Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л.Н. МАРЧЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Курс лекций
для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть вторая

Дифференциальное и интегральное исчисление функции действительной переменной

Гомель 2006

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я73
М 30

Рецензенты:

Л.П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»

А.Р. Миротин, профессор, доктор физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Марченко Л.Н.
М30 Математический анализ [текст] : [тексты лекций для студентов физического факультета. Ч.2.: Дифференциальное и инетегральное исчисление функции действительной переменной] /Л.Н. Марченко: Мин-во обр. РБ. – Гомель: «УО ГГУ им. Ф. Скорины», 2006. – 209с.

Курс лекций разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальности «Физическая электроника». Во второй части излагаются теоретические основы дифференциального и интегрального исчисления функции одной переменной.

Пособие адресовано студентам физического факультета.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Дифференциальное и интегральное исчисление функции действительной переменной» является второй частью цикла работ по курсу «Математический анализ», которые написаны на основе лекций, проводимых на физическом факультете Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. Их содержание включает материал, соответствующий учебной программе по данной дисциплине, и который изложен в учебниках и учебных пособиях по математическому анализу. Пособие основано на тех педагогических принципах, изложенных в первой части данного комплекса.

В начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Тема 1
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Лекция 1. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Определение производной.
2. Геометрический смысл производной.
3. Дифференцируемость функции и дифференциал.
4. Физический смысл производной и дифференциала.

1. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$ точки x_0. Если фиксированное значение аргумента x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0 + \Delta x \in U(\delta; x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. ***Производной*** функции $y = f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначается: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$.

Производная функции $y = f(x)$ в произвольной точке x *обозначается* так: $f'(x)$, y'.

При каждом конкретном числовом значении x производная $f'(x)$ (если она существует при данном x) функции $y = f(x)$ представляет собой определенное число. Значениям переменной x ставятся в соответствие определенные значения переменной $f'(x)$. Поэтому производная является функцией аргумента x.

Если для некоторого значения x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что для этого значения x существует ***бесконечная производная***.

Пример. Найти производные функций

1) $y=\sin x$, 2) $y=a^x$, $a>0$.

Решение. 1. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Поэтому

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

2. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\left(a^x\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Определение 2. Если функция $y=f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной ***производной слева*** (***справа***) функции $f(x)$ в точке x_0

Обозначается: $f'(x_0-0)$ или $f'_-(x_0)$

($f'(x_0+0)$ или $f'_+(x_0)$).

Левая и правая производные называются ***односторонними производными***.

Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют производные слева и справа, причем

$$f'(x_0)=f'(x_0-0)=f'(x_0+0).$$

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 левую и правую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Пример. Доказать, что функция $y=|x|$ в точке $x_0=0$ не имеет производной.

Решение. Очевидно, что эта функция определена и непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

При $x \geq 0$ имеем $y=|x|=x$, $\Delta y=\Delta x$.

Поэтому производная справа в точке $x_0=0$ есть:

$$f'_+(0)=f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Аналогично при $x<0$ получим $y=|x|=-x$, $\Delta y=-\Delta x$.

Следовательно, производная слева в точке $x_0=0$ есть:

$$f'_-(0)=f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Поскольку $f'_-(0)\neq f'_+(0)$, то функция $y=|x|$ в данной точке производной не имеет.

Операция нахождения производной функции f называется ***дифференцированием***. Для отыскания производной от данной функции $y=f(x)$, согласно определению, необходимо выполнить следующие действия:

– придав фиксированному аргументу $x\in D(f)$ приращение Δx, вычислить значение функции

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

– найти соответствующее приращение функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

– составить отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

– найти предел данного отношения при $\Delta x\to 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2. Геометрический смысл производной. Рассмотрим задачу о проведении касательной к произвольной плоской кривой. Пусть L – дуга плоской кривой, M_0 – точка этой кривой, M_0M – секущая (рис.2). Если точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая поворачивается вокруг точки M_0 и стремится к некоторому предельному положению M_0T.

Определение 3. ***Касательной*** к кривой L в точке M_0 называется прямая M_0T, которая представляет собой предельное положение секущей M_0M при стремлении по кривой точки M к точке M_0 (см. рис.1).

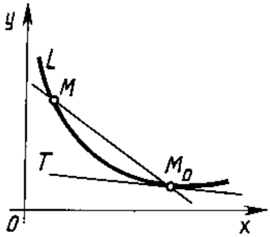


Рис.1.Касательная и секущая к графику функции

Если предельного положения секущей не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является ***точкой излома***, или ***заострения***, кривой (см. рис.2,*а,б,в*).

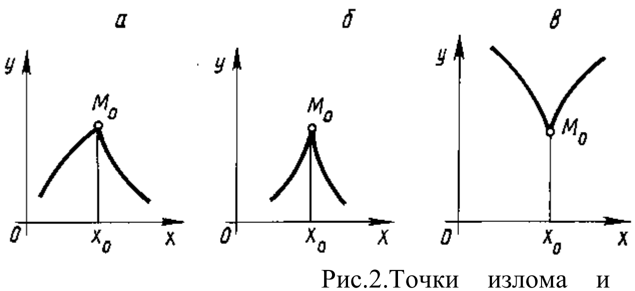


Рис.2.Точки излома и заострения функций

Пусть кривая L является графиком функции $f(x)$ и точка $M(x_0; f(x_0)) \in L$ (рис.3).

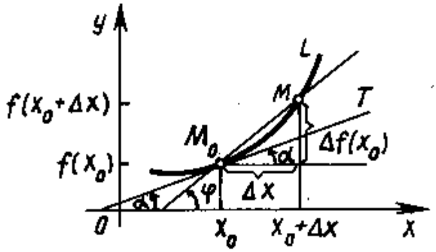


Рис.3. Геометрический смысл производной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отсюда следует **геометрический** смысл производной: *производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.*

Для составления уравнений касательной и нормали к плоской кривой используется геометрическая интерпретация производной. Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Угловой коэффициент касательной к ней в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Поскольку $k = f'(x_0)$, то $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ есть *уравнение касательной*.

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

О п р е д е л е н и е 4. ***Углом между кривыми*** называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

3. Дифференцируемость функции и дифференциал. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0.

О п р е д е л е н и е 5. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

где A – некоторое действительное число; $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$.*

► *Необходимость.* Поскольку функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение можно представить в виде $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\right) = A$.

Достаточность. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$.

Отсюда $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Положим $f'(x_0)=A$. Тогда $\Delta f = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$.

По определению 5 функция $y=f(x)$ является дифференцируемой. ◄

Теорема 2. *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

► Действительно, если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в силу условия дифференцируемости ее приращение в этой точке представимо в виде $\Delta f = A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x\to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = A\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=0,$$

что означает непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0. ◄

Следствие. *Если функция $y=f(x)$ в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке.*

Замечание. Обратное верно не всегда: из непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Пример. Функция $y=|x|$ является непрерывной в точке $x_0=0$, но не имеет в этой точке производной. Следовательно, она не дифференцируема в этой точке.

Функции, графики которых имеют изломы в точке x_0 (рис.2.а,б,в), не имеют в этой точке конечной производной.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется ***дифференцируемой*** на отрезке $[a;b]$, если она дифференцируема в любой точке $x\in[a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.Тогда ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Отсюда, если $f'(x_0)\neq 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x}\right)=1.$$

Следовательно, при $\Delta x\to 0$ приращение функции $\Delta f(x_0)$ и выражение $f'(x_0)\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Поэтому при $\Delta x\to 0$ можно приближенно считать, что $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Определение 7. ***Дифференциалом*** функции $f(x)$ называется величина $f'(x_0)\Delta x$, являющаяся ***главным*** (линейным) членом приращения функции в точке x_0.

Обозначается: $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В частности, если $y = x$, то $y' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$, т.е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Видно, что дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной в $M(x_0; f(x_0))$ к линии $y = f(x)$ (рис.4).

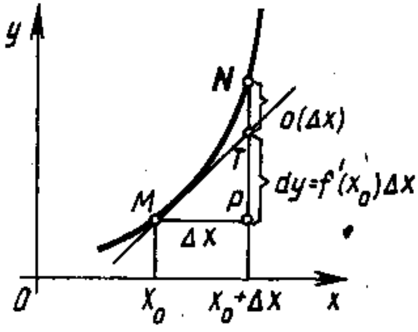


Рис.4. Геометрический смысл дифференциала функции

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^2$.

Решение. Дифференциал функции $y = x^2$ в точке x_0 для приращения Δx есть $dy = 2x_0\Delta x$. Он является линейным слагаемым приращения функции относительно Δx:

$$\Delta f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Заменяя приращение функции в точке x_0 ее дифференциалом, получается приближенная формула для вычисления приближенных значений функции

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx.$$

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{65}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0=64$, для которой приращение аргумента $\Delta x=1$. Производная функции равна $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Тогда

$$\sqrt[3]{64+1}\approx f(64)+f'(64)\cdot 1=\sqrt[3]{64}+\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}\cdot 1=$$

$$=4+\frac{1}{3\cdot 4^2}=4{,}02083$$

4. Физический смысл производной и дифференциала. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную и непрерывную в некоторой окрестности точки x_0. Если аргумент x_0 функции получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0+\Delta x$ принадлежит той же окрестности точки x_0, то соответствующее приращение функции $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x)$, средняя скорость изменения функции

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

а мгновенная скорость ее изменения

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Механический смысл производной: производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$. В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг математических моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1. Пусть материальная точка M движется неравномерно и

$y = s(t)$ – функция, устанавливающая зависимость пути от времени t. Тогда мгновенная скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t:

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если движение на этом участке равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

2. Пусть $y = v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

3. Пусть $y = Q(T)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Тогда теплоемкость тела есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{Q(T_0 + \Delta T) - Q(T_0)}{\Delta T}.$$

4. Пусть необходимо определить линейную плотность неоднородного тонкого стержня длиной l, где m – масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Ясно, что масса стержня является функцией x, т.е. $f(x) = m(x)$. Тогда линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0) = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

5. Пусть $y = \Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Тогда мгновенное значение электродвижущей силы индукции равно скорости изменения магнитного потока, т.е. производной от магнитного потока Φ по времени t:

$$\varepsilon = \Phi'(t_0) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t}$$

6. Пусть $y = q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Тогда сила тока в контуре в момент времени t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекало через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. При этом $\Delta q = dq + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение производной.
2. Что называется правой и левой производной?
3. В чем состоит геометрический смысл производной? Выведите уравнение касательной и нормали.
4. Какая функция называется дифференцируемой?
5. Что называется дифференциалом функции? В чем состоит его геометрический смысл?
6. В чем состоит физический смысл производной и дифференциала.

Лекция 2. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

1. Свойства производных, связанные с арифметическими операциями.
2. Производная обратной и сложной функции.
3. Инвариантность формы первого дифференциала.

4. Производные и дифференциалы основных элементарных функций.

1. Свойства производных, связанные с арифметическими операциями.

Теорема 1. *Производная постоянной функции равна нулю:*

$$(c)' = 0.$$

► Постоянную можно рассматривать как функцию, принимающую одинаковые значения при всех значениях аргумента x:

$$y = c \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда $y + \Delta y = c$, откуда $\Delta y = c - c = 0$.

Следовательно, по определению имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Итак, $y' = 0$ и $dy = 0$. ◄

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования.

Теорема 2 (правило дифференцирования алгебраической суммы функций). *Производная алгебраической суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна алгебраической сумме (разности) производных слагаемых:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

► Рассмотрим функцию $y = u(x) + v(x)$. Дадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx. Тогда функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ получат приращения Δu и Δv, а функция y – приращение $\Delta y = \Delta u + \Delta v$. По определению производной имеем:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Так как функции Δu и Δv дифференцируемы, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u', \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Следовательно,

$$y = u + v \;\Rightarrow y' = u' + v'.$$

Аналогично доказывается $(u - v)' = u' - v'$ ◄

Следствия. 1. $dy = du + dv$.

2. *Если функции* $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$ *дифференцируемы, то их сумма также дифференцируема:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} u_k'(x),$$

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{n} du_k(x).$$

Теорема 3 (правило дифференцирования произведения функций). *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый:*

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

► Рассмотрим функцию $y = u(x)v(x)$. Когда аргументу x придают приращение Δx, то функции u, v и y получают соответственно приращения Δu, Δv и Δy, причем

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

В последнем равенстве приращения Δu, Δv и Δy зависят от Δx, а u и v не зависят от Δx (u, v – значения функции, соответствующие начальному значению аргумента x).

Используя теоремы о пределах функций, находим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v.$$

Согласно определению производной получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',$$

в силу непрерывности функции $v=v(x)$ имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Итак, окончательно:

$$y'=u'v+uv'. ◄$$

Следствия. 1. $dy=vdu+udv$.

