Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. А. ДЕНИСЕНКО, Л. Н. МАРЧЕНКО,
И. В. ПАРУКЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Практическое пособие
для студентов физических факультетов вузов**

В семи частях

Часть первая

Введение в анализ

Гомель 2007

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73
Д 332

Рецензенты:

Л. П.Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»;

Д. П. Ющенко, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра математического анализа учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Денисенко, Т. А.
Д 332 Математический анализ [Текст] : практическое пособие для студентов физических факультетов вузов: в 7 ч. Ч.1. Введение в анализ / Т. А. Денисенко, Л. Н. Марченко, И. В. Парукевич; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007. – 118 с.

ISBN 978-985-439-249-3

В первой части практического пособия по темам «Числовые множества» и «Теория пределов» излагаются краткие теоретические сведения, предлагаются решения типовых примеров, содержатся наборы аудиторных, домашних и индивидуальных заданий. Для студентов физических факультетов вузов.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 я 73

ISBN 978-985-439-249-3

Содержание

Введение

Практическое пособие является первой частью комплекса практических пособий по курсу «Математический анализ» для студентов физического факультета. Оно адресовано как студентам, так и преподавателям. Книга написана в соответствии с действующей программой по данному курсу и содержит наборы индивидуальных домашних заданий.

Пособие включает материал по темам «Числовые множества», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность функции», которые условно можно назвать «Введение в анализ».

Структура пособия основана на рабочей программе по данному курсу, поэтому каждая тема разбита на части, соответствующие одному практическому занятию. Материал каждого занятия разбит на следующие пункты:

– основные теоретические сведения и формулы;
– вопросы для самоконтроля;
– типовые примеры;
– задания для аудиторной и домашней работ;
– варианты индивидуальных домашних заданий;
– список используемой литературы.

При подборе задач авторами использованы «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Б. П. Демидовича (1990), «Математический анализ в вопросах и задачах» В. Ф. Бутузова (1984), «Сборник индивидуальных заданий» А. П. Рябушко (1991) и другие. Поэтому многие задачи пособия не претендуют на оригинальность, хотя среди них есть целый ряд новых.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезным для преподавателей при проведении практических занятий и студентам в их самостоятельной работе над предметом. Они с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Тема 1 Числовые множества

Практическое занятие 1 Числовые множества

1.1 Язык теории множеств
1.2 Понятие функции

1.1 Язык теории множеств

Понятие множества считается первоначальным, неопределяемым. Под *множеством* понимается совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются *элементами множества*.

Способы задания множеств:

– перечислением его элементов – если множество A состоит из элементов a, b, c, d, то пишут $A=\{a,b,c,d\}$;

– указанием характеристики свойств элементов – если множество A задается указанием характерного свойства $P(x)$ его элементов, то пишут $A=\{x \mid P(x)\}$.

– диаграммы Эйлера-Венна – множество изображается в виде кругов, треугольников или геометрических фигур произвольной формы, внутри которых располагаются элементы множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A. Равенство множеств A и B обозначают $A=B$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов. Если множество A *не равно* множеству B, то пишут $A \neq B$.

Множество A, $A \neq \varnothing$, называется *подмножеством* множества B, $B \neq \varnothing$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если A – подмножество множества B, то пишут $A \subseteq B$.

Понятие подмножества определяет между двумя множествами *отношение включения*. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$,то A называется *собственным подмножеством* множества B и *обозначается* $A \subset B$.

Будем рассматривать всевозможные подмножества одного и того же множества, которое называется *основным* или *универсальным*. Обозначается универсальное множество буквой U.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или обоим одновременно):

$$A \cup B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ или } x \in B \text{ или } x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A \cap B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

Разностью двух множеств B и A называется множество $B \setminus A$, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но не принадлежат A:

$$B \setminus A = \left\{ x \middle| x \in B \text{ и } x \notin A \right\}.$$

Разность $U \setminus A$ называется *дополнением* множества A до универсального множества U и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} = U \setminus A = \left\{ x \middle| x \notin A \right\}.$$

Пара элементов $(x; y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется *упорядоченной*, если указан порядок записи элементов x и y. Элементы x и y упорядоченной пары $(x; y)$ называются *координатами*, при этом x – первая координата, y – вторая.

При этом $(x_1; y_1) = (x_2; y_2)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2.$$

Основные числовые множества:

– множество *натуральных* чисел, т.е. чисел, которые используются при счете: $\mathbf{N} = \{1,2,3,...\}$;

– объединение натуральных чисел, чисел, им противоположных и нуля составляет множество *целых* чисел $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,\ 0,1,2,3,\ \ldots\};$$

– множество чисел вида p/n, где $p \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$, называется *множеством рациональных* чисел $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ q = \frac{p}{n} \middle| \, p \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\};$$

– числа, которые представимы в виде бесконечной непериодической десятичной дроби называются *иррациональными*;

– объединение рациональных и иррациональных чисел составляет *множество действительных* чисел $\mathbf{R}$.

Очевидно, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Множество действительных чисел $\mathbf{R}$, пополненное символами $-\infty$ и ∞, *обозначается* $\overline{\mathbf{R}}$ и называется *расширенным множеством действительных чисел*, бесконечности $-\infty$ и ∞ называются *бесконечно удаленными точками* числовой прямой, остальные точки – *конечными точками* числовой прямой.

Основными промежутками во множестве $\overline{\mathbf{R}}$ являются:

– *интервал* с концами a и b:

$$(a;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, a < x < b \right\};$$

– *отрезок* с концами a и b:

$$[a;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, a \le x \le b \right\};$$

– *полуинтервалы*:

$$[a;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, a \le x < b \right\},\ (a;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, a < x \le b \right\};$$

– *бесконечные* интервалы и полуинтервалы:

$$[a;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, x \ge a \right\},\ (a;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, x > a \right\},$$

$$(-\infty;b) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, x < b \right\},\ (-\infty;b] = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, x \le b \right\},$$

$$(-\infty;+\infty) = \left\{ x \in \mathbf{R} \middle| \, -\infty < x < \infty \right\}.$$

Декартовым произведением двух множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар $(x;y)$:

$$A \times B = \left\{ (x;y) \middle| \, \forall x \in A, \forall y \in B \right\}.$$

Если $A = B$, то $A \times A$ называется *декартовым квадратом* и обозначается A^2, т.е. $A^2 = A \times A$.

Пусть X, Y – произвольные множества.

1.2 Понятие функции

Соответствие, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, называется *функцией* (*отображением*), заданной на множестве X со значениями во множестве Y, при этом элемент x называется *независимой* переменной (*аргументом*), элемент y – *зависимой* переменной.

Обозначается:

$$y = f(x),\ x \in X\ ,\ f : x \mapsto y \text{ при } x \in X \text{ и } y \in Y\ ;\ f : X \to Y\ .$$

Множество X называется *областью определения* функции f и *обозначается* $D(f)$. Множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, называется *множеством значений* функции f и *обозначается* $E(f)$. Очевидно, что $E(f) \subseteq Y$.

Определение функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f : x \mapsto y \Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists! y \in Y : y = f(x).$$

Элемент $y \in Y$, в который отображен $x \in X$, называется *образом* элемента x при отображении f и *обозначается* $f(x)$. Элемент x называется *прообразом* элемента $f(x)$. Поэтому отображение удобно записывать в виде $y = f(x),\ x \in X$.

Множество образов всех элементов $x \in X$ при отображении f называется *образом множества* X при этом отображении:

$$f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} \subseteq Y\ .$$

Полным прообразом множества $B \subset Y$ при отображении f называется множество $f^{-1}(B)$, состоящее из всех прообразов всех элементов множества B:

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\} \subseteq X\ .$$

Функция f^{-1} называется *обратной* к функции f, если элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y.

Определение обратной функции с помощью логических символов записывается в виде:

$$f^{-1}: x \mapsto y \;\Leftrightarrow\; \forall y \in Y \; \exists\, x \in X : x = f^{-1}(y).$$

Если $f: x \mapsto y$ и $g: y \mapsto z$ функции, то функция $g \circ f : x \mapsto z$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $z \in Z$, $g \circ f = g(f(x))$, называется *сложной* функцией или *композицией* функций f и g.

Два множества A и B называются *эквивалентными* (*равномощными*), если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. *Обозначается*: $A \sim B$.

Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется *счетным*. Если множество счетное, то его элементы можно занумеровать. Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными*. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Если A – конечное множество, то число его элементов обозначается $|A|$ или $\dim A$ и называется *мощностью множества* A.

Вопросы для самоконтроля

1 Что вы понимаете под термином «множество»? Какие существуют способы задания множества? Приведите примеры.

2 Какие множества называются равными? Приведите примеры.

3 Что называется подмножеством множества. Какое подмножество называется собственным подмножеством множества.

4 Запишите с помощью кванторов определение операций объединения, пересечения, разности и дополнения.

5 Что называется декартовым произведением множеств?

6 Что называется функцией? Дайте определение области определения, области значения функции.

7 Какие множества называются эквивалентными?

8 Какое множество называется счетным? Приведите примеры.

9 Какие числовые множества вы знаете?

Решение типовых примеров

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств $A=\left\{\frac{1}{5^n} \mid n\in\mathbf{N}\right\}$ и $B=\left\{\frac{1}{25^n}, \mid n\in\mathbf{N}\right\}$.

Решение. Поскольку

$$A=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\ldots\right\} \text{ и } B=\left\{\frac{1}{25};\frac{1}{625};\frac{1}{15625};\ldots\right\},$$

то

$$A\cap B=\left\{\frac{1}{25};\frac{1}{625};\ldots\right\}=B,\ A\cup B=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{25};\frac{1}{125};\frac{1}{625};\ldots\right\}=A,$$

$$A\setminus B=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{125};\ldots\right\}=\left\{\frac{1}{5^{2k-1}} \mid k\in\mathbf{N}\right\},\ B\setminus A=\varnothing.$$

2 Доказать, что $\sqrt{2}$ – иррациональное число.

Решение. Доказываем методом от противного. Допустим, что существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь), квадрат которого равен 2. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ или $m^2=2n^2$. Следовательно, число m^2 есть четное число. Отсюда и m есть четное число. Если m – четное, то оно представимо в виде $m=2k$. Тогда имеем $n^2=2k^2$. Следовательно, n^2 есть четное число, тогда и n – четное. Таким образом, числа m и n являются четными. Поэтому дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит предположению. Допущение не верно, т.е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, а, значит, $\sqrt{2}$ – иррациональное число, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ \ldots$.

3 Доказать, что $0{,}4(9)=0{,}5(0)$.

Решение. Пусть $x=0{,}4(9)$.

Тогда $100x-10x=49,(9)-4(9)=45$.

Откуда $x = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}5(0)$

Задания для аудиторной работы

1 Какие элементы множества

$$A = \{-40; -32{,}4; -8; -\frac{1}{9}; 0; \frac{5}{7}; 6; 12; 19\frac{2}{9}; 30\}$$

являются натуральными числами, целыми числами, дробными, рациональными числами, отрицательными числами, неотрицательными числами?

2 Составьте подмножества множества

$$B = \{-24; -23\frac{1}{3}; -22; -9; 0; \frac{1}{5}; 2; 5; 9; 10; 12; 24\},$$

элементами которых являются $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, нечетные, четные числа, отрицательные числа, числа кратные 4.

3 Какие из следующих утверждений $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z}$ справедливы?

4 Укажите пустые множества среди:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 16 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество натуральных чисел, меньших 1.

5 Найдите пересечение, объединение, разность множеств из упражнения 1 и 2.

6 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A = \left\{ \frac{1}{3^n} \middle| \; n \in \mathbf{N} \right\} \text{ и } B = \left\{ \frac{1}{10^n} \middle| \; n \in \mathbf{N} \right\}.$$

7 Доказать, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

8 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, не имеющую цифры 9 в периоде, можно получить как результат деления двух натуральных чисел.

9 Доказать, что $0{,}6(9) = 0{,}7(0)$.

Задания для домашней работы

1 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A=\{-2;-1;0;1;2;3;...\} \text{ и } B=\{3;9;27;...\}.$$

2 Верны ли равенства: $0,41(9)=0,42(0)=0,42$?

3 Какие из чисел $-\frac{5}{9}$, $1,(3)$, $\frac{27}{12}$, $-\frac{6}{7}$, $0,(4)$, 9, $-2,3$, $0,(2)$ являются рациональными? Каждое число представьте в виде соотношения $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$.

4 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A=\left\{2^n \middle|\ n \in \mathbf{N}\right\} \text{ и } B=\left\{(-1)^n \cdot 2 \middle|\ n \in \mathbf{N}\right\}.$$

5 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, имеющую в периоде цифру 9, нельзя получать как результат деления двух натуральных чисел.

6 Доказать, что $\sqrt{6}$ – иррациональное число.

Практическое занятие 2 Грани числовых множеств

2.1 Точные грани числовых множеств
2.2 Метод математической индукции

2.1 Точные грани числовых множеств

Рассмотрим произвольное числовое множество $A \subset \mathbf{R}$.

Множество действительных чисел A называется *ограниченным сверху*, если существует такое действительное число M, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \le M$, т.е.

$$\exists M \in \mathbf{R}: \ \forall x \in A \ \ x \le M .$$

При этом число M называется *верхней гранью* множества A.

Множество A неограничено сверху, если

$$\forall M \in \mathbf{R}: \ \exists x_0 \in A \ \ x_0 > M .$$

Элемент $c_1 \in A$ называется наибольшим элементом множества A, если $\forall x \in A \ \ x < c_1$.

Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $A \subset \mathbf{R}$ называется *точной верхней гранью*.

Обозначается:

$$M = \sup A \ \Leftrightarrow \ \forall x \in A: x \le M \ \text{ и } \ \forall M' < M \quad \exists x_0 > M', x_0 \in A .$$

Множество действительных чисел A называется *ограниченным снизу*, если существует такое действительное число m, что каждое число $x \in A$ удовлетворяет неравенству $x \ge m$, т.е.

$$\exists m \in \mathbf{R}: \ \forall x \in A \ \ x \ge m .$$

При этом число m называется *нижней гранью* множества A.

