Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть вторая

Дифференциальное исчисление функции
действительной переменной

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П.Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.
Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функции действительной переменной / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 157 с.

ISBN 978-985-439-250-9

Во второй части пособия по темам «Производная и дифференциал функции» и «Приложения производной», излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

ISBN 978-985-439-250-9

Содержание

Введение

Пособие «Дифференциальное исчисление функции действительной переменной» является второй частью комплекса практических пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физических факультетов вузов. В нем рассматривается раздел математического анализа, связанный с производной функции действительной переменной. Весь материал разбит на части, соответствующие одному практическому занятию. Вначале каждой части помещены определения, теоремы и формулы (без доказательств), необходимые для решения задач. Затем приводятся подробные решения типовых примеров, задания для аудиторной и домашней работ, варианты индивидуальных домашних заданий. Содержание данного пособия соответствует учебной программе по математическому анализу для физических специальностей и связано с курсом лекций.

При подборе задач авторами использованы различные источники, в том числе «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991).

Пособие может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий по «Математическому анализу» и студентами в их самостоятельной работе над предметом.

Практическое занятие 1 Определение производной

1.1 Определение производной, правая и левая производная
1.2 Дифференцируемость функции и дифференциал
1.3 Геометрический и физический смысл производной и дифференциала
1.4 Свойства производных, связанные с арифметическими операциями

1.1 Определение производной, правая и левая производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$ точки x_0. Если фиксированное значение аргумента x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x \in U(\delta; x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначается: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Производная функции $y = f(x)$ в произвольной точке x *обозначается* так: $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

При каждом конкретном числовом значении x производная $f'(x)$ (если она существует при данном x) функции $y = f(x)$ представляет собой определенное число. Значениям переменной x ставятся в соответствие определенные значения переменной $f'(x)$. Поэтому производная является функцией аргумента x.

Если для некоторого значения x предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$, то говорят, что функция $y=f(x)$ в точке x имеет *бесконечную производную*.

Если функция $y=f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ \left(\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной *производной слева* (*справа*) функции $f(x)$ в точке x_0

Обозначается: $f'(x_0-0)$ или $f'_-(x_0)$ ($f'(x_0+0)$ или $f'_+(x_0)$).

Левая и правая производные называются *односторонними производными*.

Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют производные слева и справа, причем

$$f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0).$$

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 левую и правую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Операция нахождения производной функции f называется *дифференцированием*.

1.2 Дифференцируемость функции и дифференциал

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

где A – некоторое действительное число и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке. Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке. Обратное верно не всегда, т. е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* на $[a;b]$, если она дифференцируема в любой точке $x \in [a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда, если $f'(x_0) \neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}\right) = 1.$$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ приращение функции $\Delta f(x_0)$ и выражение $f'(x_0)\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Поэтому при $\Delta x \to 0$ можно приближенно считать, что $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Дифференциалом функции $f(x)$ называется величина $f'(x_0)\Delta x$, являющаяся *главным* (линейным) членом приращения функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В частности, если $y = x$, то $y' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции

$f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x).$$

Видно, что дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

На практике дифференциал используется при приближенных вычислениях следующим образом:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \qquad (1.1)$$

1.3 Геометрический и физический смысл производной и дифференциала

Рассмотрим задачу о проведении касательной к произвольной плоской кривой. Пусть L – дуга плоской кривой, M_0 – точка этой кривой, M_0M – секущая (рисунок 1.1). Если точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая поворачивается вокруг точки M_0 и стремится к некоторому предельному положению M_0T.

Касательной к кривой L в точке M_0 называется прямая M_0T, которая представляет собой предельное положение секущей M_0M при стремлении по кривой точки M к точке M_0 (рисунок 1.1).

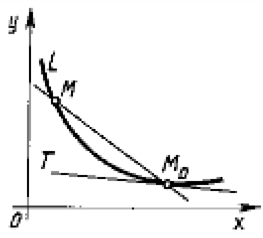

Рисунок 1.1 – Секущая M_0M и касательная M_0T

Если предельного положения секущей не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является *точкой излома*, или *заостре-ния*, кривой (рисунок 1.2, *а, б, в*).

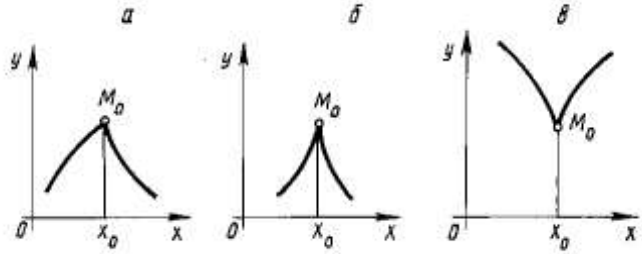

Рисунок 1.2 – Точки излома графика функции

Пусть кривая L является графиком функции $f(x)$ и точка $M(x_0; f(x_0)) \in L$ (рисунок 1.3).

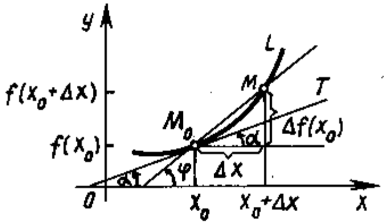

Рисунок 1.3 – Геометрический смысл касательной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1.2)$$

Отсюда следует *геометрический смысл производной*: производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.3}$$

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{1.4}$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной в $M(x_0; f(x_0))$ к линии $y = f(x)$ (рисунок 1.4).

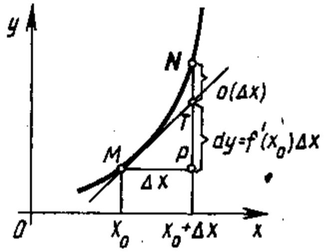

Рисунок 1.4 – Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в некоторой окрестности точки x_0. Если аргумент x_0 функции получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит той же окрестности точки x_0, то соответствующее приращение функции равно $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$. Тогда средняя скорость изменения функции равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1.5)$$

а мгновенная скорость ее изменения:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1.6)$$

Механический смысл производной: производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$.

В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг математических моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1 Пусть материальная точка M движется неравномерно и $y = s(t)$ – функция, устанавливающая зависимость пути от времени t. Тогда мгновенная скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t:

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если движение на этом участке равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

2 Пусть $y = v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

3 Пусть $y = Q(T)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Тогда теплоемкость тела есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q(T_0 + \Delta T) - Q(T_0)}{\Delta T}.$$

4 Пусть необходимо определить линейную плотность неоднородного тонкого стержня длиной l, где m – масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Ясно, что масса стержня является функцией x: $f(x) = m(x)$. Тогда линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0) = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

5 Пусть $y = \Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Тогда мгновенное значение электродвижущей силы индукции равно скорости изменения магнитного потока, т.е. производной от магнитного потока Φ по времени t:

$$\varepsilon = \Phi'(t_0) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t}$$

6 Пусть $y = q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Тогда сила тока в контуре в момент времени t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекало через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. При этом $\Delta q = dq + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

1.4 Свойства производных, связанные с арифметическими операциями

Ниже приводятся свойства производных, связанные с арифметическими операциями:

– производная постоянной функции равна нулю:

$$(c)' = 0;$$

– *(правило дифференцирования алгебраической суммы функций)* Производная алгебраической суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме (разности) производных слагаемых:

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

– **(***правило дифференцирования произведения функций)* производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

– если $u = u(x)$ дифференцируемая в точке x функция, то $\forall c \in \mathbf{R}$

$$(cu)' = c \cdot u';$$

– *(правило дифференцирования частного функций)* производная частного двух дифференцируемых функций равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель представляет собой разность между произведением знаменателя данной дроби на производную ее числителя и произведением числителя на производную знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

В таблице 1.1 приводятся производные и дифференциалы элементарных функций

Таблица 1.1 – Производные и дифференциалы элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
$y = c$	$y' = 0$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbf{R}$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = a^x$	$y' = \alpha^x \ln a$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{th} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{cth} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке?

2 Сформулируйте определение производной.

3 Что называется правой и левой производной?

4 В чем состоит геометрический смысл производной?

5 Какая функция называется дифференцируемой в точке x_0?

6 Какая связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной?

7 Что такое дифференциал функции в точке? От какого аргумента он зависит?

8 В чем состоит геометрический смысл дифференциала.

9 Как используются понятия производной и дифференциала в физике?

10 Сформулируйте правила нахождения производной постоянной функции, производной суммы и разности функций, производной произведения функций, производной частного функций.

Решение типовых примеров

1 Пользуясь определением производной, найти значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

а) $y = x^3$ в точке $x_0 = 1$,

б) $y = \sin x$, в произвольной точке x_0,

в) $y = a^x$, $a > 0$, в произвольной точке x_0.

Р е ш е н и е. а) находим приращение функции $y = x^3$ в точке $x = 1$:

$\Delta y = (1+\Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Тогда по определению

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3$$

б) имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Поэтому

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

в) для функции $y = a^x$, $a > 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

2 Доказать, что функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

Решение. Очевидно, что эта функция определена и непрерывна на множестве **R**. Вычислим производную функции справа в точке $x_0 = 0$.

При $x \ge 0$ имеем $y = |x| = x$, $\Delta y = \Delta x$.

Поэтому

$$f_+'(0) = f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично при $x < 0$ получим $y = |x| = -x$, $\Delta y = -\Delta x$.

Следовательно, производная слева равна

$$f_-'(0) = f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку $f_-'(0) \ne f_+'(0)$, то функция $y = |x|$ в данной точке производной не имеет.

Следовательно, она не дифференцируема в этой точке.

3 Найти дифференциал функции $y = x^2 - x + 3$ в точке $x = 2$.

Решение. Используя определение дифференциала, находим:

$$\Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = (2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 3 - \left(2^2 - 2 + 3\right) =$$
$$= 3\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Откуда $dy = 3\Delta x = 3dx$.

4 Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение $\sqrt{0{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y(x) = \sqrt{1 + x}$.

Так как $y(-0,02)=\sqrt{0,98}$, и

$$y(0)=1, \qquad y'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad y'(0)=\frac{1}{2},$$

то по формуле (1.1) получаем:

$$y(-0,02)\approx y(0)+y'(0)\cdot(-0,02)=1-0,01=0,99.$$

5 Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Имеем:

$$x_0=\frac{\pi}{6}, \qquad y(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Поэтому искомое уравнение касательной по формуле (1.3) запишется так

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

а уравнение нормали по формуле (1.4) примет вид:

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

6 Вычислить и сравнить на промежутке $0\le t\le 1$ мгновенные скорости двух точек, прямолинейные движения которых заданы уравнениями $S_1=t^2$, $S_2=2t^4$ $(t\ge 0)$.

Решение. Находим мгновенные скорости точек в момент времени t:

$$V_1(t)=S_1'(t)=2t,$$

$$V_2(t)=S_2'(t)=8t^3.$$

Отсюда получаем: $V_1(0)=V_2(0)=0$.

Видно, что $\forall t\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ выполняется неравенство $V_1(t)>V_2(t)$, и $\forall t\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ – неравенство $V_1(t)<V_2(t)$.

Следовательно, в точке $t = \dfrac{1}{2}$ имеем

$$V_1\left(\frac{1}{2}\right) = V_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

7 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}$, б) $y = \dfrac{3x-2}{4x+5}$, в) $y = x\cos x - x^2 \sin x$.

Решение. а) перепишем функцию в виде:

$$y = 3x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-\frac{2}{3}}.$$

Применяя правило дифференцирования суммы, получим:

$$y' = \left(3x^{-\frac{1}{3}} - 6x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \left(3x^{-\frac{1}{3}}\right)' - \left(6x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 3\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' - 6\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' =$$

$$= 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}} - 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

б) по правилу дифференцирования дроби имеем:

$$y' = \left(\frac{3x-2}{4x+5}\right)' = \frac{(3x-2)'\cdot(4x+5) - (4x+5)'\cdot(3x-2)}{(4x+5)^2} =$$

$$= \frac{3\cdot(4x+5) - 4\cdot(3x-2)}{(4x+5)^2} = \frac{23}{(4x+5)^2}.$$

в) используя правила дифференцирования суммы и произведения, получим:

$$y' = \left(x\cos x - x^2\sin x\right)' =$$

$$= (x)'\cdot\cos x + x\cdot(\cos x)' - \left(\left(x^2\right)'\cdot\sin x + x^2\cdot(\sin x)'\right) =$$

$$= \cos x - x\cdot\sin x - \left(2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x\right) =$$

$$= \cos x - 3x\cdot\sin x - x^2\cdot\cos x.$$

Задания для аудиторной работы

1 Пользуясь определением производной, получить формулы для производных для данных функций в точке x_0:

а) $y = 3x^2$; в) $y = \dfrac{1}{x}$;

б) $y = x \cdot \ln x$; г) $y = \operatorname{tg} \pi x - x$.

Найти дифференциалы этих функций в точке $x_0 = 1$.

2 Доказать, что функция Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 \ \text{при}\ x < 0, \\ 1 \ \text{при}\ x \geq 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не является дифференцируемой.

3 Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt[3]{0{,}1002}$; в) $e^{-0{,}85}$;

б) $\sin 31°$; г) $\operatorname{arctg} 1{,}03$.

4 Составить уравнения касательной и нормали к графику функций в указанной точке:

а) $y = \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $y = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ в точке $x_0 = 1$.

5 Точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x = A \sin \omega t$. Определить скорость движения в момент времени $t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

6 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = 3x^4 + 5x^2 - 6x - 4$; г) $y = \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^2$;

б) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sh} x}$; д) $y = \left(x^2 + 1\right) \cdot \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \operatorname{th} x + 2^x \cdot \operatorname{ch} x$; е) $y = \dfrac{\log_3 x}{2x^3 + 3}$.

Задания для домашней работы

1 Пользуясь определением производной, вывести формулы для производных функций в точке x_0:

а) $y=\sqrt{x}$; в) $y=\operatorname{ctg} x+2x$;

б) $y=2\cos x+\sin x$; г) $y=4x^2-3x+7$.

Найти дифференциалы этих функций в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2 Доказать, что функция знака

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ 0 \text{ при } x=0\\ 1 \text{ при } x>0\end{cases}$$

в точке $x_0=0$ не является дифференцируемой.

3 Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

а) $2{,}002^7$; в) $\cos 62°$;

б) $2^{3{,}1}$; г) $\arcsin 0{,}07$.

4 Составить уравнения касательной и нормали к графику функций в указанной точке:

а) $y=\operatorname{tg} x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

б) $y=3x^4-7x^3+4x^2-x-1$ в точке $x_0=2$.

5 Точка совершает гармоническое колебательное движение по закону $x=A\cos\omega t$. Определить скорость движения в момент времени $t_0=\dfrac{\pi}{\omega}$.

6 Используя правила дифференцирования и таблицу производных, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y=2e^x$; е) $y=x^5+5^x$;

б) $y=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x-\log_2 x$; ж) $y=2\arcsin x-x\cdot\arccos x$;

в) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcctg} x}$;

г) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - x$;

д) $y = \operatorname{th} x - x$;

и) $y = \dfrac{x^2 + 8x - 7}{\operatorname{ch} x}$;

к) $y = \dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3}$;

л) $y = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1}$.

Практическое занятие 2 Производная обратной и сложной функции

2.1 Производная обратной функции
2.2 Производная и дифференциал сложной функции
2.3 Логарифмическая производная

2.1 Производная обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и имеет во всех точках интервала $(a;b)$ ненулевую производную $y' = f'(x)$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема во всех точках интервала $(f(a); f(b))$ и для любого $y \in (f(a); f(b))$ ее производная равна

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

2.2 Производная и дифференциал сложной функции

Пусть $y = f(u(x))$ сложная функция. Если функция $u = u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет в точке x_0 производную и справедлива формула

$$y' = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

Функция u называется *промежуточным аргументом*, а x – *основным аргументом*.

Полученное правило распространяется на сложную функцию, зависящую от нескольких аргументов. Предположим, что функции $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(t)$, $t = t(x)$ дифференцируемы. Рассмотрим сложную функцию F переменной x через посредство промежуточных функций f, u, v, t:

$$F(x) = f(u(v(t(x)))).$$

Придадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда t получит приращение Δt, v – приращение Δv, u – приращение Δu.

Запишем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

Так как u, v, t дифференцируемы, поэтому и непрерывны, то в силу непрерывности при $\Delta x \to 0$ приращения $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Переходя к пределам, имеем

$$F'(x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x.$$

2.3 Логарифмическая производная

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [a;b]$. Тогда определен логарифм

$$\ln y = \ln f(x).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(\ln y)' = (\ln f(x))'.$$

Отсюда $\dfrac{y'}{y} = (\ln f(x))'$ и $y' = y \cdot (\ln f(x))'$.

Производная $(\ln f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется *логарифмической производной.*

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях:

– при нахождении производной большого числа сомножителей,

– при нахождении производной степенно-показательной функции.

Вопросы для самоконтроля

1 Какая функция называется обратной. Как находится производная обратной функции?

2 Какая функция называется сложной? Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.

3 Что называется логарифмической производной? При нахождении производных каких функций ее желательно использовать?

Решение типовых примеров

1 Найти производную и дифференциал функции $y = \arcsin x$.

Решение. Рассмотрим обратную функцию $x = \sin y$. В интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ она монотонна, ее производная $x'_y = \cos y$ не обращается в нуль. Следовательно, используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(перед квадратным корнем выбран знак «+», так как на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\cos y > 0$).

Тогда дифференциал равен $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 Найдите производные следующих сложных функций:

а) $y = \cos 4x$; г) $y = \ln(\sin 2x)$;

б) $y = (5x^3+8)^4$; д) $y = \operatorname{sh} x$.

в) $y = \operatorname{tg}^5 x$;

Решение. а) аргументом функции является $4x$, поэтому эту функцию можно представить как

$$y = \cos u,$$

где $u = 4x$.

Так как $y' = -\sin u$, а $u' = 4$, то по формуле $y' = y_u{}' \cdot u_x{}'$ получаем: $y' = -4\sin 4x$.

б) обозначим $5x^3 + 8 = u$, тогда $y = u^4$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y' = \left(u^4\right)' \cdot \left(5x^3+8\right)' = 4u^3 \cdot \left(15x^2\right) = 60x^2\left(5x^3+8\right)^3.$$

в) имеем:

$$y' = \left(\operatorname{tg}^5 x\right)' = 5\operatorname{tg}^4 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 5\operatorname{tg}^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}.$$

г) используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y' = \left(\ln(\sin 2x)\right)' = \frac{1}{\sin 2x} \cdot (\sin 2x)' = \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = .$$

$$= \operatorname{tg} 2x \cdot 2 = 2 \operatorname{tg} 2x .$$

д) имеем

$$y' = (\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x\right)' - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x .$$

3 Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Решение. Логарифмируя степенно-показательную функцию $y = x^x$, получим

$$\ln y = x \cdot \ln x .$$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} .$$

Отсюда $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Задания для аудиторной работы

1 Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arccos x$; д) $y = x + \ln x \ (x > 0)$;

б) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; г) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$; е) $y = e^{\arcsin x}$.

2 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = \cos^3 x^2$; л) $y = \sqrt[4]{(5 - 8x)^3}$;

б) $y = \sin\sqrt{x^2 + 4x - 5}$; м) $y = e^{\cos 2x}$;

в) $y = \ln\sqrt{x^2 + 4x + 5}$; н) $y = \operatorname{arctg} 5x$;

г) $y = 2^{\sin 5x}$;

д) $y = \ln \arccos\ 2x$;

е) $y = \sin(\ln x) \cdot \cos(\ln x) - \ln \dfrac{1}{x}$;

ж) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

и) $y = e^{\operatorname{th}^2 x}$;

к) $y = \arccos^2 \sin(2x-1)$;

о) $y = \ln \cos 4x$;

п) $y = \log_{x^2} 2$;

р) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$;

с) $y = \dfrac{1+\operatorname{ch} 2x}{1-\operatorname{sh} 2x}$;

т) $y = \log_2 \left(\sin^2 x\right)$;

у) $y = 5^{\operatorname{sh}^2 (x+3)}$.

3 Вычислить значение производной функции

$$y = 2\sin^4 x \cdot \operatorname{tg} x + \cos^3 x \text{ в точке } x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

4 Используя логарифмическую производную, найти производные следующих функций:

а) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

б) $y = (\operatorname{tg} x)^x$;

в) $y = \dfrac{x^2 \cdot e^{x^2}}{x^2 + 1}$;

г) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$;

д) $y = \sqrt[x]{x}$;

е) $y = \dfrac{\left(x^2-4\right)^3 \left(x^3 - x + 5\right)^6}{\sqrt[5]{x^3 + 5x^2 - x + 4}}$.

Задания для домашней работы

1 Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y = \operatorname{arcctg} x$;

б) $y = 2 - 3x + x^2$;

в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$;

г) $y = 2x^2 - x^4$;

д) $y = x + e^x$;

е) $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.

2 Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найти производные и дифференциалы следующих функций:

а) $y=\sin^3 x$;

б) $y=\sin^3\dfrac{x}{3}$;

в) $y=\sqrt{x^2+\cos 4x}$;

г) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$;

д) $y=\arccos\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

е) $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x}\cdot\operatorname{ch} x$;

ж) $y=\log_2\left(\operatorname{sh}2x+\operatorname{ch}^2 x\right)$;

и) $y=\operatorname{th}^2 x-\ln(\operatorname{sh}x)$;

к) $y=\sqrt[3]{x^3+3x+5}$;

л) $y=\sin^2\left(x^2-2x+3\right)$;

м) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}(x-2)$;

н) $y=\arcsin\dfrac{x}{8}$;

о) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$;

п) $y=3^{\cos^3 x-2\cos x}$;

р) $y=\ln\ln x\cdot(\ln\ln\ln x-1)$;

с) $y=\ln\operatorname{tg}x+\cos x\cdot\ln x^2$.