2. *Если* $u_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, *– дифференцируемые в некоторой окрестности точки* x *функции и* $y=\prod_{i=1}^{n}u_i(x)$, *то*

$$y'=\sum_{i=1}^{n}u_i'(x)\prod_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}u_k(x),$$

$$dy=\sum_{i=1}^{n}du_i(x)\prod_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n}u_k(x).$$

3. *Если* $u=u(x)$ *дифференцируемая в точке* x *функция, то* $\forall c\in\mathbf{R}$

$$(cu)'=c\cdot u'.$$

4. *Пусть функции* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ *имеют производные в точке* x. *Тогда линейная комбинация этих функций равна такой же линейной комбинации соответствующих производных:*

$$y'=c_1u_1'(x)+c_2u_2'(x)+\ldots+c_nu_n'(x).$$

Теорема 4 (правило дифференцирования частного функций). *Производная частного двух дифференцируемых функций равна дроби, у которой знаменатель есть квадрат знаменателя данной дроби, а числитель представляет собой разность между произведением знаменателя данной дроби на производную ее числителя и произведением числителя на производную знаменателя:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

► Рассмотрим функцию $y=\dfrac{u}{v}$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, $v(x)\neq 0$. Придавая фиксированному аргументу x приращение Δx, находим приращение функции y:

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ с учетом того, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$ (из дифференцируемости функции следует, что она непрерывна), получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}.$$

Следовательно,

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}. \blacktriangleleft$$

Следствие. $dy=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

2. Производная обратной и сложной функции.

Теорема 5. *Пусть функция* $y=f(x)$ *монотонна на отрезке* $[a;b]$ *и имеет во всех точках интервала* $(a;b)$ *ненулевую производную* $y'=f'(x)$. *Тогда обратная функция* $x=\varphi(y)$ *дифференцируема во всех точках интервала* $(f(a);f(b))$ *и для любого* $y\in(f(a);f(b))$ *ее производная равна* $\dfrac{1}{f'(x)}$.

► Пусть функция $y=f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и имеет производную $y'=f'(x)\neq 0$. И пусть $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Тогда существует обратная функция $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$, которая является непрерывной и монотонной на $(\alpha;\beta)$.

Дадим фиксированному значению аргумента y обратной функции $x=\varphi(y)$ приращение Δy. Этому приращению соответствует приращение обратной функции, причем в силу ее монотонности $\Delta x \neq 0$. Найдем производную обратной функции. По определению

$$x'_y = \varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}. \blacktriangleleft$$

Пусть $y = f(u(x))$ сложная функция.

Теорема 6. *Если функция* $u = u(x)$ *имеет производную в точке* x*, а функция* $y = f(u)$ *имеет производную в точке* $u = u(x)$*, то сложная функция* $y = f(u(x))$ *имеет в точке* x *производную и справедлива формула*

$$y' = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

► Придадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx. Этому приращению соответствует приращение Δu функции $u(x)$. Приращению Δu, в свою очередь, соответствует приращение Δy функции $y = f(u)$ в точке x. Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u) - f(u_0)}{x - x_0} = \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{u - u_0}{x - x_0}, \text{ т.е. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ приращения Δu, Δf в силу дифференцируемости соответствующих функций стремятся к нулю. По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = f'_u(u).$$

Тогда $y' = f'_u(u) \cdot u'(x)$ ◄.

Функция u называется ***промежуточным аргументом***, а x – ***основным аргументом***.

Замечание. Полученное правило распространяется на сложную функцию, зависящую от нескольких аргументов. Предположим, что функции $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(t)$, $t = t(x)$ дифференцируемы. Рассмотрим сложную функцию F переменной x через посредство промежуточных функций f, u, v, t:

$$F(x) = f(u(v(t(x)))).$$

Придадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда t получит приращение Δt, v – приращение Δv, u – приращение Δu.

Запишем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

Так как u, v, t дифференцируемы, поэтому и непрерывны, то в силу непрерывности при $\Delta x\to 0$ приращения $\Delta u\to 0$, $\Delta v\to 0$ и $\Delta t\to 0$. Переходя к пределам, имеем

$$F'(x)=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_t\cdot t'_x.$$

3. Инвариантность формы дифференциала. Дифференциал в точке x есть произведение производной от функции f в точке x и дифференциала независимой переменной:

$$dy=f'dx, \tag{1}$$

где $dx=\Delta x$.

Пусть дана сложная функция $y=f(u)$, $u=u(x)$. Тогда $y'=f'_u(u)u'(x)$ и, следовательно, $dy=f'_u(u)u'(x)dx$. Так как $u'(x)dx=du$, то в случае сложной функции имеем

$$dy=f'(u)du. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) для дифференциала совпадают по форме записи, однако они имеют различный смысл: в первой из них $dx=\Delta x$, а во второй $du=u'(x)dx$.

Свойство инвариантности формы дифференциала: дифференциал функции всегда равен произведению производной и дифференциала аргумента и не зависит от того, является ли величина, по которой взята производная, независимой переменной или же только промежуточным аргументом.

Из свойства инвариантности следует, что $f'(x_0)=\frac{dy}{dx}$, т.е. производная функции в точке численно равна отношению дифференциалов функции dy и переменной dx независимо от того, является ли функция $y=f(x)$ функцией независимой переменной x либо сложной функцией.

4. Производные и дифференциалы основных элементарных функций.

Производная и дифференциал логарифмиче-

ской функции. Пусть $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$. Придадим фиксированному значению $x\in D(y)$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Следовательно, по определению

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Для сложной функции $y=\log_a u(x)$ имеем

$$y'=\frac{1}{u(x)}\log_a \mathrm{e}\cdot u'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}.$$

Тогда дифференциал данной функции имеет вид

$$du=\frac{du(x)}{u(x)\ln a}.$$

В частном случае, при $a=e$ функция $y=\ln u(x)$ имеет производную $y'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ и дифференциал $dy=\dfrac{du(x)}{u(x)}$.

Производная и дифференциал степенной функции. Пусть $y=(u(x))^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Рассмотрим вначале случай, когда $u(x)>0$. Если $u(x)>0$, то $\ln y=\alpha\ln u(x)$. Продифференцируем полученное равенство почленно по правилу дифференцирования сложной функции, считая y функцией от x:

$$(\ln y)'=(\alpha\ln u(x))'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'=y\frac{\alpha u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'=\alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x).$$

Пусть теперь $u(x)<0$. Представим функцию $y=(u(x))^{\alpha}$ в виде $(-1)^{\alpha}(v(x))^{\alpha}$, где $v(x)>0$. Тогда

$$y'=(-1)^{\alpha}\alpha(v(x))^{\alpha-1}v'(x)=\alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x).$$

Тогда дифференциал равен $dy=\alpha u(x)^{\alpha-1}du(x)$.

Производная и дифференциал показатель-

ной функции. Пусть $y=a^{u(x)}$, где $0<a\neq 1$; $u(x)$ – непрерывная функция. Тогда $\ln y=u(x)\ln a$. Дифференцируем левую и правую части полученного равенства по правилу дифференцирования сложной функции, считая y функцией от x:

$$\frac{y'}{y}=\ln a\cdot u'(x).$$

Отсюда $y'=u\ln a\cdot u'(x)$ или $y'=a^{u(x)}\ln a\cdot u'(x)$.

Тогда дифференциал равен $dy=a^{u(x)}\ln a\cdot du(x)$.

В частном случае, если $y=e^{u(x)}$ то $y'=e^{u(x)}u'(x)$ и $dy=e^{u(x)}du(x)$.

Производные и дифференциалы тригонометрических функций. Пусть $y=\sin x$. Дадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Согласно определению,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Тогда дифференциал равен $dy=\cos x dx$.

Для сложной функции $y=\sin u(x)$ имеем $y'=u'(x)\cos u(x)$ и дифференциал $du=\cos u(x)du(x)$.

Аналогично доказывается, что функция $y=\cos u(x)$ имеет производную $y'=-u'(x)\sin u(x)$ и дифференциал $du=-\sin u(x)du(x)$.

Пусть $y=\operatorname{tg} x$. Так как $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, то для нахождения производной функции $y=\operatorname{tg} x$ воспользуемся правилом дифференцирования частного. Если $\cos x\neq 0$, получим

$$y'=(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тогда дифференциал равен $dy=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

Для сложной функции $y=\mathrm{tg}\,u(x)$ имеем $y'=\dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ и дифференциал $dy=\dfrac{du(x)}{\cos^2 u(x)}$.

Аналогично доказывается, что функция $y=\mathrm{ctg}\,u(x)$ имеет производную $y'=\dfrac{-u'(x)}{\sin^2 u(x)}$ и дифференциал $dy=-\dfrac{du(x)}{\sin^2 u(x)}$.

Производные и дифференциалы обратных тригонометрических функций. Пусть $y=\arcsin x$. Найдем производную этой функции. Рассмотрим обратную функцию $x=\sin y$. В интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ она монотонна, ее производная $x'_y=\cos y$ не обращается в нуль. Следовательно, используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(перед квадратным корнем выбран знак «+», так как на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\cos y>0$).

Тогда дифференциал равен $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Для сложной функции $y=\arcsin u(x)$ имеем $y'_x=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$ и дифференциал $dy=\dfrac{du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

Аналогично доказывается, что производная функции

$y = \arccos u(x)$ равна $y'_x = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$,

дифференциал есть $dy = -\dfrac{du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$.

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Множество возможных значений этой функции $E(y) = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Для функции $y = \operatorname{arctg} x$ существует обратная функция $x = \operatorname{tg} y$, причем ее производная $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ не обращается в нуль. Используя соотношения между производными взаимно обратных функций, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда дифференциал равен $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

Для сложной функции $y = \operatorname{arctg} u(x)$ имеем $y' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ и дифференциал $dy = \dfrac{du(x)}{1+u^2(x)}$.

Аналогично доказывается, что функция $y = \operatorname{arcctg} u(x)$ имеет производную

$$y' = -\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

и дифференциал $dy = -\dfrac{du(x)}{1+u^2(x)}$.

Производные и дифференциалы гиперболических функций. Для функции $y = \operatorname{sh} x$ имеем

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x\right)' - \frac{1}{2}\left(e^{-x}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Тогда дифференциал равен $dy = \operatorname{ch} x dx$.

Аналогично, находим производные и дифференциалы остальных гиперболических функций:

$$y=\operatorname{ch}x \Rightarrow y'=\operatorname{sh}x \Rightarrow dy=\operatorname{sh}x\,dx,$$

$$y=\operatorname{th}x \Rightarrow y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \Rightarrow dy=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx,$$

$$y=\operatorname{cth}x \Rightarrow y'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \Rightarrow dy=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx.$$

В таблице 1 приведены формулы дифференцирования основных элементарных функций.

Таблица1. Функции и дифференциалы элементарных функций

Функция	**Производная**	**Функция**	**Производная**
$y=c$	$y'=0$	$y=\operatorname{ctg}u$	$y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$y=u^\alpha$, $\alpha\in R$	$y'=\alpha u^{\alpha-1}u'$	$y=\operatorname{sh}u$	$y'=\operatorname{ch}u\cdot u'$
$y=a^u$	$y'=\alpha^u\ln a\cdot u'$	$y=\operatorname{ch}u$	$y'=\operatorname{sh}u\cdot u'$
$y=e^u$	$y'=e^u u'$	$y=\operatorname{th}u$	$y'=\frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
$y=\log_a u$	$y'=\frac{u'}{u\ln a}$	$y=\operatorname{cth}u$	$y'=-\frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$
$y=\ln u$	$y'=\frac{u'}{u}$	$y=\arcsin u$	$y'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\sin u$	$y'=\cos u\cdot u'$	$y=\arccos u$	$y'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y=\cos u$	$y'=-\sin u\cdot u'$	$y=\operatorname{arctg}u$	$y'=\frac{u'}{1+u^2}$
$y=\operatorname{tg}u$	$y'=\frac{u'}{\cos^2 u}$	$y=\operatorname{arcctg}u$	$y'=-\frac{u'}{1+u^2}$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте правила нахождения производной постоянной функции, производной суммы и разности функций, производной произведения и частного функций.

2. Сформулируйте правило нахождения обратной функции.

3. Как находится производная сложной функции?

4. В чем заключается инвариантность первого дифференциала?

Лекция 3. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями.
2. Производная неявной функции.
3. Логарифмическая производная.
4. Производные и дифференциалы высших порядков.

1. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $t \in T \subset \mathbf{R}$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для любого $t \in T$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Кроме этого, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y = y(x)$ заданную параметрическими уравнениями (1), можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Продифференцировав функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x$. Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Учитывая, что $\varphi'(t) = x'_t$, $\psi'(t) = y'_t$, окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right.$$

Пример. Найти $y'(x)$, если

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где $0 < t < \pi$.

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{R}, \end{cases} \Rightarrow$$

Отсюда $y'_x = -\dfrac{\frac{x}{R}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

2. Производная неявной функции. Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема. Если в уравнении $F(x, y) = 0$ под y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x: $F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Дифференцируем уравнение по x и считаем, что y есть функция x. Получается новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную искомой функции $y = f(x)$ заданной в неявном виде.