Множество A *неограничено снизу*, если

$$\forall m \in \mathbf{R}: \ \exists x_0 \in A \ \ x_0 < m .$$

Элемент $c_2 \in A$ называется *наименьшим элементом* множества A, если $\forall x \in A \ \ x > c_2$.

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $A \subset \mathbf{R}$ называется *точной нижней гранью*.

Обозначается:

$$m = \inf A \ \Leftrightarrow \ \forall x \in A: x \ge m \ \text{ и } \ \forall m' > m \quad \exists x_0 \le m', x_0 \in A .$$

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*: $\exists K > 0: \ \forall x \in A \quad |x| \le K$.

Ограниченное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

2.2 Метод математической индукции

Метод математической индукции используется при доказательстве утверждений, зависящих от натурального аргумента. Для доказательства необходимо:

1) проверить верность утверждения при $n = 1$ (либо для первого натурального числа, для которого доказывается утверждение);

2) в предположении, что утверждение верно для $n = k$, доказать его справедливость для следующего натурального числа $n = k + 1$.

При решении задач часто используется *бином Ньютона*.

Пусть задано конечное множество элементов. Группы элементов, состоящие их одних и тех элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками*. Число возможных перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!, \ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \ 0! = 1.$$

Каждое множество, содержащее k элементов из числа n заданных, называется *сочетанием* n *элементов по* k. Число всевозможных сочетаний из n элементов по k определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Число C_n^k можно последовательно находить с помощью треугольника Паскаля, который представляет собой треугольную таблицу.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 & \\
. & . & . & . & . & . & & &
\end{array}$$

Первые и последние числа во всех строчках таблицы равны 1. Начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки. В каждой n строчке стоят последовательно числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Число сочетаний используется при вычислении коэффициентов в формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Вопросы для самоконтроля

1 В чем заключается метод математической индукции?

2 Какие множества называются ограниченными. Приведите примеры ограниченных и неограниченных множеств.

3 Дайте определение точной верхней грани, нижней грани множества. Приведите примеры множеств, ограниченных сверху, снизу.

4 Приведите примеры числовых множеств X, у которых: а) $\sup X \in X$; б) $\sup X \notin X$; в) $\inf X \in X$; г) $\inf X \notin X$. Имеет ли множество X в случаях а) и б) наибольше, а в случаях в) и г) наименьшее число?

5 Что означает запись $\sup X = +\infty$ и $\inf X = -\infty$?

Решение типовых примеров

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ $n \le 2^{n-1}$.

Решение. При $n = 1$ неравенство верно т.к. $1 \le 1$. Предположим, что неравенство верно для $k \in \mathbf{N} : k \le 2^{k-1}$. Докажем, что неравенство верно для $(k+1)$:

$$2^k = 2^{k-1} \cdot 2 \ge 2 \cdot k \ge k + 1.$$

Последнее неравенство следует из очевидного неравенства: $(k-1)^2 \ge 0$.

Тем самым доказано, что неравенство верно $\forall n \in \mathbf{N}$.

2 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. При $n=1$ равенство очевидно.

Предположим, что оно верно для натурального числа k:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Проверим верность утверждения для следующего натурального числа $(k+1)$:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=$$

$$=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Следовательно, утверждение верно для любого $n\in\mathbf{N}$.

3 Найти точную верхнюю грань интервала $(0,1)$.

Решение. Так как для любого $x\in(0;1)\Rightarrow x<1$, то число 1 является верхней гранью. Покажем, что это точная верхняя грань, т.е. для любого $\bar{x}<1\ \exists\ a\in(0,1): a>\bar{x}$.

Действительно, если $\bar{x}\le 0$, то $\forall a\in(0;1): a>x$. Если $\bar{x}>0$, то на интеграле $(\bar{x};1)$ существует действительное число a: $\bar{x}<a<1$, т.е. $a>\bar{x}$.

Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной грани $\sup(0;1)=1$ $(\sup(0;1)\notin(0;1))$.

4 Найти точные грани множества всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$ и показать, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Решение. *Шаг 1.* Пусть $X=\left\{\frac{m}{n}\middle|\ m,n\in\mathbf{N}, m<n\right\}$. Так как $\frac{m}{n}>0$, $\forall m,n\in\boldsymbol{N}$, то $0-$ нижняя грань множества X. Более того, $\forall\bar{x}>0$, так как, если $\bar{x}\ge 1$, то $a=\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $a<\bar{x}$. Если $0<\bar{x}<1$, то число $\bar{x}$ можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: $\bar{x} = 0, x_1, x_2 \ldots x_k \ldots$, причем $\exists x_n : x_n \neq 0$.

Рациональное число $a = 0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}(x_n - 1)$ удовлетворяет условию $0 < a < \bar{x} < 1$, т.е. является правильной рациональной дробью и $0 < \bar{x}$. Следовательно, для числа 0 выполнено определение точной, нижней грани: $\inf X = 0$. При этом $\inf X \notin X$, так как $\frac{0}{n} \notin X$, $0 -$ не натуральное число и поэтому множество не имеет наименьшего элемента.

Шаг 2. Так как X содержит только правильные дроби, то $\frac{m}{n} < 1$, то число 1 – верхняя грань множества X. Более того, $\forall \bar{x} < 1 \quad \exists \frac{m}{n} \in X : \frac{m}{n} > \bar{x}$. Действительно, $\exists$ рациональное число $x_1 = \frac{m}{n} : \bar{x} < x_1 < 1$. Значит, $x_1 \in X$ и для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно, $\sup X = 1$. Но $\sup X \notin X$, т.к. $\frac{m}{n} = 1$ при $m = n$, что противоречит определению правильной дроби. Поэтому множество X не имеет наибольшего элемента.

Задания для аудиторной работы

1 Методом математической индукции докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2 Доказать, что для любого $n \in \mathbf{N}$ и для любого $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли:
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

3 Доказать, что для любых положительных чисел $y_1, y_2, \ldots y_n$, удовлетворяющих условию $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$, имеет место неравенство: $y_1 + y_2 + \ldots y_n \geq n$.

4 Доказать неравенство для $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

5 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbf{N}$ и $n-$ четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

6 Пусть $A-$ множество чисел, противоположных по знаку чисел из множества B. Докажите, что

$$\sup A = -\inf B, \ \inf A = -\sup B.$$

Задания для домашней работы

1 Используя метод математической индукции, докажите равенство $n \in \mathbf{N}$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2 Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 5n$ кратно 3.

3. Используя метод математической индукции, докажите неравенства $n \in \mathbf{N}$:

а) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, $(n \geq 2)$, б) $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $(n \geq 2)$.

4 Используя метод математической индукции, докажите неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}, \text{ при } x_k \geq 0, \ x = \overline{1, n}.$$

5 Найти точную нижнюю грань интервала $(0;1)$.

6 Пусть $X, Y \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset X$, X – ограничено сверху. Доказать, что Y также ограничено сверху и $\sup Y \leq \sup X$.

7 Докажите, что множество всех чисел вида $\frac{m}{n}$, где $n, m \in \mathbf{N}$ и m – четное, не имеет наименьшего элемента. Найдите точную нижнюю грань множества.

Практическое занятие 3 Множество комплексных чисел

3.1 Понятие комплексного числа
3.2 Действия над комплексными числами

3.1 Понятие комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида $x+iy$, где $x, y \in \mathbf{R}$, где i удовлетворяет условию $i^2=-1$, при этом число x называется *действительной частью* а число y – *мнимой частью* комплексного числа z.

Для комплексного числа z приняты обозначения

$$z=x+iy,\ \operatorname{Re} z=x,\ \operatorname{Im} z=y.$$

Запись комплексного числа в виде $z=x+iy$ называется *алгебраической формой комплексного числа.* Множество комплексных чисел обозначается $\mathbf{C}$. Любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число, т.е. $x=x+0\cdot i$. Поэтому множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел: $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Отсюда

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}.$$

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

Комплексное число $z=0+i\cdot 0$, называется *нулем* и обозначается 0.

Понятие неравенства для комплексных чисел существует лишь в смысле отрицания равенства, т. е. $z_1\neq z_2$ означает, что число z_1 не равно числу z_2. Понятия «меньше» и «больше» для комплексных чисел не определены.

Комплексное число $\bar{z}=x-iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z=x-iy$. Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

Комплексное число $z = x + iy$ геометрически изображается на плоскости $\mathbf{R}^2$ *точкой* с координатами x, y, или *вектором* $\vec{z}$, проекции которого на оси Ox и Oy соответственно равны x и y. При этом координатную плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbf{C}$, ось абсцисс – *действительной* осью, ось ординат – *мнимой* осью комплексной плоскости (рисунок 3.1).

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $z(x, y)$ до начала координат и *обозначается* $|z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, образованный положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{z}$.

Обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент z ($z \neq 0$) определяется равенствами (рисунок 3.1):

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Модуль комплексного числа z определяется однозначно, а аргумент φ – с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi,$, называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$.

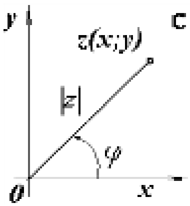

Рисунок 3.1 – Комплексная плоскость $\mathbf{C}$

Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Если комплексные числа равны, то их модули равны, а аргументы отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

3.2 Действия над комплексными числами

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответственно действительных и мнимых частей этих чисел:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Умножение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексного числа z_1 *на* $z_1 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, т.е. под *частным* $\frac{z_1}{z_2}$, $\forall z_2 \neq 0$, понимается комплексное число z, такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Частное получается путем умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на комплексно-сопряженное знаменателю число $\bar{z}_2$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Возведение комплексного числа z *в степень* n, $n \in \mathbf{N}$, рассматривается как умножение z на себя n раз .

Обозначается: z^n.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любому комплексному числу $z \in \mathbf{C}$, заданному в алгебраической форме, соответствует точка $M(x; y) \in \mathbf{R}^2$, положение которой однозначно определяется ее декартовыми координатами x, y. Вводя полярные координаты (полярная ось u совпадает с положительным направлением действительной оси Ox, полюс O – с началом координат O, полярный угол φ равен углу между полярной осью и лучом OM), эту точку можно однозначно определить заданием главного значения аргумента $\arg z$ и модуля $|z|$ комплексного числа z.

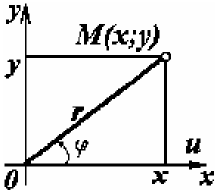

Рисунок 3.2 – Связь декартовых и полярных координат

Из рисунка 3.2 видно, что модуль $|z|$ совпадает с полярным радиусом r точки $M(x;y)$, главный аргумент $\arg z$ – с полярным углом φ, при этом $0 \le r < \infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

Очевидно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Выражение $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно пользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbf{N}.$$

Извлечение корня из комплексного числа в тригонометрической форме

$$z=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right),\ n\in\mathbf{N},$$
$$k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Показательная форма комплексного числа. Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Используя формулу Эйлера $\mathrm{e}^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, получаем

$$z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Выражение $z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ называется *показательной формой* комплексного числа.

Здесь $r=|z|$; $\varphi=\arg z+2k\pi$; $k\in\mathbf{Z}$.

Функция $\mathrm{e}^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень для комплексных чисел в показательной форме имеют простой вид.

Если $z_1=r_1\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, $z_2=r_2\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z_1z_2=r_1r_2\,\mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Если $z_2\neq0$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\mathrm{e}^{i\varphi_1}}{\mathrm{e}^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Если $n\in\mathbf{N}$, $z=r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, то

$$z^n=\left(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n=r^n\,\mathrm{e}^{in\varphi}.$$

$$z_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\mathrm{e}^{\frac{i(\varphi+2k\pi)}{n}},\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение множества комплексных чисел.

2 Какие два комплексных числа называются равными, сопряженными? Приведите примеры.

3 Как изображаются комплексные числа на плоскости?

4 Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

5 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.

6 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.

7 Сформулируйте правила сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в показательной форме.

Решение типовых примеров

1 Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -2 + 3i$. Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. Используя правила сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме, получим:

$$z_1 + z_2 = (1 - i) + (-2 + 3i) = (1 - 2) + i(3 - 1) = -1 + 2i,$$

$$z_1 - z_2 = (1 - i) - (-2 + 3i) = 1 - i + 2 - 3i = 3 - 4i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)\cdot(-2 + 3i) = -2 + 2i + 3i - 3i^2 =$$

$$= -2 + 2i + 3i + 3 = 1 + 5i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(1 - i)\cdot(-2 - 3i)}{(-2 + 3i)\cdot(-2 - 3i)} = \frac{-2 + 2i - 3i - 3}{4 + 9} =$$

$$= \frac{-5 - i}{13} = -\frac{5}{13} - i\frac{1}{13}.$$

2 Представить комплексные числа $z = -1 + i$, $z = -4$, $z = i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. При решении используем определения модуля и аргумента комплексного числа.

Для комплексного числа $z = -1 + i$ имеем $x = -1$; $y = 1$. Тогда модуль равен

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Так как

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то аргумент $\operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Отсюда главное значение аргумента $\arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Следовательно, число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

а в показательной – $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Аналогично для комплексного числа $z = -4$ имеем:

$x = -4$; $y = 0$ $\Rightarrow$ $r = 4$, $\arg z = \varphi = \pi$; $\Rightarrow$

$$z = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4\mathrm{e}^{i\pi}.$$

Для комплексного числа $z = i$ имеем $x = 0$; $y = 1$ и

$$r = 1,\ \arg z = \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

3 Вычислить $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^{10}$

Решение. Представим $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме. Так как $x = -\sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$, то

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arg z = \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Подставляя в формулу $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, получим:

$$z^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{3\cdot 10}{4}\pi + i\sin\frac{3\cdot 10}{4}\pi\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{15}{2}\pi + i\sin\frac{15}{2}\pi\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{10}(0 - i) = -2^{10}i .$$

4 Найти все значения корня $\sqrt[5]{1-i}$ и изобразить их в комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Решение. Для комплексного числа $z = \sqrt[5]{1-i}$ имеем:

$$r = \sqrt{2};\ \arg z = -\frac{\pi}{4},\ \Rightarrow\ z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

По формуле Муавра получим:

$$\sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{5}\right)\quad k = 0,1,2,3,4 .$$

При $k = 0$ имеем $z_0 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} - i\sin\frac{\pi}{20}\right)$,

при $k = 1$ имеем $z_1 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$,

при $k = 2$ имеем $z_2 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

при $k = 3$ имеем $z_3 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$,

при $k = 4$ имеем $z_4 = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$.