3 Вычислить значение производной функции

$$y=4\cos^3 x\cdot\sin x+\operatorname{ctg}x$$

в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4 Используя логарифмическую производную, найти производные следующих функций:

а) $y=x^{\operatorname{tg}x}$;

б) $y=x^{\sqrt{x}}$;

в) $y=(\operatorname{arctg}x)^x$;

г) $y=(\cos x)^{\sin\left(x^2\right)}$;

д) $y=\dfrac{\left(x^2-5x+4\right)^7\left(4x^2+5\right)^6}{\sqrt[4]{x^4-8}}$;

е) $y=x^{\cos x}$;

ж) $y=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sin^3 x\cdot\operatorname{tg}^2 x$;

и) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^2+5x-2}}$.

Практическое занятие 3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

3.2 Производная неявной функции

3.3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Производная функции, заданной параметрическими уравнениями

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{3. 1}$$

где $t \in T \subset \mathbf{R}$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для любого $t \in T$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Кроме этого, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y = y(x)$, заданную параметрическими уравнениями (3.1), можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Продифференцировав функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x$. Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Учитывая, что $\varphi'(t) = x'_t$, $\psi'(t) = y'_t$, окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

3.2 Производная неявной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема. Если в уравнении $F(x, y) = 0$ под переменной y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [a; b].$$

Дифференцируем уравнение по x и считаем, что переменная y есть функция переменной x. Получается новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную функции $y = f(x)$, заданной в неявном виде.

3.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой. Производная $f'(x)$ является также функцией от x и может быть дифференцируема.

Производная от производной функции $y = f(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной функции*.

Обозначается: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки, тогда первая производная определяет скорость движения $v = s'(t)$. Вторая же производная есть скорость изменения скорости движения, т.е. ускорение $a = \dfrac{dv}{dt} = s''(t)$.

Аналогично вводятся производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется *производной третьего порядка*.

Обозначается: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$:

Аналогично

$$y^{IV} = \left(y'''\right)' = f^{IV}(x).$$

Производной n*-го порядка* от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Найденная производная y'_x содержит, в общем случае, как аргумент x, так и функцию y. По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной, надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Пусть y – функция от x, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\}$$

где $t \in T$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрическими уравнениями, имеем:

$$\left.\begin{array}{c} y''_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{array}\right\}$$

Аналогично находится третья производная:

$$\left.\begin{array}{c} y'''_x = \dfrac{\left(y''_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t) \end{array}\right\}$$

и производные высших порядков.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от точки x. Поэтому dx в формуле первого дифференциала будет постоянным. Тогда выражение $f'(x)dx$ зависит только от x и его можно дифференцировать по x.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ в данной точке x называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$, т. е. $d^2 y = d(dy)$. Полагая dx в формуле $dy = f'(x)dx$ первого дифференциала постоянным, получим:

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)\cdot dx + f'(x)\cdot d(dx) =$$
$$= \left(f''(x)dx\right)dx = f''(x)(dx)^2 .$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3 y = d\left(d^2 y\right)$ и он равен:.

$$d^3 y = d\left(f''(x)(dx)^2\right) = d\left(f''(x)\right)(dx)^2 + f''(x)d\left((dx)^2\right) =$$
$$= \left(f'''(x)dx\right)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 .$$

Дифференциал n-го порядка (или *n-й дифференциал*) функции $y = f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^{(n)}y = d\left(d^{(n-1)}y\right)$ и $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Скобки при степенях dx можно опустить: $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Отсюда следует, что производная n-го порядка функции $y = f(x)$ есть отношение ее дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

В частности, при $n = 1, 2, 3$ получим соответственно:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями?

2 Как найти производную неявной функции?

3 Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4 Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая? Приведите пример функции, у которой существует $f'(x_0)$, но не существует $f''(x_0)$.

5 Как определяются производные высших порядков?

6 Дайте определение дифференциала n- го порядка:

а) если x независимая переменная;

б) если x зависимая переменная.

Решение типовых примеров

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где $0 < t < \pi$.

Решение. Находим первую производную:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{R}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Итак,

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(R\cos t)'}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{r}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^3\left(\arccos\frac{x}{R}\right)} = -\frac{1}{\left(1-\left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R^3}{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2 Найти производную функции заданной неявно

$$x^3 + x^2y^2 - xy - y^3 = 0$$

Решение. Продифференцируем данное уравнение по переменной x, считая, что y есть функция от x:

$$3x^2 + 2xy^2 + 2x^2y\,y' - y - x\,y' - 3y^2\,y' = 0.$$

Отсюда

$$y' = \frac{y - 3x^2 - 2xy^2}{2x^2 y - x - 3y^2}.$$

3 Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, получаем:

$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

.... ,

$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

4 Найти производную второго порядка функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Находим первую производную данной функции:

$$y = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

Дифференцируя полученное выражение, получаем:

$$y'' = (\sin 2x)' = \cos 2x(2x)' = 2\cos 2x.$$

5 Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной уравнением: $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Найдем первую производную $2x + 2y\,y' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Дифференцируя данное уравнение вторично, получим:

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - y'x}{y^2}.$$

Учитывая, что $y' = -\frac{x}{y}$, имеем:

$$y'' = -\frac{y - \left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

а) $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$; в) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$;

б) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$; г) $x = -5t^2 + 2t^5$, $y = -3t^2 + 2t^3$

2 Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функций, заданных неявно уравнением:

а) $y^2 + x^2 + xy - 3 = 0$; г) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

б) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$; д) $\sin y - e^y - e^{-x} = 0$;

в) $y + 2x - \operatorname{arcctg} y = 0$; е) $\operatorname{sh}(xy) + \operatorname{cth} x = 0$.

Вычислить дифференциалы 2-го порядка в точке $M(1,1)$.

3 Найти производные 2-го порядка:

а) $y = 4x^2 - 2x + 3$; в) $y = x + \sqrt{4-x}$;

б) $y = \frac{6x^2 - 2}{\left(1+x^2\right)^3}$; г) $y = \ln\frac{x+3}{x-3}$.

4 Найти производные 3-го порядка:

а) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 7$; в) $y = \sin 2x$;

б) $y = e^{3x}$; г) $y = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 2x + 9$.

5. Найти производные n-го порядка:

а) $y = \ln x$; б) $y = 2^x$; в) $y = \frac{1}{2x+5}$.

Задания для домашней работы

1 Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

а) $x = 4t$, $y = t^2$;

б) $x = t(1 - \sin t)$, $y = t\cos t$;

в) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

2 Найти производные $y'(x)$ и $y''(x)$ функций, заданных неявно уравнением:

а) $x^2 + 5xy + y^3 - 7 = 0$;

б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y + 20 = 0$;

в) $y^2 + xy + \sin y = 0$;

г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;

д) $y + 3x - \operatorname{arctg} 2y = 0$;

е) $\operatorname{ch}\left(x + y^2\right) - \operatorname{th} y = 0$.

3 Найти производные 2-го порядка:

а) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$;

б) $y = \ln\dfrac{x-4}{x+4}$;

в) $y = \operatorname{sh}^2 x$;

г) $y = x^3 + 6x^2 - 5x + 8$;

д) $y = \cos^2 x$;

е) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

4 Найти производные 4-го порядка:

а) $y = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$;

б) $y = \ln(x+1)$.

5 Найти производные n-го порядка:

а) $y = \cos x$;

б) $y = \dfrac{1}{1+x}$.

Практическое занятие 4 **Теоремы о среднем. Правило Лопиталя**

4.1 Теорема Ролля
4.2 Теоремы Лагранжа и Коши
4.3 Правило Лопиталя

4.1 Теорема Ролля

Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс $C_{[a;b]}$ – непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Класс $C^1_{[a;b]}$ дифференцируемых функций является подмножеством множества $C_{[a;b]}$. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, так как большинство задач техники и естествознания приводят к исследованию функций, имеющих производную. Также дифференцируемые функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играют *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y = f(x)$ обладает тем или иным свойством.

Теорема 1 (Ролля) Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям на отрезке $[a;b]$: $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$; $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$; $f(a)= f(b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что $f'(\xi)=0$.

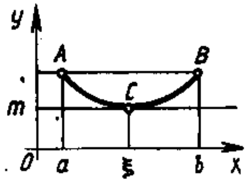

Рисунок 4.1 – Геометрический смысл теоремы Ролля

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике этой функции найдется хотя бы одна такая точка C с абсциссой $x=\xi$, в которой касательная параллельна оси Ox (рисунок 4.1).

Физический смысл теоремы Ролля. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В начальный момент $x=a$ точка имеет координату $f(a)$, далее движется определенным образом со скоростью $f^{'}(x)$. В момент времени $x=b$ она возвращается в точку с координатой $f(a)$ (так как $f(a)=f(b)$). Ясно, что для возвращения в точку $f(a)$, она должна остановится в некоторый момент времени (прежде чем повернуть назад), т. е. в некоторый момент $x=\xi$ скорость $f^{'}(\xi)=0$.

4.2 Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 2 (Лагранжа) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a;b)$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Теорема Лагранжа называется также *теоремой о конечных приращениях*, а приведенная формула – *формулой Лагранжа*. Часто используется следующая запись формулы Лагранжа:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi\in(a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Выражение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$$

представляет собой угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)$ в точке C. Теорема Лагранжа утверждает, что между точками A и B на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB, при условии, что в каждой точке дуги AB существует касательная (рисунок 4.2).

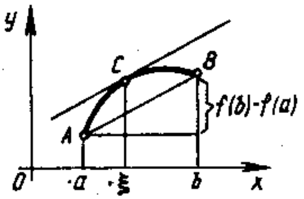

Рисунок 4.2 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Физический смысл теоремы Лагранжа. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В выражении

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

величина в левой части равенства является средней скоростью движения точки по прямой за промежуток времени от a до b. Формула Лагранжа показывает, что существует такой момент времени $x=\xi$, в котором мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке $[a;b]$.

Если в формуле Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, получим теорему Ролля, т. е. теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Положим в формуле Лагранжа $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$. Тогда она примет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0<\theta<1$. Данная формула связывает приращения аргумента и функции, поэтому ее называют *формулой конечных приращений*. Данная формула дает точное выражение приращения функции через вызвавшее его приращение аргумента в отличие от дифференциала функции, который определяет приближенное значение приращения функции: $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$. В приближенных вычислениях приращение функции заменяют чаще дифференциалом, т.е. полагают $\Delta y \approx dy$. Формула Лагранжа применяется реже, так как для ее использования необходимо указать точку $\xi = x_0 + \theta\Delta x \in (a;b)$, что, вообще говоря, не всегда удается.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема 3 (Коши) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям: непрерывны на отрезке $[a;b]$; дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если положить в формуле Коши $g(x)=x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены, и формула Коши $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ «перейдет» в формулу Лагранжа $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$. Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

4.3 Правило Лопиталя

Теорема 4 (Лопиталя) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, за исключением, быть может, точки x_0, причем $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$));

3) существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тогда существует также предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Смысл правила Лопиталя заключается в том, что оно позволяет свести вычисление предела отношения функций в случае неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ к пределу отношения производных, который очень часто вычисляется проще. Правило Лопиталя справедливо также и в случае $x_0=\infty$.

Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ существует, применив дважды правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия, предусмотренные теоремой, уже не выполняются.

Правило Лопиталя применяется к вычислению пределов в случаях неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а также для раскрытия неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty\cdot\infty$.

Неопределенности вида 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0} сводятся к неопределенностям $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для этого необходимо представить выражение $u(x)^{v(x)}$, стоящее под знаком предела как $e^{\ln u(x)^{v(x)}}$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Ролля. В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Ролля.

2 Сформулируйте теорему Лагранжа. Почему формула Лагранжа называется формулой конечных приращений?

3 В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Лагранжа?

4 Сформулируйте теорему Коши.

5 При раскрытии каких неопределенностей используется правило Лопиталя?

6 Справедливо ли правило Лопиталя в случае $x_0 = \infty$?

7 Можно ли применять правило Лопиталя несколько раз?

Решение типовых примеров

1 Проверить, удовлетворяет ли условиям теоремы Ролля функция:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6\ ?$$

Решение. Преобразуем данную функцию к виду

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Отсюда $f(1) = f(2) = f(3) = 0$. Поэтому теорема Ролля применима на отрезках $[2;3]$, $[1;2]$ и $[1;3]$. Поскольку данная функция представляет собой многочлен, то она определена и непрерывна на каждом из отрезков. Найдем производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

Очевидно, что для любых x функция $f'(x)$ дифференцируема на соответствующих интервалах. Таким образом, теорема Ролля справедлива на отрезках $[2;3]$, $[1;2]$ и $[1;3]$.

2 Доказать, что уравнение $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не может иметь два различных действительных корня на интервале $(0;1)$.

Решение. Предположим, что уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2 на данном интервале.

Рассмотрим функцию $f(x) = 16x^4 - 64x + 31$.

Тогда $f(x_1) = f(x_2) = 0$. При этом данная функция определена, непрерывна (как элементарная) на $[x_1; x_2]$ и дифференцируема на $(x_1;x_2)$. Следовательно, по теореме Ролля существует точка $\xi \in (x_1;x_2) \subset (0;1)$ такая, что $f'(\xi)=0$.

С другой стороны, $f'(x)=64x^3-64$. Отсюда уравнение $f'(\xi)=0$ имеет единственный корень в точке $\xi=1$, которая не принадлежит интервалу $(x_1;x_2)$. Получили противоречие. Значит, уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь два различных действительных корня на $(0;1)$.

3 Доказать, что $|\cos x_1-\cos x_2| \le |x_1-x_2| \quad \forall x_1,\ x_2 \in \mathbf{R}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos x$ на отрезке $[x_1;x_2]$.

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому по формуле Лагранжа

$$\cos x_1-\cos x_2=\sin\xi\cdot(x_1-x_2),$$

где $\xi \in (x_1;x_2)$.

Поскольку $|\sin\xi| \le 1$, то $|\cos x_1-\cos x_2| \le |x_1-x_2|$.

4 Записав формулу Коши для функций $f(x)=2x^3+5x+1$ и $g(x)=x^2+4$ на отрезке $[0;2]$, найти значение ξ.

Решение. Данные функции определены и непрерывны на отрезке $[0;2]$, а также дифференцируемы на интервале $(0;2)$:

$$f'(x)=6x^2+5,\ g'(x)=2x$$

при этом $g'(x)\ne 0 \quad \forall x \in (0;2)$.

Тогда по теореме Коши существует такая точка $\xi \in (0;2)$, что имеет место формула Коши

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Подставляя, получим $\dfrac{13}{2}=\dfrac{6\xi^2+5}{2\xi}$.

Решая данное уравнение относительно ξ, находим

$$\xi_1=\frac{1}{2},\ \xi_2=\frac{5}{3}.$$

5 Используя правило Лопиталя, вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}$; ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; и) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; к) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Решение. а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

б) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x-2}{6x-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^x\cos 2x-3e^x\sin 2x}{6-6x}=\frac{e}{3}.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}.$$

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln(\cos x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0+0}\sin x=-1\cdot 0=0.$$

д) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^0=1.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{заменим знаменатель дроби}\\ \text{эквивалентной бесконечно}\\ \text{малой функцией}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin 2x}{x^4}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(nx^{n-1}\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \ldots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{e^x} = 0 .$$

и) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0 .$$

к) имеем:

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} = e^0 = 1 .$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n ,\ a_k \in \mathbf{R} \quad (k = 0,1,\ldots, n),$$

вещественны, то производные $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, …, $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь действительные корни.

2 Найти точку ξ в формуле конечных приращений для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right) & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

на отрезке $[0;2]$.

3 Используя формулу Лагранжа, доказать справедливость неравенств:

а) $\left|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2\right| \le \left|x_1 - x_2\right|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;

б) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$ при $x > 0$.

4 Справедлива ли формула Коши для функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ на $[-1;1]$.

5 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$;

б) $\lim\limits_{x\to} \left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\frac{x}{3}}{1-\cos 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 6}{x-2}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

л) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.

Задания для домашней работы

1 Показать, что функция $f(x) = x^2 - 1$ на отрезке $[-1;1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

2 Доказать, что уравнение $e^{x-1} + x - 2 = 0$, имеющее корень $x = 1$, не имеет других действительных корней.

3 Используя формулу Лагранжа, доказать справедливость неравенств:

а) $|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$;

б) $\ln(1+x) < x$ при $x > 0$.

4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin 2x - 2x}{3x^2 - x^3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \ln(1-x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{6+7\ln\sin x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$;

и) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{e^{2x}-1}\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{ctg} x}}$;

л) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Практическое занятие 5 **Формула Тейлора**

5.1 Формула Тейлора
5.2 Формула Маклорена

5.1 Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ и n раз дифференцируема в точке x_0. Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

называется *многочленом Тейлора* для функции $f(x)$.

Теорема (формула Тейлора) Если функция $y=f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности $U(\delta;x_0)$, то при $x\to x_0$ имеет место формула Тейлора

$$f(x)=P_n(x)+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ – остаточный член в форме Лагранжа, $\xi\in U(\delta;x_0)$.

Если записать $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$, то получим

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Остаточный член в формуле Тейлора также записывается в *форме Пеано*

$$R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right).$$

5.2 Формула Маклорена

Если в формуле Тейлора положить $x_0=0$, то получается *формула Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

Основные разложения элементарных функций по формуле Маклорена с остаточным членом в виде Лагранжа.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} e^{\theta\, x},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{k-n-1} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора широко используется при вычислении пределов, в приближенных вычислениях, при исследовании функции на экстремум, в теории рядов, при вычислении интегралов.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0 ? Каким свойством он обладает?

2 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом; а) в виде Лагранжа; б) в виде Пеано.

3 Какой вид имеет формула Маклорена?

4 Запишите основные разложения по формуле Маклорена элементарных функций.

Решение типовых примеров

1 Многочлен $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x+1)$.

Р е ш е н и е . Введем новую переменную $t = x+1$. Тогда

$$P(t) = 1 + 3(t-1) + 5(t-1)^2 - 2(t-1)^3 = 5 - 13t + 11t^2 - 2t^3 .$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3 .$$

2 Представить функцию $y = \ln x$ многочленом n-й степени в окрестности точки $x_0 = 1$ и оценить погрешность.

Р е ш е н и е . 1 способ. Находим последовательно $n+1$ производную для данной функции:

$f(x) = \ln x$, $\qquad$ $f(1) = \ln 1 = 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\qquad$ $f'(1) = 1$,

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\qquad$ $f''(1) = -1$,

$f^{(3)}(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{x^3}$, $\qquad$ $f^{(3)}(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{1^3} = 2!$,

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$, $\qquad$ $f^{(4)}(x) = -3!$,

....,

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $\qquad$ $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$,

$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Тогда формула Тейлора для функции $y = \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 1$ примет вид

$$\ln x = 0 + 1 \cdot (x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \frac{-3!}{4!}(x-1)^4 + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, $\xi \in U(\delta;1)$.

Преобразуя полученное выражение, имеем

$$\ln x = (x-1) - \frac{\left(x-1^2\right)}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Многочлен Тейлора функции $y = \ln x$ имеет вид

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{\left(x-1^2\right)}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность вычислений составит

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1},$$

где $\xi = 1 + \theta(x-1),\ 0 < \theta < 1$.

2 способ. Воспользуемся основным разложением в ряд Маклорена функции $f(x) = \ln x$. Заменим в разложении x на $(x-1)$:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x-1))^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$.

3 Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = e^{-x^3}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся основным разложением в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$. Заменим в разложении x на $\left(-x^3\right)$

$$e^{-x^3} = 1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!} + \frac{\left(-x^3\right)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x^3},$$

где $0 < \theta < 1$.

4 Разложить по формуле Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}.$$

Решение. Поскольку

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(-x)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

В разложение 5 с остаточным членом в форме Пеано при $m=-1$ имеем

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

При замене переменной x на $(-x)$, получаем

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+o\left((-x)^n\right),$$

а при замене x на $\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+{\frac{x}{2^2}}^2-...+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$$

Тогда

$$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+(-x)}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\left(1+x+x^2+...+x^n+o\left((-x)^n\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{x}{2}+{\frac{x}{2^2}}^2-...+\frac{(-1)^n}{2^n}x^n+o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x^2+...+\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n\cdot 6}\right)\cdot x^n\right)-\frac{1}{3}o\left((-x)^n\right)-\frac{1}{6}o\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{по свойствам бесконечно}\\ \text{малых функций}\end{array}\right]=$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}x^2+...+\left(\frac{2+(-1)^n}{2^n\cdot 6}\right)\cdot x^n\right)+o(x^n).$$

5 Вычислить число e с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Разложение функции $y = \mathrm{e}^x$ в ряд Маклорена имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x},\ 0 < \theta < 1.$$

Заменив функцию $y = e^x$ многочленом Тейлора степени n, получим приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!},$$

абсолютная погрешность которого

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0 < \theta < 1.$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1 \le x \le 1$, то

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \le \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Полагая $x = 1$, получаем приближенное значение числа e

$$\mathrm{e}^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Чтобы определить, сколько нужно взять первых членов этой формулы для получения заданной точности, оценим величину остаточного члена

$$|R_{n+1}(x)| \le \varepsilon.$$

Имеем $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$. Отсюда $(n+1)! > 3000$ или $n > 6$.

Следовательно, при $n = 6$ получим вычисленное значение числа e с заданной точностью

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2{,}718$$

Задания для аудиторной работы

1 Многочлен $P(x)=x^3-4x^2+5x-1$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x-2)$.

2 Представить многочленом 5-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность следующие функции

а) $f(x)=\sqrt{x}$;   б) $f(x)=\cos(2x-1)$.

3 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

а) $\sin 6^\circ$;   б) $\ln 11$;   в) $\sqrt[3]{9}$.

4 Разложить по формуле Маклорена функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$;

б) $f(x)=\sin^2 x$;

в) $f(x)=\ln\left(x^2-3x-4\right)$.

Задания для домашней работы

1 Многочлен $P(x)=x^2-3x+4$ расположить по целым неотрицательным степеням $(x-1)$.

2 Представить многочленом 5-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность следующие функции

а) $f(x)=e^{x^2}$;   б) $f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

3. Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}001$:

а) $\cos 18^\circ$;   б) $e^{0,2}$;   в) $\sqrt[4]{90}$.

4 Разложить по формуле Маклорена функции:

а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$;

б) $f(x)=\cos^2 x$;

в) $f(x)=\ln\dfrac{x-4}{x+5}$.