Пример. Найти производную функции $x^3 + x^2 y^2 - xy - y^3 = 0$ заданной неявно.

Решение. Продифференцируем данное уравнение по переменной x, считая, что y есть функция от x:

$$3x^2 + 2xy^2 + 2x^2 y\, y' - y - x\, y' - 3y^2\, y' = 0.$$

Отсюда $y' = \dfrac{y - 3x^2 - 2xy^2}{2x^2 y - x - 3y^2}$.

3. Логарифмическая производная.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Тогда определен логарифм $\ln y = \ln f(x)$.

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(\ln y)' = (\ln f(x))'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))' \text{ и } y' = y \cdot (\ln f(x))'.$$

Производная $(\ln f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется ***логарифмической производной***.

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях.

1. При нахождении производной большого числа сомножителей. Действительно, пусть $y = u_1 u_2 ... u_n$, где каждая из функций u_i, $i = \overline{1, n}$, дифференцируема и $u_i > 0 \quad \forall x \in D(f)$. Логарифмируя функцию y, имеем $\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + ... + \ln u_n$. Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + ... + \frac{u_n'}{u_n}.$$

Умножая левую и правую части последнего равенства на y, имеем

$$y' = u_1 u_2 ... u_n \left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + ... + \frac{u_n'}{u_n} \right).$$

2. При нахождении производной степенно-показательной функции. Рассмотрим функцию $y = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$, у которой основание степени $u(x)$ и ее показатель $v(x)$ являются функциями переменной x. Предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции для рассматриваемых значений x. Логарифмируя степенно-показательную функцию, имеем

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Дифференцируем последнее равенство с учетом того, что правая и левая его части являются сложными функциями аргумента x. Получаем

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Откуда

$$y' = u(x)^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).$$

Таким образом, производная степенно-показательной функции равна сумме производных этой функции, если ее рассматривать сначала как показательную, а затем как степенную.

Пример. Найти производную функции $y = x^x$, $x > 0$.

Решение. Логарифмируя степенно-показательную функцию $y = x^x$, получим

$$\ln y = x \cdot \ln x .$$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда $y' = x^x(\ln x + 1)$.

4. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой. Производная $f'(x)$ является также функцией от x и может быть дифференцируема.

Производная от производной функции $y = f(x)$ называется ***производной второго порядка*** или ***второй производной функции***.

Обозначается: y'', $f''(x)$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки, тогда первая производная определяет скорость движения $v = s'(t)$. Вторая же производная есть скорость изменения скорости движения, т.е. ускорение $a = \dfrac{dv}{dt} = s''(t)$.

Аналогично вводятся производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется ***производной третьего порядка***.

Обозначается: y''', $f'''(x)$.

Аналогично

$$y^{IV} = (y''')' = f^{IV}(x).$$

Производной n***-го порядка*** от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Пример. Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, получаем:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

.... ,

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Производные высших порядков от функции, заданной неявно. Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Найденная производная y'_x содержит, в общем случае, как аргумент x, так и функцию y.

По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной, надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Пример. Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной уравнением: $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Найдем первую производную $2x + 2y\,y' = 0$. Отсюда $y' = -\dfrac{x}{y}$. Дифференцируя данное уравнение вторично, получим

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - y'x}{y^2}.$$

Учитывая, что $y' = -\frac{x}{y}$, имеем

$$y'' = -\frac{y - \left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}.$$

Производные высших порядков от функции, заданной параметрическими уравнениями. Пусть y – функция от x, заданная уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\}$$

где $t \in T$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрическими уравнениями, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y''_x &= \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Аналогично находится третья производная:

$$\left.\begin{aligned} y'''_x &= \frac{\left(y''_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

и производные высших порядков.

Пример. Найти вторую производную функции

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где $0 < t < \pi$.

Решение. Известно, что

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(R\cos t)'}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{r}. \end{cases}$$

Тогда

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^3\left(\arccos\dfrac{x}{R}\right)} = -\frac{1}{\left(1-\left(\dfrac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R^3}{\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Д и ф ф е р е н ц и а л ы в ы с ш и х п о р я д к о в. Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от точки x. Поэтому dx в формуле первого дифференциала будет постоянным. Тогда выражение $f'(x)dx$ зависит только от x и его можно дифференцировать по x.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ в данной точке x называется ***дифференциалом второго порядка*** или ***вторым дифференциалом***.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2 f(x)$, т.е. $d^2y = d(dy)$.

Аналогично дифференциал третьего порядка от функции $y = f(x)$ имеет вид $d^3y = d\left(d^2y\right)$.

Дифференциал n***-го порядка*** (или n***-й дифференциал***) функции $y=f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^{(n)}y=d\left(d^{(n-1)}y\right)$.

Найдем выражение для второго дифференциала функции $y=f(x)$, полагая dx в формуле $dy=f'(x)dx$ первого дифференциала постоянным.

Имеем

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))\cdot dx+f'(x)\cdot d(dx)=$$
$$=(f''(x)dx)dx=f''(x)(dx)^2,$$

т.е.

$$d^2y=f''(x)(dx)^2.$$

Аналогично для дифференциала 3-го порядка:

$$d^3y=d\left(d^2y\right)=d\left(f''(x)(dx)^2\right)=d(f''(x))(dx)^2+f''(x)d\left((dx)^2\right)=$$
$$=(f'''(x)dx)(dx)^2=f'''(x)(dx)^3,$$

для дифференциала n-го порядка

$$d^{(n)}y=f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Скобки при степенях dx можно опустить:

$$d^{(n)}y=f^{(n)}(x)dx^n.$$

Отсюда следует, что производная n-го порядка функции $y=f(x)$ есть отношение ее дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

В частности, при $n=1,2,3$ получим соответственно:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\quad f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями?
2. Как найти производную неявной функции.
3. Что такое логарифмическая производная? При нахождении производных каких функций ее желательно использовать?
4. Как определяются производные высших порядков?
5. Как найти дифференциалы высших порядков?

Лекция 4.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

1. Теорема Ферма.
2. Теорема Ролля.
3. Теорема Лагранжа.
4. Теорема Коши.

Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс $C_{[a;b]}$ – непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Класс $C^1_{[a;b]}$ дифференцируемых функций является подмножеством множества $C_{[a;b]}$. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, так как большинство задач техники и естествознания приводят к исследованию функций, имеющих производную. Также дифференцируемые функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играют *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y=f(x)$ обладает тем или иным свойством.

1. Теорема Ферма.

Теорема 1 (Ферма). *Пусть функция* $y=f(x)$ *определена на* $(a;b)$ *и в некоторой точке* x_0 *этого промежутка имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке* x_0 *существует производная, то она равна* 0**.**

► Пусть функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет наибольшее значение, т.е.

$$f(x)\le f(x_0)\ \ \forall x\in(a;b).$$

Отсюда

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x_0)\le 0$$

для любой точки $x=x_0+\Delta x\in(a;b)$.

При $\Delta x<0$ для точек $x<x_0$ имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$ и

$$f'_{-}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0.$$

При $\Delta x>0$ для точек $x>x_0$ имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ и

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0.$$

По условию производная $f'(x_0)$ в точке x_0 существует, значит, $f'(x_0)=f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)$. Это возможно лишь в том случае, если $f'_{-}(x_0)=f'_{+}(x_0)=0$. Следовательно, $f'(x_0)=0$. ◄

Геометрический смысл теоремы Ферма. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, где она принимает наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная графика параллельна оси Ox (рис.1).

Замечание. Теорема не верна, если $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a;b]$.

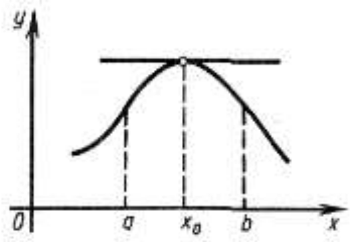


Рис.1. Геометрический смысл теоремы Ферма

2. Теорема Роля

Теорема 2 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям на отрезке $[a;b]$:*

1) $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$;

2) $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a;b)$, такая, что $f'(\xi)=0$.

► Известно, что если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке она принимает свое наибольшее M и наименьшее m значения. Возможны два случая.

1. $M = m \Leftrightarrow f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \ \ \forall x \in [a;b]$.

2. $M > m$. Тогда из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы одно из двух значений M или m функция принимает в некоторой внутренней точке ξ отрезка $[a;b]$. Пусть для определенности $f(\xi) = m$ (рис.2). Это означает, что $f(x) \geq f(\xi) \ \ \forall x \in [a;b]$.

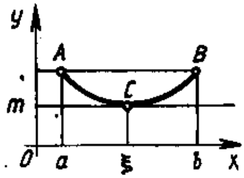


Рис.2. Геометрический смысл теоремы Ролля

Покажем, что $f'(\xi) = 0$. Согласно условию 2 теоремы Ролля, для функции $f(x)$ существует конечная производная $f'(\xi)$ $\forall \xi \in (a;b)$

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

Это условие равносильно существованию разных односторонних пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

Найдем односторонние пределы. Так как $M > m$, то

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \geq 0 \ \ \forall \xi \in (a;b).$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} &= f'(\xi - 0) \leq 0, \\ \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} &= f'(\xi + 0) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(\xi) = 0. \blacktriangleleft$$

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике этой функции найдется хотя бы одна такая точка C с абсциссой $x = \xi$, в которой касательная параллельна оси Ox (см. рис.2).

Замечание. Условия теоремы Ролля являются достаточными, но не необходимыми.

Пример. Функция $f(x)=x^3$ определена и непрерывна на отрезке $[-1;1]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, однако для нее не выполняется третье условие теоремы Ролля: $f(-1)\neq f(1)$. Однако, существует точка $\xi=0$, такая, что $f'(\xi)=0$ (рис.3).

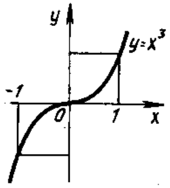


Рис.3. График функции $y=x^3$

3. Теорема Лагранжа.

Теорема 3 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a;b)$ такая, что*

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

► Составим вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=(b-a)f(x)-(f(b)-f(a))x.$$

Покажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно:

1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$, так как является суммой непрерывных на $[a;b]$ функций;

2) $\varphi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, так как является суммой дифференцируемых на $(a;b)$ функций;

3) $\varphi(a)=\varphi(b)=bf(a)-af(b)$.

Итак, $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, причем

$$\varphi'(x)=(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a)).$$

По теореме Ролля существует точка $\xi\in(a;b)$, такая, что $\varphi'(\xi)=0$, т.е.

$$(b-a)f'(\xi)-(f(b)-f(a))=0.$$

Отсюда

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$ ◄

Теорему Лагранжа называется также ***теоремой о конечных***

приращениях. Формула $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ называется ***формулой Лагранжа***, которую удобно записывать в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi\in(a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Выражение $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ представляет собой угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)$ в точке C. Теорема Лагранжа утверждает, что между точками A и B на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB, при условии, что в каждой точке дуги AB существует касательная (рис.4).

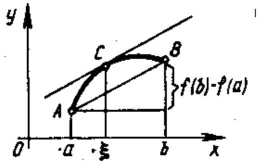


Рис.4. Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Замечания. 1. Если в формуле Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, получается теорема Ролля, т.е. теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

2. Положим в формуле Лагранжа $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0<\theta<1$. Данная формула связывает приращения аргумента и функции, поэтому она называется ***формулой конечных приращений***.

3. Формула Лагранжа в виде

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

дает точное выражение приращения функции через вызвавшее его приращение аргумента в отличие от дифференциала функции, который определяет приближенное значение приращения функции: $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$. В приближенных вычислениях приращение функции заменяют чаще дифференциалом, т.е. полагают $\Delta y\approx dy$. Формула Лагранжа применяется реже, так как для ее использования необходимо указать точку $\xi = x_0 + \theta\Delta x \in (a;b)$, что, вообще говоря, не всегда удается.

4. Теорема Коши.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемы в интервале $(a;b)$, *причем* $g'(x) \neq 0$ *для любого* $x \in (a;b)$.

Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

► Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Шаг 1. Покажем, что $g(b) \neq g(a)$.

Действительно, если бы $g(b) = g(a)$, то для функции $g(x)$ на отрезке $[a;b]$ были бы выполнены все условия теоремы Роля. Тогда по этой теореме внутри отрезка $[a;b]$ нашлась бы, по крайней мере, одна точка ξ, для которой $g'(\xi) = 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $g(b) \neq g(a)$.

Шаг 2. Покажем, что вспомогательная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Действительно:

1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ как сумма непрерывных на $[a;b]$ функций;

2) $\varphi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ как сумма дифференцируемых на $(a;b)$ функций;

3) $\varphi(a) = 0$ и $\varphi(b) = 0$, значит, $\varphi(a) = \varphi(b)$.

