bar{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 16\ (x \geq 0,\ \ y \geq 0)$,

$M(4,0),\ N(0,4)$.

3.18

$F = xy\,\vec{i}$,

$L:\ y = \sin x$,

$M(\pi,0),\ \ N(0,0)$.

3.19

$\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$,

$L: x^2 + y^2 = 9\ (x \ge 0, y \ge 0)$,

$M(3,0),\ N(0,3)$.

3.20

$\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - (x+y)^2\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(1,0),\ N(0,1)$.

3.21

$\vec{F} = x^2\vec{i}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 9\ (x \ge 0,\ \ y \ge 0)$,

$M(3,0),\ N(0,3)$.

3.22

$\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} + y^2\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(2,0),\ N(0,2)$.

3.23

$\vec{F} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 4\ (x \ge 0,\ \ y \ge 0)$,

$M(2,0),\ N(0,2)$.

3.24

$\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} - x\vec{j}$,

$L:\ y = 2x^2$,

$M(0,0),\ N(1,2)$.

3.25

$\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j}$,

$L:\ x^2 + y^2 = 9\ (\ \ y \ge 0)$,

$M(3,0),\ N(-3,0)$.

3.26

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$,

L: отрезок MN,

$M(1,0),\ N(0,3)$.

3.27

$\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}$,

$L:\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1(x \ge 0,\ \ y \ge 0)$,

$M(1,0),\ N(0,3)$.

3.28

$\vec{F} = (xy - x)\vec{i} - \dfrac{x^2}{2}\vec{j}$,

$L:\ y = 2\sqrt{x}$,

$M(0,0),\ N(1,2)$.

3.29

$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$,

$L:\ x^2/4 + y^2/4 = 1(y \ge 0)$,

$M(0,0),\ N(1,2)$.

3.30

$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$,

$L:\ y = x^3$,

$M(0,0),\ N(2,8)$.

4 Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура Γ (в направлении, соответствующем возрастанию параметра t):

4.1

$\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2}/2\cos t, \ \ y = \sqrt{2}/2\cos t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

4.2

$\vec{a} = -x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt[3]{4}\cos t, \ \ y = \sqrt[3]{4}\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

4.3

$\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = \sin t, \\ z = 2(1-\cos t). \end{cases}$$

4.4

$\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = (\sqrt{2}\sin t)/2, \\ z = (\sqrt{2}\cos t)/2. \end{cases}$$

4.5

$\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 4\cos t, \ \ y = 4\sin t, \\ z = 1-\cos t. \end{cases}$$

4.6

$\vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \ \ y = 2\sin t, \\ z = 2 - 2\cos t - 2\sin t. \end{cases}$$

4.7

$\vec{a} = 2z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \ \ y = 2\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

4.8

$\vec{a} = y\vec{i} + -x\vec{j} + z\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = \sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

4.9

$\vec{a} = x\vec{i} + z^2\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = 2\sin t, \\ z = 2\cos t - 2\sin t - 1. \end{cases}$$

4.10

$\vec{a} = 3y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, \ \ y = 3\sin t, \\ z = 3 - 3\cos t - 3\sin t. \end{cases}$$

4.11

$\vec{a} = -x^2y^3\vec{i} + 2\vec{j} + xz\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \ \ y = \sqrt{2}\sin t, \\ z = 1. \end{cases}$$

4.12

$\vec{a} = 6z\vec{i} - x\vec{j} + xy\vec{k}$,

$$\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t, \ \ y = 3\sin t, \\ z = 3. \end{cases}$$

4.13

$\vec{a} = z\vec{i} + y^2\vec{j} - x\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \ \ y = 2\sin t, \\ z = \sqrt{2}\cos t. \end{cases}$$

4.14

$\vec{a} = x\vec{i} + 2z^2\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = 3\sin t, \\ z = 2\cos t - 3\sin t - 2. \end{cases}$$

4.15

$\vec{a} = x\vec{i} - \dfrac{1}{3}z^2\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = (\cos t)/2, \ y = (\sin t)/3, \\ z = \cos t - (\sin t)/3 - 1/4. \end{cases}$$

4.16

$\vec{a} = 4y\vec{i} - 3x\vec{j} + x\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 4\cos t, \ \ y = 4\sin t, \\ z = 4 - 4\cos t - 4\sin t. \end{cases}$$

4.17

$\vec{a} = -z\vec{i} - x\vec{j} + zx\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 5\cos t, \ \ y = 5\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$$