***Практическое занятие 6* Локальные и глобальные экстремумы функции**

6.1 Точки локального и глобального экстремума
6.2 Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции
6.3 Глобальный экстремум функции на отрезке

6.1 Точки локального и глобального экстремума

С помощью производной функции можно произвести полное исследование функции (найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика) и построить график этой функции.

Теорема 1 Для того чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) для всех $x\in(a;b)$. Если же для любого $x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то функция f возрастает (убывает) на этом интервале.

<u>Геометрический смысл теоремы</u>. Касательная к графику возрастающей на $(a;b)$ функции ($f'(x)>0$) составляет острый угол с осью Ox, касательная к графику убывающей на $(a;b)$ функции, ($f'(x)<0$) образует тупой угол с осью Ox. Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ является постоянной $f(x)=C$, $C=\text{const}$, то $f'(x)=0$ и касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$ если существует δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ выполняется неравенство (рисунок 6.1)

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)<0$$
$$(\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)>0).$$

Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом (минимумом)* функции.

Обозначается:

$$\max_{x \cup U(\delta;x_0)} f(x) = f(x_0)$$

$$\Bigl(\min_{x \cup U(\delta;x_0)} f(x) = f(x_0)\Bigr).$$

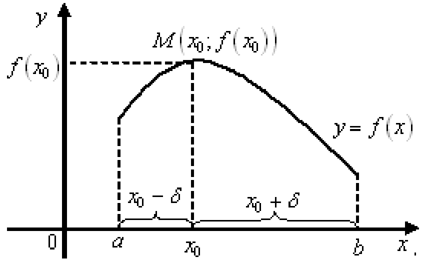

Рисунок 6.1 – Локальный максимум $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$

Точки максимума или минимума функции называются *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями.

Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ имеет несколько максимумов и минимумов, то возможен случай, когда максимум функции меньше ее минимума.

Наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$ называются *абсолютными минимумом* и *максимумом* или *глобальными экстремумами* функции $f(x)$

Обозначаются: $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

6.2 Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции

Теорема 2 (необходимое условие экстремума) Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Из теоремы 2 следует, что в точках экстремума функции $f(x)$ касательная к ее графику:

– параллельна оси абсцисс, если существует $f'(x_0)=0$ (рисунок 6.2, а);

– параллельна оси ординат, если $f'(x_0)$ бесконечна (рисунок 6.2, б);

– существуют не совпадающие левая и правая касательные, если $f'_{-}(x_0)\neq f'_{+}(x_0)$ (рисунок 6.2,в).

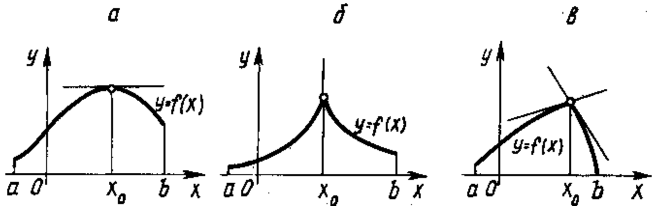

Рисунок 6.2 – Положение касательной к графику функции в точках экстремума

Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль или не существует, называют *критическими* или *точками возможного экстремума*. Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, называют *стационарными*.

Критическая точка x_0 называется *угловой точкой* функции $f(x)$ если $f'_{-}(x_0)\neq f'_{+}(x_0)$ (рисунок 6.2, в). Критическая точка x_0 называется *точкой возврата* функции, если ее левая $f'_{-}(x_0)$ и правая $f'_{+}(x_0)$ производные бесконечны (рисунок 6.2, б).

Не всякая критическая точка функции $f(x)$ является точкой ее локального экстремума.

Теорема 3 (первый достаточный признак существования экстремума функции) Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Теорема 4 (второй достаточный признак существования экстремума функции) Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $U(\delta; x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$ (рисунок 6.3).

а) б)

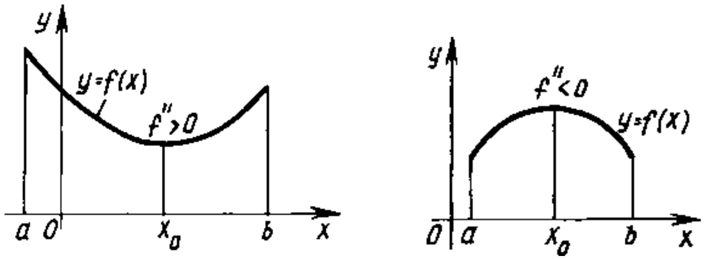

Рисунок 6.3 – Локальные минимум (а) и максимум (б) функции

Теорема 5 (третий достаточный признак существования экстремума функции) Пусть функция $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и в этой точке

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \; f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума.

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

6.3 Глобальный экстремум функции на отрезке

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются ее глобальные экстремумы, т. е. наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a;b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах этого отрезка или в точках ее локального экстремума. Следовательно, для отыскания глобальных экстремумов $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ функции $f(x)$, надо найти ее значения на концах отрезка $[a;b]$, в точках локального экстремума и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них.

Если x_1, x_2, ..., x_n – точки локальных экстремумов, то

$$\min_{x\in[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_1);...;(x_n)\},$$

$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_1);...; f(x_n)\}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Какие условия должны выполнятся, чтобы функция возрастала, убывала, была неубывающей и невозрастающей?

2 Какая точка называется точкой локального экстремума?

3 Какая точка называется точкой абсолютного экстремума?

4 Сформулируйте необходимое условие локального экстремума.

5 Сформулируйте достаточные условия экстремума.

6 Как находится глобальный экстремум функции на отрезке?

Решение типовых примеров

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{|x-1|}{x^2}$.

Решение. Областью определения данной функции является множество $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Производная этой функции имеет вид

$$y' = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} \text{ при } x \in (-\infty;0) \cup (0;1), \\ \dfrac{2-x}{x^3} \text{ при } x \in (1;+\infty). \end{cases}$$

и обращается в нуль в точке $x = 2$. При этом производная не существует в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому точками возможного экстремума являются $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Они разбивают область определения на четыре интервала монотонности: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$.

Видно, что $y'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$, $y'(x) < 0$ при $x \in (0;1) \cup (2;+\infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$, и монотонно убывает при $x \in (0;1) \cup (2;+\infty)$. Согласно первому достаточному условию локального экстремума, в точке $x_3 = 2$ функция достигает максимума, $y_{\max} = y(2) = \dfrac{1}{4}$, а в точке $x_2 = 1$ функция имеет минимум, $y_{\max} = y(1) = 0$.

2 Найти экстремумы функции $y = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}}$.

Решение. Данная функция определена при всех $x \in \mathbf{R}$. Производная данной функции имеет вид

$$y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}.$$

Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует при $x = 2$. Поэтому точка $x = 2$ является точкой возможного экстремума функции.

При $x < 2$ имеем $y' > 0$, при $x > 2$ имеем $y' < 0$. Согласно первому достаточному условию точка $x = 2$ является точкой максимума, $y_{\max} = 1$.

3 Найти экстремумы функции $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Решение. Данная функция определена при $x \in [-1;1]$.

Найдем первую производную

$$y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решая уравнение $y' = 0$, найдем

$$\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; 1-2x^2 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

При этом функция y' не существует при $x = \pm 1$.

Значит, точками возможного экстремума являются $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. В точках $x = \pm 1$ экстремума нет, так как по определению производной точками экстремума могут быть лишь внутренние точки области определения.

Вторая производная функции имеет вид

$$y'' = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Так как $y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$, то функция имеет в точке $x_1 = -1/\sqrt{2}$ минимум, и

$$y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

В точке $x_2 = 1/\sqrt{2}$ получим $y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} < 0$.

Значит в точке $x_2 = 1/\sqrt{2}$ функция имеет максимум, и

$$y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

4 Найти на отрезке $[-1;4]$ глобальные экстремумы функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Решение. Определяем точки возможного экстремума (стационарные точки) функции $f(x)$:

$$f'(x)=3x^2-12x+9,\ 3x^2-12x+9=0.$$

Значит, $x_1=1$ и $x_2=3$.

Так как при $-1<x<1$ имеем $y'>0$, при $1<x<3$ имеем $y'<0$, то $x_1=1$ является точкой максимума. Так как при $1<x<3$ имеем $y'<0$ и при $3<x<4$ имеем $y'>0$, то $x_2=3$ является точкой минимума.

Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка $[-1;4]$ и в стационарных точках, принадлежащих отрезку:

$$f(-1)=-16,\ f(4)=4,\ f(1)=4,\ f(3)=0.$$

Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x)=\min\{-16,4,4,0\}=-16,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x)=\max\{-16,4,4,0\}=4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x=-1$, наибольшее – в точке $x=1$ и на правом конце отрезка в точке $x=4$. График данной функции изображен на рисунке 6.4.

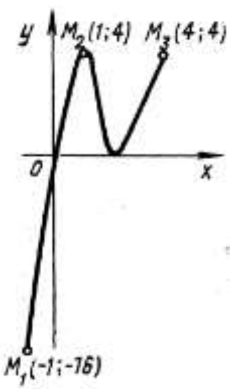

Рисунок 6.4 – График функции $f(x)=x^3-6x^2+9x$ на отрезке $[-1;4]$

5 Баржу, палуба которой на $h = 4$ м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот, со скоростью $v = 2$ м/с. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на расстояние l=8м (по горизонтали)?

Р е ш е н и е. Пусть через t секунд после начала движения баржа (рисунок 6.5) находится на расстоянии $l(t)$ м от пристани (по горизонтали).

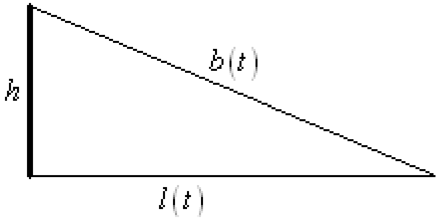

Рисунок 6.5 – Геометрическая интерпретация задачи 5

Тогда длина каната представляет собой функцию

$$b(t) = \sqrt{l^2(t) + h^2},$$

производная которой имеет вид

$$b'(t) = \frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t) + h^2}}.$$

Поскольку канат подтягивают, то по условию задачи $b'(t) = -2$. Отсюда

$$-2 = \frac{l(t)l'(t)}{\sqrt{l^2(t) + h^2}}.$$

Разрешая относительно $l'(t)$, получим скорость движения баржи

$$l'(t) = \frac{-2\sqrt{l^2(t) + h^2}}{l(t)} = -2\frac{b(t)}{l(t)}.$$

Ускорение движения баржи есть вторая производная от функции $l(t)$:

$$a(t) = -l''(t) = 2\frac{b'(t)\cdot l(t) - b(t)\cdot l'(t)}{l^2(t)}.$$

Если t_0 – тот момент времени, когда $l(t_0)$=8, то

$$b(t_0) = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5},$$

$$l'(t_0) = \frac{-2\cdot 4\sqrt{5}}{8} = -\sqrt{5},$$

$$a(t_0) = 2\frac{b'(t_0)\cdot l(t_0) - b(t_0)\cdot l'(t_0)}{l^2(t_0)} = \frac{1}{8} \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

6 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каков должен быть угол при большем основании, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

Решение. На рисунке 6.6 изображена трапеция $ABCD$. Пусть $AB = a$. Тогда по условию $AB = CD = BC = a$. Пусть BE и CF – высоты трапеции; BE=CF. Полагая $\angle BAD = \alpha$, выразим площадь трапеции как функцию от α:

$$S = S(\alpha),\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

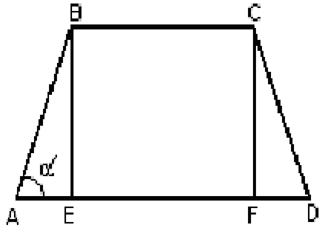

Рисунок 6.6 – Геометрическая интерпретация задачи *6*

Площадь трапеции $ABCD$ равна

$$S_{\text{ABCD}} = S_{ABE} + S_{BCFE} + S_{CDF}$$

Из геометрических соображений имеем:

$$S_{ABE} = S_{CDF} = \frac{1}{2}AE\cdot BE = = \frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot a\sin\alpha = \frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha,$$

$$S_{BCFE} = BC\cdot BE = a^2\sin\alpha.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha+a^2\sin\alpha .$$

Исследуем функцию $S(\alpha)$ на экстремум.

$$S'(\alpha)=a^2(\cos 2\alpha+\cos\alpha).$$

Решая уравнение $S'(\alpha)=0$, получим:

$$\cos 2\alpha+\cos\alpha=0 \ \Rightarrow\ \cos\alpha=-1 \text{ и } \cos\alpha=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\alpha_1=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z},$$

$$\alpha_2=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Единственным решением этого уравнения, лежащим на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ является $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Убедимся, что при $\alpha=\frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает максимума.

$$S''(\alpha)=-a^2(2\sin 2\alpha+\sin\alpha).$$

Так как $\sin\frac{2\pi}{3}>0$, $\sin\frac{\pi}{3}>0$, $a>0$, то $S''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$.

Значит, при $\alpha=\frac{\pi}{3}$ функция $S(\alpha)$ достигает наибольшего значения на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Угол при большем основании трапеции равен $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right)$; г) $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$;

б) $y=\mathrm{ch}^2 x$; д) $y=\ln\left(x^2+1\right)$;

в) $y = x + \sqrt{x-3}$; е) $y = \dfrac{|x+1|}{(x-1)^2}$.

2 Найти глобальные экстремумы функции на отрезке:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-3;2]$;

б) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, $[-2;2]$;

в) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0;1]$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции в ее области определения.

а) $y = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$; б) $y = x \ln x$; в) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

4 Разложить число 80 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

5 Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

6 Проволока длиной l согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если площадь его наибольшая?

Задания для домашней работы

1 Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$; г) $y = \dfrac{\ln x^2}{x}$;

б) $y = \operatorname{sh}^2 x$; д) $y = x - \sqrt{2-x}$;

в) $y = (x-1)^{\frac{6}{7}}$; е) $y = |x+3| - \dfrac{x}{x^2-4}$.

2 Найти глобальные экстремумы функции на отрезке:

а) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$, $[-4;1]$;

б) $y = x^4 - 3x^3 + 15$, $[-2;4]$;

в) $y = x + \sqrt{x}$, $[0;4]$.

3 Найти наибольшее и наименьшее значения функции в ее области определения.

а) $y = \dfrac{3x^2 - 1}{(1 + x^2)^3}$; б) $y = e^{-x^2}$; в) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 5}$.

4 Найти наибольшее значение произведения двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна 34.

5 В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

6 Для доставки продукции завода N в город A (рисунок 6.7) строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB=500 км, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно подвести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город A по железной дороге и шоссе была наименьшей? Здесь $NB = 100$ км.

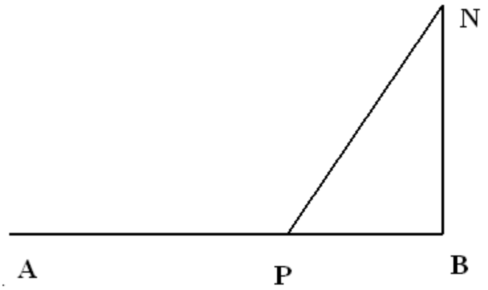

Рисунок 6.7 – Геометрическая интерпретация задачи 6 из домашней работы

Практическое занятие 7 Исследование функций

7.1 Выпуклость и вогнутость графика функции
7.2 Точки перегиба графика функции
7.3 Асимптоты графика функции
7.4 Общая схема исследования функции

7.1 Выпуклость и вогнутость графика функции

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ расположена выше любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 7.1).

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ расположена ниже любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 7.2).

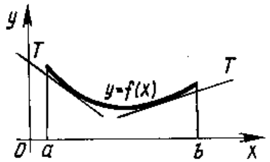

Рисунок 7.1 – Вогнутость графика

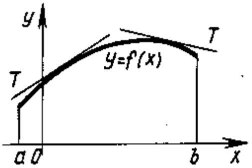

Рисунок 7.2 – Выпуклость графика

Теорема 1 (достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции) Если функция $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ вогнутый (выпуклый вниз). Если функция $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ выпуклый.

7.2 Точки перегиба графика функции

Точка $M(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (рисунок 7.3).

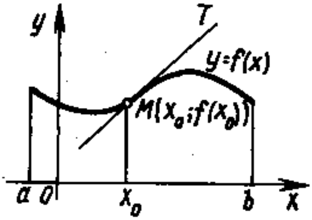

Рисунок 7.3 – Точка $M(x_0; f(x_0))$ –
точка перегиба графика функции

Теорема 2 (необходимое условие точек перегиба) Если функция $f(x)$ имеет в точке $M(x_0; f(x_0))$ перегиб и существует вторая производная $f''(x)$ в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Обратное утверждение верно не всегда.

Точки $M(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называются *точками возможного перегиба*, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема 3 (достаточное условие существования точек перегиба) Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует и при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

7.3 Асимптоты графика функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, т.е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такая прямая называют *асимптотой графика*.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} = f(x) \pm \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} = f(x) \pm \infty .$$

Очевидно, что непрерывные на множестве **R** функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема 4 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x \to \pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b .$$

Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой.*

7.4 Общая схема исследования функции

Исследование дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и построение ее графика может быть выполнено по следующей схеме:

1) находится $D(f)$, определяются точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрия;

2) находятся наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции (если они существуют);

3) с помощью первой производной функции определяются стационарные точки и интервалы монотонности;

4) с помощью второй производной определяются интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба;

5) находятся локальные экстремумы функции на $D(f)$.

По результатам исследований строится график функции. Если исследуемая функция четная или нечетная, то достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Иногда для удобства результаты исследования сводятся в таблицу, построение которой приведено в типовом примере 5.

При решении конкретных задач отдельные этапы схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или не выполнимыми.

Вопросы для самоконтроля

1 Какой график функции называется выпуклым, вогнутым?

2 Сформулируйте достаточное условие выпуклости и вогнутости.

3 Какая точка графика называется точкой перегиба?

4 Сформулируйте необходимое и достаточное условия точек перегиба.

5 Какая прямая называется вертикальной (наклонной, горизонтальной) асимптотой?

6 Перечислите основные этапы исследования функции.

Решение типовых примеров

1 Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^5 + 5x - 6$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$y' = 5x^4 + 5,$$

$$y'' = 20x^3.$$

Если $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла.

Если $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута.

Итак, кривая выпукла на промежутке $(-\infty;0)$, вогнута на промежутке $(0;+\infty)$.

2 Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = (x+1)^2(x-2)$; б) $y = \sqrt[3]{(x-5)^5} + 2$.

Решение. а) первая и вторая производные равны соответственно

$$y' = 3(x^2-1),$$
$$y'' = 6x.$$

Так как $y'' = 0$ в точке $x = 0$, то исследуем эту точку на перегиб. В окрестности точки $x = 0$ при $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = -2$.

б) имеем:

$$y' = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}}, \ y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$. В окрестности точки $x = 5$ получим при $x < 5$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла, при $x > 5$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Следовательно, $x = 5$ – точка перегиба, при этом $y_{\text{пер}} = 2$.

3 Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Решение. 1) функция определена на промежутках

$$(-\infty;-2) \cup (-2;+\infty).$$

Так как

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^2-2x+3}{x+2} = -\infty, \ \lim_{x\to -2+0} \frac{x^2-2x+3}{x+2} = +\infty,$$

то прямая $x = -2$ является вертикальной асимптотой.

2) наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+2)} - x\right] = -4.$$

Следовательно, наклонная асимптота имеет вид

$$y = x - 4.$$

3) горизонтальных асимптот нет, так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+2)} = \infty.$$

4 Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по приведенной схеме.

1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция неопределенна в точках, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$. Следовательно, область определения есть $D(f) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$.

Исследуем поведение функции в окрестностях точек $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty.$$

Следовательно, точки $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$ являются точками разрыва второго рода.

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{3 - x^2} = -\infty$, то здесь функция неограничена.

График функции пересекает координатные оси в только в начале координат, так как $y=0 \Leftrightarrow x=0$.

Функция не является периодичной.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x)=-f(x)$, т. е.

$$\frac{(-x)^3}{3-x^2}=\frac{-x^3}{3-x^2}.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \geq 0$.

2) асимптоты графика функции. Поскольку односторонние пределы в точках $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$ раны бесконечности, то прямые $x=-\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0,$$

Прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой графика функции.

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции. Находим первую производную функции:

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Функция y' определена на $D(f)$. В промежутке $[0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1=0$, $x_2=3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y'>0$ и $y'<0$ для любого $x \geq 0$.

Имеем:

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}>0,\ 9-x^2>0 \Rightarrow 0<x<3,$$

т. е. функция возрастает на $\left(0;\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)$.

Аналогично:

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}<0,\ 9-x^2<0 \Rightarrow x>3,$$

т. е. функция убывает на $\left[3;\infty\right)$.

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Вычисляем вторую производную функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$:

$$y''=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Функция y'' определена на области определения $D(f)$.

Находим интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств $y''>0$, $y''<0$ для любого $x\geq 0$.

Имеем:

$$\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}>0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 0<x<\sqrt{3},$$

т. е. кривая вогнута на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично:

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}<0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 3<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x>\sqrt{3},$$

т. е. кривая выпукла на $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точке $x=0$ имеем $y''=0$ и $y''(x)<0$ в окрестности $U(\delta;0-0)$, а $y''(x)>0$ в окрестности $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости кривой от ее интервала вогнутости. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой.

5) локальные экстремумы. Определяем с помощью второй производной $y''(x)$ локальные экстремумы. Так как $y''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)} y(x)=-4,5$, $\min\limits_{x\in U(\delta;-3)} y(x)=4,5$.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 7.1.

Таблица 7.1 – Результаты исследования функции

x	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0	$\nearrow$	Не сущ.	$\nearrow$	-4,5	$\searrow$
	(т.перег)				max	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 7.1, строим график данной функции для $x\in[0;\infty)$. Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 7.4).