По теореме Ролля существует точка $\xi \in [a;b]$, такая, что $\varphi'(\xi) = 0$.

Найдем производную функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) \quad \forall x \in (a;b).$$

Тогда

$$\varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0$$

Отсюда

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \ \xi \in (a;b). \ ◄$$

Замечание. Если положить в формуле Коши $g(x) = x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены, и формула Коши

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

«перейдет» в формулу Лагранжа

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.
2. В чем состоит геометрический смысл теоремы Ферма?
3. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.
4. В чем состоит геометрический смысл теоремы Роля?
5. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.
6. В чем состоит геометрический смысл теоремы Лагранжа?
7. Сформулируйте и докажите теорему Коши.

Лекция 5. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

1. Правило Лопиталя.

2. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие.

1. Правило Лопиталя.

Теорема 1 (правило Лопиталя). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a;b)$*, за исключением, быть может, точки* x_0*, причем* $g(x)\neq 0$ *и* $g'(x)\neq 0$ *для любого* $x\in(a;b)$*;*

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ *(либо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ *);*

3) существует предел (конечный или бесконечный) отношения производных

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Тогда существует также предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$*, причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► Рассмотрим доказательство теоремы только для случая раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

Доопределим функции f и g в точке $x=x_0$, положив $f(x_0)=g(x_0)=0$. Доопределенные таким образом функции будут непрерывны в точке x_0. Рассмотрим отрезок $[x_0;x]$, где $x_0<x<b$. На этом отрезке функции f и g непрерывны, а на интервале $(a;x)$ – дифференцируемы. Следовательно, по теореме Коши существует точка ξ ($a<x_0<\xi<x$) такая, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

С учетом того, что $f(x_0)=g(x_0)=0$, имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если $x\to x_0$, то и $\xi\to x_0$. Поэтому, согласно условию 3) теоремы, из данного равенства следует, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \blacktriangleleft$$

Замечания. **1.** Смысл правила Лопиталя заключается в том, что оно позволяет свести вычисление предела отношения функций в случае неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ к пределу отношения производных, который очень часто вычисляется проще.

2. Правило Лопиталя справедливо и в случае $x_0=\infty$.

3. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ существует, применив дважды правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять до тех пор, пока не будет получена дробь, для которой условия, предусмотренные теоремой, уже не выполняются.

2. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Рассмотрим применение правила Лопиталя к вычислению пределов в случаях неопределенностей двух видов: $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln 5x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{(\ln 5x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0+0}\sin x=-1\cdot 0=0$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^n\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(nx^{n-1}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\ldots 2\cdot 1}{e^x}=0$.

3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$**.** Неопределенность данного вида сводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$

Пример.

$\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0+0}x=0$.

Неопределенность вида $\infty-\cdot\infty$**.** Неопределенность данного вида сводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x\operatorname{tg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x+\frac{\sin 2x}{2}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=0\ .$$

Неопределенности вида 1^{∞}***,*** 0^0***,*** ∞^0***.*** Для того чтобы свести данные неопределенность к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, необходимо представить выражение $u(x)^{v(x)}$, стоящее под знаком предела как $\boldsymbol{e}^{\ln u(x)^{v(x)}}$.

Примеры.

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0+0}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x}=e^0=1.$$

3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(\ln x)}=e^0=1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. При раскрытии каких неопределенностей используется правило Лопиталя?

2. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя.

Лекция 6. ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА

1. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа.
2. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано.
3. Пример разложения функции по формуле Тейлора.

1. Формула Тейлора. В математическом анализе формула Тейлора – одна из важнейших; она имеет много теоретических приложений и является основой приближенных вычислений.

Известно, что наиболее простыми функциями в смысле вычисления их значений являются многочлены. Возникает вопрос о возможности аппроксимации функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 многочленом степени n:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n .$$

Определение 1. Функция

$$\phi(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n ,$$

называется ***многочленом Тейлора*** для функции $y = f(x)$.

Теорема 1 (формула Тейлора). *Если функция $y = f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности $U(\delta; x_0)$, то при $x \to x_0$ имеет место формула*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ *– остаточный член в форме Лагранжа,* $\xi \in U(\delta; x_0)$.

► Пусть функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(\delta; x_0)$ точки x_0, имеет в этой точке $(n+1)$ производных $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, …, $f^{(n)}(x_0)$, $f^{(n+1)}(x_0)$.

Обозначим $R_{n+1}(x) = f(x) - \phi(x; x_0)$.

Зафиксируем $x \in U(\delta; x_0)$, причем такое, что $x > x_0$. И пусть

t – переменная, изменяющаяся в пределах $x_0 \le t \le x$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \phi(x;t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} =$$

$$= f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n -$$

$$- \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Эта функция на отрезке $[x_0; x]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

1) $F(t)$ непрерывна на $[x_0; x]$,

2) $F(t)$ дифференцируема на $(x_0; x)$,

3) $F(x_0) = F(x)$, так как

$$F(x_0) = f(x) - \phi(x;x_0) - \frac{(x-x_0)^{n+1} R_{n+1}(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0,$$

$$F(x) = f(x) - \phi(x;x) - \frac{(x-x)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0.$$

Следовательно, существует точка $\xi \in (x_0; x)$ такая, что $F'(\xi) = 0$.

Найдем производную функции $F(t)$:

$$F'(t) = \left(f(x) - \phi(x;t) - \frac{(x-t)^{n+1} R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \right)'_t =$$

$$= -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)\cdot 2 - \ldots$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Отсюда

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Тогда при $t = \xi$ получим

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+\frac{(n+1)(x-\xi)^n R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=0 .$$

Разрешая относительно $R_{n+1}(x)$, имеем

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} . \blacktriangleleft$$

Выражение $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ называется ***остаточным членом в виде Лагранжа***.

Замечания. 1. Если положить $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$, то получим

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

2. В более краткой записи формула Тейлора запишется в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} .$$

2. Формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано. Положим $x-x_0=\Delta x$. Тогда формула Тейлора запишется в виде:

$$f(x+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1} .$$

При $n=0$ получается формула Лагранжа:

$$f(x+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x .$$

Если $f^{(n+1)}(x)$ ограничена в окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)=0 .$$

Значит, $R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ при $x\to x_0$ или $R_{n+1}(x)=o(\Delta x^n)$.

Поэтому формулу Тейлора можно записать в виде:

$$f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\Delta x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\Delta x^n+o\left(\left(\Delta x\right)^n\right).$$

Выражение $R_{n+1}=o\left(\left(\Delta x\right)^n\right)$ называется ***остаточным членом в виде Пеано***.

В более краткой форме записи имеем

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+o\left(\Delta x^n\right).$$

3. Пример разложения функции по формуле Тейлора.

Пример. Аппроксимировать функцию $y=\ln x$ многочленом n-й степени в окрестности точки $x_0=1$ и оценить погрешность.

Решение. Находим последовательно $n+1$ производную для данной функции:

$f\left(x\right)=\ln x$, $\qquad f\left(1\right)=\ln 1=0$,

$f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$, $\qquad f'\left(1\right)=1$,

$f''\left(x\right)=-\dfrac{1}{x^2}$, $\qquad f''\left(1\right)=-1$,

$f^{(3)}\left(x\right)=\dfrac{1\cdot 2}{x^3}$, $\qquad f^{(3)}\left(1\right)=\dfrac{1\cdot 2}{1^3}=2!$,

$f^{(4)}\left(x\right)=-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\qquad f^{(4)}\left(1\right)=-3!$,

....,

$f^{(n)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n-1}\dfrac{\left(n-1\right)!}{x^n}$ $\qquad f^{(n)}\left(1\right)=\left(-1\right)^{n-1}\left(n-1\right)!$,

,

$f^{(n+1)}\left(x\right)=\left(-1\right)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Тогда формула Тейлора для функции $y=\ln x$ в окрестности точки $x_0=1$ примет вид

$$\ln x=0+1\cdot\left(x-1\right)+\frac{-1}{2}\left(x-1\right)^2+\frac{2!}{3!}\left(x-1\right)^3+\frac{-3!}{4!}\left(x-1\right)^4+\ldots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n+R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1}$, $\xi\in U(\delta;1)$.

Преобразуя полученное выражение, имеем

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Для аппроксимации функции $y=\ln x$ многочленом n-й степени запишем:

$$\ln x\approx(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Погрешность вычислений составит

$$R_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}(x-1)^{n+1},$$

где $\xi=1+\theta(x-1)$, $0<\theta<1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите формула Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа.

2. Какой вид имеет формула Тейлора с остаточным членом в виде Пеано?

Лекция 7. ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА

1. Формула Маклорена.
2. Разложение по формуле Маклорена элементарных функций.
3. Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции для вычисления пределов.
4. Использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.

1. Формула Маклорена. В формуле Тейлора положим $x_0 = 0$. Тогда получим частный вид формулы Тейлора – формулу Маклорена. Так как $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, то при $x_0 = 0$ получим $\xi = \theta x$. Поэтому остаточный член формулы Маклорена примет вид

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},\ 0 < \theta < 1,$$

а сама формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

2. Разложение по формуле Маклорена элементарных функций. *Функция* $f(x) = e^x$. Находим последовательные производные от $f(x) = e^x$:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = e^x, \\ f'(x) = e^x, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = e^x, \\ f^{(n+1)}(x) = e^x, \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \\ f^{(n)}(0) = 1, \\ f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}. \end{array}\right.$$

Подставляя полученные значения $f(0)$, $f'(0)$, …, $f^{(n)}(0)$, $f^{(n+1)}(\theta x)$ в формулу Маклорена, имеем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x},$$

где $0<\theta<1$.

Функция $f(x)=\sin x$. Находим последовательно производные от $f(x)=\sin x$:

$$f(x)=\sin x, \qquad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0)=0,$$

$$f^{(3)}(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(3)}(0)=-1,$$

.... ,

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$0<\theta<1$.

Подставляя полученные значения в формулу Маклорена, имеем

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где $0<\theta<1$.

Функция $f(x)=\cos x$. Вычислив значения последовательных производных от функции $f(x)=\cos x$ при $x=0$, получим:

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

и $f^{(n)}(0)=\cos\left(0+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 \text{ при } n \text{ нечетном,}\\ (-1)^{\frac{n}{2}} \text{ при } n \text{ четном.}\end{cases}$.

Подставляя в формулу Тейлора, получим

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где $0<\theta<1$.

Функция $f(x)=\ln(1+x)$. Функция $f(x)=\ln(1+x)$ определена и бесконечно дифференцируема на интервале $(-1;+\infty)$. Найдем последовательные производные от этой функции:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=\ln(1+x), & f(0)=0\,, \\
f'(x)=(1+x)^{-1}, & f'(0)=1\,, \\
f''(x)=-(1+x)^{-2}\,, & f''(0)=-1\,, \\
f'''(x)=2\cdot 1(1+x)^{-3}\,, & f'''(0)=2\cdot 1\,, \\
\text{.......... ....} & \\
f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}\,, & f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \\
f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n}n!(1+x)^{-(n-1)}, & f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^{n}n!(1+\theta x)^{-(n+1)}, \\
 & 0<\theta<1\,.
\end{array}
$$

Подставляя вычисленные значения в формулу Маклорена, получаем разложение $\ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\,.$$

Функция $f(x)=(1+x)^m$. Функция $f(x)=(1+x)^m$, $m\in \boldsymbol{R}$, определена и бесконечно дифференцируема на интервале $(-1;1)$. Найдем последовательно производные от $f(x)=(1+x)^m$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=(1+x)^m\,, & f(0)=1\,, \\
f'(x)=m(1+x)^{m-1}\,, & f'(0)=m\,, \\
f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}\,, & f''(0)=m(m-1)\,, \\
f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}\,, & f'''(0)=m(m-1)(m-1)\,, \\
\text{.......... .... ,} & \\
f^{(n)}(x)= & f^{(n)}(0)= \\
=m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}\,, & =m(m-1)...(m-n+1)\,, \\
f^{(n+1)}(x)= & f^{(n+1)}(\theta x)= \\
=m(m-1)...(m-n)(1+x)^{m-n-1}\,, & =m(m-1)...(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}\,, \\
 & 0<\theta<1\,.
\end{array}
$$

Подставляя найденные значения функции и ее производных в точке $x_0=0$ в формулу Маклорена, имеем

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

где

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{m-n-1}x^{n+1}.$$

Полученные разложения функций называют ***основными*** и используют для представления многих функций по формуле Тейлора.

Примеры. **1.** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = e^{-x^3}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

2. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \ln x$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

Решение.

1. Воспользуемся основным разложением по формуле Маклорена функции $f(x) = e^x$. Заменим в разложении x на $\left(-x^3\right)$

$$e^{-x^3} = 1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{3n}}{n!} + \frac{\left(-x^3\right)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\theta x^3},$$

где $0 < \theta < 1$.