Точки z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$ с центром в начале координат (рисунок 3.3). Полярный угол точки z_0 равен $\varphi_0 = -\pi/20$, а полярные углы остальных точек получаются последовательным прибавлением угла $2\pi/5$ к φ_0, т.е. $\varphi_k = \varphi_0 + \dfrac{2\pi k}{5}$ при $k = 1,2,3,4$.

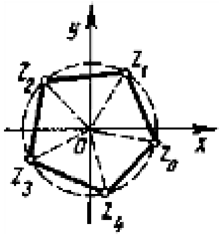

Рисунок 3.3 – Корни комплексного числа $\sqrt[5]{1-i}$

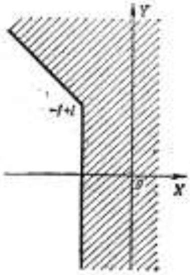

Рисунок 3.4 – Множество G

5 Изобразить на плоскости $\mathbf{C}$ множество

$$G = \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le \arg\left(z+1-i\right) \le \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Решение. Комплексное число $z_1 = z+1-i = z-\left(-1+i\right)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом – точка z. Угол между этим вектором и осью Ox есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью Ox углы в $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$. Данное множество G изображено на рисунке 3.4.

Задания для аудиторной работы

1 Найти $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 для z_1 и z_2:

а) $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 3-5i$; в) $z_1 = 2+i$; $z_2 = 1-2i$;

б) $z_1 = 5-2i$; $z_2 = 2+3i$; г) $z_1 = \dfrac{-1+i}{-1-i}$; $z_2 = 2i$.

2 Вычислить:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1-i}{1+i}$; в) $\frac{2}{1-3i}$; г) $\frac{-2-i}{1+2i}$.

3 Представить в тригонометрической и показательной формах и изобразить числа на плоскости $\mathbf{C}$ комплексные числа:

а) $z=3i$; г) $z=-3-3i$;

б) $z=-2$; д) $z=-1+2i$;

в) $z=1-i$; е) $z=1$.

4 Изобразить на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ следующие множества:

а) $\{ z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z \}$; г) $\{ z\in\mathbf{C} \mid |z-1-i|\le 4 \}$;

б) $\{ z\in\mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z>0 \}$; д) $\left\{ z\in\mathbf{C} \;\middle|\; \left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1 \right\}$;

в) $\left\{ z\in\mathbf{C} \;\middle|\; \arg z=\frac{\pi}{4} \right\}$; е) $\{ z\in\mathbf{C} \mid 0\le \operatorname{Im} z\le 1 \}$.

5 Вычислить:

а) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$; в) $(-1+i)^{10}$; д) $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{25}$;

б) $(1-i)^{100}$; г) $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$; е) $(3+4i)^3$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt[3]{-i}$; в) $\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[3]{-1+i}$.

7 Найти действительные решения уравнения:

$$(3x-i)(2+i)+(x-iy)(1+2i)=5+6i .$$

8 Найти все комплексные числа, удовлетворяющие уравнению: $\bar{z}=z^2$.

Задания для домашней работы

1 Для z_1 и z_2 найти z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2, z_1/z_2$.

а) $z_1=2i$; $z_2=1-i$; в) $z_1=-1-i$; $z_2=2-i$;

б) $z_1=5-i$; $z_2=3i$; г) $z_1=5-i$; $z_2=-1+i$.

2. Выполнить действия:

а) $\dfrac{3-i}{5i}$; б) $\dfrac{2i}{1+i}$; в) $\dfrac{3}{2-i}$; г) $\dfrac{2-i}{3+4i}$.

3. Следующие комплексные числа представить в тригонометрической и показательной формах. Изобразить числа на плоскости.

а) $z=ai$; б) $z=b$; в) $z=2+2i$; г) $z=-5+2i$.

4 Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием:

а) $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{Im}\dfrac{z}{1+i}=0$;

б) $|z+2i|=2$; д) $\operatorname{Re}\dfrac{z}{i}=0$.

в) $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im} z>0$, е) $\operatorname{Im} z\le 0$, $\operatorname{Re} z\ge 1$.

5 Вычислить:

а) $(2-2i)^7$; в) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{80}$;

б) $\left(\sqrt{3}-3i\right)^6$; г) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$.

6 Найти все значения корня:

а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$; в) $\sqrt[4]{-i}$.

7. Найти действительные решения уравнения:

$$(x-iy)(1-2i)=i^5.$$

8 Найти все комплексные числа, удовлетворяющие условию:

а) $z=|z|$; б) $\dfrac{1}{|z|}\ge 1$, $z\ne 0$; в) $\left|\dfrac{1}{z}\right|\le 2$, $z\ne 0$.

Тема 2 Теория пределов

Практическое занятие 1 Числовые последовательности

1.1 Определение числовой последовательности
1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности
1.3 Монотонные последовательности
1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

1.1 Определение числовой последовательности

В курсе школьной математики кратко излагались элементы теории последовательности при изучении арифметической и геометрической прогрессий, при последовательных приближениях иррациональных чисел.

Числовой последовательностью $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел N и принимающая свои значения из множества действительных чисел $f : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$.

Обозначается: $x_n = (x(1); x(2); ...; x(n); ...)$ или

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1; x_2; ...; x_n; ...).$$

Числа $x_1, x_2, x_3,...$ называются *элементами* (*членами*) последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, x_n – *формула* общего члена последовательности, n – *номер* общего члена последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Основными *способами задания* последовательности являются: формула n-го члена, рекуррентный, словесный, графический.

Пусть даны две последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Суммой последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей.

Произведением последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на число m называется последовательность $\left(m \cdot x_n\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m.

Произведением последовательностей $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ и $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\left(x_n \cdot y_n\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей.

Если все члены последовательности $\left(y_n\right)$ отличны от нуля, то частным последовательностей $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ и $\left(y_n\right)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей.

1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности

Последовательность $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). Числа M и m называются *верхней и нижней гранями* числовой последовательности $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Символическая запись:

$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ *– ограничена сверху* $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}\ \ x_n \le M$.

$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ *– ограничена снизу* $\Leftrightarrow$ $\exists m \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N}\ \ x_n \ge m$.

Последовательность $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$.

Символическая запись:

$$\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbf{R} : \forall\ n \in \mathbf{N}\ \ m \le x_n \le M.$$

Пусть $A = \max\left\{|m|, |M|\right\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n| \le A$.

Последовательность (x_n) называется *неограниченной*, если для любого действительного числа $A > 0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \ge A$, т.е. либо $x_n \ge A$ или $x_n \le -A$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \textit{неограниченна} \Leftrightarrow \forall\, 0 < A \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N} : |x_n| \ge A.$$

1.3 Монотонные последовательности

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *возрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *невозрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *убывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *монотонной*, если является одной из выше перечисленных. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon)\ \ |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

– бесконечно малая последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена;

– сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малой последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ на ограниченную $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа $c>0$ существует такой номер $N(k)$ такой, что для всех номеров $n>N(k)$ выполняется неравенство $|x_n|>c$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.б.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, c>0 \ \exists N(k): \forall n \ge N(k) \quad |x_n|>c.$$

Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая. Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательность. Если $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой последовательностью.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение числовой последовательности. Приведите примеры последовательностей с различным способом задания.

2 Перечислите арифметические действия над последовательностями.

3 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности. Приведите примеры.

4 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?

5 Может ли быть монотонной последовательностью: сумма двух немонотонных последовательностей; произведение двух немонотонных последовательностей?

6 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Какими свойствами они обладают?

Решение типовых примеров

1 Напишите пять первых членов из следующих последовательностей:

а) $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$,

б) числа Фибоначчи $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$,

в) $y_n = \begin{cases} -n, \text{ если } n - \text{простое число}, \\ -n^2, \text{если } n - \text{составное число}. \end{cases}$

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

Решение. а) для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{4}{9}$, $x_4 = -\dfrac{5}{16}$, $x_5 = \dfrac{6}{25}$.

Поскольку $|x_n| = \left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}\right| = \dfrac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то последовательность является ограниченной.

Так как $x_3 > x_4$ и $x_4 < x_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

б) для чисел Фибоначчи имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$.

Поскольку $x_n \ge 1 \ \forall n \in \mathbf{N}$, то последовательность ограничена снизу, но неограничена сверху. При этом $x_n \le x_{n+1} \ \forall n \in \mathbf{N}$. Значит, числа Фибоначчи образуют неубывающую последовательность.

в) для последовательности (y_n) получим: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -3$, $y_4 = -16$, $y_5 = -5$.

Данная последовательность ограничена сверху числом -1, но неограничена снизу. Она не является монотонной, так как $y_4 < y_3$ и $y_4 < y_5$.

2 Доказать по определению, что последовательность $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \ldots\right)$ является бесконечно малой последовательностью.

Решение. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbf{N}$, то $\frac{1}{2n} < \varepsilon$. Решая данное неравенство, получим $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\frac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|\frac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров n, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$.

Начиная с шестого номера все члены последовательности $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

3 Доказать по определению, что последовательность $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty} = (1;4;9;...)$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмем произвольное число $c > 0$. Из неравенства $|x_n| > c$ найдем $N(c)$:

$$n^2 > c \;\Rightarrow\; n > \sqrt{c}\,.$$

Возьмем за $N(k)$ целую часть числа $\sqrt{c}$: $N(k) = 1 + \left[\sqrt{c}\right]$. Тогда для всех номеров n, больших чем $N(c)$, выполняется неравенство $n^2 > c$.

Например, для $c = 0{,}16$ имеем $N(c) = 1 + \left[\sqrt{0{,}16}\right] = 1$. Значит, для всех членов последовательности, начиная со второго номера, выполняется неравенство $n^2 > c$. Если $c = 12$, то $N(c) = 1 + \left[\sqrt{12}\right] = 4$ и неравенство верно $\forall n > 4$.

4 Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?

Решение. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (1,0,2,0,3,0,4,0,\ldots)$. Данная последовательность является неограниченной, поскольку для любого $A \in \mathbf{N}$ найдется элемент последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, для которого $x_n > A$. Однако она не является бесконечно большой, так как это неравенство не выполняется для любого $n \in \mathbf{N}$. Поэтому не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Задания для аудиторной работы

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{2n+1}$; г) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, при $n > 1$;

б) $x_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$; д) $a_1 = 1,\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}$, при $n > 1$;

в) $x_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$; е) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены с четными номерами равны 1, а члены с нечетными равны -1;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\cos \pi x = 0$.

3 Может ли быть монотонной последовательностью:

а) сумма двух немонотонных последовательностей;

б) произведение двух немонотонных последовательностей?

4 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, б) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$, в) $x_n = 2^{-n}$.

являются бесконечно малыми.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \ln(n+1)$, б) $x_n = 2^{2n+1}$, в) $x_n = (-1)^n n$.

являются бесконечно большими.

Задания для домашней работы

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{n+2}{n+3}$; в) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; д) $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$;

б) $x_n = \sin n$; г); $x_n = \ln n$; е) $x_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{n^2}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены номерами, кратными 3 равны 1, а остальные равны 0;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\sin\frac{\pi x}{2}=0$.

3 Определить, какие из указаных последовательностей являются возрастающими, убывающими, а какие из них не являются монотонными?

а) $x_n=\frac{1}{n+1}$; г) $x_n=3^{-n}$; ж) $x_n=n^2-2n+4$;

б) $x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$; д) $x_n=\sin\frac{1}{n^2}$; и) $x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{n}$;

в) $x_n=2^n$; е) $x_n=\lg(1+n)$ к) $x_n=\sqrt{n+2}$.

4 Может ли быть ограниченной последовательностью:

а) сумма двух неограниченных последовательностей;

б) произведение двух неограниченных последовательностей;

в) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$, б) $x_n=\frac{\arcsin n}{n}$.

являются бесконечно малыми.

5. Доказать по определению, что последовательность $x_n=\frac{n^2}{n+1}$ является бесконечно большой.

Практическое занятие 2 Предел последовательности

2.1 Определение и свойства предела последовательности
2.2 Критерий Коши сходимости последовательности
2.3 Замечательные пределы

2.1 Определение и свойства предела последовательности

Число $a \in \mathbf{R}$ называется *пределом* последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Символическая запись:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся* (к числу *a*), а последовательности, не имеющие конечного предела, – *расходящимися*.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n - a)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Бесконечно большая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall\, A > 0 \ \exists N(A) : \forall n \ge N(A) \quad |x_n| > A .$$

Сходящиеся последовательности обладают следующими *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \exists M \in \mathbf{R} : |x_n| \le M \;;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \;;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \;;$$

– частное двух сходящихся последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \;;$$

– если все элементы сходящейся последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \ge b$ ($a \le b$);

– пусть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ таковы, что $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

– каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

2.2 Критерий Коши сходимости последовательности

Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для любого малого действительного числа ε найдется номер

$N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Символическая запись: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall\ p \in \mathbf{N} \quad \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

Из определения следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{n+p} - x_n\right| = 0$.

Критерий Коши сходимости последовательности: Для того, чтобы последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

2.3 Замечательные пределы

Пределы, к которым сводятся вычисления многих пределов условно называются замечательными пределами. Ниже приводся некоторые из них:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0,\ (a \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ (a \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение предела последовательности.

2 Сформулируйте с помощью логических символов определение расходящейся последовательности, бесконечно большой последовательности.

3 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

4 Перечислите свойства сходящихся последовательностей.

5 Всякая ли монотонная последовательность является сходящейся?

6 Какая последовательность называется фундаментальной?

7 В чем суть критерия Коши?

Решения типовых примеров

1 Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$.

Из неравенства $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ получим $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$. Отсюда $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Если взять $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ (так как при $\varepsilon\ge 1$ получим $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]=0\notin\mathbf{N}$), то для всех номеров $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

Например, при $\varepsilon=0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 100, 101, $\dots$, а при $\varepsilon=2$ неравенство верно $\forall\ n\in\mathbf{N}$.