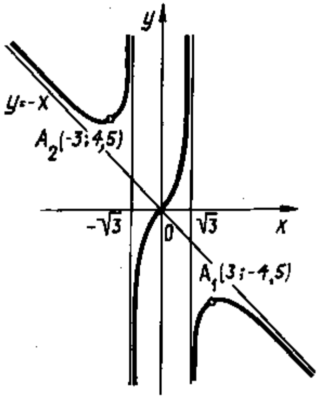

Рисунок 7.4 – График функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

Задания для аудиторной работы

1 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

а) $f(x)=2x^4-3x^2+x-1$;

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

в) $f(x)=e^{-x^2}$;

г) $f(x)=x+36x^2-2x^3-x^4$;

д) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{4}}$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

ж) $f(x)=x-\cos x$;

и) $f(x)=\left(x^2-1\right)^3$;

к) $f(x)=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$;

л) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

2 Найти асимптоты графиков функций:

а) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$;

б) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$;

в) $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$;

г) $y=x^2e^{-x}$;

д) $y=x+\operatorname{arctg}2x$;

е) $y=2^{\frac{1}{1-x}}$.

3 Исследовать функции:

а) $f(x)=x^3-3x+2$;

б) $f(x)=(x-1)^2(x+2)$;

в) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$;

г) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

д) $f(x)=x^4-10x^2+9$;

е) $f(x)=x^3-5x^2+3x-1$;

ж) $f(x)=x+\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{x^2}$;

и) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Задания для домашней работы

1 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

а) $f(x) = x^5 - 10x^2 + 3x$;

б) $f(x) = x + \sin x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

г) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2$;

д) $f(x) = 2x^2 + \ln x$;

е) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$;

ж) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

и) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x$;

к) $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$;

л) $f(x) = \sin x + \cos x$.

2 Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$;

б) $y = \dfrac{1}{2}x + \operatorname{arctg} x$;

в) $y = \sqrt{x}\ln x$;

г) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$;

д) $y = -x\operatorname{arctg} x$;

е) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

3 Исследовать функции:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$;

б) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 3$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

г) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 2}$;

д) $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$;

е) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

ж) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$;

и) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Практическое занятие 8 Построение графиков функций

8.1 Исследование функций, заданных параметрическими уравнениями

8.2 Исследование функций, заданных неявно

8.3 Исследование функций, заданных в полярных координатах

8.1 Исследование функций, заданных параметрическими уравнениями

Параметрические уравнения плоской кривой имеют вид

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T. \tag{8.1}$$

Исследование и построение такой кривой можно провести по следующей схеме:

1) найти множество T – общую часть областей определения функций $x(t)$, $y(t)$ (если множество T не задано). При этом необходимо отметить те значения параметра t_i (включая $t_i = \pm\infty$), для которых хотя бы один из односторонних $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} y(t)$ равен $+\infty$ или $-\infty$;

2) установить, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить выкладки;

3) найти нули функций $x(t)$, $y(t)$ и области знакопостоянства этих функций;

4) найти точки t_k, в которых хотя бы одна из производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ равна нулю или разрывна. Заметим, что точки t_i отмеченные в п. 1) и точки t_k, найденные в этом пункте, разбивают множество T на промежутки знакопостоянства производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Поэтому на каждом таком промежутке $(t_p; t_{p+1})$ функция $x(t)$ строго монотонна. Следовательно, система уравнений (8.1) на интервале $(t_p; t_{p+1})$ задает параметрически функцию вида $y = f(x)$. Производные этой функции выражаются по формулам

$$y_x' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\ y_{xx}'' = \frac{\frac{d}{dt}\left(y_x'\right)}{\dot{x}(t)}.$$

Часть кривой, соответствующую изменению параметра t от t_p до t_{p+1} называется *ветвью кривой*. Каждая ветвь кривой является графиком функции вида $y = f(x)$;

5) найти точки t_j, в которых $y_{xx}'' = 0$;

6) результаты исследования занести в таблицу, аналогичную таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Результаты исследования графика функции, заданной параметрическими уравнениями

$(t_p;t_{p+1})$		…	
$(x_p;x_{p+1})$		…	
$(y_p;y_{p+1})$		…	
Знак y_{xx}''		…	

Здесь в первой строке записываются промежутки изменения параметра t, граничными точками которых t_p и t_{p+1} служат точки, найденные в п. 1), 4) и 5). Во второй и третьей строках таблицы приводятся соответствующие промежутки изменения переменных x и y. В последней строке таблицы указывается знак y_{xx}'', определяющий направление выпуклости графика соответствующей ветви кривой;

7) пользуясь таблицей, построить ветви кривой, соответствующие промежуткам $(t_p;t_{p+1})$.

Замечания. 1 В п. 1) схемы можно найти асимптоты кривой (если они имеются). Для этого надо иметь в виду следующее:

а) если при $t \to t_p$ $(t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0)$ $x \to x_0$, а $y \to \infty$, то $x = x_0$ – вертикальная асимптота кривой;

б) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$, а $y \to y_0$, то $y = y_0$ – горизонтальная асимптота кривой;

в) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то возможна наклонная асимптота, нахождение которой надо провести в соответствии с теоремой 4 практического занятия 7.

2 Вместо всей области определения T рассматривается только ее неотрицательная часть в следующих случаях:

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = x(t),\ y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно оси Ox);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = -x(t),\ y(-t) = y(t)$ (симметрия относительно оси Oy);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = -x(t),\ y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно начала координат);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = x(t),\ y(-t) = y(t)$ (наложение).

3 Если t_p – точка, найденная в п. 4) схемы, и если на интервале $(t_p; t_{p+1})$ производная $\dot{x}(t)$ сохраняет знак, то на этом интервале система уравнений (8.1) задает параметрически функцию вида $y = f(x)$, для которой точка $x(t_p)$ является точкой возможного экстремума. Является ли $x(t_p)$ точкой экстремума функции $y = f(x)$, можно определить, рассмотрев изменение y на интервалах $(t_{p-1}; t_p)$ и $(t_p; t_{p+1})$.

8.2 Исследование функций, заданных неявно

Если функцию, заданную неявно уравнением

$$F(x; y) = 0 \tag{8.2}$$

возможно разрешить относительно одной из переменных, то исследование этой функции проводится обычным образом.

Иногда удается получить параметрические уравнения функции. Для этого положим $y = \alpha(t) x^n$, где $\alpha(t)$ и n – выбранные подходящим образом функция и число.

Подставляя выражение для y в уравнение (8.2), получим

$$F\left(x;\alpha(t)x^n\right)=0\,.$$

Пусть $x=\varphi(t)$ – решение этого уравнения. Тогда

$$x=\varphi(t),\;\; y=\alpha(t)\varphi^n(t)=\psi(t)$$

есть параметрические уравнения кривой.

На практике выбор функции $\alpha(t)$ определяется видом функции $F(x;y)$.

8.3 Исследование функций, заданных в полярных координатах

Пусть в полярной системе координат $(\varphi;r)$ кривая задана уравнением $r=r(\varphi)$.

В полярных координатах прямая, задаваемая уравнением

$$r=\frac{d}{\sin(\varphi-\varphi_0)},\; d\neq 0,$$

является асимптотой графика функции $r(\varphi)$, если выполнены следующие условия:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)=+\infty\,,$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0)=d\,,\; d\neq 0.$$

Тогда, выражая декартовы координаты через полярные:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\end{cases}$$

получим параметрические уравнения кривой (φ – параметр):

$$x=r(\varphi)\cos\varphi\,,$$

$$y=r(\varphi)\sin\varphi\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как вычисляются производные функции, заданной параметрическими уравнениями?

2 Как найти асимптоты графика функции, заданной параметрическими уравнениями?

3 Как исследовать и использовать симметрию функции, заданной параметрическими уравнениями?

4 Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции, заданной параметрическими уравнениями.

5 Приведите схему исследования функции, заданной параметрическими уравнениями.

6 Как исследовать функцию, заданную неявно?

7 Как исследовать функцию, заданную в полярных координатах?

Решение типовых примеров

1 Исследовать функцию $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1) находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию. Функция определена при тех значениях x, для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \le 1 .$$

Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1-|x|^2\right) \ge 0$, которое верно для любых вещественных x.

Итак, $D(f) = \mathbf{R}$.

Функция $\frac{2x}{1+x^2}$ непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Поэтому функция $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций).

Функция непериодическая.

Поскольку

$$y(-x)=\arcsin\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=y(x),$$

то функция является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую $[0;+\infty)$.

При $x=0$ имеем $y=0$. Других нулей функция не имеет. На полупрямой $(0;+\infty)$ функция является положительной;

2) асимптоты графика функции. В силу непрерывности функции $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ на $\mathbf{R}$, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при $x\to+\infty$ вычислим следующие пределы:

$$k=\lim_{x\to+\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\arcsin 0=0.$$

Отсюда следует, что прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x\to+\infty$.

Аналогично устанавливается, что прямая $y=0$ – горизонтальной асимптотой при $x\to-\infty$;

3) точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции.

Найдем точки возможного экстремума на полупрямой $[0;+\infty)$. Вычислим производную функции при $x\neq 1$:

$$y'=\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\frac{1+x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}.$$

Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке. Так как $y'(1+0)=-1$, $y'(1-0)=1$, то точка $x=1$

является точкой излома. Значит, имеем только одну точку возможного экстремума $x=1$.

Промежутки монотонности функции определяются знаком производной: $y' > 0$ при $x \in [0;1)$, $y' < 0$ при $x \in (1;+\infty)$.

Знак производной при переходе через точку $x=1$ меняется с плюса на минус. Поэтому в точке $x=1$ функция имеет локальный максимум, причем $y(1)=\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Отметим, что в точке $x=1$ функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв 1-го рода. Значит, точка графика $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ является угловой точкой;

4) промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба. Вторая производная при $x \neq 1$ имеет вид

$$y'' = \frac{-4x\,\mathrm{sgn}\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Направление выпуклости определяется знаком второй производной:

– $y'' < 0$ при $x \in [0;1)$, значит график функции на этом промежутке выпуклый,

– $y'' > 0$ при $x \in (1;+\infty)$, значит график функции на этом промежутке вогнут.

Так как вторая производная обращается в нуль лишь при $x=0$ и при переходе через точку $x=0$ меняет знак, то в точке $(0;0)$ график функций имеет перегиб.

Результаты исследования функции заносим в таблицу 8.2.

Таблица 8.2 – Результаты исследования функции $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

x	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	2	+	Не сущ.	–
y''	0	–	Не сущ.	+

y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$
	Точка перег.		max Угл.точ.	

Исходя из результатов, содержащихся в таблице 8.2, строим график данной функции на полупрямой $[0;\infty)$.

Используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рисунок 8.1).

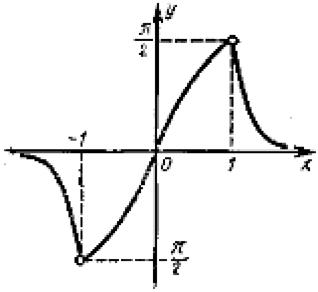

Рисунок 8.1 – График функции $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

2 Исследовать функцию, заданную параметрическими уравнениями, и построить график

$$x = \frac{t}{1-t^2},\ y = \frac{t\left(1-2t^2\right)}{1-t^2}. \qquad (8.3)$$

Решение. 1) функции $x(t)$, $y(t)$ определены на множестве

$$T = (-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

Поскольку

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0,\ \lim_{t\to-\infty} y(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty,$$

то $x = 0$ – вертикальная асимптота кривой.

Найдем односторонние пределы в точках $t=-1$ и $t=1$:

$$\lim_{t\to-1-0} x(t) = +\infty,\ \lim_{t\to-1+0} x(t) = -\infty,$$

$$\lim_{t\to -1-0} y(t) = -\infty\ , \quad \lim_{t\to -1+0} y(t) = +\infty\ ,$$

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = +\infty\ , \quad \lim_{t\to 1+0} x(t) = -\infty\ ,$$

$$\lim_{t\to 1-0} y(t) = -\infty\ , \quad \lim_{t\to 1+0} y(t) = +\infty\ .$$

Отсюда следует, что при $t\to -1$ и $t\to 1$ возможны наклонные асимптоты.

Так как при $t\to 1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to 1\pm 0}\left(1-2t^2\right) = -1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(y+x) = \lim_{t\to 1\pm 0}\frac{1+t-2t^2}{1-t^2} = \frac{3}{2},$$

то прямая $y=-x+\dfrac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Так как при $t\to -1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to -1\pm 0}\left(1-2t^2\right) = -1, \quad \lim_{x\to\pm\infty}(y+x) = \lim_{t\to -1\pm 0}\frac{1+t-2t^2}{1-t^2} = -\frac{3}{2},$$

то прямая $y=-x-\dfrac{3}{2}$ – наклонная асимптота.

Итак,

$$x\in(0;+\infty)\cup(-\infty;+\infty)\cup(-\infty;0),$$

$$y\in(-\infty;-\infty)\cup(+\infty;-\infty)\cup(+\infty;+\infty);$$

2) так как

$$x(-t) = \frac{-t}{1-(-t)^2} = -x(t), \qquad y(-t) = \frac{-t\left(1-2(-t)^2\right)}{1-(-t)^2} = -y(t),$$

то график функции симметричен относительно начала координат $O(0;0)$. Поэтому рассмотрим график функции только на множестве $T_1=[0;1)\cup(1;+\infty)$;

3) на множестве $T_1=[0;1)\cup(1;+\infty)$ имеем $x=0$ при $t=0$, $y=0$ при $t=0$ и $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

4) найдем производные функций $x(t)$, $y(t)$:

$$\dot{x}(t) = \frac{1+t^2}{\left(1-t^2\right)^2}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{2t^4-5t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

На множестве $T_1=[0;1)\cup(1;+\infty)$ $\dot{x}=0$ и $\dot{y}=0$ при

$$t_1=\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\approx 0{,}47 \text{ и } t_2=\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\approx 1{,}51.$$

Тогда $x_1=0,6$, $y_1=0,3$ и $x_2=-0,7$, $y_2=2,3$, т. е. имеем точки возможного экстремума $M_1(0,6;0,3)$ и $M_2(-0,7;2,3)$;

5) найдем производные y'_x и y''_{xx}:

$$y'_x=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t^4-5t^2+1}{1+t^2}, \qquad y''_{xx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(y'_x\right)}{\dot{x}(t)}=\frac{-4t\left(1-t^2\right)^3\left(3+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}.$$

Отсюда $y''_{xx}\le 0$ при $t\in[0;1)$, $y''_{xx}\ge 0$ при $t\in(1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 8.3):

Таблица 8.3 – Результаты исследования функции

$(t_p;t_{p+1})$	$(0;0,47)$	0,47	$(0,47;1)$	$(1;1,51)$	1,51	$(1,51;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(0;0,6)$	0,6	$(0,6;+\infty)$	$(-\infty;-0,7)$	-0,7	$(-0,7;0)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(0;0,3)$	0,3	$(0,3;-\infty)$	$(+\infty;2,3)$	2,3	$(2,3;+\infty)$
Знак y''_{xx}	+	+	+	–	–	–

7) строим часть кривой, соответствующую множеству $T_1=[0;1)\cup(1;+\infty)$. Далее, используя симметрию кривой, построим всю кривую (рисунок 8.2).

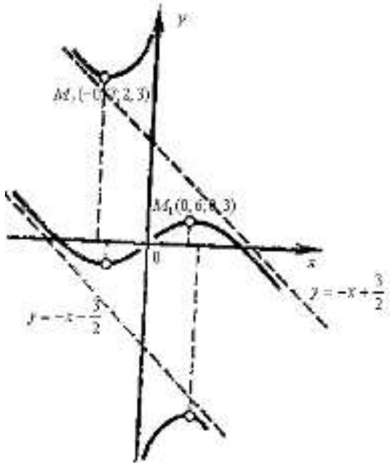

Рисунок 8.2 – График функции (8.3)

3 Исследовать функцию заданную параметрическими уравнениями и построить график

$$x = 2t - t^2, \ y = 3t - t^3. \qquad (8.4)$$

Решение. 1**)** функции $x(t), \ y(t)$ определены на $\mathbf{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = -\infty, \ \lim_{t\to-\infty} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty, \ \lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty.$$

Таким образом, возможны наклонные асимптоты.

Так как

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty,$$

то наклонных асимптот нет;

2) свойствами симметрии и периодичности функция не обладает;

3) имеем $x = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$; $y = 0$ при $t = 0$, $t = -\sqrt{3}$ и $t = \sqrt{3}$;

4) найдем производные функций $x(t), \ y(t)$:

$$\dot{x}(t) = 2(1 - t), \qquad \dot{y}(t) = 3(1 - t^2).$$

Имеем $\dot{x} = 0$ при $t = 1$, $\dot{y} = 0$ при $t = 1$ и $t = -1$. Тогда точки возможного экстремума $W(1;2)$, $N(-3;-2)$;

5**)** найдем производные $y_x^{'}$ и $y_{xx}^{''}$:

$$y_x^{'} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3(1+t)}{2}, \; y_{xx}^{''} = \frac{3}{4(1-t)}, \; t \neq 1.$$

Отсюда $y_{xx}^{''} > 0$ при $t \in (-\infty;1)$, $y_{xx}^{''} < 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

6) составим таблицу результатов исследования (таблица 8.4);

Таблица 8.4 – Результаты исследования функции (8.4)

$(t_p;t_{p+1})$	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(x_p;x_{p+1})$	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;1)$	1	$(1;+\infty)$
$(y_p;y_{p+1})$	$(+\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;-\infty)$
Знак $y_{xx}^{''}$	+	+	+		-

7) строим график функции. Первая производная $y_x^{'}$ не определена в точке $t = 1$, поэтому точка $W(1;2)$ является угловой точкой графика.

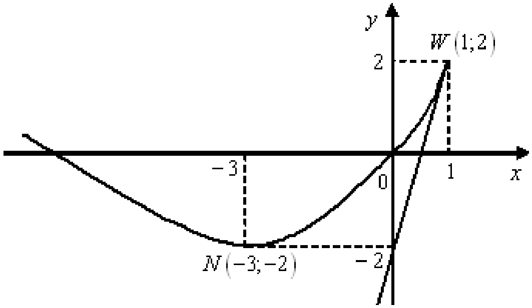

Рисунок 8.3 – График функции $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

4 Исследовать функцию, заданную неявно и построить ее график

$$x^2 = y^2 + x^4 \tag{8.5}$$

Решение. 1 способ. Разрешая данное уравнение относительно y, получим $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$.

Функции $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$ и $y_2 = -x\sqrt{1-x^2}$ симметричны относительно оси $0x$, то исследование можно провести для функции y_1. Эта функция определена на отрезке $[-1;1]$, т. е. $D(y_1) = [-1;1]$. Функция y_1 равна нулю при $x=-1$, $x=1$, $x=0$. На области определения $D(y_1)$ функция является нечетной.

Находим производные функции y_1:

$$y_1' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad y_1'' = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

Точками возможного экстремума являются точки:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1.$$

Точки x_3 и x_4 являются граничными точками области определения $D(y_1)$. Определим характер точек x_1 и x_2 с помощью второй производной:

$$y_1''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}} = 4 > 0,$$

$$y_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-3\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}} = -4 < 0.$$

Следовательно, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ является точкой минимума, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ – точкой максимума. Значения функции y_1 в этих точках соответственно равны:

$$y_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

В точке $x = 0$ вторая производная обращается в нуль. При $x \in (-1;0)$ имеем y_1'' <0, при $x \in (0;1)$ имеем y_1'' >0. Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой перегиба графика функции $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$.

График функции $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$ изображен на рисунке 8.4. Отображая построенный график симметрично относительно оси $0x$, получим график исходной функции $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$ (рисунок 8.5). Видно, в точке $O(0,0)$ график пересекает себя, поэтому является точкой самопересечения.

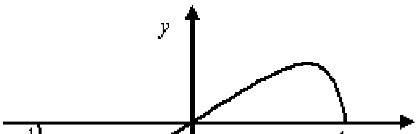

Рисунок 8.4 – График функции $y_1 = x\sqrt{1-x^2}$

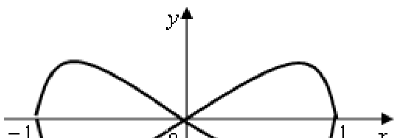

Рисунок 8.5 – График функции $x^2 = y^2 + x^4$

2 способ. Полагая $y = x^2 \operatorname{sh} t$ из уравнения $x^2 = y^2 + x^4$, получим $x^2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$. Отсюда $x = \pm\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$. Поскольку $y(-x) = y(x)$, то график функции симметричен относительно оси $0y$, и поэтому будем рассматривать случай $x > 0$.

Тогда параметрические уравнения кривой имеют вид:

$$x(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \qquad y(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}. \tag{8.6}$$

Исследование данной функции проводится по схеме для функций, заданных параметрическими уравнениями.

1**)** функции $x(t),\ y(t)$ определены на $\mathbf{R}$.

При этом

$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0,\ \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Таким образом, наклонные асимптоты отсутствуют;

2) так как

$$x(-t) = x(t),\ y(-t) = -y(t),$$

то график функции симметричен относительно оси $0x$.

Свойством периодичности функция не обладает;

3) имеем $x = 1$, $y = 0$ при $t = 0$;

4) найдем производные функций $x(t),\ y(t)$:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}, \qquad \dot{y}(t) = \frac{1 - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^3 t}.$$

Имеем $\dot{x} = 0$ при $t = 0$, $\dot{y} = 0$ в точках $t_1 = -\operatorname{arsh} 1$ и $t_2 = \operatorname{arsh} 1$;

5) найдем производные y_x' и y_{xx}'':

$$y_x' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\operatorname{sh}^2 t - 1}{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t}, \qquad y_{xx}'' = -\frac{\operatorname{sh}^2 t\left(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t\right) + 1}{\operatorname{sh}^3 t}.$$

Так как $y_{xx}''(-\operatorname{arsh} 1) > 0$, то $t_{\min} = -\operatorname{arsh} 1$. Тогда

$$x_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

Так как $y_{xx}''(\operatorname{arsh} 1) < 0$, то $t_{\max} = \operatorname{arsh} 1$. Тогда

$$x_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; y_{\max} = \frac{1}{2};$$

6) строим график функции, заданной уравнениями (8.6). Отображая симметрично относительно оси $0y$, получаем график исходной функции (рисунок 8.7).