2. Воспользуемся основным разложением по формуле Маклорена функции $f(x) = \ln x$. Заменим в разложении x на $(x-1)$:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)(1+\theta(x-1))^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$.

3. Использование формулы Тейлора для выделения главной части функции при вычисления пределов. Для выделения ее главной части функция $f(x)$ в окрестности $U(\delta; x_0)$ удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности $U(\delta; x_0)$.

Определение 1. Функция $g(x)$ называется ***главной частью*** функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, если при $x \to x_0$ возможно представление

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$

При $g(x) \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \text{ и } \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

т.е. при $x \to x_0$ главная часть функции $g(x)$ и сама функция $f(x)$ являются эквивалентными функциями.

Пример. Выделить главную часть функции $f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^4 + x^3 + 4x}{4x} = 1$, то функция $g(x) = 4x$ является главной частью $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Поэтому можно записать:

$$2x^4 + x^3 + 4x = 4x + o(4x).$$

Следует отметить, что если не задан вид функции, ее главная часть определяется неоднозначно.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает общий метод выделения главной части функции $f(x)$ в окрестности рассматриваемой точки x_0. Главной частью функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 является ее многочлен Тейлора. Для выделения главной части функции удобно использовать основные разложения по формуле Маклорена с остаточными членами в форме Пеано:

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)\frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Таким образом, используя многочлен Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$, можно записать асимптотические (приближенные) формулы для $f(x)$ в $U(\delta;0)$:

$$e^x \sim 1 + x, \qquad e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \qquad \ldots$$

$$\sin x \sim x, \qquad \sin x \sim x - \frac{x^3}{3!}, \qquad \ldots$$

и другие.

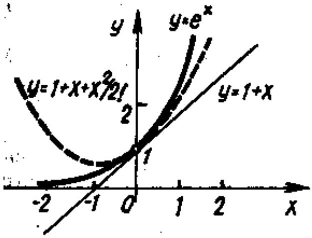


Рис.1. Приближение многочленами Тейлора функции $y = e^x$

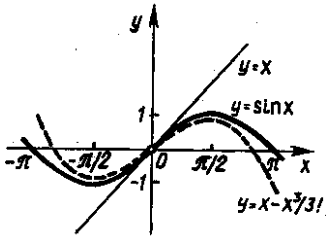


Рис.2. Приближение многочленами Тейлора функции $y = \sin x$

Повышая степень многочлена Тейлора, можно получить более точные приближения функции. Графики функций $y = e^x$ и $y = \sin x$ и их многочленов Тейлора изображены на рисунках 1 и 2. Выделение главной части функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 часто используется при вычислении пределов при $x \to x_0$.

Пример. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}.$$

Решение. Используя разложения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ по формуле Маклорена, имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^3\left(x + o(x)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}{x^4 + o\left(x^4\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + o(x)}{1 + o(x)} = \frac{1}{12}.$$

4. Использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции. Если известны значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0, то для вычисления приближенных значений функции в $U(\delta; x_0)$ удобно использовать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Значения $f(x)$ в $U(\delta; x_0)$ вычисляют по формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Погрешность приближения

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|, \; x_0 < \xi < x .$$

В частном случае при $n = 1$ функция $f(x)$ аппроксимируется многочленом первой степени

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

с погрешностью

$$R_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 , \; x_0 < \xi < x .$$

Так как по определению $x - x_0 = \Delta x$, $f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, то

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Погрешность, возникающая при применении такой приближенной формулы, не превышает модуля остатка $R_2(x)$ задаваемого формулой.

Пример. Вычислить число e с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Р е ш е н и е . Разложение функции $y = \mathrm{e}^x$ по формуле Маклорена имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\theta x}, \; 0 < \theta < 1 .$$

Заменив функцию $y = e^x$ многочленом Тейлора степени n, получим приближенное равенство

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} ,$$

абсолютная погрешность которого

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} , \; 0 < \theta < 1 .$$

Если рассматривать функцию e^x для $-1 \le x \le 1$, то

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \le \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} .$$

Полагая $x=1$, получаем приближенное значение числа e

$$\mathrm{e}^1 \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!} .$$

Чтобы определить, сколько нужно взять первых членов этой формулы для получения заданной точности, оценим величину остаточного члена

$$\left|R_{n+1}(x)\right| \le \varepsilon .$$

Имеем $\dfrac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$. Отсюда $(n+1)! > 3000$ или $n > 6$.

Следовательно, при $n=6$ получим вычисленное значение числа e с заданной точностью

$$e \approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=2{,}718 .$$

Формула Тейлора используется также при исследовании функции на экстремум, в теории рядов, при вычислении интегралов.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет формула Маклорена?
2. Запишите основные разложения по формуле Маклорена элементарных функций.
3. Как используется формула Тейлора для выделения главной части функции для вычисления пределов?
4. Приведите примеры использование формулы Тейлора для вычисления приближенных значений функции.

Лекция 8. ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

1. Признаки монотонности функции.
2. Точки локального и глобального экстремума функции.
3. Необходимое и достаточное условия существования локального экстремума функции.
4. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Признаки монотонности функции.

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемая на* $(a;b)$ *функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) *для всех* $x\in(a;b)$. *Если же для любого* $x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), *то функция* f *возрастает (убывает) на этом интервале.*

► Рассмотрим случай неубывающей функции.

Необходимость: Пусть $f(x)$ не убывает на $(a;b)$. Тогда $\forall x\in(a;b)$ при $\Delta x>0$ приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$. Значит, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$. Тогда $\forall x\in(a;b)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$.

Достаточность. Пусть $\forall x\in(a;b)$ выполняется $f'(x)\geq 0$. Тогда по формуле Лагранжа имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

Так как $f'(\xi)\geq 0$ $(x_1<\xi<x_2)$, то $\forall x_1,x_2\in(a;b)$: $x_1<x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)\geq 0,$$

т.е. f не убывает на $(a;b)$.

Докажем теорему для случая возрастающей функции.

Пусть $f'(x)>0$ на $(a;b)$. Тогда $\forall\xi\in(a;b)$ $f'(\xi)>0$ и поэтому $\forall x_1,x_2: x_1<x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0.$$

Значит $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. ◄

Замечание. Условия теоремы для возрастающей и убывающей функций являются достаточными, но не необходимыми.

Геометрический смысл теоремы. Касательная к графику возрастающей на $(a;b)$ функции ($f'(x)>0$) составляет острый угол с положительным направлением оси Ox, касательная к графику убывающей на $(a;b)$ функции, ($f'(x)<0$) образует тупой угол с положительным направлением оси Ox. Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ является постоянной: $f(x)=C$, $C=\text{const}$, то $f'(x)=0$ и касательная к графику функции параллельна оси Ox.

2. Точки локального и глобального экстремума функции. Особую роль в исследовании поведения функции на множестве играют точки, разделяющие интервалы возрастания и убывания функции. Для функции $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ такой точкой является точка x_0, отделяющая интервал возрастания $f(x)$ $(a;x_0)$ от интервала убывания $(x_0;b)$ функции. Из рисунка 1 видно, что существует $U(\delta;x_0)$, $\delta>0$, такая, что

$$f(x_0)>f(x) \quad \forall x\in U(\delta;x_0).$$

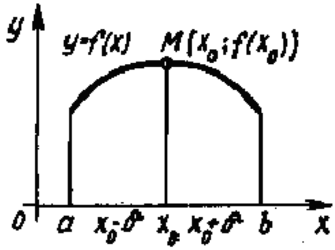


Рис.1. Максимум функции $y=f(x)$

Определение 1. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума)*** функции $f(x)$ если существует δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех $x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ выполняется неравенство

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)<0$$
$$(\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)>0).$$

Значение $f(x_0)$ называется ***локальным максимумом (минимумом)*** функции.

Обозначается:

$$\max_{x\in U(\delta;x_0)} f(x)=f(x_0)$$
$$(\min_{x\in U(\delta;x_0)} f(x)=f(x_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называются ***точ-***

ками экстремума функции, а максимумы и минимумы функции называются ***экстремумами функции***.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями. Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ имеет несколько максимумов и минимумов, то возможен случай, когда максимум функции меньше ее минимума. Наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$ называются ***абсолютными минимумом и максимумом*** или ***глобальными экстремумами*** функции $f(x)$

Обозначается: $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

3. Необходимое и достаточное условия существования локального экстремума функции.

Теорема 2. *Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.*

► Пусть $f(x)$ в точке x_0 достигает максимума. Тогда существует $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ такая, что для любого $x\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0)>f(x_0+\Delta x)$ при $\Delta x\neq 0$.

При $\Delta x<0$ имеем $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$,

при $\Delta x>0$ имеем $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$.

Если пределы левых частей этих неравенств при $\Delta x\to 0$ существуют, то:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)\geq 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)\leq 0.$$

Когда производные функции $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точке x_0 равны нулю, то существует производная $f'(x_0)$ и

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0.$$

Если $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, отличны от нуля, то производная

$f'(x_0)$ не существует.

Аналогично доказывается случай, когда x_0 точка минимума.◄

Геометрический смысл теоремы. В точках экстремума функции $f(x)$ касательная к ее графику

1) параллельна оси абсцисс, если существует $f'(x_0)=0$ (рис.2.а);

2) параллельна оси ординат, если $f'(x_0)$ бесконечна (рис.2.б);

3) существуют не совпадающие левая и правая касательные, если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (рис.2.в).

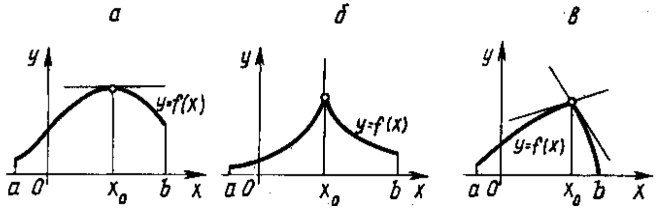


Рис.2. Геометрический смысл теоремы 2

Определение 2. Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль или не существует, называются ***критическими*** или ***точками возможного экстремума***. Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, называются ***стационарными***.

Критическая точка x_0 называется ***угловой точкой*** функции $f(x)$ если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (см. рис.*в*). Критическая точка x_0 называется ***точкой возврата*** функции, если ее левая $f'_-(x_0)$ и правая $f'_+(x_0)$ производные бесконечны (см. рис.2.*б*). Не всякая критическая точка функции $f(x)$ является точкой ее локального экстремума. Например, для функции $f(x)=x^5$ точка $x=0$ – критическая точка, так как $f'(x)=5x^4$ и при $x=0$ обращается в нуль. Однако, $x=0$ не является точкой локального экстремума функции. В этой точке функция возрастает.

Выяснить, какая из критических точек функции будет точкой ее локального экстремума, можно с помощью трех достаточных признаков существования экстремума функции.

Теорема 3 (первый достаточный признак существования экстремума функции). *Пусть* x_0 *– критическая точка непре-*

рывной функции $f(x)$. *Если* $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *меняет знак с «+» на «–», то* x_0 *– точка локального максимума; если* $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *меняет знак с «–» на «+», то* x_0 *– точка локального минимума; если* $f'(x)$ *при переходе через точку* x_0 *не меняет знак, то* x_0 *не является точкой локального экстремума.*

► Пусть x_0 – точка возможного экстремума.

При $\forall x \in U(\delta; x_0 - 0)$ имеем $f'(x) > 0$. Значит $f(x_0) > f(x)$.

При $\forall x \in U(\delta; x_0 + 0)$ имеем $f'(x) < 0$. Значит $f(x_0) < f(x)$.

Поэтому существует окрестность $U(\delta; x_0)$ такая, что для всех x из этой окрестности $f(x_0) > f(x)$, т. е. точка x_0 является точкой локального максимума.

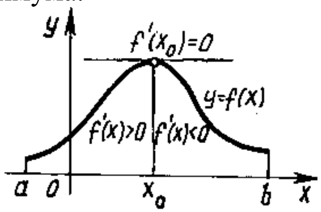


Рис.3. Геометрический смысл теоремы 3

Аналогично доказывается и существование точки локального минимума.

Если $f'(x)$ сохраняет знак в окрестности точки x_0, то в этой окрестности функция монотонна, т.е. точка x_0 не является точкой локального экстремума. ◄

Теорема 4 (второй достаточный признак существования экстремума функции). *Стационарная точка* x_0 *функции* $f(x)$, *дважды дифференцируемой в* $U(\delta; x_0)$, *является точкой локального минимума* $f(x)$, *если* $f''(x_0) > 0$, *и точкой локального максимума, если* $f''(x_0) < 0$.

► Пусть выполнены условия теоремы и $f''(x_0) > 0$. Тогда $f'(x)$ в $U(\delta; x_0)$ возрастает. По условию $f'(x_0) = 0$. Следовательно, в окрестности $U(\delta; x_0)$ функция $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» (рис.3). Согласно теореме 3, точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$.