2 Доказать, что ограниченная последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела.

Решение. Предположим, что она имеет предел, равный $a\in\mathbf{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n=a \iff \forall\ \varepsilon=\frac{1}{2}\ \ \exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon)\quad \left|(-1)^n-a\right|<\frac{1}{2}.$$

При $n=2k$ получим $|1-a|<\frac{1}{2}$, при $n=2k-1$ получим

$$|-1-a|<\frac{1}{2}\ \text{ или }\ |1+a|<\frac{1}{2}.$$

С учетом этого $\forall n\ge N(\varepsilon)$

$$2=|1-a+a+1|\le|1-a|+|1+a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

т. е. $2<1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $x_n = (-1)^n$ не имеет предела.

3 Доказать, что последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ сходится к нулю, но она не является монотонной.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \colon \forall n \ge N(\varepsilon) \quad \left| \frac{(-1)^n}{2n} - 0 \right| < \varepsilon .$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется это неравенство:

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{2n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{2\varepsilon} \iff N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right] + 1 .$$

Следовательно, последовательность сходится.

Так как $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = -\frac{1}{6}$, $\ldots$, то последовательность не является монотонной.

4 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Решение. Покажем, что $x_n = \frac{2^n}{n!}$ монотонна.

Рассмотрим $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1} \cdot x_n$.

Следовательно, $x_{n+1} < x_n \quad \forall n > 2$, т.е. x_n – убывающая и ограничена снизу числом 0. По свойству сходимости монотонной ограниченой последовательности существует предел последовательности $x_n = \frac{2^n}{n!}$, равный b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{2}{n+1} \cdot x_n$ при $n \to \infty$, получим $b = b \cdot 0$. Отсюда $b = 0$.

5 Доказать, что $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ – сходится.

Решение. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

то x_n – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1,$$

т .е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$.

Значит, x_n – монотонна и ограничена. Тогда по свойству о сходимости монотонной и ограниченной последовательности x_n сходится.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n-5}{2n+3}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n+1}\right)$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$.

Решение. а) имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n-5}{2n+3} = \left[\begin{array}{c}\text{разделим числитель} \\ \text{и знаменатель на } n\end{array}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)} =$$

$$= \text{ по свойствам пределов } = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 8 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{8-0}{2+0} = \frac{8}{2} = 4.$$

б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\left[\begin{matrix}\text{умножим и разделим}\\ \text{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{matrix}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

в) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}}=\mathrm{e}^{-4}.$$

7 Доказать, что последовательность $x_n=a_0+a_1q+\ldots+a_nq^n$, где $|a_k|<M\quad\forall k=\overline{1,n}$, $|q|<1$, сходится.

Решение. Для доказательства используется критерий Коши.

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и рассмотрим разность

$$\left|x_n-x_{n+p}\right|=\left|a_{n+p}q^{n+p}+a_{n+p-1}q^{n+p-1}+\ldots+a_{n+1}q^{n+1}\right|\le$$

$$\le M\left|q^{n+p}\right|+\ldots+M\left|q^{n+1}\right|\le Mp\left|q^{n+1}\right|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, существует $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\varepsilon}{M}\right]+1$, такое, что $\forall n<\mathbf{N}$ и $\forall p>0$ выполняется неравенство $\left|x_n-x_{n+p}\right|<\varepsilon$. Следовательно, последовательность (x_n) является фундаментальной и согласно критерию Коши она сходится.

8 Доказать, что $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ расходится.

Решение. Построим отрицание к критерию Коши:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \ge N \ \ \exists p \ge N : \left| x_{n+p} - x_n \right| \ge \varepsilon_0 .$$

Для этого рассмотрим разность

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right| \ge p \cdot \frac{1}{n+p} .$$

Пусть $p = n$. Тогда получим $\left| x_{2n} - x_n \right| \ge \dfrac{1}{2}$.

Значит, $\exists\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, такое, что $\forall N \ \exists n = p \ge N$, $\left| x_{2n} - x_n \right| \ge \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит и не сходится.

9 Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Р е ш е н и е. Доказательство проведем от противного.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin(n+2) - \sin n \right) = 0 .$$

С другой стороны

$$\sin(n+2) = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sin 1 \cdot \cos(n+1) - \sin n \right) = 0 .$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0 .$$

С учетом того, что $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$, имеем

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1} \left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1) \right).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = \frac{1}{\sin 1} \lim_{n\to\infty} \left(\cos n \cos 1 - \cos(n+1) \right) = 0 .$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$, что противоречит равенству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.

Следовательно, $\sin n$ расходится.

Задания для аудиторной работы

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, если x_n равно:

а) $\dfrac{2n+1}{n} - 1$; в) $1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

б) $1 + \dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{2}}{n}$; г) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}8)^n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n + 5\cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$.

3 Докажите, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ расходится.

4 Докажите, что число $a = -1$ не является пределом последовательности $x_n = \cos\pi n$.

5 Докажите по определению, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n \to \infty$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n-1}{2n+3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{5n^2+4n-1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+3+5+\ldots+n}$

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n-5}\right)^{3n+1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2}\right)$; о) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$; п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$.

Задания для домашней работы

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - 1| < \varepsilon$, если x_n равно:

а) $2+\dfrac{1-n}{1+n}$; в) $1+5^{-n}$;

б) $1+\dfrac{\cos\pi n}{n}$; г) $\dfrac{n^2-1}{n^2}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n 2 = 0$.

3 Докажите, что последовательность $x_n = \ln n$ расходится.

4 Докажите, что число $a = 0$ не является пределом последовательности $x_n = (-1)^n + 1$.

5 Выясните существование предела у следующих последовательностей и найдите его, если он существует:

а) $x_n = -\dfrac{1}{5n}$; в) $x_n = \dfrac{1}{5+(-1)^n}$; д) $x_n = \cos n$;

б) $x_n = \dfrac{1}{3^n}$; г) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, е) $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+4}{10n+251}$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+27n+30}{n^3+n^2-15}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^4+7n^2+3}{2n^4-9n^2-n+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n \right)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[7]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n+1]{3} \right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{n-7} \right)^{2n-1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3}{n^2-1} \right)^{\frac{n}{2}}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{6}$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}-1}{n-1}$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n-7} \right)^{2n-1}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{3n-7} \right)^{2n-1}$;

о) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$;

п) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4n]{n}$.

Практическое занятие 3 **Предел функции**

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции
3.2 Способы задания функции
3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши
3.4 Односторонние пределы функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции

Под функциями понимается отображение числовых множеств.

Пусть X – произвольное подмножество действительных чисел, $X \subseteq \mathbf{R}$.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция* f. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом,* y – *зависимой переменной*, множество X называется *областью определения* функции и *обозначается* $D(f)$, а множество $Y = \left\{ y \in \mathbf{R} \middle| \, y = f(x), x \in D(f) \right\}$ – *множеством значений* функции и *обозначается* $E(f)$.

Если о функции говорить как об отображении $f : X \to Y$, то $f(x)$ называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* $f(x)$. При этом множество Y называется *образом множества* X, множество X – *прообразом множества* Y.

Чтобы определить функцию $y = f(x)$, нужно задать множество X и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества X в элементы y множества Y.

Пусть функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ определены на множествах X и U соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y: $x \overset{\varphi}{\mapsto} u \overset{f}{\mapsto} y$.

Таким образом, каждому значению x ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y = f(\varphi(x))$. В этом случае y называется *сложной* функцией (*композицией* функций f и φ) аргумента x. При этом функция $u = \varphi(x)$ называется *промежуточным* аргументом, x – *независимым* аргументом. *Обозначается*: $y = f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Обратная функция. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что каждое значение y она принимает только при одном значении x. Такая функция называется *обратимой*. Тогда уравнение $y = f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x, т.е. каждому y соответствует единственное значение x. Это соответствие определяет функцию, которая называется *обратной* к функции f.

Обозначается: $x = f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*, т.е. $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.

Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy, т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

3.2 Способы задания функции

Функция задается одним из следующих способов.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть ***неявно*** задана уравнением $F(x;y) = 0$, если $\forall x \in [a;b]$ $F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно *y*, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в *параметрическом* виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на *T*, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$$

задана *параметрическими уравнениями* и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t, $t \in T$, *параметр*.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрическими уравнениями.

Действительно,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр *t*, оказываются простыми.

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; ...; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; ...; y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Графиком Γ *функции* $y = f(x)$ называется множество точек $M(x; y)$ плоскости $\mathbf{R}^2$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью:

$$\Gamma = \left\{ M(x; y) \in \mathbf{R}^2 \middle| \ y = f(x) x \in D(f) \right\}.$$

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

Четность и нечетность функции. Числовая функция $y=f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. для каждой точки $x\in D(x)$ существует точка $-x\in D(x)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=f(x) \quad (f(-x)=-f(x)).$$

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями ***общего*** вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны.

При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x>0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x<0$.

Периодичность функции. Функция $y=f(x)$, определенная на множестве $D(f)$, называется *периодической,* если существует такое число $T>0$, что $\forall\ x\in D(f)$ выполняются следующие условия:

1) $x-T,\ x+T\ \in D(f)$;

2) $f(x)=f(x-T)=f(x+T)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если число T является периодом функции $y=f(x)$ для любого $n\in\mathbf{N}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется *основным периодом*. Если T – период функции $y=f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in \mathbf{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом *T*, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\frac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x) = c$, $c = \text{const}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Любое число $T \in \mathbf{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода *T* функция не имеет.

Монотонность функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x) \text{ *возрастает на* } X \iff \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2);$$

$$f(x) \text{ *убывает на* } X \iff \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$$f(x) \text{ *не убывает на* } X \iff \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2);$$

$$f(x) \text{ *не возрастает на* } X \iff \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а неубывающие и невозрастающие – *монотонными*.

Ограниченность функции. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$):

$$f(x) \text{ *ограничена сверху на* } X \iff \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \le M;$$

$$(f(x) \text{ *ограничена снизу на* } X \iff \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \ge M).$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется условие $\left|f(x)\right| \le M$:

$$f(x) \text{ *ограничена на* } X \iff \exists M \in \mathrm{R} : \forall x \in X \Rightarrow \left|f(x)\right| \le M .$$

Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subseteq D(f)$ если условия ограниченности не выполняются:

$f(x)$ *неограничена сверху на* $X \iff \forall M \in \mathbf{R}\ \exists x \in X: \ f(x) > M$;

($f(x)$ *неограничена снизу на* $X \iff \forall M \in \mathbf{R}\ \exists x \in X: \ f(x) < M$).

3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \left\{ x \middle| \ 0 < |x - x_0| < \delta \right\}$. В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Число A называется *пределом* (*по Гейне*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к A.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a .$$

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \left|f(x) - A\right| < \varepsilon .$$

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Предел функции обладает следующими *свойствами*.

– функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела;

– если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$;

– если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $(b \neq 0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = a^n$ при любом $n \in \mathbf{N}$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$ при $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$.

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливо функциональное неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $A \in \mathbf{R}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

– если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y = f(u(x))$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$ ($u(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$), $\lim\limits_{x \to x_0} f(u) = A$, то существует предел сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

3.4 Односторонние пределы функции

Левой δ*-окрестностью* точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \le 0$:

$$U(\delta; x_0 - 0) = \{ x | -\delta < x - x_0 \le 0 \}.$$

Правой δ*-окрестностью* точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \le x - x_0 < \delta$:

$$U(\delta; x_0 + 0) = \{ 0 \le x - x_0 < \delta \}.$$

Число A называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 - 0) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Число A называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0 + 0) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Критерий Коши существования предела функции: для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0 такая, что для любых $\forall x', x'' \in U(\delta; x_0)$ имеет место неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \iff$$

$$\iff |f(x'') - f(x')| < \varepsilon .$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.

2 Перечислите способы задания функций.

3 Какими элементарными свойствами обладают функции.

4 Дайте определение сложной функции.

5 Дайте определение обратной функции. Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?

6 Сформулируйте определения предела функции в точке по Гейне и по Коши.

7 Сформулируйте отрицания этих определений.

8 Сформулируйте определения по Коши, соответствующие следующим символическим обозначениям:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; в) ; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

9 Дайте определения односторонних пределов функции. Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?

10 Сформулируйте критерий Коши существования предела функции.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения D и множество значений E функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ определена, если $4-x^2>0$, т.е. если $|x|<2$. Поэтому областью определения функции является множество

$$D(f)=\left\{\, x\in\mathbf{R}\,\middle|\,|x|<2\,\right\}=(-2;2).$$

Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \ge \dfrac{1}{2}$ для всех x из области определения, то множество значений есть

$$E(f)=\left\{y \middle| y \ge \frac{1}{2}\right\}=\left[\frac{1}{2};+\infty\right).$$

2 Доказать, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$.

Р е ш е н и е . По определению:

$$f(x) \text{ *ограничена сверху на* } (0;1) \Leftrightarrow$$

$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in (0;1) \Rightarrow f(x) \le M .$$

Построим отрицание для этого определения:

$$f(x) \text{ *неограничена сверху на* } (0;1) \Leftrightarrow$$

$$\forall M \in \mathbf{R} : \exists x \in (0;1) \Rightarrow f(x) > M .$$

Возьмем $x=\dfrac{1}{1+|M|}$.

Тогда $f\left(\dfrac{1}{1+|M|}\right)=1+|M|>M$ для любого M .

Следовательно, существует такое число $x \in (0;1)$, что $f(x)>M$. Поэтому функция неограничена.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная

а) $f(x)=x^2 \cdot \sqrt[3]{x}+2\sin x$, б) $f(x)=x^2+5x$, в) $f(x)=2^x+2^{-x}$?

Р е ш е н и е .

а) изменим знак аргумента, тогда получим:

$$f(-x)=(-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x}+2\sin(-x)=-x^2 \cdot \sqrt[3]{x}-2\sin x=-f(x).$$

Следовательно, функция нечетная.

б) здесь $f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x$. Таким образом, эта функция общего вида.