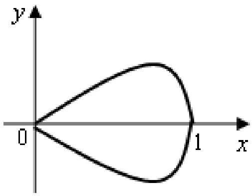

Рисунок 8.6 – График функции
$$x(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}, \; y(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t},$$

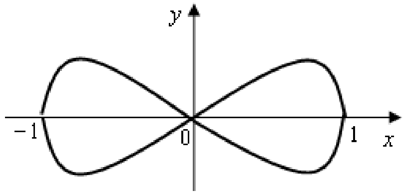

Рисунок 8.7 – График функции
$$x^2 = y^2 + x^4$$

5 Исследовать и построить график функции
$$r(\varphi) = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}. \tag{8.7}$$

Решение. Данная функция при тех значениях φ, для которых, как следует из определения полярного радиуса, выполнено неравенство
$$\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \ge 0.$$

Кроме того, функция $r(\varphi)$ является 2π периодической, то достаточно рассмотреть промежуток
$$\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$$

Поскольку
$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{4} - 0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = +\infty,$$
$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{4} - 0} \frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

то прямая

$$r=-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi\to-\frac{\pi}{4}-0$.

Аналогично

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0}\frac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\sin(\varphi-\frac{3\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

и прямая

$$r=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)}$$

является асимптотой при $\varphi\to\frac{3\pi}{4}+0$.

Так как $\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$, то это одна и та же прямая.

Если $\cos\varphi=0$, то из уравнения (8.7) следует r =0, т. е. имеем точку $x=y=0$.

При $\cos\varphi\neq0$, полагая $t=\operatorname{tg}\varphi$, получим параметрическое задание кривой:

$$x=\frac{3t}{t^3+1}\ ,\ y=\frac{3t^2}{t^3+1}\ . \tag{8.8}$$

Найдем производные

$$\dot{x}=\frac{3\left(1-2t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2},\qquad\qquad \dot{y}=\frac{3t\left(2-t^3\right)}{\left(t^3+1\right)^2}\ .$$

Имеем $\dot{x}=0$ при $t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\dot{y}=0$ при $t=0$ и $t=\sqrt[3]{2}$.

Найдем производные f' и f'':

$$y_x' = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}, \qquad y_{xx}'' = \frac{2\left(1+t^3\right)^4}{3\left(1-2t^3\right)^3}.$$

При $t\in\left(-\infty;-1\right)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит функция убывает и вогнута, следовательно, подходит к асимптоте сверху.

При $t\in\left(-1;0\right)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция убывает и вогнута. При этом

$$x_{\min}=y_{\min}=0$$

При $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''>0$, значит, функция возрастает и вогнута. При этом

$$x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt[3]{4}, \quad y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt[3]{2}.$$

При $t\in\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}\right)$ имеем $y_x'<0$ и $y_{xx}''<0$, значит, функция возрастает и выпукла. При этом

$$x_{\max}=x\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{2}, \qquad y_{\max}=y\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{4}.$$

При $t\in\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$ имеем $y_x'>0$ и $y_{xx}''<0$, значит, функция возрастает и выпукла.

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=+\infty$, то $O\left(0;0\right)$ является точкой возврата.

График функции (8.7) называется *декартов лист* и изображен на рисунке 8.8. В декартовой системе координат декартов лист задается уравнением:

$$x^3+y^3=3xy.$$

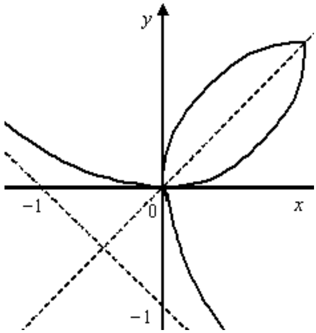

Рисунок 8.8. Декартов лист

Задания для аудиторной работы

1 Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$; д) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x+1}$;

б) $f(x)=\sqrt{2x^3+9x^2}$; е) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$;

в) $f(x)=e^x-x$; ж) $f(x)=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$;

г) $f(x)=\ln x-x+1$; и) $f(x)=\sin x-\sin^2 x$.

2 Исследовать следующие функции, заданные параметрическими уравнениями, и построить график:

а) $x=\dfrac{1}{4}(t+1)^2$, $y=\dfrac{1}{4}(t-1)^2$; в) $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

б) $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y=\dfrac{1}{1+t^2}$; г) $x=-5t^2+2t^5$, $y=-3t^2+2t^3$;

3 Исследовать следующие функции, заданные неявно, и построить график:

а) $xy^2-y^2-4x=0$; б) $x^6+2x^3y=y^3$ (положить $y=x^2t$).

4 Исследовать следующие функции, заданные в полярных координатах и построить график:

а) $r=\dfrac{5}{\varphi}$; б) $r=\dfrac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.

Задания для домашней работы

1 Исследовать функции и построить их графики:

а) $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$;

б) $f(x)=\sqrt{x^2-x^3}$;

в) $f(x)=xe^{-2x}$;

г) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

д) $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$;

е) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$;

ж) $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$;

и) $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

2 Исследовать следующие функции, заданные параметрическими уравнениями, и построить график:

а) $x=\dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^3}{t^2+1}$;

б) $x=4t^2$, $y=3t\left(t^2+1\right)$;

в) $x=\dfrac{t^2}{t^2+1}$, $y=\dfrac{t^2\left(1-t^2\right)}{t^2+1}$;

г) $x=\dfrac{t^2+1}{4(1-t)}$, $y=\dfrac{t}{t+1}$.

3 Исследовать следующие функции, заданные неявно, и построить график:

а) $x^3+y^3=3x^2$; б) $4y^2=4x^2y+x^5$ (положить $y=x^2t$).

4 Исследовать следующие функции, заданные в полярных координатах и построить график:

а) $r=3\cos\varphi+3$; б) $r=4\cos^2 2\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$.

Практическое занятие 9 **Векторные функции**

9.1 Годограф векторной функции
9.2 Производная и дифференциал векторной функции
9.3 Длина кривой
9.4 Натуральное уравнение гладкой кривой и уравнение нормальной плоскости

9.1 Годограф векторной функции

Векторной функцией действительного аргумента (*вектор-функцией скалярного аргумента*) называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in T \subset \mathbf{R}$ ставит в соответствие один и только один вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$. *Обозначается*: $\vec{a} = \vec{a}(t),\ t \in T$.

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определенную длину (модуль) и определенное направление в каждой точке t.

Выберем общую точку приложения O векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$. При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию Γ. Линия Γ, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении аргумента $t \in T \subset \mathbf{R}$, называется *годографом* вектор-функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$ (рисунок 9.1).

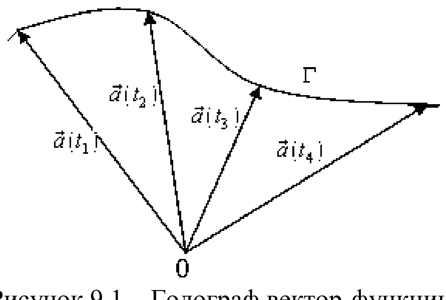

Рисунок 9.1 – Годограф вектор-функции

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а всякую линию Γ, в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

З а м е ч а н и я . 1 Если вектор $\vec{a}=\vec{a}(t)$ изменяется только по длине, а его направление остается постоянным, то $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ есть множество связанных векторов, расположенных на луче, выходящем из точки O. Годографом такой вектор-функции является луч Γ (рисунок 9.2), если $T=\mathbf{R}$.

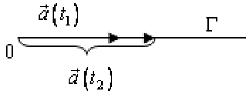

Рисунок 9.2 – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по длине

2 Если при изменении t модули векторов $\vec{a}=\vec{a}(t)$ не меняются, а изменяется только направление, то векторы из множества $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ будут находиться в шаре радиусом $|\vec{a}(t)|$ с центром в точке O. Годографом такой функции является линия, принадлежащая сфере радиусом $|\vec{a}(t)|$ (рисунок 9.3).

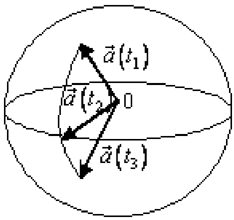

Рисунок 9.3. – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по направлению

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Тогда задание вектор-функции означает задание координат вектора $\vec{a}(t)$. Если начало вектора $\vec{a}(t)$ совпадает с точкой O, то $\vec{a}=\vec{a}(t)$ называется *радиусом-вектором* точки M и обозначается $\vec{r}(t)$ (рисунок 9.4).

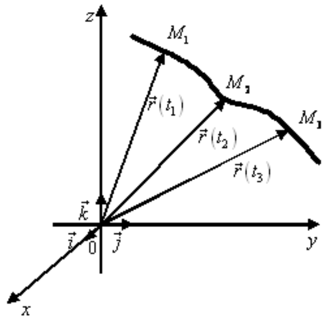

Рисунок 9.4 – Радиус-векторы

Любой радиус-вектор $\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}$ пространства $\mathbf{R}^3$ задается своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (координаты вектора совпадают с координатами точки $M \in \Gamma$ (рисунок 9.4)) и может быть разложен по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\ .$$

Так как каждой упорядоченной тройке чисел x, y, z соответствует единственный радиус-вектор $\vec{r}=\vec{r}(t)$, то задание вектор - функции эквивалентно заданию трех числовых функций $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

Поэтому исследование векторной функции скалярного аргумента сводится к исследованию трех координатных функций $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, определенных на множестве T. В координатной форме вектор-функция запишется в виде $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$.

Вектор $\vec{a}$ называется *пределом* вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$, в точке $t=t_0$ (или $t \to t_0$), если $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-a\right|=0$.

Обозначается: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Выражение $|\vec{r}(t) - a|$ задает числовую функцию. Следовательно, понятие предела вектор-функции сводится к понятию предела скалярной функции. Поэтому можно записать:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \; \forall t \in U(t_0;\delta) \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon .$$

Геометрический смысл предела вектор-функции: если начало всех векторов $\{ \vec{r}(t) \mid t \in T \}$ поместить в одну точку, то условие $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ означает, что концы всех векторов $\vec{r}(t)$ при $t \in U(t_0;\delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\vec{a}$.

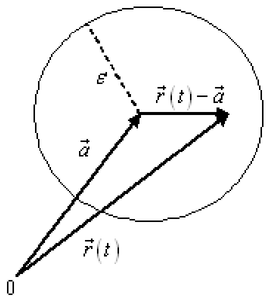

Рисунок 9.5 – Геометрический смысл предела вектор-функции

Теорема 1 Пусть $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ *и* $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. *Для того, чтобы* $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ *, необходимо достаточно, чтобы*

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1 , \; \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2 , \; \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3 .$$

Отсюда следует равенство:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\vec{k} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} .$$

Таким образом, для того чтобы вычислить предел вектор-функции, достаточно найти соответствующие пределы координат этой функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{r}(t)$ не существует, то не существует и $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$.

Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t \in T$, называется *непрерывной* в точке $t = t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Очевидно, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

9.2 Производная и дифференциал векторной функции

Введем понятие производной вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$ в данной точке t_0. Для этого дадим аргументу t_0 приращение $\Delta t \neq 0$ и рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Если существует предел отношения приращения $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 к приращению скалярного аргумента Δt при $\Delta t \to 0$, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Обозначается: $\vec{r}\,'(t_0)$

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как

$$\Delta\vec{r}(t_0) = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]\vec{i} + [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]\vec{j} + [z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)]\vec{k} =$$

$$= \Delta x(t_0)\vec{i} + \Delta y(t_0)\vec{j} + \Delta z(t_0)\vec{k},$$

то по определению получим

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Итак, вычисление производных от векторной функции скалярного аргумента в точке t_0 сводится к вычислению производных ее координат.

Дифференцируемые векторные функции обладают следующими свойствами:

– если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке;

– если векторная функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и $\vec{r}'(t_0)=\vec{a}$;

– векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке;

– если $t=t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функция, $\vec{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0=t(\tau_0)$ векторная функция, то

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau};$$

– для произвольных векторных функций имеют место формулы;

$$(\vec{r}_1\pm\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'\pm\vec{r}_2{}',$$

$$(f\cdot\vec{r})'=f'\cdot\vec{r}+f\cdot\vec{r}\,',$$

$$(\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2{}',$$

$$(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\vec{r}_2{}'.$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $\vec{r}(t)$ имеют одинаковую длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\vec{r}'(t_0)$ ортогональна вектору $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}'(t_0)\cdot r(t_0)=0;$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi\in(a;b)$, что

$$|\vec{r}(b)-\vec{r}(a)|\le|\vec{r}'(\xi)|\cdot(b-a).$$

С *геометрической* точки зрения производная вектор-функции в точке t_0 есть вектор $\vec{r}\,'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Механический смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.

Производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно дифференцировать.

Производная функции $\vec{r}\,'(t)$ точке $t = t_0$ называется *второй производной* вектор-функции $r(t)$ по скалярному аргументу t в точке t_0 и обозначается так: $\vec{r}''(t_0)$, $\dfrac{d^2\vec{r}(t_0)}{dt^2}$, $\left.\dfrac{d\vec{r}'(t_0)}{dt}\right|_{t=t_0}$, $\ddot{r}(t_0)$.

Вектор $\vec{a}(t_0)$, равный производной скорости $\vec{v}(t)$ по времени t в момент t_0, называется *ускорением*: $\vec{r}''(t_0) = \dfrac{d\vec{v}(t_0)}{dt} = \vec{a}(t_0)$.

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

9.3 Длина кривой

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. И пусть на отрезке $[a;b] \subset \mathbf{R}$ заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в $\mathbf{R}^3$.

Числа $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно рассматривать как координаты точки $M = M(t)$ или как координаты радиус-вектора $\vec{r}(t)$ с началом в точке O и концом в точке M (рисунок 9.6):

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)),\ t \in [a;b] \subset \mathbf{R}.$$

Непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в пространство $\mathbf{R}^3$ называется *кривой* и обозначается $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^3 \middle|\ a \le t \le b \right\}$.

Множество точек пространства $\mathbf{R}^3$, на которое отображается отрезок $[a;b]$, называется *носителем* кривой Γ, переменная t называется *параметром* на кривой Γ.

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*.

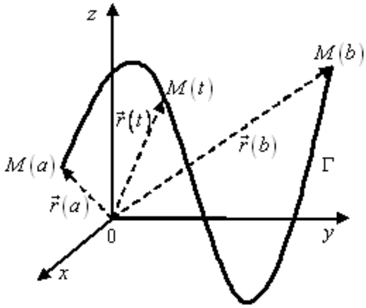

Рисунок 9.6 – Кривая Γ в пространстве $\mathbf{R}^3$

Кривая может быть задана:

– *явно*: непрерывная функция $y = f(x)$, $a \le x \le b$, задает плоскую кривую $\Gamma = \{y = f(x) |\ a \le x \le b\}$, носителем является график функции $f(x)$, параметром – переменная x;

– *неявно*: координаты всех точек носителя плоской кривой Γ удовлетворяют уравнению $F(x; y) = 0$;

– *в координатной форме*: $\Gamma = \{x(t); y(t); z(t) |\ a \le t \le b\}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатные функции отображения $M(t)$, $t \in [a; b] \subset \mathbf{R}$;

– *векторное представление*: $\Gamma = \{\vec{r}(t) |\ a \le t \le b\}$, где $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ – вектор-функция.

Если для точек кривой $\Gamma = \{M(t) \in \mathbf{R^3} |\ a \le t \le b\}$ выполняется условие $\forall t_1 < t_2 \quad M(t_1)$ предшествует $M(t_2)$, то такая кривая называется *ориентированной*.

Точка носителя кривой, в которую при отображении $\Gamma = \{M(t) \in \mathbf{R^3} |\ a \le t \le b\}$ отображаются хотя бы две разные точки отрезка $[a; b]$, называется *точкой самопересечения* (*кратной точкой*) кривой Γ.

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек (отображение $\Gamma = \{M(t) \in \mathbf{R^3} |\ a \le t \le b\}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a;b]$ в точки пространства $\mathbf{R}^3$), то кривая называется *простой дугой*.

Если $M_0 = M(a)$ и $M_1 = M(b)$, то точка $(M_0;a)$ называется *началом* кривой Γ, а точка $(M_1;b)$ – *концом* данной кривой. Если $M(a) = M(b)$, то кривая Γ называется *замкнутой*.

Простым замкнутым контуром называется замкнутая кривая, у носителя которой нет кратных точек, кроме носителя ее начала и конца.

Если $t_1, t_2 \in [a;b]$, $t_1 < t_2$, то кривая $\Gamma = \{M(t) | \ t_1 \le t \le t_2\}$ называется *частью кривой* Γ или *простой дугой* $M(t_1)M(t_2)$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в точке $M(t_2)$.

Прямая проходящая через точку M_0 в направлении вектора $\vec{r}\,'(t_0)$, называется *касательной* к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

Поместим начало вектора $\vec{r}\,'(t_0)$ в точку $M(t_0)$. Направление данного вектора совпадает с направлением касательной. Поэтому уравнение касательной в векторной форме запишется в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0) \cdot \lambda, \ \lambda \in \mathbf{R},$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор касательной.

В координатной форме уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0) \cdot \lambda$ примет вид

$$x = x(t_0) + \lambda \cdot x'(t_0),$$
$$y = y(t_0) + \lambda \cdot y'(t_0),$$
$$z = z(t_0) + \lambda \cdot z'(t_0),$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$.

Выражая параметр λ, получим уравнение касательной в канонической форме:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Если функция $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется *непрерывно дифференцируемой* кривой. Если векторная функция $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется *n раз дифференцируемой* кривой.

Точка кривой Γ, в которой $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$, называется *неособой*, а точка, в которой $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ – *особой*.

Пусть $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t))$. Поэтому точка M_0 является неособой точкой кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 .$$

Из определения неособой точки следует, что во всякой неособой точке кривой Г существует касательная.

Гладкой кривой называется кривая, которая является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек. Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такая кривая называется *кусочно-гладкой*.

Для отрезка $[a;b]$ система $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,..., n$, точек t_k, таких, что $a = t_0 < t_1 < ... t_{n-1} < t_n = b$, называется *разбиением* отрезка $[a;b]$. Соответствующий набор точек $M_k = M(t_k)$, $k = 0,1,..., n$, где $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_k)$ называется *разбиением* кривой Γ.

Соединив последовательно точки M_0, M_1, ..., M_n, отрезками M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ получим ломаную P_n, которая называется *вписанной* в кривую Γ; отрезки $M_{k-1}M_k$, $k = 0,1,..., n$ называются *звеньями* ломаной P_n, а точки ломаной $M_k = M(t_k)$ – *вершинами* ломаной. Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$. Тогда длина всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| .$$

Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется *длиной* кривой:

$$L_\Gamma = \sup_{\tau_n} \sigma_n ,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,..., n$, отрезка $[a;b]$.

Если $0 \le L_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой*.

Теорема 2 Если кривая $\Gamma = \left\{ x(t); y(t); z(t) \mid a \le t \le b \right\}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $l = l(t)$*, отсчитываемая от начала кривой* Γ*, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{dl}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} .$$

Поскольку $l'(t) = \dfrac{dl}{dt}$, то отсюда *дифференциал длины дуги* равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt .$$

9.4 Натуральное уравнение гладкой кривой и уравнение нормальной плоскости

Пусть кривая $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) \mid a \le t \le b \right\}$ гладкая кривая. В силу теоремы 2 переменная длина дуги $l = l(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a;b]$: $l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$. Так как $l(a) = 0$ и $l(b) = L_\Gamma$, то обратная функция $t = t(l)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; L_\Gamma]$. По теореме об обратной функции имеем

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0 .$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой Γ ее параметр t является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины l, производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра и уравнение кривой Γ можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(t(l))$, $l \in [0; L_\Gamma]$.

Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги l, то l называется *натуральным параметром*, а уравнение кривой $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(l) \mid 0 \le l \le L_\Gamma\}$ называется *натуральным уравнением* кривой.

Теорема 3 Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) \mid a \le t \le b\}$ *гладкая, а* $l = l(t)$ *– переменная длина ее дуги. Тогда* $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ *является единичным касательным к кривой* Γ *вектором и* $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1$.

Из теоремы 3 следует, что если α, β, γ – углы, образованные вектором касательной $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ к кривой Γ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то $\dfrac{d\vec{r}}{dl} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Нормальной плоскостью к кривой Γ называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка касания (рисунок 9.7). Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{r}'(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ коллинеарные, поэтому можно положить $A = x'(t_0)$, $B = y'(t_0)$, $C = z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(z - z_0) = 0.$$

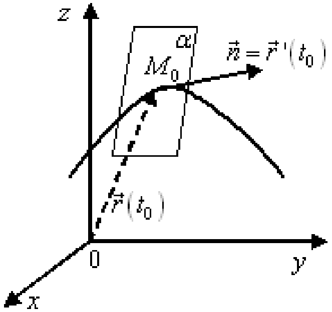

Рисунок 9.7 – Нормальная плоскость α к кривой Γ

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение векторной функции и годографа.

2 Дайте определение предела и непрерывности векторной функции. Перечислите свойства предела вектор-функции.

3 Дайте определение производной векторной функции. Какая вектор-функция называется дифференцируемой? Что называется дифференциалом векторной функции?

4 В чем состоит геометрический и физический смысл производной вектор-функции?

5 Дайте определение кривой. Перечислите способы задания кривой.

6 Какая прямая называется касательной к кривой?

7 Какая кривая называется гладкой кривой?

8 Что называется разбиением кривой?

9 Какая кривая называется спрямляемой? Дайте определение длины кривой.

10 Чему равен дифференциал дуги?

11 Какое уравнение называется натуральным уравнением гладкой кривой?

12 Чему равна длина единичного вектора касательной? Какие координаты он имеет?

Решение типовых примеров

1 Найти годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i}+\frac{2t}{1+t^2}\vec{j}+\vec{k}.$$

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y(t)=\frac{2t}{1+t^2},\ z(t)=1.$$

Из первых двух уравнений исключаем параметр t:

$$x^2+y^2=\frac{\left(1-t^2\right)^2+4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1.$$

Следовательно, годографом вектор-функции является окружность

$$x^2+y^2=1,\ z=1,$$

из которой исключена точка $(-1;0;1)$.