Если $f''(x_0)<0$, то $f'(x)$ в $U(\delta;x_0)$ убывает. Однако $f'(x_0)=0$. Значит, в окрестности $U(\delta;x_0)$ производная функции $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Согласно теореме 3, точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.◄

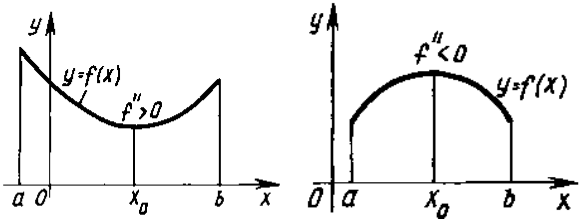


Рис.4. Минимум и максимум функции

Теорема 5 (третий достаточный признак существования экстремума функции). *Пусть функция* $f(x)$ – n *раз непрерывно дифференцируема в точке* x_0 *и*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда: 1) если n *– четное и* $f^{(n)}(x_0)<0$, *то* x_0 *– точка локального максимума;*

2) если n *– четное и* $f^{(n)}(x_0)>0$, *то* x_0 *– точка локального минимума;*

3) если n *– нечетное, то* x_0 *не является точкой локального экстремума.*

Без доказательства.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются ее глобальные экстремумы. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах этого отрезка или в точках ее локального экстремума. Следовательно, для отыскания абсолютных экстремумов $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ надо найти ее значения на концах отрезка $[a;b]$ в точках локального экстремума и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них.

Если x_1, x_2, ..., x_n – точки локальных экстремумов, то

$$\min_{x\in[a;b]} f(x)=\min\{f(a);f(b);f(x_1);...;(x_n)\},$$

$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_1);...; f(x_n)\}$$

Пример. Найти абсолютные экстремумы функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ на $[-1;4]$ (рис.5).

Решение. Определяем стационарные точки $f(x)$,решая уравнения $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$. Имеем $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

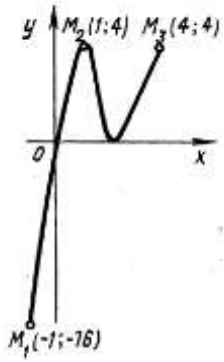


Рис.5.Абсолютные экстремумы функции на отрезке

Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка и в стационарных точках: $f(-1) = -16$, $f(4) = 4$, $f(1) = 4$, $f(3) = 0$. Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x) = \min\{-16,4,4,0\} = -16 ,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x) = \max\{-16,4,4,0\} = 4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x = -1$, наибольшее – в стационарной точке $x = 1$ и на правом конце отрезка в точке $x = 4$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия должны выполнятся, чтобы функция возрастала, убывала, была неубывающей и невозрастающей?
2. Какая точка называется точкой локального экстремума?
3. Какая точка называется точкой абсолютного экстремума?
4. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума.
5. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
6. Как находится глобальный экстремум функции на отрезке?

Лекция 9.
ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

1. Выпуклость и вогнутость функции.
2. Точки перегиба.
3. Асимптоты графика функции.
4. Общая схема исследования функции.

1. Выпуклость и вогнутость функции.

Определение 1. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** (***вогнутым***) на $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$ расположена выше любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рис.1).

Определение 2. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** (***выпуклым***) на $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ $\forall x\in(a;b)$ расположена ниже любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рис.2).

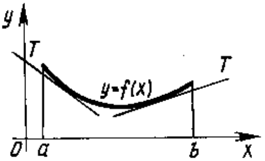


Рис.1. Вогнутость графика функции

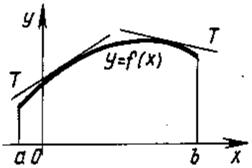


Рис.2. Выпуклость графика функции

Теорема 1 (достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции). *Если функция $y=f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ вогнутый (выпуклый вниз). Если функция $y=f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x)<0$ $\forall x\in(a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ выпуклый.*

► Пусть на интервале $(a;b)$ вторая производная $f''(x)>0$. Возьмем точку $x_0\in(a;b)$. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\text{или } Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

где Y – ординаты точек касательной. Разность ординат точек кривой $f(x)$ и касательной

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

Применяя формулу Лагранжа к разности $f(x)-f(x_0)$ на отрезке $[x_0;x]$, получаем

$$y-Y=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

или $y-Y=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0)$,

где $\xi\in(x_0;x)\subset(a;b)$.

Применяя формулу Лагранжа к разности $f'(\xi)-f'(x_0)$ на отрезке $[x_0;\xi]$, находим (рис.3)

$$y-Y=f''(\xi_1)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

где $\xi_1\in(x_0;x)\subset(a;b)$. В последнем равенстве $f''(\xi_1)>0$, а $\xi-x_0>0$, если $x-x_0>0$, или $\xi-x_0<0$, если $x-x_0<0$. Следовательно, $y>Y$, т.е. ординаты точек кривой больше ординат точек касательной при одной и той же абсциссе. Точки кривой $y=f(x)$ на $(a;b)$ лежат выше точек касательной T к кривой.

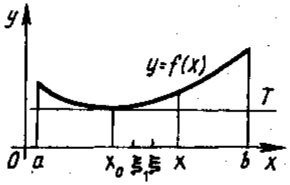


Рис.3. Использование теоремы Лагранжа в теореме 1

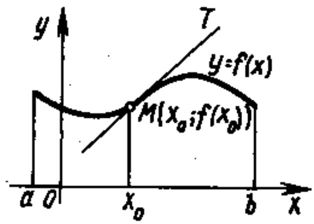


Рис.4. Точка перегиба

График функции $y=f(x)$ на $(a;b)$ – вогнутый (рис.3).

Доказательство выпуклости графика функции на $(a;b)$ проводится аналогично. ◄

2. Точки перегиба.

Определение 3. Точка $M(x_0;f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y=f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется ***точкой перегиба*** (рис.4).

Теорема 2 (необходимое условие точек перегиба). *Если функция $f(x)$ имеет в точке $M(x_0;f(x_0))$ перегиб и существу-*

ет вторая производная $f''(x)$ *в точке* x_0*, то* $f''(x_0)=0$.

► Предположим противное. Пусть $f''(x_0)\neq 0$. Для определенности положим $f''(x_0)>0$. Тогда по теореме об устойчивости знака существует $U(\delta;x_0)$, в которой $\forall x\in U(\delta;x_0)$ выполняется неравенство $f''(x)>0$. Тогда график функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет одно направление выпуклости, а значит, в точке x_0 нет перегиба. Это противоречит условию. Следовательно, $f''(x_0)=0$. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда.

Пример. Для функции $y=x^4$ в точке $f''(0)=0$, но этой точке перегиба нет.

Определение 4. Точки $M(x_0;f(x_0))$ графика функции $y=f(x)$ называются ***точками возможного перегиба***, если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема 3 (достаточное условие существования точек перегиба). *Если для функции* $f(x)$ *вторая производная* $f''(x)$ *в некоторой точке* x_0 *обращается в нуль или не существует и при переходе через нее меняет свой знак, то точка* $M(x_0;f(x_0))$ *является точкой перегиба графика функции.*

► Пусть $f''(x)=0$ или не существует. Если $f''(x)<0$ в $U(\delta;x_0-0)$ и $f''(x)>0$ в $U(\delta;x_0+0)$, то точка кривой с абсциссой x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости. Если $f''(x)>0$ в $U(\delta;x_0-0)$ и $f''(x)<0$ в $U(\delta;x_0+0)$, то эта точка отделяет интервал вогнутости от интервала выпуклости кривой. В обоих случаях по определению точка $(x_0;f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции. ◄

3. Асимптоты графика функции. При исследовании поведения функции на бесконечности, т.е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такая прямая называют ***асимптотой графика***.

Определение 5. Прямая $x=x_0$ называется ***вертикаль-***

ной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0-0} = f(x)\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} = f(x)\pm\infty .$$

Очевидно, что непрерывные на **R** функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y=f(x)$. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

Определение 6. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

Теорема 4. Для того чтобы график функции $y=f(x)$ имел наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=b .$$

► *Необходимость*. Предполагаем, что $y=kx+b$ – наклонная асимптота графика функции $y=f(x)$. Тогда справедливо представление $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(b+\alpha(x)\right)=b .$$

Достаточность. Пусть существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty} = \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b .$$

Тогда из второго равенства получаем

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$.

Последнее представление функции $f(x)$ означает, что прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции

$y = f(x)$.

Итак, теорема доказана для случая $x \to +\infty$. Доказательство теоремы для случая $x \to -\infty$ производится аналогично. ◄

Замечание. Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

4. Общая схема исследования функции. При исследовании дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и при построении графика функции можно придерживаться следующей схемы.

1. Находим $D(f)$, определяем точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрию.

2. Находим наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции (если они существуют).

3. С помощью первой производной функции определяем стационарные точки и интервалы монотонности.

4. С помощью второй производной определяем интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба.

5. Находим локальные экстремумы функции на $D(f)$.

По результатам исследований строим график функции, для удобства сводя их в таблицу, построение которой покажем на примерах.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по указанной выше схеме.

1. Находим $D(f)$. Данная функция определена для $x \neq \pm\sqrt{3}$:

$$D(f) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right).$$

Функция непрерывна на $D(f)$; $x = \pm 3$ – точки разрыва второго рода.

Функция $y = 0$ при $x = 0$, т.е. график функции пересекает координатные оси в начале координат.

Функция непериодична.

Функция нечетная, так как область определения $D(f)$ симметрична и $f(-x)=-f(x)$, т.е. $\frac{(-x)^3}{3-x^2}=\frac{-x^3}{3-x^2}$. Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат и достаточно исследовать функцию для $x \geq 0$.

2. Асимптоты графика функции.

Поскольку

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty\,,\quad \lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 3+0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty\,,$$

то прямые $x=-3$ и $x=3$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

Вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}=\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x}=-1\,,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0\,,$$

Значит, прямая $y=-x$ является наклонной асимптотой графика функции.

3. Точки возможного экстремума и интервалы монотонности функции.

Находим первую производную функции $y=f(x)$:

$$y'=\frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}\,.$$

Она определена на $D(f)$. В промежутке $[0;+\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x_1=0$, $x_2=3$.

Определяем интервалы монотонности из неравенств $y'>0$ и $y'<0$ $\forall x\geq 0$.

Имеем

$$\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}>0\,,$$

$$9-x^2>0 \;\Rightarrow\; 0<x<3\,.$$

т.е. функция возрастает на $(0;\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};3)$.

Аналогично

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}<0,$$

$$9-x^2<0 \Rightarrow x>3.$$

т.е. функция убывает на $[3;\infty)$.

4. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Вычисляем вторую производную функции $y=f(x)$:

$$y''=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)2\left(3-x^2\right)(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Она определена на $D(f)$.

Находим интервалы вогнутости и выпуклости графика функции из неравенств $y''>0$, $y''<0$ $\forall x\geq 0$.

Имеем

$$\frac{6x\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}>0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 0<x<\sqrt{3},$$

т.е. кривая вогнута на $\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Аналогично,

$$\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}<0,$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 3-x^2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 3<x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x>\sqrt{3},$$

т.е. кривая выпукла на $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

В точке $x=0$ $y''=0$ и $f''(x)<0$ в $U(\delta;0-0)$, а $f''(x)>0$ в $U(\delta;0+0)$. Значит, точка кривой с абсциссой $x=0$ отделяет интервал выпуклости кривой от ее интервала вогнутости. Поэтому $O(0;0)$ является точкой перегиба кривой.

***5.** Локальные экстремумы.*

Определяем с помощью второй производной $f''(x)$ локальные экстремумы. Так как $f''(3)=0$, точка A_1 с абсциссой $x=3$ является точкой локального максимума. В силу симметрии графика функции точка A_2 с абсциссой $x=-3$ является точкой локального минимума. Итак, $\max\limits_{x\in U(\delta;3)} f(x)=-4{,}5$, $\min\limits_{x\in U(\delta;-3)} f(x)=4{,}5$.

Результаты исследования функции $y=f(x)$ на $[0;\infty)$ заносим в таблицу 1.

Таблица 1.

x	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;\infty)$
y'	0	+	Не сущ.	+	0	–
y''	0	+	Не сущ.	–	–	–
y	0(т.перег)	↗	Не сущ.	↗	-4,5	↘

Исходя из результатов, содержащихся в таблице, строим график данной функции (рис.5).

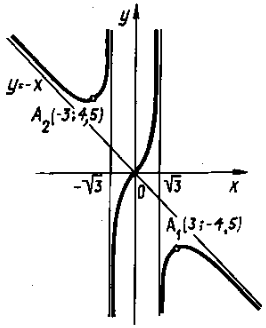


Рис.5. График функции $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой график функции называется выпуклым вверх, вниз?
2. Сформулируйте достаточное условие выпуклости и вогнутости.
3. Какая точка графика называется точкой перегиба?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия точек перегиба.
5. Какая прямая называется вертикальной (наклонной, горизонтальной) асимптотой?