в) имеем

$$f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x=f(x).$$

4 Найти период функции $y=\cos 3x+\cos 4x$.

Р е ш е н и е. Функция $\cos 3x$ имеет период $T_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, а функция $\cos 4x$ – период $T_2 = \dfrac{2\pi}{4}$. Поскольку $3T_1 = 4T_2 = 2\pi$, то число 2π является периодом данной функции.

5 Показать, что функция $y = 3x + 2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Р е ш е н и е. Функция $y = 3x + 2$ $\forall x \in \mathbf{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную.

Решив уравнение $y = 3x + 2$ относительно x, получим $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3}$.Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 3.1.

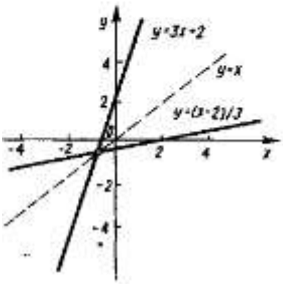

Рисунок 3. 1. – Графики функции $y = 3x + 2$ и обратной ей

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

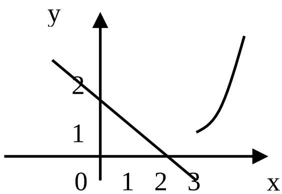

Рисунок 3. 2 – График функции

$$y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \ge 3. \end{cases}$$

6 Построить график функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \ge 3. \end{cases}$

Р е ш е н и е. При $x < 3$ функция представляется лучом прямой $y = 2 - x$, при $x \ge 3$ – параболой $y = 0{,}1x^2$. График данной функции представлен на рисунке 3.2.

7 Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (рисунок 3.3) не определена в точке $x_0=1$, но определена для любой $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n\neq 1$ $\forall n\in\mathbf{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Образуем последовательность $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-1}{x_n-1}$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Так как $x_n\neq 1$, то $f(x_n)=x_n+1$ $\forall n\in\mathbf{N}$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)=2$.

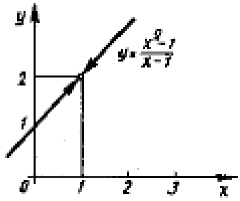

Рисунок 3.3 – График функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

8 Доказать, что функция $y(x)=\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

Решение. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при $x\to+\infty$ по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \forall(x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n>0,\ x_n\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\ \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$

$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, что последовательность $(\cos x_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Положим $x_n = \pi n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и последовательность $\cos x_n = (1,-1,1,-1,\ldots)$ расходится. Следовательно, функция $\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.

9 Используя определение предела по Коши, доказать, $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

Решение. Возьмем произвольное малое $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \varepsilon$. Известно, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(\delta;0)$ выполняется неравенство $|\sin x| \le |x| < \delta = \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

10 Докажите, что для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \ge 0, \\ 0, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

число 1 не является пределом при $x \to 0$.

Решение. Положим $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Тогда $\forall \delta > 0$ существуют $x \ge 0$ и $x < 0$ такие, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Для $x < 0$ имеем

$$|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ \ 0 < |x - x_0| < \delta: \quad |f(x) - 1| \ge \varepsilon_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne 1$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x-2}$; б) $y = \arccos\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$; в) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x^2-9}} - \sqrt{\sin x}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y=\dfrac{3}{x-2}$ на $(1;3)$, б) $y=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$ на $\mathbf{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y=|x|-5\ln\left(x^2+1\right)$;

б) $y=x^3+3\sin x$;

в) $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y=\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x$, б) $y=\sin|x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2} 3x=6$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty$.

6 Доказать, что функция $y(x)=\sin x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

7 Доказать, что число 1 не является пределом функции $f(x)$ при $x\to 0$, если $f(x)=\sin x$.

8 Привести пример функции, удовлетворяющей условию:

а) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, б) $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$.

9 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=0$, но их сумма, произведение, разность; частное имеет предел в точке $x=0$.

10 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x)$, $n\in\mathbf{N}$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+1\right)\left(q(x)-2\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-q(x)}{q^2(x)+1}$; г) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}$.

11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+\dfrac{1}{x}+3x-2\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x+1}}{x^2-3x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 2} \lg\left(4x-1+\sqrt{2x+5}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+4}{2x-7}\right)^x$.

12 Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x+1)}$ найти:

а) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$.

Задания для домашней работы

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y=\log_3\left(x^2-9\right)+\arcsin(x-6)$; б) $y=\ln(\sin x)$;

в) $y=\dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y=\dfrac{5}{x+2}$ на $(-4;4)$; б) $y=\dfrac{\sin x}{e^x+1}$ на $\mathbf{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $y=2x^4+5\cos x-3$; в) $y=\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y=\cos 4x+\sin 5x$, б) $y=|\cos 2x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \sin x = 0$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-9}{x^2-3}=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^3-1\right)=-1$.

6 Доказать, что функция:

$$y(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

не имеет предела в точке 0.

7 Привести пример функции, удовлетворяющей условию: $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$, но функция $|f(x)|$ имеет предел в этой точке.

8 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=1$, но их сумма, произведение, разность, частное имеет предел в точке $x=1$.

9 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+q^2(x)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\sin x}{q^2(x)+\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos f(x)$.

10 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x^3+2\cos x\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\sin x\left(4x^2+1\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$;

е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

з) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-6x}$.

Практическое занятие 4 Бесконечно малые функции

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций
4.2 Сравнение асимптотического поведения функций

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или бесконечно малой) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Обозначается: $\alpha(x) = o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

– конечная сумма бесконечно малых функций есть функция, бесконечно малая;

– произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция;

– произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция;

– произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

– частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, есть бесконечно малая функция;

– если функция $\alpha(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая. Если функция $f(x)$ при $x \to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to x_0$ – бесконечно малая.

4.2 Сравнение асимптотического поведения функций

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=e.$$

Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0\in\mathbf{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x),\ \beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

то они называются *бесконечно малыми одного порядка малости*.

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ *ограничена*, т.е. $O(1)$ – множество ограниченных функций при $x\to x_0$.

Если функции $\alpha(x),\ \beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ то они называются *эквивалентными* (*асимптотически равными)* при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim$$
$$\sim \ln(1+\alpha(x)) \sim e^{\alpha(x)} - 1,\ \sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{n}\alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x \to x_0$ $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то
$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$. *Обозначается*: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x) \in o(1)$ при $x \to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x \to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \neq 0$, $k > 0$, то $\alpha(x)$ называется функцией *k-го порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида
$$\alpha(x) = O(\beta(x)),\ \alpha(x) = o(\beta(x)),\ \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \to x_0$$
называются *асимптотическими оценками*.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение бесконечно малой функции.

2 Перечислите свойства бесконечно малых функций.

3 Докажите первый замечательный предел.

4 Докажите второй замечательный предел.

5 Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных функций.

Решение типовых примеров

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$; д) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$; и) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение.

а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

б) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=\quad 2y=x\quad=$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} bx}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx} =$$

$$= 1\cdot b = b.$$

д) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 0} 3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y} = \left[\,3y = x\,\right] =$$

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 3\cdot 1 = 3.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)} = \left[\,x-5 = t\,\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4} = 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{введем новую}\\ \text{переменную } y = 2x\end{array}\right] =$$

$$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2=e^2.$$

и) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}}=\left[\frac{y}{2}=x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x)=\sin(x-2)$ при $x\to 2$;

б) $\alpha(x)=x^2-3x+2$ при $x\to 1$;

в) $\alpha(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-2x^5}{5x+3x^3+x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4-7x^8}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{\arcsin^2 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4+x^8}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\sin^2 x-\operatorname{arctg} 2x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{e^{3t}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x}{x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2x^2}{x^2-4}\right)$.

Задания для домашней работы

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ при $x\to\infty$;

б) $\alpha(x)=\cos x$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\alpha(x)=x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin 4x)^2}{1-\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-7x+6}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x - \sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

в) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sin(x+3)}{2x+6}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{\ln(1+6x)}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^6}}{\ln(1+3x)}$;

и) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 5^x}{1 - e^x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 7x}{\sin^2 3x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{2x}$;

г) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{3t}{\sqrt{1-2t} - 1}$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{\sin 10x}$;

и) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$;

к) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

л) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^{-2t} - 1}{3t}$;

м) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$;

н) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}\right)$.

Практическое занятие 5 Непрерывность функции

5.1 Определение непрерывности функции
5.2 Точки разрыва и их классификация
5.3 Свойства непрерывных функций

5.1 Определение непрерывности функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 – *точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Коши*), если для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U(\delta; x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Пусть $x - x_0 = \Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 переменной x приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 5. 1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$$f(x) \text{ *непрерывна справа в точке* } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x) \text{ *непрерывна слева в точке* } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

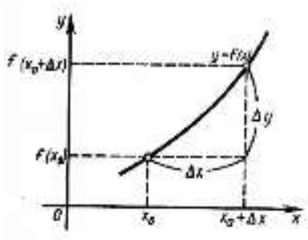

Рисунок 5. 1 – Определение непрерывности функции

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Гейне*), если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $\left(f(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x_0)$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in U(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется *непрерывной на множестве* X.

Если $X = [a; b]$, то для непрерывности функции на $[a; b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $C[a;b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x) \neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x \in X \quad f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$);

2) для любого числа $M' < M$ ($m' > m$) найдется такая точка $x' \in X$, что $f(x') > M'$ ($f(x') < m'$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y = f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут $\sup\limits_X f(x) = +\infty$, если снизу, то $\inf\limits_X f(x) = -\infty$.

5.2 Точки разрыва и их классификация

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A \text{ и } f(x_0) \neq A.$$

Вводя новую функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0, \\ A, \text{ если } x = x_0, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f_1(x)=A=f_1(x_0),$$

т. е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет *непрерывной слева*, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ – *непрерывной справа*.

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* 2-*го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел: равен бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty .$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется *кусочно-*

непрерывной на числовой прямой $\mathbf{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, $a_k\in\mathbf{R}$, $k=\overline{0,n}$, является функцией, непрерывной для любого $x\in\mathbf{R}$.

Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x\in\mathbf{R}$, для которой $Q(x)\neq 0$. Здесь $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right),\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Пусть функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x=f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

5.3 Свойства непрерывных функций

Непрерывные функции обладают следующими с в о й с т в а м и .

1 (устойчивость знака непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:

$$f(x):\ f(a)f(b)<0\ \Rightarrow\ \exists x_0\in(a;b):\ f(x_0)=0.$$

3 Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (ограниченность непрерывных функций). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (достижение непрерывной функцией своих точных граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M=f(x_1)=\sup_{[a;b]}f(x),\ m=f(x_2)=\inf_{[a;b]}f(x).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определения непрерывной функции.

2 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности.

3 Дайте определение точек разрыва.

4 Какие точки называются точками разрыва функции?

5 Дайте определение точек устранимого разрыва и точек разрыва 1 и 2 рода.

6 Перечислите основные свойства непрерывных функций: о непрерывности сложной функции, основных элементарных функций, об устойчивости знака непрерывной функции, о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

Решение типовых примеров

1 Доказать непрерывность функции $y = ax + b$.

Решение. Функция $y = ax + b$ определена при всех значениях x, т.е. $\forall x \in \mathbf{R}$. Фиксируем некоторое значение x_0 из этого множества.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \;\; |y(x) - y(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |ax - ax_0| = |a| \cdot |x - x_0|$.

Как только $|x - x_0| < \delta$, то $|y(x) - y(x_0)| < |a| \cdot \delta$.

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta = \frac{\varepsilon}{|a|} : |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow$$

$$|y(x) - y(x_0)| < |a| \cdot \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon .$$

2 Исследовать на непрерывность сложные функции

а) $y = e^{-\frac{1}{x}}$, б) $y = \sin x^4$.

Решение. а) функция $y = e^{-\frac{1}{x}}$ является композицией следующих элементарных функций: $y = -\dfrac{1}{x}$ и $f = e^y$. Так как функция $y = -\dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x = 0$, то функция не является непрерывной в этой точке. В остальных точках она непрерывна как композиция непрерывных функций.

б) функция $y = \sin x^4$ является композицией функций $y = \sin z$ и $z = x^4$. Так как функции y и z непрерывны при всех значениях своих аргументов, то по теореме о непрерывности сложной функции $y = \sin x^4$ также непрерывна при всех x.

3 Доопределить функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0.

Решение. Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

непрерывна во всех точках числовой прямой кроме точки $x=0$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

4 Доказать, что уравнение $x^3-4x+2=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(0{,}1)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-4x+2$. Она непрерывна при всех x (как сумма непрерывных функций $f_1=x^3$, $f_2=-4x$, $f_3=2$). Так как $f(0)=2>0$ и $f(1)=-1<0$, то между точками 0 и 1 найдется точка x_0, в которой эта функция обращается в нуль: $f(x_0)=0$. Поэтому x_0 – корень уравнения.

5 Найти точки разрыва функции $y=[x]$, где $[x]$ – целая часть числа, и построить график.

Решение. Функция $E(x)$ определена следующим образом: если $x=n+q$, где n – целое число, а $0\le q\le 1$, то $[x]=n$, т.е. функция равна целой части числа. Областью определения данной функции является множество $\mathbf{R}$. Функция $y=[x]$ терпит разрыв при каждом целочисленном значении x. Действительно, пусть $x_0=n$, тогда $y(x_0)=n$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} y=n-1$, а $\lim\limits_{x\to x_0+0} y=n$. Причем каждая из этих точек является точкой разрыва первого рода (рисунок 5. 2).

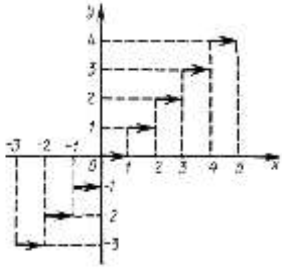

Рисунок 5. 2 – График функции $y=[x]$

Во всех точках $x\in \mathbf{R}\setminus \mathbf{Z}$ функция $y=[x]$ является непрерывной как постоянная.

6 Определить точки разрыва функции $y=e^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. Данная функция не определена в точке $x=1$.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{2}{x-1}}=0, \quad \lim_{x\to 1+0} e^{\frac{2}{x-1}}=+\infty .$$

Поскольку один из односторонних пределов является бесконечностью, то $x=1$ является точкой разрыва второго рода этой функции.