При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(x;y;z)$ на годографе движется от точки $(-1;0;1)$ против часовой стрелки (если наблюдать из точки, расположенной выше плоскости $z=1$). При этом

$$\lim_{t\to\pm\infty}x(t)=-1,\ \lim_{t\to\pm\infty}y(t)=0.$$

2 Вычислить $\lim\limits_{t\to 2}\vec{r}(t)$, если $\vec{r}(t)=(3t+2)\vec{i}+(2t-1)\vec{j}+(1-t)\vec{k}$.

Р е ш е н и е. Согласно определению

$$\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)=\lim_{t\to 2}(3t+2)\vec{i}+\lim_{t\to 2}(2t-1)\vec{j}+\lim_{t\to 2}(1-t)\vec{k}=8\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}.$$

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r}=e^{2t}\,\vec{i}-(t+8)^{\frac{4}{3}}\vec{j}$$

при $t=0$.

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t)=e^{2t},\ y(t)=-(t+8)^{\frac{4}{3}},\ z(t)=0.$$

Найдем координаты направляющего вектора касательной к кривой $\left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)$:

$$\left(x'(t); y'(t); z'(t)\right) = \left(2e^{2t}; -\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}}; 0\right),$$

в частности в точке $t = 0$

$$\vec{\tau} = \left(x'(t); y'(t); z'(t)\right)\Big|_{t=0} = \left(2e^{2t}; -\frac{4}{3}(t+8)^{\frac{1}{3}}; 0\right)\Bigg|_{t=0} = \left(2; -\frac{8}{3}; 0\right).$$

Тогда единичный вектор годографа имеет вид

$$\vec{\tau}^{\,0} = \frac{2}{10/3}\vec{i} - \frac{8/3}{10/3}\vec{j} + \frac{0}{10}\vec{k} = 0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}\ .$$

4 Найти производную скалярного произведения векторов

$$\vec{r}_1 = 3t\,\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k} \ \text{ и } \ \vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3t\,\vec{j} + \vec{k}\ .$$

Решение. Согласно свойствам дифференцируемых векторных функций, имеем

$$\frac{d\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\right)}{dt} = \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \vec{r}_2 \cdot \frac{d\vec{r}_1}{dt} =$$

$$= \left(3t\,\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\right)\cdot\left(-3\vec{j}\right) + \ 2\vec{i} - 3t\,\vec{j} + \vec{k}\ \cdot 3\vec{i} = -6 + 6 = 0\ .$$

5 Дано уравнение движения $\vec{r} = 3t\,\vec{i} - 4t\,\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

Решение. Параметрические уравнения годографа есть

$$x(t) = 3t\ ,\ \ y(t) = -4t\ ,\ \ z(t) = 0\ .$$

Из первого уравнения исключим параметр t

$$t = \frac{x}{3}$$

и подставим во второе

$$y = -4 \cdot \frac{x}{3}.$$

Отсюда уравнение траектории движения

$$4x + 3y = 0\ ,\ \ z = 0\ .$$

Вектор скорости движения есть

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}\ .$$

6 Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой

$$\vec{r} = \left(t^2 - 1\right)\vec{i} + (t+1)\vec{j} + t^3\vec{k}$$

в точке $M_0(0;2;1)$.

Р е ш е н и е. Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$.

Имеем

$$x'(t) = 2t,\ y'(t) = 1,\ z'(t) = 3t^2.$$

Подставляя значение $t = 1$, получаем

$$x'(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ z'(1) = 3.$$

Тогда уравнение касательной:

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3},$$

уравнение нормальной плоскости:

$$2(x-0) + 1(y-2) + 3(z-1) = 0$$

или $2x + y + 3z - 5 = 0$.

7 Найти скорость и ускорение материальной точки M, движущейся с постоянной угловой скоростью ω по окружности

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Р е ш е н и е. Пусть M – произвольная точка окружности. Обозначим через φ угол между радиус-вектором точки M и положительным направлением оси Ox. По условию

$$\varphi = \omega t,$$

где t – время движения.

Выразим координаты точки M как функции времени (рисунок 9.8):

$$x = R\cos\varphi = R\cos\omega t,$$

$$y = R\sin\varphi = R\sin\omega t.$$

Следовательно, радиус-вектор точки M

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j},$$

скорость $\vec{v}(t)$ движения точки M

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = (R\cos\omega t)'\,\vec{i} + (R\sin\omega t)'\,\vec{j} = -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

,

модуль скорости

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2} = \omega R\,.$$

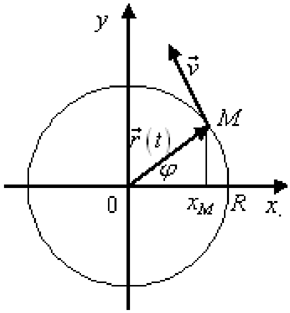

Рисунок 9.8 – Геометрическая интерпретация задачи 7.

Скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{r}$ есть:

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = -R^2\cos\omega t\cdot\sin\omega t + R^2\sin\omega t\cdot\cos\omega t = 0\,,$$

т. е. векторы $\vec{v}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны.

Отсюда следует, что вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности, по которой движется точка M .

Найдем ускорение $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a} = \vec{r}\,''(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j} =$$

$$= -\omega^2\left(R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}\right) = -\omega^2\,\vec{r}(t).$$

Значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{r}$ имеют противоположные направления.

Таким образом, ускорение материальной точки, движущейся с постоянной угловой скоростью по окружности, в каждый момент времени направлено к центру этой окружности.

8 К годографу винтовой линии (рисунок 9.9)

$$\Gamma = \left\{x = a\cos t; y = a\sin t; z = bt \,\middle|\, 0 \le t \le T\right\}$$

а) найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

б) доказать, что касательная к винтовой линии образует постоянный угол с осью Oz;

в) записать натуральное уравнение винтовой линии;

г) найти дифференциал длины дуги.

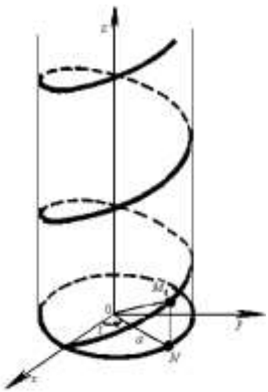

Рисунок 9.9 – Годограф функции
$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t;\, y = a\sin t;\, z = bt \,\middle|\, 0 \le t \le T \right\}$$

Решение. а) координаты точки касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть:

$$x_0 = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2},\ y_0 = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ z_0 = b\frac{\pi}{3}.$$

Координаты вектора $\vec{r}\,'(t_0)$:

$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{a\sqrt{3}}{2},\ y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}.\ z'(t_0) = b.$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - \frac{b\pi}{3}}{b},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a}{2}\left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - b\left(z - \frac{b\pi}{3}\right) = 0;$$

б) вектор касательный к годографу вектора $\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=(-a\sin t; a\cos t; b).$$

Тогда

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

в) векторная функция $\vec{r}(t)=(a\cos t; a\sin t; bt)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}>0.$$

Тогда $l'(t)=|\vec{r}\,'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}$. Интегрируя обе части, получим $s(t)=t\sqrt{a^2+b^2}+C$. Из начального условия $l(0)=0$, имеем $C=0$. При этом длина винтовой линии равна

$$L_\Gamma=T\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, $t=\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отсюда натуральное уравнение винтовой линии в координатной форме запишется в виде:

$$\Gamma=\left\{x=a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; y=a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}; z=b\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

где $0\le l\le T\sqrt{a^2+b^2}$.

г) дифференциал длины дуги равен

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Для винтовой линии имеем

$$dl=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Задания для аудиторной работы

1 Найти годографы вектор функций:

а) $\vec{r}=(2t-1)\vec{i}+(-3t+2)\vec{j}+4t\vec{k}$, $t\in\mathbf{R}$;

б) $\vec{r} = \sqrt{1-t^2}\,\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\,\vec{j}$, $t \in [0;1]$;

в) $\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + (-3t+2)\vec{j} + 4t\,\vec{k}$;

г) $\vec{r} = 4\operatorname{ch} t\,\vec{i} - \vec{j} + 3\operatorname{sh} t\,\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

2 Дано уравнение движения $\vec{r} = 3t\,\vec{i} + \left(4t - t^2\right)\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r} = (2t-1)\vec{i} + \left(t^2+1\right)\vec{j} - \left(t^3+2\right)\vec{k}$$

при $t = 0$.

4 Показать, что векторы

$$\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \vec{k} \text{ и } \vec{r}\,'$$

перпендикулярны.

5 Для следующих кривых написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

а) $x = 4\sin^2 t$, $y = 4\sin t\cos t$, $z = 2\cos^2 t$, $t = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $x = \dfrac{e^t \sin t}{\sqrt{2}}$, $y = 1$, $z = \dfrac{e^t \cos t}{\sqrt{2}}$, $t = 0$.

6 Найти дифференциал длины дуги кривой

$x = a\cos^2 t$, $y = \sqrt{a^2+b^2}\sin t\cos t$, $z = b\sin^2 t$.

Задания для домашней работы

1 Найти годографы вектор функций:

а) $\vec{r} = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

б) $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$;

в) $\vec{r} = 3t\,\vec{i} + \left(2t - t^2\right)\vec{j}$; $t \in \mathbf{R}$;

г) $\vec{r} = (\operatorname{sh} t - 1)\vec{i} + \operatorname{ch}^2 t\,\vec{j} + 3\vec{k}$, $t \in \mathbf{R}$.

2 Дано уравнение движения $\vec{r} = 2(t - \sin t)\vec{i} + 2(1 - \cos t)\vec{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t = \dfrac{\pi}{2}$, $t = \pi$.

3 Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции

$$\vec{r} = \left(t^3 + t\right)\vec{i} + t^2\,\vec{j}$$

при $t = -1$.

4 Для следующих кривых написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

а) $x = \dfrac{1}{2}t^2$, $y = \dfrac{1}{3}t^3$, $z = \dfrac{1}{4}t^4$, $t = 2$;

б) $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y = a\,\mathrm{sh}\,t$, $z = a\,t$, $t = 0$;

в) $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\sin t - \cos t)$, $z = e^t$, $t = 0$.

5 Показать, что кривые

$$\vec{r}_1 = (t+1)\vec{i} + t^2\,\vec{j} + (2t-1)\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = 2t^2\,\vec{i} + (3t-2)\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$

пересекаются и определить угол между кривыми в точке их пересечения.

6 На кривой

$$\vec{r} = (t+1)\vec{i} + \left(t^2 - 1\right)\vec{j} + t^3\,\vec{k}$$

найти точку, касательная к которой параллельна плоскости

$$x + 2y + z - 1 = 0.$$

Практическое занятие 10 Кривизна кривой

10.1 Понятие кривизны кривой
10.2 Вычисление кривизны кривой
10.3 Радиус, круг и координаты центра кривизны плоской кривой
10.4 Эволюта и эвольвента плоской кривой

10.1 Понятие кривизны кривой

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – *кривизна*.

Например, о двух плоских кривых $ACB \subset \Gamma_1$ и $ADB \subset \Gamma_2$ (рисунок 10.1) можно сказать, что кривая Γ_2 более изогнута, чем Γ_1.

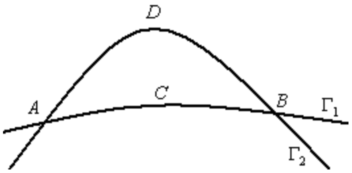

Рисунок 10.1 – Кривые Γ_1 и Γ_2

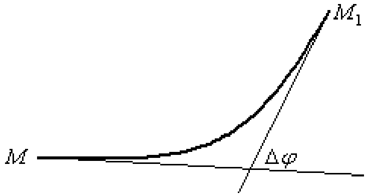

Рисунок 10.2 – Угол смежности

Однако для того, чтобы строго оценить степень изогнутости плоской линии, необходимо ввести количественную характеристику ее изогнутости (кривизны).

Рассмотрим на кривой точки M и M_1. Проведем в этих точках касательные к кривой. При переходе по кривой из точки M в точку M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется *углом смежности* (рисунок 10.2).

Отношение угла смежности дуги к ее длине называется *средней кривизной дуги:* $K_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой на всей дуге. На отдельных участках кривой кривизна может значительно отличаться от средней. Чтобы избежать такой неопределенности, вводится количественная мера изогнутости кривой в точке M. Эта характеристика основана на том, что чем меньше дуга Γ (рисунок 10.2), тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость линии вблизи точки M.

Кривизной K линии Γ в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1 линии Γ при стремлении точки M_1 к точке M:

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ср}} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \right|.$$

10.2 Вычисление кривизны кривой

Пусть кривая Γ является годографом дважды дифференцируемой *векторной функции* действительного аргумента $\Gamma = \left\{ \vec{r}\,(t) \middle| \; a \le t \le b \right\}$ (рисунок 10.3).

Тогда кривизна кривой Γ вычисляется по формуле

$$K = \frac{\left| \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \right|}{\left| \vec{r}\,'^3 \right|}.$$

Если гладкая кривая Γ задана *параметрическими уравнениями*

$$\Gamma = \left\{ x(t); y(t); z(t) \middle| \; a \le t \le b \right\},$$

то кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{\sqrt{\left(y'z'' - y''z'\right)^2 + \left(z'x'' - z''x'\right)^2 + \left(x'y'' - x''y'\right)^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая Γ задана в *плоскости Oxy* уравнением $y = f(x)$, то формула для вычисления ее кривизны получается из формулы вычисления кривизны, положив в ней $t = x$, $z = 0$. Тогда уравнение линии Γ можно записать в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} y &= f(x), \\ t &= x. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\left| \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \right| = \sqrt{0 + 0 + \left(1 \cdot y'' - 0\right)^2} = \left| y'' \right| \text{ и } \left| \vec{r}\,' \right| = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Значит,

$$K=\frac{\left|y''\right|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy *неявно* уравнением $F(x;y)=0$, то кривизна вычисляется по формуле

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F'^2_x+F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то кривизна находится по формуле

$$K=\frac{\left|r^2+2r'^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

10.3 Радиус, круг и координаты центра кривизны плоской кривой

Проведем к кривой Γ нормаль в точке $M(x;y)$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN=R$ (рисунок 10.3), по величине обратный кривизне K: $R=\dfrac{1}{K}$.

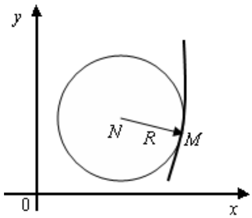

Рисунок 10.3 – Радиус кривизны MN

Отрезок MN называется *радиусом кривизны*, точка N – *центром кривизны*, а круг с центром в точке N и радиусом R – *кругом кривизны кривой* в точке $M(x;y)$.

Если кривая Γ задана *в декартовой системе* координат Oxy уравнением $y=f(x)$, то ее радиус кривизны находится по формуле:

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

Если кривая Γ в плоскости Oxy задана *параметрическими уравнениями*, то ее радиус кривизны определяется по формуле:

$$R=\frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x'-y'x''\right|}.$$

Если Γ – годограф вектор-функции $r=r(t)$, то:

$$R=\frac{|\vec{r}\,'|^3}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}.$$

10.4 Эволюта и эвольвента плоской кривой

Из определения центра кривизны следует, что каждой точке M кривой Γ, соответствует точка N – центр кривизны кривой Γ' в точке M.

Множество точек Γ' центров кривизны линии Γ называется ее *эволютой*, а сама линия Γ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Пусть кривая Γ задана уравнением $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}$ в плоскости Oxy. Пусть $N(\xi;\eta)$ – центр кривизны линии Γ в точке M (рисунок 10.4).

Тогда для любой точки $M(x;y)\in\Gamma$ имеем $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}$. Обозначим

$$\overrightarrow{ON}=\vec{r}_1,\qquad \overrightarrow{OM}=\vec{r},\qquad \overrightarrow{MN}=R\cdot\vec{n}^{\,0},$$

где $\vec{n}^{\,0}$ – единичный вектор нормали кривой Γ.

Тогда

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + R\vec{n}^0 .$$

Это уравнение называется *векторным уравнением эволюты кривой* Γ.

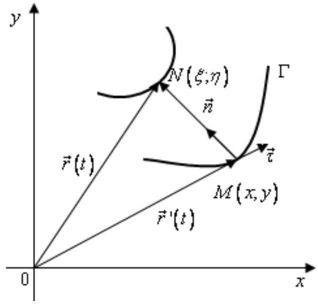

Рисунок 10.4 – Эволюта и эвольвента

Запишем разложения векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ по базису $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$r_1 = \xi \cdot \vec{i} + \eta \cdot \vec{j} ,$$
$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} .$$

Найдем вектор $\vec{n}^0$.

Единичный вектор касательной к кривой Γ есть

$$\vec{\tau}^0 = \frac{r'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j}}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \vec{j} .$$

Продифференцируем равенство $\vec{\tau}^{0^2} = 1$ по t. Имеем

$$2\vec{\tau}^0 = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = 0 .$$

Отсюда $\frac{d\vec{\tau}^0}{dt} \perp \vec{\tau}^0$. Таким образом, вектор нормали $\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt}$.

Координаты вектора $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}^0}{dt} = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)' \vec{i} + \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)' \vec{j} =$$

$$= -y'\frac{x'y''+y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{i} + x'\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{j} \; .$$

Тогда

$$\vec{n}^{\,0} = \mp\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{i} \pm \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{j} \; .$$

Подставим $\vec{n}^{\,0}$ и $R = \dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x'-y'x''\right|}$ в векторное уравнение эволюты $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t) + R\cdot\vec{n}^{\,0}$:

$$\xi\cdot\vec{i} + \eta\cdot\vec{j} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} - y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}\vec{i} + x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\vec{j} \; .$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях выражения, получим:

$$\xi = x - y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''} \, ,$$

$$\eta = y + x'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''} \, .$$

Данные формулы являются параметрическими уравнениями эволюты $\Gamma^{'}$ кривой $\Gamma = \left\{x(t); y(t); z=0 \middle| \; 0 \le t \le T\right\}$. Сама же кривая Γ является эвольвентой по отношению к кривой $\Gamma^{'}$.

Свойства эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними:

– нормаль к эвольвенте Γ является касательной к эволюте в соответствующей точке;

– если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение кривизны и радиуса кривизны кривой.

2 Как вычисляется кривизна в случаях векторного, параметрического представления кривой?

3 Дайте определение радиуса, круга и центра кривизны плоской кривой.

4 Что называется эволютой и эвольвентой плоской кривой?

Решение типовых примеров

1 Вычислить кривизну кривой $y = \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Р е ш е н и е. Находим $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$. Тогда кривизна кривой $y = \ln x$ в любой ее точке M с абсциссой x есть

$$K = \frac{\left| -\frac{1}{x^2} \right|}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{|x|}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}}.$$

В точке $x_0 = 1$ имеем

$$K\Big|_{x_0=1} = \frac{1}{2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2 Найти кривизну в любой точке циклоиды

$$\Gamma = \left\{ x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$x' = a(1 - \cos t),\ x'' = a \sin t,$$

$$y' = a \sin t,\ y'' = a \cos t.$$

Тогда

$$x'y'' - y'x'' = a^2\left(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t\right) = -a^2(1 - \cos t),$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) = 2a^2(1 - \cos t).$$

Подставляя в формулу для вычисления кривизны, получим

$$K = \frac{\left|x'y'' - x''y'\right|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|-a^2(1 - \cos t)\right|}{\left(2a^2(1 - \cos t)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\, a\sqrt{1 - \cos t}}.$$

3 Найти координаты центра кривизны кривой $x^3+y^4=2$ в точке $M(1;1)$.

Решение. Дифференцируем уравнение два раза:

$$3x^2+4y^3\cdot y'=0,\ 6x+12y^2\cdot y'^2+4y^3\cdot y''=0.$$

Так как $x=1$, $y=1$, то из первого выражения находим, что $y'=\frac{-3}{4}$, а из второго получаем $y''=-\frac{51}{16}$.

Подставляя в формулы для координат центра кривизны, получим

$$\xi=x-\frac{\left(1+y'^2\right)y'}{y''}=1-\frac{\left(1+\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{51}{16}}=\frac{43}{68},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=1+\frac{1+\frac{9}{16}}{-\frac{51}{16}}=\frac{26}{51},\text{ т. е. } C\left(\frac{43}{68};\frac{26}{51}\right).$$

4 Найти эволюту эллипса $\Gamma=\{x=a\cos t; y=b\sin t; 0\le t\le 2\pi\}$.

Решение. Имеем

$$x'=-a\sin t,\ y'=b\cos t,\ x''=-a\cos t,\ y''=-b\sin t.$$

Подставляя в формулы для эволюты, получим

$$\xi=\frac{a^2+b^2}{a}\cos^3 t,\ \eta=\frac{b^2+a^2}{b}\sin^3 t.$$

Данные уравнения являются параметрическими уравнениями астроиды (рисунок 10.6).

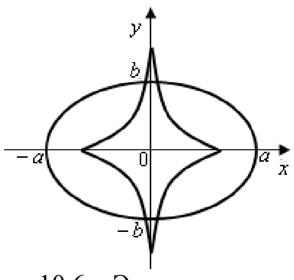

Рисунок 10.6 – Эллипс и его эволюта

5 Составить уравнение эволюты параболы

$$y^2 = x + \frac{1}{2}.$$

Решение. Продифференцируем два раза уравнение параболы:

$$2yy' = 1, \quad y' = \frac{1}{2y},$$

$$2y'^2 + 2yy'' = 0, \quad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Определяем координаты центра кривизны:

$$\xi = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{4y^2}\right)\cdot\frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2,$$

$$\eta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{y''x' - y'x''} = y + \frac{1 + \frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3.$$

Получаем уравнение эволюты в параметрической форме:

$$\xi = 3y^2, \quad \eta = -4y^3.$$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в явном виде

$$\eta^2 = \frac{16}{27}\xi^3.$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

а) $y = x^2$, $M_0(0;0)$, $M_1(1;1)$;

б) $x^2 - xy + y^2 = 1$, $M(1;1)$;

в) $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$ при $t = 1$;

г) $r = a(1-\cos\varphi)$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

2 Найти радиусы кривизны кривых:

а) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$;

г) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

3 Вычислить координаты центров кривизны кривых в указанных точках:

а) $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$, $M(0; a)$;

б) $y = x e^x$, $M\left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$.