4.18

$\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t, \ \ y = 2\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

4.19

$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 3\cos t, \ \ y = 3\sin t, \\ z = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

4.20

$\vec{a} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = \sin t, \\ z = 4 - \cos t - \sin t. \end{cases}$$

4.21

$\vec{a} = xz\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

4.22

$\vec{a} = -x^2y^3\vec{i} + 3\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = \sin t. \\ z = 5. \end{cases}$$

4.23

$\vec{a} = 7z\vec{i} - x\vec{j} + yz\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 6\cos t, \ \ y = 6\sin t, \\ z = 1/3. \end{cases}$$

4.24

$\vec{a} = xy\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t, \ \ y = \sin t, \\ z = \sin t. \end{cases}$$

4.25

$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t, \ \ y = 2\sin t, \\ z = 3(1 - \cos t). \end{cases}$$

4.26

$\vec{a} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y\vec{k}$,

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos t, \ \ y = 3\sin t, \\ z = 4\cos t - 3\sin t - 3. \end{cases}$$

4.27

$\vec{a} = -2z\,\vec{i} - x\,\vec{j} + x^2\vec{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = (\cos t)/3, \quad y = (\sin t)/3, \\ z = 8. \end{cases}$

4.28

$\vec{a} = x\,\vec{i} - 3z^2\,\vec{j} + y\,\vec{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \quad y = 4\sin t, \\ z = 2\cos t - 4\sin t + 3. \end{cases}$

4.29

$\vec{a} = x\,\vec{i} - 2z^2\,\vec{j} + y\,\vec{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \; y = 4\sin t. \\ z = 6\cos t - 4\sin t + 1. \end{cases}$

4.30

$\vec{a} = -x^2 y^3\vec{i} + 4\,\vec{j} + x\,\vec{k}$,

$\Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \\ z = 4. \end{cases}$

5 Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a}$:

5.1 $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$.

5.2 $\vec{a} = zx\vec{i} - \vec{j} + y\,\vec{k}$.

5.3 $\vec{a} = yz\,\vec{i} + 2xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$.

5.4 $\vec{a} = x\vec{i} + yz\vec{j} - x\vec{k}$.

5.5 $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} - z\,\vec{k}$.

5.6 $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5.7 $\vec{a} = yz\,\vec{i} + 2xz\,\vec{j} + y^2\vec{k}$.

5.8 $5\,\vec{a} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$.

5.9 $\vec{a} = y\,\vec{i} + (1 - x)\,\vec{j} - z\,\vec{k}$.

5.10 $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5.11 $\vec{a} = 4x\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - xy\,\vec{k}$.

5.12 $\vec{a} = 2y\,\vec{i} - 3x\,\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5.13 $\vec{a} = -3z\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + 2y\,\vec{k}$.

5.14 $\vec{a} = 2y\,\vec{i} + 5x\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$.

5.15 $\vec{a} = 2y\,\vec{i} + 2xz\,\vec{j} - 2yz\,\vec{k}$.

5.16 $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\,\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5.17 $\vec{a} = xz\,\vec{i} - \vec{j} + y\,\vec{k}$.

5.18 $\vec{a} = 2yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} - x^2\vec{k}$.

5.19 $\vec{a} = 4x\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + x\vec{k}$.

5.20 $\vec{a} = -y\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}$.

5.21 $\vec{a} = y\,\vec{i} + 3x\,\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5.22 $\vec{a} = 2yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + y^2\vec{k}$.

5.23 $\vec{a} = (2 - xy)\vec{i} - yz\,\vec{j} - xz\,\vec{k}$.

5.24 $\vec{a} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + 3z^2\vec{k}$.

5.25 $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$.

5.26 $\vec{a} = x^2\vec{i} + yz\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$.

5.27 $\vec{a} = y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5.28 $\vec{a} = 3z\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 2y\,\vec{k}$.

5.29 $\vec{a} = (x + y)\vec{i} - x\,\vec{j} + 6\vec{k}$.

5.30 $\vec{a} = 4\vec{i} + 3x\,\vec{j} + 3xz\,\vec{k}$.

Литература

1. Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

2. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

3. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для студентов вузов: в 2 ч. Ч. 2. Функции нескольких переменных / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1988.

4. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

5. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

7. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть шестая

Интегральное исчисление
функции многих переменных

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия №02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать 19.12.07. Бумага писчая №1. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл. печ. л. 1,16. Уч-изд. л. 12,0. Тираж 100 экз. Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия №02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104