Задания для аудиторной работы

1 Докажите непрерывность следующих функций:

а) $y=x^2$; б) $y=\cos x$; в) $y=\sqrt{x}$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопределите функцию $f(x)$ задав

$f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{\sin(1-x)}{x-1}$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

4 Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } \ x<0,\\ x+1, \text{ при } \ 0\le x<1,\\ -x^2+4x-1, \text{ при } \ 1\le x<3,\\ 5-x, \text{ при } \ x\ge 3?\end{cases}$$

5 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна:

а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

6 Докажите, что уравнение $x^3+4x-6=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1,2)$.

7 Исследовать функцию $y=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность, и построить график функции.

8 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$; г) $y=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$;

б) $y=\sin\dfrac{1}{x}$; д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$;

в) $y=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$; е) $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ если } \ x<1\\ 3x+2, \text{ если } \ x\ge 1.\end{cases}$.

Задания для домашней работы

1 Доказать непрерывность функции

а) $y=\sqrt[3]{x}$; б) $y=\sin x$; в) $y=x^3$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопредеите функцию $f(x)$ задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, б) $f(x)=(1-x)\operatorname{ctg}\pi x$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=\sqrt{x}\sin 2x$.

4 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=0$, чтобы функция $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$ в этой точке была непрерывна:

5 Докажите, что уравнение $x^4-2{,}15x+0{,}95=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1,2)$.

6 Исследовать функцию

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$$

на непрерывность и построить график.

7 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$, в) $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$,

б) $y=\ln|\sin x|$, г) $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

8 Изобразите схематически график какой-либо функции, которая в точке $x_0=3$:

а) непрерывна;

б) имеет конечный предел, но не непрерывна;

в) имеет бесконечный предел; не имеет предела;

г) непрерывна слева и имеет конечный предел справа, но не непрерывна справа;

д) имеет конечные пределы и слева, и справа, но не непрерывна ни слева, ни справа;

е) непрерывна слева и имеет бесконечный предел справа;

ж) непрерывна слева и не имеет предела справа;

и) имеет бесконечный предел слева и не имеет предела справа;

к) не имеет предела ни слева, ни справа.

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ–1 Числовые множества

1 Составьте подмножества множества A элементами которых являются $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа и числа кратные 2:

1.1 $A=\left\{-20;-1;\frac{3}{4};2;0\right\}$.

1.2 $A=\left\{-10;-\frac{3}{5};0;2;13;7\right\}$.

1.3 $A=\left\{1;2;3;17;\frac{200}{10}\right\}$.

1.4 $A=\left\{0;1;-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$.

1.5 $A=\{2,5;3,5;6,7;12\}$.

1.6 $A=\{-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2\}$.

1.7 $A=\left\{-7;-5;-3;-1;0;\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7}\right\}$.

1.8 $A=\left\{-\frac{9}{10};-\frac{8}{10};-\frac{7}{10};-\frac{6}{10}\right\}$.

1.9 $A=\{24;25;26;27;28\}$.

1.10 $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{1}{8}\right\}$.

1.11 $A=\{-12;0;21;23;27\}$.

1.12 $A=\{2,5;2,6;2,7;2,8;2,9;3\}$.

1.13 $A=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$.

1.14 $A=\{3;7;9;11;13;15;17\}$.

1.15 $A=\{-3;3;-4;4;-5;5;-6;6\}$.

1.16 $A=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};0;-\frac{1}{3};-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right\}$.

1.17 $A=\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$.

1.18 $A=\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$.

1.19 $A=\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$.

1.20 $A=\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$.

1.21 $A=\left\{7\frac{1}{4};7\frac{2}{4};7\frac{3}{4};8\right\}$.

1.22 $A=\left\{-15\frac{1}{3};18;-4\frac{1}{4};-16\right\}$.

1.23 $A=\left\{-\frac{1}{10};-12;-8;-7;-1\right\}$.

1.24 $A=\left\{\frac{24}{3};\frac{23}{3};\frac{22}{3};\frac{21}{3};\frac{20}{3};\frac{18}{3}\right\}$.

1.25 $A=\{-40;-30;-20;-10;-1;0;1\}$.

1.26 $A=\left\{2;17;19\frac{2}{3};21\frac{4}{5};47\right\}$.

1.27 $A=\left\{-3;8;21;-100\frac{1}{3}\right\}$.

1.28 $A=\left\{2;-100;42\frac{2}{3};41;3\right\}$.

1.29 $A=\{-8;-10;-16;-17;-18;20\}$.

1.30 $A=\left\{-10;8;20\frac{3}{10};-14\frac{1}{3};27\right\}$.

2 Найди пересечение, объединение, разность множеств A и B:

2.1 $A=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$, $B=\{4;16;8;12;20;\ldots\}$.

2.2 $A=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$, $B=\{9;18;27;36;\ldots\}$.

2.3 $A=\{4;16;8;12;20;\ldots\}$, $B=\{8;16;24;\ldots\}$.

2.4 $A=\{5;10;15;20;\ldots\}$, $B=\{10;20;30;\ldots\}$.

2.5 $A=\{6;12;18;24;\ldots\}$, $B=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$.

2.6 $B=\{7;49;7^3;7^4;\ldots\}$.

2.7 $A=\{8;16;24;\ldots\}$, $B=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$.

2.8 $A=\{9;18;27;\ldots\}$, $B=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$.

2.9 $A=\{10;100;1000;\ldots\}$, $B=\{10;20;30;\ldots\}$.

2.10 $A=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$. $B=\{2;4;8;16;\ldots\}$.

2.11 $A=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$, $B=\{1;3;5;7;9;\ldots\}$.

2.12 $A=\{-10;-100;-1000;\ldots\}$, $B=\{-10;-20;-30;\ldots\}$.

2.13 $A=\{-4;-8;-12;-16;-20;\ldots\}$, $B=\{-8;-16;-24;\ldots\}$.

2.14 $A=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$, $B=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots\right\}$.

2.15 $A=\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\ldots\right\}$, $B=\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$.

2.16 $A=\{0,1;0,01;0,001;\ldots\}$, $B=\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$.

2.17 $A=\{-1;-2;-3;-4;\ldots\}$, $B=\{-1;-3;-5;-7;\ldots\}$.

2.18 $A=\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$, $B=\{-10;-100;-1000;\ldots\}$.

2.19 $A=\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$. $B=\{-10;-20;-30;\ldots\}$.

2.20 $A=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$.

2.21 $A=\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$, $B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$.

2.22 $A=\left\{\frac{1}{10};\frac{2}{10};\frac{3}{10};\ldots\right\}$, $B=\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$.

2.23 $A=\{-7;-14;-21;-28;\ldots\}$, $B=\{-7;(-7)^2;(-7)^3;\ldots\}$.

2.24 $A=\{-3;-6;-9;-12;\ldots\}$, $B=\{-3;(-3)^2;(-3)^3;\ldots\}$.

2.25 $A=\{-2;-4;-6;-8;\ldots\}$, $B=\{-2;(-2)^2;(-2)^3;\ldots\}$.

2.26 $A=\{-1;1;-1;1;\ldots\}$, $B=\{-1;0;0,1;0,2;0,3;\ldots\}$.

2.27 $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{4};\frac{3}{5};\frac{4}{6};\ldots\right\}$.

2.28 $A=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$, $B=\{-0{,}1;-0{,}01;-0{,}001;\ldots\}$.

2.29 $A=\left\{1\frac{1}{3};1\frac{2}{3};2\frac{1}{3};2\frac{2}{3};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\ldots\right\}$.

2.30 $A=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{100};\frac{1}{1000};\ldots\right\}$, $B=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$.

3 Доказать иррациональность числа:

3.1 $\sqrt{3}$.

3.2 $\sqrt{5}$.

3.3 $\sqrt{7}$.

3.4 $\sqrt{11}$.

3.5 $\sqrt{10}$.

3.6 $\sqrt{13}$.

3.7 $\sqrt{15}$.

3.8 $\sqrt{17}$.

3.9 $\sqrt{19}$.

3.10 $\sqrt{20}$.

3.11 $\sqrt{21}$.

3.12 $\sqrt{22}$.

3.13 $\sqrt{33}$.

3.14 $\sqrt{23}$.

3.15 $\sqrt{27}$.

3.16 $\sqrt{30}$.

3.17 $\sqrt{35}$.

3.18 $\sqrt{37}$.

3.19 $\sqrt{40}$.

3.20 $\sqrt{41}$.

3.21 $\sqrt{43}$.

3.22 $\sqrt{47}$.

3.23 $\sqrt{50}$.

3.24 $\sqrt{51}$.

3.25 $\sqrt{52}$.

3.26 $\sqrt{53}$

3.27 $\sqrt{57}$.

3.28 $\sqrt{59}$.

3.29 $\sqrt{60}$.

3.30 $\sqrt{61}$.

4. Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

4.1 $X=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7};\frac{1}{9}\right\}$.

4.2 $X=\left\{-\frac{1}{3};-\frac{1}{5};-\frac{1}{7};-\frac{1}{9}\right\}$.

4.3 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots\frac{1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.4 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\ldots-\frac{1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.5 $X=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{9};\ldots\frac{1}{3^n}\ldots\right\}$.

4.6 $X=\left\{-\frac{1}{3};-\frac{1}{9};\ldots-\frac{1}{3^n}\ldots\right\}$.

4.7 $X=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{100};\ldots\frac{1}{10^n}\ldots\right\}$.

4.8 $X=\left\{-\frac{1}{10};-\frac{1}{100};\ldots-\frac{1}{10^n}\ldots\right\}$.

4.9 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.10 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.11 $X=\{x\in Q:|x|<4\}$.

4.12 $X=\{x\in Q:|x|<1\}$.

4.13 $X=\{x\in Q:|x|\le 2\}$.

4.14 $X=\{x\in Q:|x|>3\}$.

4.15 $X=\{x\in Q:|x|\ge 3\}$.

4.16 $X=(2;3]$.

4.17 $X=[2;3)$.

4.18 $X=(2;3)$.

4.19 $X=[2;3]$.

4.20 $X=\left\{1;1+\frac{1}{2};1+\frac{1}{3};\ldots1+\frac{1}{n}\ldots\right\}$.

4.21 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{4};\ldots;\frac{2^n+1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.22 $X=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3};\frac{1}{2}+\frac{1}{4};\tfrac{1}{2}+\frac{1}{n}\ldots;\ldots\right\}$.

4.23 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{4};\frac{2}{4};\frac{3}{4};\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}\ldots\right\}$.

4.24 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{4};-\frac{2}{4};-\frac{3}{4};-\frac{1}{5};\ldots\right\}$.

4.25 $X=\left\{-1;-1-\frac{1}{2};-1-\frac{1}{3};\ldots;-1-\frac{1}{n}\ldots\right\}$.

4.26 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{3}{4};\ldots;-\frac{2^n-1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.27 $X=\left\{0;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.28 $X=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.29 $X=\left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.30 $X=\left\{0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений $n\in\mathbf{N}$**:**

5.1 n^3+5n кратно 6.

5.2 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5.3 $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6.

5.4 $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$.

5.5 $7^{2n}-1$ кратно 24.

5.6 $2\cdot 2+3\cdot 5+\cdots(n+1)(3n-1)=\dfrac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

5.7 13^n+5 кратно 6.

5.8 $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\cdots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

5.9 15^n+6 кратно 7.

5.10 $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$.

5.11 9^n+3 кратно 4.

5.12 $1+6+20+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$.

5.13 $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

5.14 $(1-\dfrac{1}{4})\cdot(1-\dfrac{1}{9})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{n+1}{2n}$.

5.15 7^n+3n-1 кратно 9.

5.16 $(1-\dfrac{4}{1})(1-\dfrac{4}{9})(1-\dfrac{4}{25})\cdots(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2})=\dfrac{1+2n}{1-2n}$.

5.17 $7^n+12n+17$ кратно 18.

5.18 $\dfrac{1}{5\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 19}+\cdots+\dfrac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\dfrac{n}{5(7n+5)}$.

5.19 $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}$.

5.20 $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\dfrac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

5.21 $6^n+20n+24$ кратно 25.

5.22 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$.

5.23 $5^n+2\cdot 3^n+5$ кратно 8.

5.24 $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{n(n+30)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+1)}{n+2)}$.

5.25 5^n-3^n+2n кратно 4.

5.26 $4^n > 7n-5$.

5.27 $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

5.28 $3^n-2^n \ge n$.

5.29 $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}<1$.

5.30 $4^n \ge n^2+3^n$.

6 Вычислить:

6.1 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^8$.

6.2 $\left(\dfrac{1-i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

6.3 $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^9$.

6.4 $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2+2i}\right)^{10}$.

6.5 $\left(\dfrac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^6$.

6.6 $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^9$.

6.7 $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4-4i}\right)^{12}$.

6.8 $\left(\dfrac{3+3i}{-\sqrt{3}+i}\right)^7$.

6.9 $\left(\dfrac{-1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$.

6.10 $\left(\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{1-i}\right)^7$.

6.11 $\left(\dfrac{5-5i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$.

6.12 $\left(\dfrac{3+3i}{7-7\sqrt{3}i}\right)^{11}$.

6.13 $\left(\dfrac{1-i}{3\sqrt{3}-3i}\right)^8$.

6.14 $\left(\dfrac{6+6i}{4\sqrt{3}-4i}\right)^7$.

6.15 $\left(\dfrac{7-7i}{2+2\sqrt{3}i}\right)^6$.

6.16 $\left(\dfrac{7+7i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^5$.

6.17 $\left(\dfrac{1-i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^8$.

6.18 $\left(\dfrac{3+3i}{5-5\sqrt{3}i}\right)^7$.

6.19 $\left(\dfrac{4+4i}{5\sqrt{3}-5i}\right)^9$.

6.20 $\left(\dfrac{2-2i}{6\sqrt{3}+6i}\right)^5$.

6.21 $\left(\dfrac{4-4i}{7-7\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

6.22 $\left(\dfrac{5+5i}{3\sqrt{3}-3i}\right)^8$.

6.23 $\left(\dfrac{7+7i}{5\sqrt{3}-5i}\right)^3$.