4 Составить уравнения эволют кривых:

а) $y = x^3$;

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

в) $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\cos t - \sin t$.

Задания для домашней работы

1 Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

а) $y = -x^3$, $M(1;-1)$;

б) $x^2 + 9y^2 = 9$ в вершинах эллипса $A(3;0)$ и $B(0;1)$;

в) $x = \dfrac{t^2}{2}$, $y = \dfrac{1}{3}t^3$, $M\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)$;

г) $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

2 Найти радиусы кривизны кривых:

а) $y = \sqrt[3]{x}$;

б) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

в) $r = a\varphi$.

3 Вычислить координаты центров кривизны кривых в указанных точках:

а) $y = e^{-x^2}$, $M(0;1)$;

б) $y = \sin x$, $M\left(\frac{\pi}{2};1\right)$;

в) $y = \frac{1}{x}$, $M(1;1)$.

4 Составить уравнения эволют кривых:

а) $x^2 - y^2 = a^2$;

б) $x = 2t$, $y = t^2 - 2$.

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ – 1 Вычисление производных

1 Найти производные данных функций:

1.1 а) $y = 5\sin(2x-6)$, б) $y = x^2 \cdot \ln x$, в) $y = \dfrac{x-4}{\cos(2x)}$.

1.2 а) $y = \mathrm{tg}^2\left(x^3\right) + 5^{x-6}$, б) $y = x \cdot \mathrm{arctg}^2(x)$, в) $y = \dfrac{x^2 - \ln x}{x - \sin x}$.

1.3 а) $y = \cos\left(x^2 - 4^{2x}\right)$, б) $y = x\arcsin^2 x$, в) $y = \dfrac{\ln x^2 - 4\sin x}{x^3 + \mathrm{arctg}\, x}$.

1.4 а) $y = \arcsin\left(x^2\right)$, б) $y = (x-1)\cdot \mathrm{tg}\, x$, в) $y = \dfrac{x + \sqrt{x}}{\sin x}$.

1.5 а) $y = \ln^2(x+6)$, б) $y = \cos x \cdot 2^x$, в) $y = \dfrac{\sqrt{x} - \cos x}{x^2}$.

1.6 а) $y = \mathrm{arctg}^2(x-1)$, б) $y = x^4 \cdot \sin x$, в) $y = \dfrac{\cos(x-1)}{x^2 - 2}$.

1.7 а) $y = \ln(\sin(2x))$, б) $y = x^4 \cdot \arccos x$, в) $y = \dfrac{x+4}{\mathrm{tg}(2x)}$.

1.8 а) $y = \sin\left(e^x - x\right)$, б) $y = \sin x \cdot \ln x$, в) $y = \dfrac{\arcsin x}{x-1}$.

1.9 а) $y = 3\cos\left(x^2 + 6\right)$, б) $y = \mathrm{tg}\, 2x \cdot \arcsin x$, в) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x} + 1}$.

1.10 а) $y = \ln\left(x^2 + 6x\right)$, б) $y = e^{x-1}\mathrm{arctg}\, 3x$, в) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} + x}{\cos(4x) + 1}$.

1.11 а) $y = 2^{\arcsin(x)}$, б) $y = \sqrt[3]{x-1} \cdot \ln x$, в) $y = tg\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

1.12 а) $y = \sin\left(x^4 - x\right)$, б) $y = \ln x \arccos x$, в) $y = \sin\left(\dfrac{x^2 - 3}{x}\right)$.

1.13 а) $y=\cos\left(e^{x}+x\right)$, б) $y=x^{2}\cdot\ln x$, в) $y=\dfrac{x-4}{\cos(2x)}$.

1.14 а) $y=\sin\left(2x+x^{2}\right)$, б) $y=x^{2}\arcsin 2x$, в) $y=\dfrac{\ln x-4}{x^{2}-x}$.

1.15 а) $y=\arcsin\left(x^{2}\right)$, б) $y=\cos\left(x^{2}\right)\cdot e^{x}$, в) $y=\dfrac{\sin 8x}{\sqrt{x}+1}$.

1.16 а) $y=x^{2}+e^{x-5}$, б) $y=(x-1)^{2}\cdot\cos x$, в) $y=\dfrac{x^{2}-4x}{\arccos 2x}$.

1.17 а) $y=\sin^{2}\left(x^{3}-x\right)$, б) $y=\sqrt[3]{x^{2}-2}\ln x$, в) $y=\dfrac{\ln(x-4)}{\operatorname{tg}(x+1)}$.

1.18 а) $y=\ln^{3}\left(x^{2}-6\right)$, б) $y=\left(x^{2}-4\right)\cos x^{2}$, в) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x^{2}}{x-1}$.

1.19 а) $y=3\sin\left(x^{2}-4\right)$, б) $y=x^{3}\cdot\arcsin x$, в) $y=\dfrac{x^{2}-2x}{x+6}$.

1.20 а) $y=\ln\left(\arcsin^{2}x\right)$, б) $y=\operatorname{arctg}^{2}x\ln x$, в) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^{2}-4}}{\cos(x-3)}$.

1.21 а) $y=\arcsin\left(\ln^{2}x\right)$, б) $y=\cos x^{2}\cdot\ln(\operatorname{tg}x)$, в) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\arccos x}$.

1.22 а) $y=\arcsin x^{2}$, б) $y=(x-5)^{2}\cdot e^{x^{2}-3}$, в) $y=\dfrac{\sin(x+6)}{x^{2}+5}$.

1.23 а) $y=\operatorname{arctg}\left(x+x^{2}\right)$, б) $y=\operatorname{tg}x\cos^{2}x$, в) $y=\dfrac{x^{3}}{\ln(x+3)}$.

1.24 а) $y=3^{\sin x-x}$, б) $y=\operatorname{tg}^{2}x\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)$, в) $y=\dfrac{\arcsin x}{x^{2}-7}$.

1.25 а) $y=\ln\left(x^{4}-\cos x\right)$, б) $y=2^{x^{2}}\cdot\sqrt[3]{x}$, в) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x-6}\right)$.

1.26 а) $y=2^{\sin(2x-7)}$, б) $y=\operatorname{arctg}^{2}x\cdot\left(x^{2}-1\right)$, в) $y=\dfrac{\cos x}{\ln(x-5)}$.

1.27 а) $y=\ln\left(\cos^2 x\right)$, б) $y=\arcsin x^2\cdot\ln x$, в) $y=\dfrac{2^{x+3}}{x^2-6x}$.

1.28 а) $y=\cos\left(\ln^2(x-1)\right)$, б) $y=\operatorname{tg}x^2\arccos x$, в) $y=\dfrac{x^4-4}{3^{x-5}}$.

1.29 а) $y=\arcsin\left(\ln^3 x\right)$, б) $y=\cos x^2\cdot\ln\left(x+e^x\right)$, в) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1.30 а) $y=\operatorname{arctg}^2(x-1)$, б) $y=x^5\cdot 3^{x^2}$, в) $y=\ln\dfrac{x-4}{\sin x-\cos x}$.

2 Найти производную неявной функции:

2.1 $\sin\left(y^2\right)=x^2+y^3$.

2.2 $\arcsin(y)=\cos x^2+\ln y$.

2.3 $\operatorname{tg}\left(y^2+y\right)=yx+\sin y$.

2.4 $\ln\left(y^2+x\right)=\sin x^2+\arccos y$.

2.5 $\operatorname{arctg}y=\ln(x^2+y)+yx$.

2.6 $\arcsin(y+3)=xy^3+2^{x-2}$.

2.7 $\cos\left(y^2+x^2\right)=\operatorname{arctg}(x+y)$.

2.8 $4^{x+y}=\cos x^2+y$.

2.9 $\ln\left(y^2+\sin x\right)=\operatorname{arctg}x^2+5$.

2.10 $\arccos(x+y)=x^2+\ln y$.

2.11 $\operatorname{tg}\left(y^2-x\right)=\ln(x^2)+\arccos y$.

2.12 $\ln\left(y^2+\sin x\right)=\cos x^2-y^3$.

2.13 $\sin\left(y^2+x^3\right)=\operatorname{arctg}x^2-y$.

2.14 $2^{x^2-y}=x^2+y$.

2.15 $\operatorname{arcctg}\left(y+x^2\right)=x+\ln(x+y)$.

2.16 $e^{x^3+y}=\operatorname{arctg}x^2+\ln y$.

2.17 $\operatorname{tg}\left(y^2 - x\right) = \ln(x^2 + 1) + y$.

2.18 $2^{y+x} = \arcsin x^2 + y$ **.**

2.19 $\ln\left(y^2 + x\right) = \arccos x^2 + xy$.

2.20 $x \cdot y^2 = \ln\left(x^2 - y\right) - \arcsin x$.

2.21 $\cos\left(xy\right) = \operatorname{arctg} x^2 + \ln y$.

2.22 $\sin\left(x + y^2\right) = \ln x + \operatorname{arctg} y$.

2.23 $e^{x^2 - 2y} = \operatorname{tg}(x^2 + 1) + y^3$.

2.24 $\operatorname{tg}\left(y + xy\right) = \ln x + \arcsin y$.

2.25 $\arcsin\left(y + x\right) = \operatorname{tg} x + \sqrt{y}$.

2.26 $\sqrt{y+1} = \ln\left(x - y\right) + y$.

2.27 $x^2 + y^2 = 2^{x+y} + \operatorname{arctg} y$.

2.28 $\cos\left(y - x^2\right) = \ln\left(\cos x\right) + \sqrt{x-4}$.

2.29 $\arcsin\left(y^2 - 1\right) = \ln x + y^4$.

2.30 $\ln\left(y - x\right) = \cos x^2 + \arcsin y$.

3 Найти производную функции с помощью логарифмической производной:

3.1 а) $y = \left(\sin x\right)^{3x}$, б) $y = \dfrac{\left(x-2\right)^2}{\arcsin^3 x}$.

3.2 а) $y = \left(\arcsin x\right)^{5x}$, б) $y = \dfrac{\left(x^2-2\right)^4}{\arccos^5 2x}$.

3.3 а) $y = \left(\ln x + \sqrt{x}\right)^{\cos x}$, б) $y = \dfrac{\left(x+2\right)^3}{tg^5 5x}$.

3.4 а) $y = \left(\arcsin 2x\right)^{x+1}$, б) $y = \dfrac{\left(x+x^2\right)^2}{\arcsin^3 x}$.

3.5 а) $y = \left(\operatorname{tg} x\right)^{\cos x + x}$, б) $y = \dfrac{\left(x-5\right)^2}{\sin^3 x}$.

3.6 а) $y=(x+2)^{\sin x}$, б) $y=\dfrac{\cos^2 x}{(x^2+4x)^2}$.

3.7 а) $y=(\operatorname{ctg} x)^{\ln x}$, б) $y=\dfrac{(\operatorname{arctg} x)^2}{(x+4)^3}$.

3.8 а) $y=(x^2+4)^{\sin x}$, б) $y=\dfrac{(3x+2)^2}{\sin^3 x}$.

3.9 а) $y=(\ln x)^{tgx}$, б) $y=\dfrac{(x^2-x)^2}{\cos^3 x}$.

3.10 а) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\cos x}$, б) $y=\dfrac{(x^8+1)^5}{\arcsin^4 x}$.

3.11 а) $y=(\arcsin x)^{\sin x}$, б) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x+2}}{\arccos^4 x}$.

3.12 а) $y=(\ln x)^{\sqrt{x+5}}$, б) $y=\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{\operatorname{arctg}^5 x}$.

3.13 а) $y=(\arcsin x)^{x^2}$, б) $y=\dfrac{(x+4)^5}{\ln^3(x+2)}$.

3.14 а) $y=(\cos x)^{x^3+x}$, б) $y=\dfrac{(\cos x-2)^4}{(x^4+6)^6}$.

3.15 а) $y=(\operatorname{arctg} x)^{x^2-x}$, б) $y=\dfrac{(5x^2-2x)^2}{\arcsin^5 x}$.

3.16 а) $y=(\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$, б) $y=\dfrac{(\sin x-1)^2}{\ln^6 x}$.

3.17 а) $y=(\cos x)^{x+x^2}$, б) $y=\dfrac{(\arccos x)^4}{\ln^5 x}$.

3.18 а) $y=(\sin x)^{\sqrt{x+5}}$, б) $y=\dfrac{(x^3-1)^2}{\operatorname{arctg}^4 x}$.

3.19 а) $y=(\operatorname{tg}x)^{x+2}$, б) $y=\dfrac{(\cos x-x)^2}{\sin^6 x}$.

3.20 а) $y=(\arcsin x)^{\sqrt{x^2+1}}$, б) $y=\dfrac{(\ln x-\cos x)^5}{\arcsin^2 x}$.

3.21 а) $y=(\sin x)^{3x}$, б) $y=\dfrac{(x^4-5)^8}{\operatorname{arctg}^3 x}$.

3.22 а) $y=(\arcsin x)^{x^2}$, б) $y=\dfrac{(\cos x-1)^2}{\ln^3 x}$.

3.23 а) $y=(\sin x)^{\cos x}$, б) $y=\dfrac{(x^5-x)^4}{\sqrt[5]{x+3}}$.

3.24 а) $y=(\sin x)^{3x}$, б) $y=\dfrac{(x-2)^2}{\arcsin^3 x}$.

3.25 а) $y=(\cos x)^{\sqrt{x+1}}$, б) $y=\dfrac{(2x-1)^{12}}{\operatorname{arctg}^4 x}$.

3.26 а) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\operatorname{ctg}x}$, б) $y=\dfrac{(\sin x-x)^5}{\ln^7 x}$.

3.27 а) $y=(\arccos x)^{\sin x+x}$, б) $y=\dfrac{(x^2-2x)^2}{\arcsin^4 2x}$.

3.28 а) $y=(\operatorname{arcctg}x)^{\operatorname{tg}x}$, б) $y=\dfrac{(2x+3)^{10}}{\ln^6 x}$.

3.29 а) $y=(\log_2 x)^{\sin x}$, б) $y=\dfrac{(2\cos x-1)^2}{\operatorname{arctg}^5 4x}$.

3.30 а) $y=(\arcsin 3x)^{\ln x}$, б) $y=\dfrac{(4x^2-1)^2}{\sin^{10} 2x}$.

4 Найти производную y_x, функции $y = f(x)$ заданной параметрическими уравнениями:

4.1 $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = \sqrt{t-2}. \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} x = \cos t - t^2, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} x = 2t + \sin t, \\ y = \operatorname{tg}(t+1). \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} x = \ln t + t^3, \\ y = \sqrt{t^3 - 2}. \end{cases}$

4.5 $\begin{cases} x = 2t - \arccos 2t, \\ y = \sqrt{t-2} + t. \end{cases}$

4.6 $\begin{cases} x = \sin t + t, \\ y = \ln t - \sqrt{t+6}. \end{cases}$

4.7 $\begin{cases} x = e^t + \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln\sqrt{t-1}. \end{cases}$

4.8 $\begin{cases} x = \arccos t + t, \\ y = e^{t+4} + t^2. \end{cases}$

4.9 $\begin{cases} x = \arcsin t + t, \\ y = 2^{3t} + t. \end{cases}$

4.10 $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t^2 - 1}, \\ y = \operatorname{arctg} t + t^2. \end{cases}$

4.11 $\begin{cases} x = \ln(\operatorname{tg} t) \\ y = \sin t + t. \end{cases}$

4.12 $\begin{cases} x = 2^t + \arccos t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$

4.13 $\begin{cases} x = \sqrt[5]{t^3 + 5t}, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

4.14 $\begin{cases} x = 3t + \arcsin 5t, \\ y = \ln(t-1). \end{cases}$

4.15 $\begin{cases} x = 2t + \cos t, \\ y = e^{t^2-3} + t^3. \end{cases}$

4.16 $\begin{cases} x = \sin t + t^4, \\ y = 5^{t+5} - t. \end{cases}$

4.17 $\begin{cases} x = \ln t + \arccos t, \\ y = t + 4^t. \end{cases}$

4.18 $\begin{cases} x = t^4 + \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(t + t^3). \end{cases}$

4.19 $\begin{cases} x = \arccos t + \ln t, \\ y = e^{3t - t^3}. \end{cases}$

4.20 $\begin{cases} x = \sqrt{t+6} + t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

4.21 $\begin{cases} x = \ln t + t^5, \\ y = \operatorname{arctg}(t+6) \end{cases}$

4.22 $\begin{cases} x = 2^{t^2+4} + \ln t, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

4.23 $\begin{cases} x = \arcsin t + \sin t, \\ y = \ln(t-5). \end{cases}$

4.24 $\begin{cases} x = t^4 + t, \\ y = \log_3 t. \end{cases}$

4.25 $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}, \\ y = \operatorname{arctg}(t+1). \end{cases}$

4.26 $\begin{cases} x = \arcsin t + e^t, \\ y = \sqrt{t^2 - t}. \end{cases}$

4.27 $\begin{cases} x = t^5 \cdot \cos t, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

4.28 $\begin{cases} x = \ln(t^2 - 3), \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

4.29 $\begin{cases} x = \log_2(t+1), \\ y = \sqrt{t^4 - 1}. \end{cases}$

4.30 $\begin{cases} x = 3t + \arccos t, \\ y = \ln \sqrt{t-2}. \end{cases}$

5. Найти дифференциал dy функции $y = f(x)$:

5.1 $y = x^2 \cdot \ln \sqrt{x-1}$.

5.2 $y = \operatorname{tg}(x - x^2) + e^{x-6}$.

5.3 $y = x^2 \cdot \arcsin^2(x-2)$.

5.4. $y = x - \arccos(x^2 - 3)$.

5.5 $y = x - \ln^2(2x+6)$.

5.6 $y = \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 2}$.

5.7 $y = \ln(x + \sin(2x))$.

5.8. $y = \operatorname{arctg}(x^2 - x)$.

5.9 $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{x} + 1}$.

5.10 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 4} + x}{\cos(4x) + 1}$.

5.11 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \cdot \ln(x^3 - 1)$.

5.12 $y = \arcsin\left(\dfrac{x^2 - 3}{x^2}\right)$.

5.13 $y = \dfrac{x^2 - x}{\arccos(2x)}$.

5.14 $y = \operatorname{arctg}(2x + x^2)$.

5.15 $y = x + \arcsin(x^2)$.

5.16 $y = x^2 + e^{x-5}$.

5.17 $y=\dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{\ln\left(x^3+1\right)}$.

5.18 $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}\left(x^2\right)}{\cos x-1}$.

5.19 $y=3\sin\left(x^2-4\right)$.

5.20 $y=\ln\left(\operatorname{arctg}^2 x-x^3\right)$.

5.21 $y=\arccos x^2\cdot\ln\left(\operatorname{ctg} x\right)$.

5.22 $y=\left(x^2-5\right)^4\cdot e^{x^2-3x}$.

5.23 $y=\dfrac{x^3}{\ln\left(x+3\right)}$.

5.24 $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\ln\left(x^4+x\right)$.

5.25 $y=\operatorname{tg}^2\left(x-1\right)\cdot\sqrt[3]{x}$.

5.26 $y=\dfrac{\arccos x}{\ln\left(x^2-5\right)}$.

5.27 $y=\ln\left(\arccos^2 x\right)$.

5.28 $y=\operatorname{tg} x^2\cdot\arcsin x$.

5.29 $y=\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\right)$.

5.30 $y=\ln\dfrac{x-4}{\sin x-\cos x}$.

ИДЗ–2 Производные и дифференциалы высших порядков

1 Вычислить значение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

1.1 $y = x^2(x+3)^3$ в точке $x_0 = 0$.

1.2 $y = \mathrm{tg}^2 x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1.3 $y = x^2 \cdot \cos x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

1.4 $y = (x-1)^2 \cdot \mathrm{tg}\, x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1.5 $y = x^2 + \ln x$ в точке $x_0 = 4$.

1.6 $y = x \cdot \sin x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1.7 $y = x \cdot \arccos x$ в точке $x_0 = 1$.

1.8 $y = \sin 2x \cdot \mathrm{tg}\, x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

1.9 $y = x \cdot \arcsin x$ в точке $x_0 = 1$.

1.10 $y = x \ln 2x$ в точке $x_0 = e$.

1.11 $y = x \cdot \sqrt[3]{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

1.12 $y = \arccos(x+1)$ в точке $x_0 = 0$.

1.13 $y = \dfrac{x}{\cos 2x}$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

1.14 $y = x^2(x+3)^2$ в точке $x_0 = 2$.

1.15 $y = x^2 \ln x$ в точке $x_0 = 2$.

1.16 $y = x^2 \cdot \cos x$ в точке $x_0 = \pi$.

1.17 $y = \arcsin^2(x-1)$ в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

1.18 $y = \ln(x^2 - 6)$ в точке $x_0 = 4$.

1.19 $y = x^2 \cdot \arcsin x$ в точке $x_0 = 1$.

1.20. $y = \mathrm{arctg}^3 x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

1.21 $y = 2x\cos^3 x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

1.22 $y = x \cdot e^{x^2}$ в точке $x_0 = 2$.

1.23 $y = x \cdot \mathrm{arctg}\, x$ в точке $x_0 = 1$.

1.24 $y = \mathrm{tg}\, x \cdot \ln(x+1)$ в точке $x_0 = 1$.

1.25 $y = \ln x + x^2$ в точке $x_0 = 2$.

1.26 $y = \sqrt{x} \cdot \mathrm{arctg}\, x$ в точке $x_0 = 1$.

1.27 $y = \ln(\cos x)$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

1.28 $y = x^2 e^{x+2}$ в точке $x_0 = 2$.

1.29 $y = x^2 \arcsin x$ в точке $x_0 = 1$.

1.30 $y = x \cdot \mathrm{arctg}^2 x$ в точке $x_0 = 1$.

2 Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0:

2.1 $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = -2$.

2.2 $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0 = -1$.

2.3 $y = \cos 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

2.4 $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$.