6.24 $\left(\dfrac{2-2i}{5\sqrt{3}+5i}\right)^8$.

6.25 $\left(\dfrac{3-3i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^9$.

6.26 $\left(\dfrac{5+5i}{3+3\sqrt{3}i}\right)^8$.

6.27 $\left(\dfrac{8-8i}{-3+3\sqrt{3}i}\right)^8$.

6.28. $\left(\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{5-5i}\right)^7$.

6.29 $\left(\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{7+7i}\right)^9$.

6.30. $\left(\dfrac{3+3i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^7$.

7 Найти все значения корня и изобразить в комплексной плоскости все корни.

7.1 $\sqrt[4]{-3+3i}$.

7.2 $\sqrt[5]{5-5i}$.

7.3 $\sqrt[6]{5+5i}$.

7.4 $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.5 $\sqrt[3]{5\sqrt{3}+5i}$.

7.6 $\sqrt[4]{-2+2i}$.

7.7 $\sqrt[5]{5\sqrt{3}-5i}$.

7.8 $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$.

7.9 $\sqrt[4]{-3+3i}$.

7.10 $\sqrt[6]{5+5\sqrt{3}i}$.

7.11 $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$.

7.12 $\sqrt[5]{-2-2i}$.

7.13 $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.14 $\sqrt[6]{3\sqrt{3}-3i}$.

7.15 $\sqrt[4]{5\sqrt{3}-5i}$.

7.16 $\sqrt[7]{3-3\sqrt{3}i}$.

7.17 $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.18 $\sqrt[6]{2+2i}$.

7.19 $\sqrt[8]{1+i}$.

7.20 $\sqrt[4]{-2+2i}$.

7.21 $\sqrt[8]{-3+3\sqrt{3}i}$.

7.22 $\sqrt[5]{7\sqrt{3}+7i}$.

7.23 $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i}$.

7.24 $\sqrt[6]{-5+5\sqrt{3}i}$.

7.25 $\sqrt[3]{2-2i}$.

7.26 $\sqrt[4]{3\sqrt{3}-3i}$.

7.27 $\sqrt[6]{-2\sqrt{3}+2i}$.

7.28 $\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}$.

7.29 $\sqrt[4]{-7\sqrt{3}-7i}$.

7.30 $\sqrt[5]{-2\sqrt{3}-2i}$.

8 Найти множества точек на плоскости $\boldsymbol{C}$, которые определяются заданными условиями:

8.1 $|z-1|<4,\ \ |z+1|\ge 3$.

8.2 $|z-i|\le 2,\ \ \operatorname{Re} z>1$.

8.3 $|z+1|<1,\ \ |z-i|<1$.

8.4 $|z-1-i|<1,\ \ \operatorname{Im} z>1,\ \ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.5 $|z+i|>1,\ \ |z|<2$.

8.6 $|z|<2,\ \ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le \pi$.

8.7 $|z-1+i|>1,\ \ |z+2|\le 1$.

8.8 $|z-i|<4,\ \ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$.

8.9 $|z+1+i|>1,\ \ |z-i|\le 2$.

8.10 $|z-1|<1,\ \ 0\le \operatorname{Im} z\le 1,\ \ 1\le \operatorname{Re} z\le 2$.

8.11 $|z+2i|\le 2,\ \ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.12 $|z+i|<2,\ \ |z+1+i|\ge 1$.

8.13 $|z-i|<1,\ \ \operatorname{Im} z>2,\ \ -1\le \operatorname{Re} z\le 1$.

8.14 $|z-2i|<2,\ \ -\dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{4}$.

8.15 $|z+i|\ge 1,\ \ \operatorname{Im} z>0,\ \ \operatorname{Re} z<3$.

8.16 $|z-1-2i|<1,\ \ |z+1+i|\le 3$.

8.17 $|z|<4,\ -1\le \operatorname{Im} z\le 1,\ 0\le \operatorname{Re} z\le 1$.

8.18 $1\le |z-1|<4,\ \ |z|\ge 3$.

8.19 $2\le |z-i|<4,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$.

8.20 $|z-1+i|<4,\ \ |z|\ge 2$.

8.21 $|z-i|<1,\ \ \operatorname{Im} z\le 4,\ \ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.22 $|z|<4,\ \ |z+i|\ge 2$.

8.23 $|z-1|<2,\ -\dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$.

8.24 $|z-i|<1,\ \ \operatorname{Re} z\ge -1$.

8.25 $|z|<2,\ \ |z-1|\ge 1$.

8.26 $|z-1-i|<2,\ 0\le \arg z\le \pi$.

8.27 $|z-1|<1,\ 0\le \operatorname{Im} z\le 3,\ 1\le \operatorname{Re} z\le 2$.

8.28 $|z-i|<2,\ \ |z+1+i|\ge 3$.

8.29 $1\le |z-1|<5,\ \ |z|\ge 3$.

8.30 $|z-1-i|<1,\ \ \operatorname{Im} z>2,\ \ \operatorname{Re} z\ge 1$.

9 Найти решение уравнения:

9.1 $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.2 $\dfrac{5}{z-i}+\dfrac{1-3i}{1+8i}=1$.

9.3 $\dfrac{5i}{z+2i}+\dfrac{4+3i}{1+2i}=3$.

9.4 $\dfrac{6i}{z-2i}+\dfrac{3+i}{1-i}=10$.

9.5 $\dfrac{6i}{2z+i}-\dfrac{3-i}{2-i}=1$.

9.6 $\dfrac{4}{z+6i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.7 $\dfrac{2}{4z+i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.8 $\dfrac{3i}{2z-i}+\dfrac{5+i}{1+9i}=7$.

9.9 $\dfrac{2}{z-2i}+\dfrac{9+6i}{1-9i}=5$.

9.10 $\dfrac{1}{z-2i}+\dfrac{3-4i}{4+5i}=3$.

9.11 $\dfrac{i}{7z+9i}+\dfrac{2+i}{6-3i}=7$.

9.12 $\dfrac{3}{z+3i}+\dfrac{4+3i}{6+8i}=6$.

9.13 $\dfrac{3i}{z+2i}+\dfrac{9-i}{1+3i}=1$.

9.14 $\dfrac{i}{2z+4i}+\dfrac{4-5i}{2+3i}=1$.

9.15 $\dfrac{2i}{6z-i}+\dfrac{1-5i}{5-i}=8$.

9.16 $\dfrac{5i}{4z-3i}+\dfrac{2-3i}{2-i}=5$.

9.17 $\dfrac{5i}{z+9i}+\dfrac{4-3i}{2-4i}=2$.

9.18 $\dfrac{1}{2z+3i}+\dfrac{4-3i}{2-5i}=16$.

9.19 $\dfrac{i}{8z-4i}+\dfrac{3+7i}{3-8i}=4$.

9.20 $\dfrac{1}{13z+23i}+\dfrac{4+23i}{1-19i}=4$.

9.21 $\dfrac{4i}{z-11i}+\dfrac{2+7i}{2+9i}=6$.

9.22 $\dfrac{1}{2z+3i}+\dfrac{9-5i}{3+25i}=4$.

9.23 $\dfrac{3}{z+7i}+\dfrac{2-7i}{1-5i}=8$.

9.24 $\dfrac{1}{2z+2i}+\dfrac{4-4i}{2-2i}=16$.

9.25 $\dfrac{5i}{9z+3i}+\dfrac{1-8i}{3+i}=3$.

9.26 $\dfrac{i}{8z-8i}+\dfrac{3+3i}{7-7i}=4$.

9.27 $\dfrac{i}{z+3i}+\dfrac{1-5i}{1+3i}=1$.

9.28 $\dfrac{3}{z+i}+\dfrac{3+3i}{8+8i}=6$.

9.29 $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{6-3i}{1+i}=4$.

9.30 $\dfrac{6i}{z-2i}+\dfrac{3+3i}{1-i}=10$.

ИДЗ–2 Предел последовательности

1 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$)**:**

1.1 $a_n = \dfrac{n+1}{n+4}, a = 1$.

1.2 $a_n = \dfrac{n-3}{2n+1}, a = 1/2$.

1.3 $a_n = \dfrac{2n-2}{n+4}, a = 2$.

1.4 $a_n = \dfrac{2n+1}{n-4}, a = 2$.

1.5 $a_n = \dfrac{n-5}{n+3}, a = 1$.

1.6 $a_n = \dfrac{n}{n-3}, a = 1$.

1.7 $a_n = \dfrac{2n+6}{2n+7}, a = 1$.

1.8 $a_n = \dfrac{2n-1}{n+4}, a = 2$.

1.9 $a_n = \dfrac{n-1}{2n+4}, a = 1/2$.

1.10 $a_n = \dfrac{n+1}{n+4}, a = 1$.

1.11 $a_n = \dfrac{3n+1}{n+6}, a = 3$.

1.12 $a_n = \dfrac{3n}{n-6}, a = 3$.

1.13 $a_n = \dfrac{n-1}{n+5}, a = 1$.

1.14 $a_n = \dfrac{4n+1}{2n+1}, a = 2$.

1.15 $a_n = \dfrac{n}{2n+4}, a = 1/2$.

1.16 $a_n = \dfrac{2n-3}{2n+5}, a = 1$.

1.17 $a_n = \dfrac{2n-3}{n+4}, a = 2$.

1.18 $a_n = \dfrac{2n+1}{n-6}, a = 2$.

1.19 $a_n = \dfrac{3n+2}{3n+5}, a = 1$.

1.20 $a_n = \dfrac{n+3}{2n+4}, a = 1/2$.

1.21 $a_n = \dfrac{4n}{n+5}, a = 4$.

1.22 $a_n = \dfrac{2n}{n-3}, a = 2$.

1.23 $a_n = \dfrac{3n-1}{n+7}, a = 3$.

1.24 $a_n = \dfrac{n+3}{n-1}, a = 1$.

1.25 $a_n = \dfrac{5n-3}{n+1}, a = 5$.

1.26 $a_n = \dfrac{3n-2}{n-6}, a = 3$.

1.27 $a_n = \dfrac{n+2}{n+4}, a = 1$.

1.28 $a_n = \dfrac{n-7}{n+3}, a = 1$.

1.29 $a_n = \dfrac{4n-1}{n+6}, a = 4$.

1.30 $a_n = \dfrac{2n+7}{n-4}, a = 2$.

2 Вычислить пределы:

2.1

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n + 3}{n^3 + n^2 - 5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 - 2n - 1})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+4}\right)^{n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

2. 2

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5}{6n^2 + n - 2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2 - 1} - 2n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+4}\right)^{n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2.3

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + n + 2}{n^3 + n - 1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 - 3n + 6} - 2n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{2n+4}\right)^{n+5}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.

2.4

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 4n^2 + n - 1}{2n^3 + n^2 - 3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - 4n - 5} - n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{3n-5}\right)^{n-3}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$.

2.5

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n + 4}{n^2 - n^2 + 3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{2n^2 - n + 1})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+6}{n-3}\right)^{2n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-1)! + (3n+1)!}{(3n)! \cdot (n-1)}$.

2.6

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 3n + 1}{n^2 + n - 4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 5} - n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n-2}{4n+1}\right)^{n+2}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1} + 7^{n+1}}{7^n - 5^n}$.

2.7

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{n^3+n-4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-2})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+7}\right)^{2n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+2+...+n}$.

2.8

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-n+3}{n^3+n^2-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2+4}-3n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+7}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+3)!}$.

2.9

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n+4}{n^2+n+1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-4n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n-7}\right)^{3n+5}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+1}+5^{n+2}}$.

2.10

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+4n-2}{n^2+2n-7}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-8n+5}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-5}{n+9}\right)^{2n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}}$.

2.11

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-2n+3}{2n^3+n^2+5n+1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2n+4})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{n-6}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!-(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2.12

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3-2n+7}{2n^3+n^2-3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4n+8}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-2}{3n-5}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

2.13

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+n\ \ -3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2-6}-\sqrt{2n^2-7n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+9}\right)^{5n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+...+(2n)}$.

2.14

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-2n+1}{n^2+4n-8}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-6}{n+8}\right)^{3n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{6^n}}$.

2.15

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+6}{n^3-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-6}-\sqrt{4n^2-5n})$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n+9}\right)^{n+7}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+...+\frac{1}{7^n}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}}$.

2.16

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-4n+3}{n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-5}\right)^{n-2}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)!-(2n+1)!}{(2n+3)!}$.

2.17

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n+7}{n^2+2n^2-3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-5n-6})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+9}\right)^{2n-3}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n-1)!+(5n)!}{(5n+2)!}$.

2.18

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+7n+3}{n^3+5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-7n+3}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+5}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+...+3n}{n^2+1}$.

2.19

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+5n-1}{2n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2-3n+6}-\sqrt{2n^2+9})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n-5}\right)^{2n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+(n+2)!}{n!(3n^2+5)}$.

2.20

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-3}{n^2+4n-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-7n+3}-n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n-3}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}+2^n}$.

2.21

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+3}{n^3+n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2}-\sqrt{4n^2-5n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2+4+...+2n}{n+3}-n\right)$.

2.22

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+n-5}{n^3-n^2+3}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n^2})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+7}\right)^{n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}$.

2.23

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+5n+2}{n^2-n+7}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2-2n}-\sqrt{4n^2-23})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+4}\right)^{n-7}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+9+...+3n}{2+4+...+2n}$.

2.24

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n+5}{n^2+4n-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2-3}-3n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-9}\right)^{n-2}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+...+(2n-1)}{2n^2+5}$.

2.25

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n-9}{2n^2+n-4}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2-5}-\sqrt{3n^2-5n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(6n^2+5n-7)(2n-1)!}$.

2.26

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-6n+1}{n^2+2n-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{16n^2-3n}-4n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n+3}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n-5^n}{5^{n-1}+6^n}$.

2.27

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n+4}{n^3+6n^2-1}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{7n^2-4}-\sqrt{7n^2+4n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n+4}\right)^{n}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{8^n}}$.

2.28

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-1}{n^3+2n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2-5n}-3n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-5}\right)^{n-4}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{5n^2-4n+7}$.