2.5 $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = -1$.

2.6 $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0 = 1$.

2.7 $y = \sin 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

2.8 $y = \ln 4x$ в точке $x_0 = 1$.

2.9 $y = \mathrm{tg}\, x$ в точке $x_0 = 1$.

2.10 $y = \dfrac{1}{x^3}$ в точке $x_0 = -2$.

2.11 $y = \mathrm{ctg}\, x$ в точке $x_0 = 1$.

2.12 $y = \sqrt[4]{x}$ в точке $x_0 = 1$.

2.13 $y=\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=2$.

2.14 $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0=4$.

2.15 $y=\sin 3x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

2.16 $y=\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=-3$.

2.17 $y=\cos 2x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

2.18 $y=\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=-1$.

2.19 $y=\mathrm{tg}x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2.20 $y=\ln\dfrac{x}{2}$ в точке $x_0=2$.

2.21 $y=\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=2$.

2.22 $y=\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=-2$.

2.23 $y=\ln 2x$ в точке $x_0=1$.

2.24 $y=\sqrt{2x}$ в точке $x_0=2$.

2.25 $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=1$.

2.26 $y=\sin 3x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

2.27 $y=\dfrac{1}{2x}$ в точке $x_0=-2$.

2.28. $y=\sin 3x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

2.29 $y=\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=3$.

2.30 $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0=1$.

3 Написать разложение функции $y=f(x)$ в ряд Маклорена по степеням переменной x до членов порядка n включительно:

3.1 $y=\sin\left(x^2\right), n=6$.

3.2 $y=\sqrt{x-1}, n=9$.

3.3 $y=\cos\left(x^2\right), n=10$

3.4 $y=\sqrt{x+2}, n=6$.

3.5 $y=e^x\sin x, n=8$.

3.6 $y=\sqrt[3]{x^2+1}, n=6$.

3.7 $y=\sin x^2, n=5$.

3.8 $y=\ln(1+x^2), n=6$.

3.9 $y=\dfrac{x}{1+x^2}, n=5$.

3.10 $y=x\cdot e^{x^2}, n=8$.

3.11 $y=\sqrt[3]{1+x^3}, n=9$.

3.12 $y=x\sqrt[5]{1-x^2}, n=6$.

3.13 $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}, n=6$.

3.14 $y=e^{-x^2}, n=8$.

3.15 $y=x^2\cdot e^{x+1}, n=4$.

3.16 $y=\sin(x+1), n=3$.

3.17 $y=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x},\ n=4$.

3.18 $y=x\cdot e^{x},\ n=3$.

3.19 $y=\ln(1+x^{3}),\ n=4$.

3.20 $y=x+e^{-x^{2}},\ n=4$.

3.21 $y=e^{x+1},\ n=4$.

3.22 $y=e^{-\frac{x^{2}}{2}},\ n=6$.

3.23 $y=x\cdot\sqrt[3]{1+x},\ n=4$.

3.24 $y=\sqrt[6]{1+x^{2}},\ n=6$.

3.25 $y=e^{-2x^{2}},\ n=8$.

3.26 $y=\cos(x+1),\ n=6$.

3.27 $y=\ln(1+2x^{2}),\ n=6$.

3.28 $y=e^{-2x^{2}},\ n=8$.

3.29 $y=\dfrac{\sin x}{x},\ n=5$.

3.30 $y=x\sqrt[3]{1+2x},\ n=6$.

4 Используя правило Лопиталя, вычислить пределы:

4.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

4.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 4x)}$.

4.3 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.4 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$

4.5 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

4.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{5x^{2}+x^{3}}$.

4.7 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

4.8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$.

4.9 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^{2}-x-6}\right)$.

4.10 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

4.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

4.12 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x\right)^{\sin x}$.

4.13 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}$

4.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot e^{x}-5x}{4x^{2}+7x}$

4.15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{x}\right)^{\frac{2}{x+2}}$

4.16 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

4.17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$.

4.18 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

4.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

4.20 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

4.21 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

4.22 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

4.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)}{x^3}$.

4.24 $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}}$.

4.25 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

4.26 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

4.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\left(e^x+1\right)-2\left(e^{2x}-1\right)}{x^3}$.

4.28 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

4.29 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

4.30 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

5 Вычислить приближенно значение функции $y=f(x)$ в точке x_0 с помощью дифференциала:

5.1 $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=7{,}76$.

5.2 $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$, $x_0=0.98$.

5.3 $y=\arcsin x$, $x_0=0{,}08$.

5.4 $y=x^6$, $x_0=2{,}01$.

5.5 $y=\operatorname{tg} x$, $x_0=46^\circ$.

5.6 $y=\sqrt{4x-3}$, $x_0=1{,}08$.

5.7 $y=\sqrt[3]{x+\cos x}$, $x_0=0{,}01.$

5.8 $y=\arccos x$, $x_0=0{,}48.$

5.9 $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1{,}03.$

5.10 $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x_0=1{,}95.$

5.11 $y=\arcsin x$, $x_0=0{,}51.$

5.12 $y=\sqrt[3]{x+7x}$, $x_0=1{,}012.$

5.13 $y=x^7$, $x_0=2{,}002.$

5.14 $y=\arccos x$, $x_0=0{,}52.$

5.15 $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=8{,}24.$

5.16 $y=\lg x$, $x_0=10{,}02.$

5.17 $y=\operatorname{ctg} x$, $x_0=46^\circ.$

5.18 $y=\sqrt{1+x+\sin x}$, $x_0=0{,}01.$

5.19 $y=\operatorname{arctg} x$, $x_0=0{,}98.$

5.20 $y=x^4$, $x_0=3{,}998.$

5.21 $y=\operatorname{arcctg} x$, $x_0=1{,}04$

5.22 $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=1{,}21.$

5.23 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0=4{,}16.$

5.24 $y=\operatorname{arctg} x$, $x_0=1{,}02.$

5.25 $y=\sqrt{4x-1}$, $x_0=2{,}56.$

5.26 $y=x^5$, $x_0=2{,}995.$

5.27 $y=\arcsin x$, $x_0=0{,}09$

5.28 $y=\operatorname{tg} x$, $x_0=47^\circ.$

5.29 $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=7{,}64.$

5.30 $y=\sqrt{x^2+5}$, $x_0=1{,}95.$

ИДЗ – 3 Приложения производной

1 Найти глобальный экстремум функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1.1 $y = x^2 + \dfrac{4}{x} - 4$ на отрезке $[1;5]$.

1.2 $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$ на отрезке $[1;4]$.

1.3 $y = 2\sqrt{x} - x$ на отрезке $[0;4]$.

1.4 $y = x - \dfrac{6}{x}$ на отрезке $[-3;3]$.

1.5 $y = x - 2\sqrt{x} + 5$ на отрезке $[1;9]$.

1.6 $y = 3 - x - \dfrac{4}{\left(x + 2^2\right)}$ на отрезке $[-1;2]$.

1.7 $y = -0.5x^2 + \dfrac{8}{x} + 8$ на отрезке $[-4;-1]$.

1.8 $y = x^4 + 4x$ на отрезке $[-2;2]$.

1.9 $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[-0;3]$.

1.10 $y = x - \dfrac{9}{x} - 1$ на отрезке $[1;5]$.

1.11 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ на отрезке $[-1;2]$.

1.12 $y = x^2 - 2x + \dfrac{16}{x-1} - 13$ на отрезке $[2;5]$.

1.13 $y = \dfrac{4x}{x^2 + 4} - 4$ на отрезке $[-4;2]$.

1.14 $y = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15$ на отрезке $[1;4]$.

1.15 $y = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 4$ на отрезке $[-2;0,5]$.

1.16 $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ на отрезке $[1;5]$.

1.17 $y = x^2 + \frac{16}{x+2} + 4x - 9$ на отрезке $\left[-1;2\right]$.

1.18 $y = -\frac{2\left(x^2+3\right)}{x^2+2x+5} - 4$ на отрезке $\left[-5;1\right]$.

1.19 $y = 2x^2 + \frac{108}{x} - 59$ на отрезке $\left[2;4\right]$.

1.20 $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ на отрезке $\left[-1;7\right]$.

1.21 $y = \frac{10x+10}{x^2+2x+2}$ на отрезке $\left[-1;2\right]$.

1.22 $y = 3x^4 - 16x^3 + 4$ на отрезке $\left[-1;1\right]$.

1.23 $y = x^5 - \frac{5}{2}x^2 - 2$ на отрезке $\left[0;2\right]$.

1.24 $y = x^2 - \frac{4}{x} - 1$ на отрезке $\left[1;5\right]$.

1.25 $y = \frac{4x}{4+x^2} - 4$ на отрезке $\left[-4;2\right]$.

1.26 $y = 2\sqrt{x} - x$ на отрезке $\left[0;9\right]$.

1.27 $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $\left[-1;5\right]$.

1.28 $y = \frac{10x}{1+x^2} - 4$ на отрезке $\left[0;3\right]$.

1.29 $y = -0.5x^2 + 2x + \frac{8}{x-2} + 5$ на отрезке $\left[-2;1\right]$.

1.30 $y = x - 4\sqrt{x} + 6$ на отрезке $\left[1;16\right]$.

2 Решить геометрические задачи:

2.1 Найдите прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

2.2 При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости *V* будет иметь наименьшую полную поверхность?

2.3 В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник наибольшей площади.

2.4 В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

2.5 Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком значении α объём пирамиды является наибольшим?

2.6 В полушар радиуса *R* вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объёма.

2.7 В данный шар радиуса *R* вписать цилиндр наибольшего объёма.

2.8 В шар радиусом *R* вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

2.9 Около шара радиуса r описать конус наименьшего объёма.

2.10 Через вершину *M* квадрата *CEMK* провести прямую, пересекающую лучи *CK* и *CE* в точках *A* и *B* так, чтобы площадь *ΔABC* была наименьшей.

2.11 Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма является наибольшей?

2.12 Найти наибольший объём конуса с образующей *l*.

2.13 В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания *R* вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

2.14 Найти кратчайшее расстояние точки *M(p,p)* от параболы $y^2=2px$.

2.15 Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $0<b<a$, проходящую через вершину $B(0;-b)$.

2.16 Через точку эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник наименьшей площади.

2.17 Найти основания и высоту равнобочной трапеции, которая при данной площади S имеет наименьший периметр; угол при большем основании трапеции равен α .

2.18 Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра d, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

2.19 В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

2.20 Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью в 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора окажется наименьшей?

2.21 Прямоугольный лист жести имеет линейные размеры 5×8 дм. В четырех его углах вырезают одинаковые квадраты и делают открытую коробку, загибая края под прямым углом. Какова наибольшая вместимость полученной коробки?

2.22 В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

2.23 Две стороны параллелограмма лежат на сторонах данного треугольника, а одна из его вершин принадлежит третьей стороне. При каких условиях площадь параллелограмма является наибольшей?

2.24 Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a найти треугольник наибольшей площади.

2.25 Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины по 10 см. Найти размер большего основания, при котором площадь трапеции была бы наибольшей.

2.26 Найти длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18, 24 и 30 см и имеющего с ним общий прямой угол.

2.27 Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна β . При каком значении β отношение длин радиусов вписанной и описанной окружностей является наибольшим?

2.28 Каким должен быть радиус основания и высота цилиндрического бака, чтобы при данном объеме V на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

2.29 В прямоугольный треугольник с гипотенузой 12 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

2.30 Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины по 15 см. Найти размер меньшего основания, при котором площадь трапеции была бы наибольшей.

3 Решить физические задачи:

3.1 Тяжелую балку длиной 13 м, расположенную вертикально, опускают на землю так, что нижний её конец прикреплен к вагонетке, а верхний удерживается канатом, намотанным на ворот. Канат сматывается со скоростью 2 м/мин. С каким ускорением откатывается вагонетка в момент, когда она пройдёт расстояние 5 м?

3.2 Антенна радара находится на расстоянии 1000 м по горизонтали от стартовой площадки и все время направлена на ракету, которая поднимается с постоянным ускорением 20 м/с^2. Какова угловая скорость антенны в момент, когда ракета находится не высоте 1000 м?

3.3 Лошадь бежит по окружности со скоростью 20 м/с. В центре окружности находится фонарь. Забор касается окружности в точке, из которой лошадь начинает бег. С какой скоростью перемешается тень лошади вдоль забора в момент, когда лошадь пробежит 1/8 окружности?

3.4 Резервуар, имеющий форму полушара радиуса R_0, заполняется водой. Скорость заполнения резервуара равна V_0. Определите скорость подъёма воды в резервуаре в момент, когда вода поднялась на высоту h_0.

3.5 Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает отодвигаться от стены с постоянной скоростью 2 м/с. Чему равно ускорение верхнего конца лестницы в момент, когда нижний конец отодвинулся от стены на 1 м?

3.6 Канат висячего моста, имеющего форму цепной линии, т. е. графика функции $y = a\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим друг от друга на расстоянии 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точки подвеса. Чему равен угол между канатом и опорой в точке подвеса (для определения a можно воспользоваться равенством $\mathrm{ch}\,x \approx 1 + \dfrac{x^2}{2}$)?

3.7 В точках A и B находятся источники света силы J_1 и J_2 соответственно, $AB = 27$. Найдите на отрезке AB наименее освещенную точку (освещенность прямо пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него).

3.8 Бревно длиной 10 м с помощью подъёмного крана поднимается вертикально вверх за один из его концов. При этом второй конец волочится по земле со скоростью 0,05 м/с. С какой скоростью перемещается верхний конец бревна в момент, когда его нижний конец находится на расстоянии 3 м от вертикали?

3.9 Мальчик надувает воздушный шар, радиус которого возрастает с постоянным ускорением 0,2 см/с^2. С какой скоростью увеличивается объём шара в момент, когда площадь его поверхности равна 4π см^2 (радиус шара в начальный момент времени равнялся нулю)?

3.10 Человек, рост которого 1,7 м, удаляется от точечного источника света, расположенного на высоте 3 м, с постоянным ускорением 0,1 м/с^2. С каким ускорением перемещается тень его головы?

3.11 Скорость тела, движущегося по окружности радиуса 1 м, меняется по закону $v = v_0 t + {at^2}/{2}$. Найдите величину ускорения тела в момент времени $t = 1$ с.

3.12 Зависимость пути, пройденного телом, движущимся по окружности радиуса R, от времени задается уравнением

$S = kt^3$ ($k > 0$). Чему равна величина скорости тела в момент, когда оно пройдёт путь S_0?

3.13 Частица движется с постоянной по величине скоростью v по кривой $y = x^3$. Найдите величину ускорения частицы в момент, когда $x = 0$.

3.14 При изобарном нагревании ν молей идеального газа его объём с течением времени меняется по закону $V = V_0 + at + bt^2$ ($V_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$). С каким ускорением меняется температура газа *T*, если его давление $p = p_0$?

3.15 Зависимость электрического заряда, проходящего через проводник с сопротивлением *R*, от времени имеет вид $Q(t) = te^{-t}$. Исследуйте на экстремум функцию $W(t)$, выражающую зависимость от времени мгновенной тепловой мощности, выделяемой в проводнике.

3.16 Предмет, находившийся первоначально на расстоянии $d_0 > F$ от собирающей линзы, начинают удалять от неё с постоянным ускорением *a*. Чему равна скорость движущегося изображения в момент, когда предмет находится от линзы на расстоянии d?

3.17 Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так, что убыль массы пропорциональна времени с коэффициентом пропорциональности *k*. В какой момент времени после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей (сопротивлением воздуха пренебречь)?

3.18 Груз весом *P*, лежащий на горизонтальной плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина её будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

3.19 Найдите максимальную возможную температуру ν молей идеального газа, если его давление *p* и объём *V* связаны зависимостью $\alpha p^3 + \beta V^3 = p_0$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p_0 > 0$).

3.20 Электрические заряды $+q_1$, $-q_2$, $+q_3$ расположены на одной прямой так, что заряд $-q_2$ находится между зарядами $+q_1$ и

$+q_3$ на расстоянии a от заряда $+q_1$. На каком расстоянии от заряда $-q_2$ должен находиться заряд $+q_3$, чтобы его потенциальная энергия была минимальной (потенциал поля точечного заряда q равен $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$)?

3.21 Определить наименьший возможный объём V, занимаемый одним молем идеального газа, если его температура T и давление p связаны соотношением $T = T_0 + ap^2 + bp^3$ ($T_0 > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

3.22 Магнитный поток Φ через неподвижный контур, имеющий сопротивление R, изменяется с течением времени t по закону $\Phi = at^2(1-t^3)$, где a положительная постоянная. В какой момент времени сила индукционного тока достигает максимального значения?

3.23 Найдите максимально возможную температуру одного моля идеального газа, если его давление p и объём V связаны соотношением $\alpha \cdot V^2 + \ln\frac{p}{p_0} = 0$ ($\alpha > 0$, $p_0 > 0$).

3.24 Над центром круглого стола радиуса R висит лампа. При какой высоте лампы над столом освещенность края стола будет наилучшей (освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника света)?

3.25 Определите наибольшее возможное давление p одного моля идеального газа, если температура T и объём V газа связаны соотношением $Te^{\alpha \cdot V} = V^2$ ($\alpha > 0$).

3.26 Резервуар, имеющий форму усеченного конуса, заполняется водой. Скорость заполнения резервуара равна 1 м^3/мин. Определите скорость подъёма воды в резервуаре в момент, когда он заполнится на половину своего объёма (высота резервуара равна 3 м, радиус нижнего основания 2 м, верхнего – 5м).

3.27 Известно, что, мощность P, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $P = \frac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E -

постоянная электродвижущая сила элемента, r – постоянное внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть внешнее сопротивление R, чтобы мощность P была наибольшей?

3.28 На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками равно 24 м (освещенность прямо пропорциональна силе света источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния до него).

3.29 Бревно длиной 15 м с помощью подъёмного крана начинают поднимать вертикально вверх за один из его концов. При этом второй конец волочится по земле со скоростью 0,09 м/с. С какой скоростью перемещается верхний конец бревна в момент, когда его нижний конец находится на расстоянии 5 м от вертикали?

3.30 Зависимость пути, пройденного телом, движущимся по окружности радиуса *R*, от времени задается уравнением $S = kt^3$ ($k > 0$). Чему равна величина скорости тела в момент, когда оно пройдёт путь S_0?

4 Провести полное исследование и построить график функции:

4.1 а) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$; б) $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

4.2 а) $y = \dfrac{x^2 + 12}{x + 2}$; б) $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t$.

4.3 а) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$; б) $x = t^3 + 2t^2 + t$. $y = -2 + 3t - t^3$.

4.4 а) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$; б) $x = (t-1)^2 (t-2)$, $y = (t-1)^2 (t-3)$.

4.5 а) $y = -x^2 + \dfrac{2}{x}$; б) $x = e^t - t$, $y = e^{2t} - 2t$.

4.6 а) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$; б) $x = te^t$**,** $y = te^{-t}$.

4.7 а) $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$; б) $x^4 - y^4 = 4x^2 y$.

4.8 а) $y = \dfrac{x^2 + 8}{x^2 - 1}$; б) $\left(x + y\right)^4 = x^2 + y^2$.

4.9 а) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$; б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

4.10 а) $y = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$; б) $x^{\frac{4}{3}} - y^{\frac{4}{3}} = 1$.

4.11 а) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; б) $r\left(\varphi\right) = \sin 2\varphi$.

4.12 а) $y = x - \dfrac{4}{x^2}$; б) $r\left(\varphi\right) = \sin 3\varphi$.

4.13 а) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$; б) $r\left(\varphi\right) = \cos 2\varphi$.

4.14 а) $y = \dfrac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$; б) $r\left(\varphi\right) = \cos 3\varphi$**.**

4.15 а) $y = \dfrac{-8x}{x^2 + 4}$; б) $r\left(\varphi\right) = \left|\sin 2\varphi\right|$.

4.16 а) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$; б) $r\left(\varphi\right) = \left|\sin 3\varphi\right|$.

4.17 а) $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$; б) $r\left(\varphi\right) = 1 + \cos\varphi$.

4.18 а) $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$; б) $r\left(\varphi\right) = 2 + \cos\varphi$.

4.19 а) $y = \dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$; б) $r\left(\varphi\right) = 1 + 2\cos\varphi$.

4.20 а) $y = \dfrac{1-2x^3}{x^2}$; б) $r(\varphi) = 1 - \cos\varphi$.

4.21 а) $y = \dfrac{4x^3}{x^2+2x-3}$; б) $x = 2\cos 2t$, $y = 2\cos 3t$.

4.22 а) $y = \dfrac{4x^2-1}{3+2x+x^2}$; б) $x = \sin 2t$, $y = \sin 3t$.

4.23 а) $y = \dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x-3}$; б) $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $t \geq 0$.

4.24 а) $y = \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$; б) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

4.25 а) $y = -\dfrac{x^2}{x+2}$; б) $x^3 - y^3 = 1$.

4.26 а) $y = \dfrac{x^3-3}{x^2}$; б) $x^4 + y^4 = 1$.

4.27 а) $y = \dfrac{4(x^2+1)}{x^2+2x+4}$; б) $y^2 = 2x^3 - x^4$.

4.28 а) $y = \dfrac{3x^4-2}{x^3}$; б) $y^2 = 9\left(x^4 - x^6\right)$.

4.29 а) $y = -\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$; б) $y^2\left(x^2-1\right) = x^4 - 4x^2$.

4.30 а) $y = \dfrac{x^3-4}{x^2}$; б) $y^2x^4 = \left(x^2-1\right)^3$.

Литература

1 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. И Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1970.

2 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

3 Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ [Текст] : учебное пособие для вузов: в 6 ч. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э. И. Зверович. – Мн. : БГУ, 2003.

4 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

5 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

6 Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1984.

7 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

8 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1 / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

9 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.

Учебное издание

Денисенко Тамара Андреевна
Марченко Лариса Николаевна
Парукевич Ирина Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов

В семи частях

Часть вторая

Дифференциальное исчисление
функции действительной переменной

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04
Подписано в печать 9.07.07. Бумага писчая №1.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл. п. л. 9,18. Уч. - изд. л. 9,87. Тираж 150 экз.
Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104