2.29

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+5n+3}{n^2+5n^2-2}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+4n})$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-4}\right)^{n+4}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+3)!+(4n+1)!}{7n^2+n-8}$.

2.30

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n+3}{n^2+6n^2-5}$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1}-2n)$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-2}\right)^{n-5}$,

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+16+\ldots+4n}{1+3+\ldots+(2n-1)}$.

ИДЗ-3 Предел и непрерывность функции

1 Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что:

1.1 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$.

1.2 $\lim\limits_{x\to 11} \dfrac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23$.

1.3 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$.

1.4 $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5} = 26$.

1.5 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{6x^2+x-1}{x+\frac{1}{2}} = -5$.

1.6 $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13$.

1.7 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{9x^2-1}{x+3} = -6$.

1.8 $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2+6x-8}{x+4} = -10$.

1.9 $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}} = -4$.

1.10 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8$.

1.11 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} = 2$.

1.12 $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{3x^2+17x-6}{x+6} = -19$.

1.13 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}} = -1$.

1.14 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-5x+2}{x-\frac{1}{2}} = -3$.

1.15 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}} = 5$.

1.16 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} = 8$.

1.17 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$.

1.18 $\lim\limits_{x\to -7} \dfrac{2x^2+15x+7}{x+7} = -13$.

1.19 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x^2-14x+6}{x-3} = 10$.

1.20 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x-2}{x-2} = 7$.

1.21 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{6x^2-x-1}{x-\frac{1}{2}} = 5$.

1.22 $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{5}} \dfrac{10x^2+9x-7}{x+\frac{7}{5}} = 19$.

1.23 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$.

1.24 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}}=5$.

1.25 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$.

1.26 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-\frac{1}{2}}=-3$.

1.27 $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-\frac{1}{2}}=5$.

1.28 $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23$.

1.29 $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$.

1.30 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$.

2. Вычислить пределы функций:

2.1

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} 3x$.

2.2

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2+7x+12}$,

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{2}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{7}{x-5}-\dfrac{x}{x^2-25}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} 3x$.

2.3

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$,

б) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{x^2-64}$,

2.4

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{14+x}-4}{x^2-4}$, в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 7x}$,

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{2}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x+5}\right)^{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-3}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

2.5

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$,

б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin 5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^{x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}6x$.

2.6

а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^3-64}{x^2+3x-28}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)^{2x}$,

д) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{7}{x^2-9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}5x$.

2.7

а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$,

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 8x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x+1}\right)^{x+2}$,

2.8

а) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-2x-35}{x^2-8x+7}$,

б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{x^2-25}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 7x}{x\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{3}{x}}$, д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{4}{x^2-9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\cdot \operatorname{tg}\pi x$.

2.9

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$,

б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{3+x}-3}{x^2-36}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}5x}{\cos x-1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-8}-\sqrt{x^2+9x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot \operatorname{ctg}4x$.

2.11

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{8-x}-1}{x^2-49}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}8x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{4x+1}\right)^{5x}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{2}$.

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{3x^2-7}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

2.10

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^2-11x+30}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x-1}\right)^{5x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{3}{x-4}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.12

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+8x-9}{x^2-8x+7}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{8}{x-1}\right)^{2x}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot \operatorname{ctg}4x$.

2.13

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-13x-12}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}2x}{\sin^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{5}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}2x$.

2.14

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^3+1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}(x+\dfrac{\pi}{4})\cdot\operatorname{tg}2x$.

2.15

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{4x+1}\right)^{8x}$,

д) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.16

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^3-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}6x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{6}{3x+4}\right)^{2x-4}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}6x$.

2.17

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^3-125}$,

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$,

2.18

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4x+3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{12-x}-3}{x^2-9}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)^{4x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+4}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\pi}{4}-x)\cdot\operatorname{tg} 2x$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{4x+3}\right)^{x+6}$,

д) $\lim\limits_{x\to-4}\left(\dfrac{5}{x+4}-\dfrac{x}{x^2-16}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$.

2.19

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x+1}\right)^{4x+1}$,

д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{x^3-8}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

2.20

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-15}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{8x-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\sin 9x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-3}\right)^{4x}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x+9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

2.21

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-64}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{1-\cos x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$,

2.22

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-2}{x^2-3x+2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 8x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{10}\right)^{\frac{12}{x}}$, д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+6}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

д) $\lim\limits_{x\to-6}\left(\dfrac{5}{x+6}-\dfrac{x}{x^2-36}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{8}$.

2.23

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-7x+2}{x^2-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x\sin 6x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x-6}\right)^{x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{6}$.

2.24

а) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$,

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{x^3-27}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-x\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.25

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+8x+15}$,

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{2x+1}\right)^{2x-1}$,

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to3}(3-x)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.26

а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2x\sin 2x}$,

г) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{8}\right)^{\frac{4}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{5}{x^3-8}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{7}$.

2.27

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+9}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{\sin^2 5x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x-10}\right)^{x-2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-9}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\mathrm{ctg}\,7x$.

2.28

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{x^3-27}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 4x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-1}\right)^{x+4}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-5x+2}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(x-\dfrac{1}{2})\cdot\mathrm{tg}\,\pi x$.

2.29

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-24}{x^2-10x+24}$,

б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{1-\cos 3x}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{4}\right)^{\frac{3}{x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{2x^2-7}-\sqrt{x^2+2}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{8}$.

2.30

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-64}$,

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{x^2-25}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\,\mathrm{tg}\,2x}{\sin 6x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{2x-10}\right)^{3x+2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\mathrm{ctg}\,9x$.

3 Вычислить пределы функций, используя принцип эквивалентности бесконечно малых:

3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+6x)}$.

3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^6}}{\ln(1+5x)}$.

3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\ln(1+2x)}$.

3.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{(1+4x)^4-1}$.

3.5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

3.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{(1+5x)^6-1}$.

3.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 4x}$.

3.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\ln(1+6x)}$.

3.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+3x)}$.

3.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 4x}{\ln(1+8x)}$.

3.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sqrt{1+2x}-1}$.

3.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin 5x-\operatorname{arctg} x}$.

3.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+5x^4)^2-1}{e^{2x}-1}$.

3.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\arcsin 3x}$.

3.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{\ln(1+6x)}$.

3.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 5x}{\ln(1+x)}$.

3.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 4x-\sin 4x}$.

3.19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{\ln(1+4x)}$.

3.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{(1+3x^4)^5-1}$.

3.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{4x}-1}$.

3.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x-\arcsin 2x}{\ln(1+4x)}$.

3.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$.

3.24 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x)}{\sqrt{1+3x}-1}$.

3.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\operatorname{arctg} 3x}$.

3.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 7x}{\ln(1+2x)}$.

3.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a\arcsin x)^2}{tg^2 4x}$.

3.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+7x)}$.

3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 3x+\sin x}$.

3.30 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

4 Исследовать функцию на непрерывность (построить график):

4.1 $f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.2 $f(x)=\begin{cases}3x-3 \text{ при } x<2,\\ x^2+1 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$

4.3 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 \text{ при } x<-2,\\ x-3 \text{ при } x\ge -2.\end{cases}$

4.4 $f(x)=\begin{cases}2|x| \text{ при } x<1,\\ -x^2+3 \text{ при } x\ge 1.\end{cases}$

4.5 $f(x)=\begin{cases}-2x+1 \text{ при } x\le 0,\\ x^2-1 \text{ при } x>0.\end{cases}$

4.6 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ при } x\le 0,\\ -x-3 \text{ при } x>0.\end{cases}$

4.7 $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ при } x<3,\\ -x^2 \text{ при } x\ge 3.\end{cases}$

4.8 $f(x)=\begin{cases}-x+2 \text{ при } x\le -1,\\ -x^2+2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.9 $f(x)=\begin{cases}x-1 \text{ при } x\le 2,\\ |x|+1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

4.10 $f(x)=\begin{cases}x+1 \text{ при } x\le 3,\\ -x^2+2 \text{ при } x>3.\end{cases}$

4.11 $f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2+1 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.12 $f(x)=\begin{cases}x^2-2 \text{ при } x\le 1,\\ x+3 \text{ при } x>1.\end{cases}$

4.13 $f(x)=\begin{cases}x+3 \text{ при } x<1,\\ 2x^2-1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.14 $f(x)=\begin{cases}-2x-1 \text{ при } x\le 3,\\ x^2+2 \text{ при } x>3.\end{cases}$

4.15 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 \text{ при } x<1,\\ x+3 \text{ при } x\ge 1.\end{cases}$

4.16 $f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x\le -1,\\ x^2 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

4.17 $f(x)=\begin{cases}-3|x| \text{ при } x\le 2,\\ x^2+1 \text{ при } x>2.\end{cases}$

4.18 $f(x)=\begin{cases}2x \text{ при } x\le 1,\\ -x^2 \text{ при } x>1.\end{cases}$

4.19 $f(x)=\begin{cases}2x-2 \text{ при } x<-1,\\ -2x^2 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.20 $f(x)=\begin{cases}-3x+1 \text{ при } x\le 0,\\ x^2+2 \text{ при } x>0.\end{cases}$

4.21 $f(x)=\begin{cases}2|x| \text{ при } x<-2,\\ x^2-1 \text{ при } x\ge -2.\end{cases}$

4.22 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 \text{ при } x<2,\\ x+4 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$

4.23 $f(x)=\begin{cases}2x-2 \text{ при } x\le 1,\\ -x^2+1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

4.24 $f(x)=\begin{cases}3|x| \text{ при } x\le -2,\\ x^2-1 \text{ при } x>-2.\end{cases}$

4.25 $f(x)=\begin{cases}3|x| \text{ при } x\le 2,\\ x^2+2 \text{ при } x>2.\end{cases}$

4.26 $f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ при } x<0,\\ x^2-4 \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$

4.27 $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 \text{ при } x\le 3,\\ x^2-1 \text{ при } x>3.\end{cases}$

4.28 $f(x)=\begin{cases}-2|x| \text{ при } x\le -1,\\ x^2+1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.29 $f(x)=\begin{cases}4x-2 \text{ при } x\le -1,\\ x^2-1 \text{ при } x\ge -1.\end{cases}$

4.30 $f(x)=\begin{cases}-3x-1 \text{ при } x\le 2,\\ x^2+2 \text{ при } x>2.\end{cases}$

5 Определить характер точки разрыва функции:

5.1 $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$.

5.2 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

5.3 $f(x)=\dfrac{9}{x-3}$.

5.4 $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}$.

5.5 $f(x)=\dfrac{x}{2x+2}$.

5.6 $f(x)=\dfrac{5}{x^2-9}$.

5.7 $f(x)=\dfrac{4}{x^2-1}$.

5.8 $f(x)=\dfrac{4}{x^2-1}$.

5.9 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

5.10 $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$.

5.11 $f(x)=-\dfrac{5}{2x+4}$.

5.12 $f(x)=3^{-\frac{1}{x-2}}$.

5.13 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$.

5.14 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$.

5.15 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$.

5.16 $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$.

5.17 $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$.

5.18 $f(x)=4^{\frac{1}{x}}$.

5.19 $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$.

5.20 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

5.21 $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$.

5.22 $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$.

5.23 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

5.24 $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-4}$.

5.25 $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

5.26 $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

5.27 $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$.

5.28 $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$.

5.29 $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-9}$.

5.30 $f(x) = 7^{-\frac{1}{x-5}}$.

6 Определить, имеет ли уравнение хотя бы один корень на данном отрезке:

6.1 $0.25x^4 + 2x - 1 = 0,\ [-3;3]$.

6.2 $3x^4 - 16x^3 + 2 = 0,\ [-2;2]$.

6.3 $x^3 - 3x^2 - 9x + 14 = 0,\ [-3;2]$.

6.4 $x^4 - 8x^3 = 0,\ [-3;4]$.

6.5 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0,\ [-2;1]$.

6.6 $x^3 - 3x + 1 = 0,\ [-3;3]$.

6.7 $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0,\ [-1;3]$.

6.8 $x^3 - 12x + 7 = 0,\ [0;4]$.

6.9 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0,\ [-10;2]$.

6.10 $x^3 - 5x - 12 = 0,\ [0;5]$.

6.11 $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0,\ [-5;3]$.

6.12 $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0,\ [-1;4]$.

6.13 $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0,\ [-6;5]$.

6.14 $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0,\ [-2;2]$.

6.15 $x^3+5x^2+15x+27=0,\ [-5;2]$.

6.16 $27x^3-15x^2+5x-1=0,\ [-3;2]$.

6.17 $x^4-7x^3+14x^2-7x=0,\ [-1;5]$.

6.18 $25x^4+66x^2-27=0,\ [-2;3]$.

6.19 $x^4+4x-1=0,\ [-3;3]$.

6.20 $2x^3-3x^2+7x-3=0,\ [-4;2]$.

6.21 $x^6+9x^3+8=0,\ [-4;0]$.

6.22 $x^3-4x^2+x+6=0,\ [-2;4]$.

6.23 $x^3+3x+4=0,\ [-3;2]$.

6.24 $10x^3-3x^2-2x+1=0,\ [-4;1]$.

6.25 $x^8-15x^4-16=0,\ [-3;3]$.

6.26 $38x^3+7x^2-8x-1=0,\ [-1;5]$.

6.27 $3x^3-2x^2+x-10=0,\ [0;4]$.

6.28 $4x^3+6x^2+4x+1=0,\ [-5;1]$.

6.29 $3x^3-13x^2+9x-2=0,\ [-1;5]$.

6.30 $x^3+5x^2-x-3=0,\ [-4;3]$.

Литература

1 Волковыский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / Л. И Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1970.

2 Демидович, В. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

3 Зверович, Э.И. Вещественный и комплексный анализ [Текст] : учебное пособие для вузов: в 6 ч. Ч. 1. Введение в анализ и дифференциальное исчисление / Э. И. Зверович. – Мн. : БГУ, 2003.

4 Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.

5 Кудрявцев, Л. Д. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин.– М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

6 Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / под ред. В. Ф. Бутузова. – М. : Высш. шк., 1984.

7 Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] : учебное пособие для вузов / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1977.

8 Сборник индивидуальных заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов: в 3 ч. Ч. 1 / под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Выш. шк., 1991.

9 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа: учебное пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин – М. : Наука Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1988.