Лекция 10. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Понятие векторной функции. Годограф.
2. Предел и непрерывность векторной функции.
3. Производная и дифференциал векторной функции.
4. Геометрический и физический смысл производной вектор-функции.

1. Понятие векторной функции. Годограф. В курсе математики и ее многочисленных приложениях часто приходится иметь дело не только с числовыми функциями, но и с функциями, у которых область определения D или множество значений E состоят из элементов другой природы, например $D \subset \mathbf{R}$, а E – подмножество множества векторов.

Определение 1. ***Векторной функцией*** действительного аргумента (***вектор-функцией скалярного аргумента***) называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in T \subset \mathbf{R}$ ставит в соответствие один и только один вектор $\vec{a}$ пространства $\mathbf{R}^2$ или $\mathbf{R}^3$.

Обозначается: $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $t \in T$.

Различным значениям $t \in T$ соответствуют разные значения вектор-функции, т.е. вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определенную длину (модуль) и направление. Следовательно, вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ может изменяться как по величине, так и по направлению.

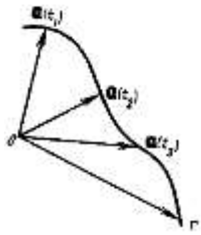


Рис.1. Годограф вектор-функции

Выберем общую точку приложения O векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$ (рис.1). При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию Γ.

Определение 2. ***Годографом*** вектор-функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$ называется линия Γ, которую описывает конец вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении аргумента $t \in T \subset \mathbf{R}$.

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а всякую линию Γ, в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

Замечания. 1. Если вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ изменяется только по длине, а его направление остается постоянным, то $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ есть множество связанных векторов, расположенных на луче, выходящем из точки O. Годографом такой вектор-функции является луч Γ (рис.2), если $T = \mathbf{R}$.

2. Если при изменении t модули векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$ не меняются, а изменяется только направление, то векторы из множества $\{\vec{a}(t) \mid t \in T\}$ будут находиться в шаре радиусом $|\vec{a}(t)|$ с центром в точке O. Годографом такой функции является линия, принадлежащая сфере радиусом $|\vec{a}(t)|$ (рис.3).

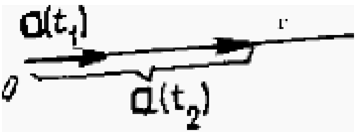


Рис.2. Годограф, если направления векторов совпадают

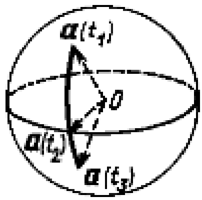


Рис.3. Годограф, если длины векторов равны

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Тогда задание вектор-функции означает задание координат вектора $\vec{a}(t)$. Если начало вектора $\vec{a}(t)$ совпадает с точкой O, то $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется ***радиусом-вектором*** точки M и *обозначается* $\vec{r}(t)$ (рис.4).

Любой радиус-вектор $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ пространства $\mathbf{R}^3$ задается своими координатами $x(t),\ y(t),\ z(t)$ (координаты вектора совпадают с координатами точки $M \in \Gamma$ (рис.4) и может быть разложен по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ .$$

Так как каждой упорядоченной тройке чисел x, y, z соответствует единственный радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то задание вектор-функции эквивалентно заданию трех числовых функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

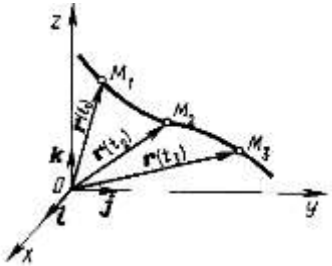


Рис.4.

Поэтому исследование векторной функции скалярного аргумента сводится к исследованию трех координатных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определенных на множестве T. В координатной форме вектор-функция запишется в виде

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)).$$

2. Предел и непрерывность векторной функции.

Определение 3. Вектор $\vec{a}$ называется ***пределом*** вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$, в точке $t = t_0$ (или $t \to t_0$), если $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| = 0$.

Обозначается: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Замечание. Выражение $\left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right|$ задает числовую функцию. Поэтому понятие предела вектор-функции сводится к понятию предела скалярной функции и можно записать:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \;\; \forall t \in U(t_0; \delta) \Rightarrow \;\; \left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл предела вектор-функции. Если начало всех векторов $\left\{\vec{r}(t) \,\middle|\, t \in T\right\}$ поместить в одну точку, то условие $\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|<\varepsilon$ означает, что концы всех векторов $\vec{r}(t)$ при $t\in U(t_0;\delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\vec{a}$ (рис.5.).

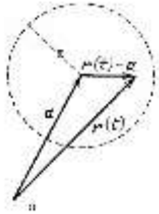


Рис.5. Геометрический смысл
предела вектор-функции

Теорема 1. *Пусть* $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$ *и* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. *Для того, чтобы* $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$ *, необходимо достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=a_1,\ \lim_{t\to t_0}y(t)=a_2,\ \lim_{t\to t_0}z(t)=a_3.$$

► *Необходимость*. Длина вектора в координатной форме

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\ .$$

Отсюда

$$\left|x(t)-a_1\right|\le\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|,$$

$$\left|y(t)-a_2\right|\le\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|,$$

$$\left|z(t)-a_3\right|\le\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|.$$

Если $\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|\to 0$ при $t\to t_0$, то $\left|x(t)-a_1\right|\to 0$, $\left|y(t)-a_2\right|\to 0$, $\left|z(t)-a_3\right|\to 0$.

Достаточность. Из неравенств

$$\left|x(t)-a_1\right|\to 0,\ \left|y(t)-a_2\right|\to 0,\ \left|z(t)-a_3\right|\to 0 \text{ при } t\to t_0$$

следует, что

$$\left|\vec{r}(t)-\vec{a}\right|=\sqrt{(x(t)-a_1)^2+(y(t)-a_2)^2+(z(t)-a_3)^2}\to 0\ .$$ ◄

Следствие.

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\lim_{t\to t_0}x(t)\vec{i}+\lim_{t\to t_0}y(t)\vec{j}+\lim_{t\to t_0}z(t)\vec{k}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\ .$$

Таким образом, для того чтобы вычислить предел вектор-функции, достаточно найти соответствующие пределы координат этой функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{r}(t)$ не существует, то не существует и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{t\to 2}\vec{r}(t)$, если

$$\vec{r}(t)=(3t+2)\vec{i}+(2t-1)\vec{j}+(1-t)\vec{k}.$$

***Решение*.** Имеем

$$\lim_{t\to 2}\vec{r}(t)=\lim_{t\to 2}(3t+2)\vec{i}+\lim_{t\to 2}(2t-1)\vec{j}+\lim_{t\to 2}(1-t)\vec{k}=8\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}.$$

Свойства пределов векторной функции

1. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right|=\left|\vec{a}\right|$.
2. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.
3. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(f(t)\cdot\vec{r}(t)\right)=\lim\limits_{t\to t_0}f(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$, $f(t)$ – числовая функция.
4. $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.
5. $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$.

Определение 4. Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t\in T$, называется ***непрерывной*** в точке $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Очевидно, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 5. Вектор-функция $\vec{\alpha}(t)$, $t\in T$, называется ***бесконечно малой по сравнению со скалярной функцией*** $\beta(t)$, $t\in T$, при $t\to t_0$, если существует векторная функция $\vec{\varepsilon}(t)$, $t\in T$, такая, что в окрестности $U(\delta;t_0)$ имеет место равенство

$$\vec{\alpha}(t)=\vec{\varepsilon}(t)\cdot\beta(t),\quad \lim_{t\to t_0}\vec{\varepsilon}(t)=0.$$

Обозначается: $\vec{\alpha}(t)=o(\beta(t))$.

3. Производная и дифференциал векторной функции. Для этого дадим аргументу t_0 вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t\in T$, приращение $\Delta t\neq 0$.

Определение 6. Вектор-функция $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ называется ***приращением*** вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t\in T$, в точке $t_0\in T$.

Составим отношение

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Определение 7. Если существует предел отношения приращения $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 к приращению скалярного аргумента Δt при $\Delta t\to 0$, то этот предел называется ***производной вектор-функции*** $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Обозначается: $\vec{r}\,'(t_0)$.

Итак,

$$\vec{r}\,'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как

$$\Delta\vec{r}(t_0)=[x(t_0+\Delta t)-x(t_0)]\vec{i}+[y(t_0+\Delta t)-y(t_0)]\vec{j}+[z(t_0+\Delta t)-z(t_0)]\vec{k}=$$

$$=\Delta x(t_0)\vec{i}+\Delta y(t_0)\vec{j}+\Delta z(t_0)\vec{k},$$

то получим

$$\vec{r}\,'(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}.$$

Значит, вычисление производных от векторной функции скалярного аргумента в точке t_0 сводится к вычислению производных ее координат.

Определение 8. Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t\in T$, называется ***дифференцируемой*** в точке $t_0\in T$, если приращение $\Delta\vec{r}(t_0)$ в этой точке представимо в виде:

$$\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{a}\cdot\Delta t+\vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t,$$

где вектор $\vec{a}$ не зависит от Δt, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec{\alpha}(\Delta t)=0$.

Линейная вектор-функция $\vec{a}\cdot\Delta t$ приращения аргумента Δt называется ***дифференциалом*** функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0.

Обозначается: $d\vec{r}=\vec{a}\cdot\Delta t$.

Как и в случае скалярной функции, дифференцируемость вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t\in T$, в точке t_0 равносильно существованию ее производной в точке t_0, причем

$$\vec{r}\,'(t_0)=\vec{a}.$$

Следовательно, $d\vec{r}=\vec{r}\,'(t_0)\cdot\Delta t$.

Тогда приращение запишется в виде

$$\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}\,'(t_0)\cdot\Delta t+\vec{\alpha}(\Delta t)\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{\alpha}(\Delta t) = 0$.

Полагая $dt = \Delta t$, дифференциал можно записать в виде

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'(t_0) \cdot dt .$$

Отсюда получим $\vec{r}\,'(t_0) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Свойства дифференцируемых векторных функций

1. Если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке.

3. Если $t = t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функция, $\vec{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0 = t(\tau_0)$ векторная функция, то

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} .$$

4. Для произвольных векторных функций имеют место формулы:

$$(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \pm \vec{r}_2\,',$$

$$(f \cdot \vec{r})' = f\,' \cdot \vec{r} + f \cdot \vec{r}\,',$$

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\,',$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2\,'.$$

5. Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $\vec{r}(t)$ имеют одинаковую длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\vec{r}\,'(t_0)$ ортогональна вектору $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}\,'(t_0) \cdot r(t_0) = 0 .$$

6. Если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \le |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot (b-a).$$

4. Геометрический и физический смысл производной вектор-функции. Геометрический смысл производной вектор-функции. Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)$ определена на множестве T , непрерывна в точке $t_0 \in T$ и кривая Γ – годограф функции $\vec{r}(t)$. И пусть точке $M_0 \in \Gamma$ соответствует значение $\vec{r}(t_0)$, а точке $M_1 \in \Gamma$ – значение $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$, где $\Delta t \neq 0$. Тогда приращение вектор-функции $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$, представляет собой вектор $\overrightarrow{M_0 M_1}$ (рис.6).

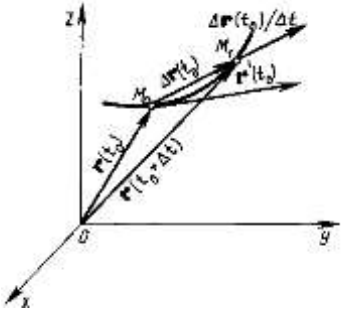


Рис.6. Геометрический смысл производной вектор-функции

Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ представляет собой вектор, коллинеарный вектору $\Delta\vec{r}(t_0)$, так как он отличается лишь скалярным множителем $\dfrac{1}{\Delta t}$. Значит, вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ (рис.6) коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_0 M_1}$. При $\Delta t \to 0$ точка M_1 стремится к M_0, перемещаясь по кривой Γ, а секущая $M_0 M_1$ занимает предельное положение, определяемое касательной к годографу Γ в точке M_0. Отсюда следует, что вектор $\vec{r}\,'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ совпадает по направлению с касательной к годографу в точке M_0 и направлен в сторону возрастания t.

Итак, с **геометрической** точки зрения производная вектор-функции в точке t_0 есть вектор $\vec{r}\,'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Ф и з и ч е с к и й с м ы с л п р о и з в о д н о й в е к т о р - ф у н к ц и и. Предположим, что материальная точка движется по траектории, являющейся годографом вектор-функции $\vec{r}(t)$, где роль параметра t играет время движения. За промежуток времени Δt точка на кривой переместится из положения M_0 в положение M. Вектор $\Delta\vec{r}(t_0)$ задает перемещение материальной точки за время Δt. Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ есть средняя скорость перемещения точки за время Δt. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим мгновенную скорость v точки в момент времени t_0:

$$v = r'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}\,.$$

Таким образом, **механический** смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.

Производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно дифференцировать.

Производная функции $\vec{r}\,'(t)$ точке $t = t_0$ называется ***второй производной*** вектор-функции $r(t)$ по скалярному аргументу t в точке t_0 и обозначается так: $\vec{r}''(t_0)$.

Вектор $\vec{a}(t_0)$, равный производной скорости $\vec{v}(t)$ по времени t в момент t_0, называется ***ускорением***: $\vec{r}''(t_0) = \dfrac{dv(t_0)}{dt} = \vec{a}(t_0)$.

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение векторной функции и годографа.
2. Дайте определение предела и непрерывности векторной функции. Перечислите свойства предела вектор-функции.
3. Дайте определение производной векторной функции.
4. Какая вектор-функция называется дифференцируемой?
5. Что называется дифференциалом векторной функции?
6. В чем состоит геометрический и физический смысл производной вектор-функции.

Лекция 11. ДЛИНА КРИВОЙ

1. Понятие кривой.
2. Длина кривой.
3. Натуральное уравнение гладкой кривой.

1. Понятие кривой. Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. И пусть на отрезке $[a;b]\subset \mathbf{R}$ заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в $\mathbf{R}^3$.

Числа $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно рассматривать как координаты точки $M = M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ или как координаты радиус-вектора $\vec{r}(t)$ с началом в точке O и концом в точке M (рис.1.):

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t)),\ t \in [a;b] \subset \mathbf{R}.$$

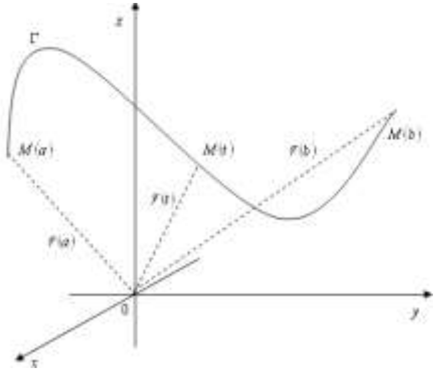


Рис.1. Пространственная кривая

О п р е д е л е н и е 1. Непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в пространство $\mathbf{R}^3$ называется ***кривой***.

Обозначается: $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^3 \middle|\ a \le t \le b \right\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество точек пространства $\mathbf{R}^3$, на которое отображается отрезок $[a;b]$, называется ***носителем*** кривой Γ, переменная t называется ***параметром*** на кривой Γ.

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется ***плоской*** $\Gamma = \left\{ M(t) \in \mathbf{R}^2 \middle|\ a \le t \le b \right\}$ (рис2)

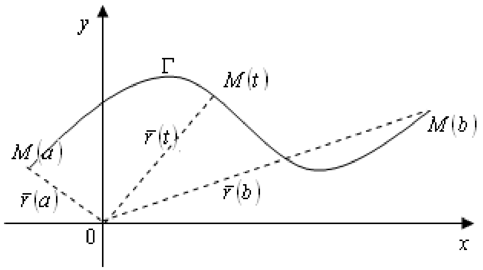


Рис.2. Плоская кривая

Различают следующие с п о с о б ы задания кривой.

Явное задание: непрерывная функция $y = f(x)$, $a \le x \le b$, задает плоскую кривую $\Gamma = \{ y = f(x) | \ a \le x \le b \}$, носителем является график функции $f(x)$, параметром переменная x.

Неявное задание: координаты всех точек носителя плоской кривой Γ удовлетворяют уравнению $F(x; y) = 0$.

В координатной форме: $\Gamma = \{ x(t); y(t); z(t) | \ a \le t \le b \}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатные функции отображения $M(t)$, $t \in [a; b] \subset \mathbf{R}$,

Векторное представление: $\Gamma = \{ \vec{r}(t) | \ a \le t \le b \}$, где $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ – вектор-функция.

О п р е д е л е н и е 3. Если для точек кривой $\Gamma = \{ M(t) | \ a \le t \le b \}$ выполняется условие

$$\forall t_1 < t_2 \quad M(t_1) \text{ предшествует } M(t_2),$$

то такая кривая называется ***ориентированной***.

О п р е д е л е н и е 4 . Точка носителя кривой, в которую при отображении $\Gamma = \{ M(t) | \ a \le t \le b \}$ отображаются хотя бы две разные точки отрезка $[a; b]$, называется ***точкой самопересечения*** (***кратной точкой***) кривой Γ.

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек (отображение $\Gamma = \{ M(t) | \ a \le t \le b \}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a; b]$ в точки пространства $\mathbf{R}^3$), то кривая называется ***простой дугой***.

Если $M_0 = M(a)$ и $M_1 = M(b)$, то точка $(M_0; a)$ называется ***началом*** кривой Γ, а точка $(M_1; b)$ – ***концом*** данной кривой.

Если $M(a)=M(b)$, то кривая Γ называется ***замкнутой***.

Определение 5. ***Простым замкнутым контуром*** называется замкнутая кривая, у носителя которой нет кратных точек, кроме носителя ее начала и конца.

Пример. Кривая $\Gamma=\left\{x=\cos t; y=\sin t; z=0 \middle| \; 0\le t\le 2\pi \right\}$ является замкнутым контуром. При изменении $0\le t\le 2\pi$ носителем кривой является единичная окружность плоскости Oxy, которую описывает точка $M(\cos t;\sin t)$, двигаясь против часовой стрелки. Точка $(1;0;0;)\in \mathbf{R}^3$ является одновременно начальной и конечной точкой кривой Γ.

Определение 6. Если $t_1,t_2\in[a;b]$, $t_1<t_2$, то кривая $\Gamma=\left\{M(t) \middle| \; t_1\le t\le t_2 \right\}$ называется ***частью кривой*** Γ или ***простой дугой*** $\overset{\smile}{M(t_1)M(t_2)}$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в точке $M(t_2)$.

Касательная к кривой. Пусть задана кривая $\Gamma=\left\{\vec r(t) \middle| \; a\le t\le b \right\}$, где $\vec r(t)$ – вектор-функция, дифференцируемая в точке $t_0\in[a;b]$, причем $\vec r\,'(t_0)\ne 0$. Согласно определению дифференцируемости ее приращение при $\Delta t\to 0$ можно представить в виде

$$\Delta\vec r(t_0)=\vec r\,'(t_0)\cdot\Delta t+\vec\alpha(\Delta t)\Delta t,$$

где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec\alpha(\Delta t)=0$.

Из этой формулы и условия $\vec r\,'(t_0)\ne 0$ следует, что для всех достаточно малых $\Delta t\ne 0$ имеет место $\Delta\vec r(t_0)\ne 0$ или $\vec r(t_0+\Delta t)\ne\vec r(t_0)$. Значит, точки $M_0=M(t_0)$ и $M=M(t_0+\Delta t)$ различны.

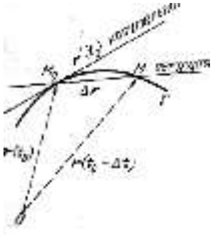


Рис.3.

Проведем через эти точки секущую M_0M (рис.3). Если

$\vec{r}\,'(t_0)\neq 0$, то при всех значениях Δt, ненулевой вектор $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ параллелен секущей. Поэтому вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ также параллелен секущей M_0M. По условию в точке t_0 существует производная $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{r}(t_0)\neq 0$. Геометрически это означает, что векторы $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, параллельные секущей M_0M, при $\Delta t\to 0$ стремятся к некоторому предельному вектору $\vec{r}\,'(t_0)$.

Определение 7. Прямая, проходящая через точку M_0 в направлении вектора $\vec{r}\,'(t_0)$, называется предельным положением секущих M_0M при $\Delta t\to 0$ или ***касательной*** к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

Поместим начало вектора $\vec{r}\,'(t_0)$ в точку $M(t_0)$. Направление данного вектора совпадает с направлением касательной. Поэтому уравнение касательной в векторной форме запишется в виде

$$\vec{r}=\vec{r}(t_0)+\vec{r}\,'(t_0)\cdot\lambda,\ \lambda\in\mathbf{R},$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор касательной.

В координатной форме уравнение $\vec{r}=\vec{r}(t_0)+\vec{r}\,'(t_0)\cdot\lambda$ примет вид

$$x=x(t_0)+\lambda\cdot x'(t_0),$$
$$y=y(t_0)+\lambda\cdot y'(t_0),$$
$$z=z(t_0)+\lambda\cdot z'(t_0),$$

где параметр $\lambda\in\mathbf{R}$.

Выражая параметр λ, получим уравнения касательной в канонической форме:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

2. Длина кривой. Пусть задана кривая $\Gamma=\left\{\ \vec{r}(t)\middle|\ a\le t\le b\ \right\}$, где $\vec{r}(t)$ – вектор-функция, $t\in[a;b]\subset\mathbf{R}$.

Определение 8. Если функция $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется ***непрерывно дифференцируемой*** кривой. Если векторная функция $\vec{r}(t)$ n раз дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то кривая Γ называется n ***раз дифференцируемой*** кривой.

О п р е д е л е н и е 9. Точка кривой Γ, в которой $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$, называется ***неособой***, а точка, в которой $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ – ***особой***.

Пусть $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t))$. Поэтому точка M_0 является неособой точкой кривой Γ тогда и только тогда, когда

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0 .$$

Из определения неособой точки следует, что во всякой неособой точке кривой Г существует касательная.

О п р е д е л е н и е 10. ***Гладкой*** кривой называется кривая, которая является непрерывно дифференцируемой и не имеет особых точек. Если кривая составлена из конечного числа гладких кривых, то такая кривая называется ***кусочно-гладкой***.

Пусть кривая Γ задана уравнением $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) \middle| \ a \le t \le b \right\}$.

О п р е д е л е н и е 11. Для отрезка $[a;b]$ система $\tau_n = \{t_k\}$, $k = 0,1,..., n$, точек t_k, таких, что $a = t_0 < t_1 < ...t_{n-1} < t_n = b$, называется ***разбиением*** отрезка $[a;b]$. Соответствующий набор точек $M_k = M(t_k)$, $k = 0,1,..., n$, где $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t_k)$ называется ***разбиением*** кривой Γ.

Соединив последовательно точки M_0, M_1, ..., M_n, отрезками M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ получим ломаную P_n, которая называется ***вписанной*** в кривую Γ; отрезки $M_{k-1}M_k$, $k = 0,1,..., n$ называются ***звеньями*** ломаной P_n, а точки ломаной $M_k = M(t_k)$ – ***вершинами*** ломаной. Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})|$. Тогда длина всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| .$$

О п р е д е л е н и е 12. Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется ***длиной*** кривой:

$$L_\Gamma = \sup_{\tau_n} \sigma_n ,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\tau_n = \{ t_k \}$, $k = 0,1,..., n$, отрезка $[a;b]$.

Если $0 \le L_\Gamma < +\infty$ то кривая Γ называется ***спрямляемой***.

Теорема 1. *Если кривая* $\Gamma = \{ \vec{r}(t) \mid a \le t \le b \}$ *непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина* L_Γ *удовлетворяет неравенству*

$$\left|\vec{r}(a) - \vec{r}(b)\right| \le L_\Gamma \le c(b-a),$$

где $c = \max\limits_{[a;b]} \left|\vec{r}\,'(t)\right|$.

Без доказательства.

Теорема 2. *Если кривая* $\Gamma = \{ x(t); y(t); z(t) \mid a \le t \le b \}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $l = l(t)$, *отсчитываемая от начала кривой* Γ, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$l'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ .$$

► Обозначим через $M(t)$ конец радиус-вектора $\vec{r}(t)$. Пусть $l(t)$ – длина дуги кривой Γ от точки $M(a)$ до точки $M(t)$.

Тогда для точек $t_0 \in [a;b]$ и $t_0 + \Delta t \in [a;b]$ имеем $\Delta l = l(t_0 + \Delta t) - l(t_0)$. Очевидно, $|\Delta l|$ является длиной дуги с концами в точках $M(t_0)$ и $M(t_0 + \Delta t)$. Согласно теореме 1, имеет место неравенство

$$\left|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)\right| \le |\Delta l| \le c|\Delta t|$$

где c – наибольшее значение $c = \max\limits_{[t_0; t_0 + \Delta t]} \left|\vec{r}\,'(t)\right|$.

Обозначим через $\xi = \xi(\Delta t)$ точку этого отрезка, в которой $\left|\vec{r}\,'(\xi)\right| = c$. Разделим обе части неравенства на $|\Delta t|$:

$$\left|\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \left|\frac{\Delta l}{\Delta t}\right| \le \left|\vec{r}\,'(\xi)\right|.$$

Функция $l = l(t)$ является возрастающей, так как с увеличением дуги ее длина возрастает.

Поэтому, если $\Delta t > 0$, то $\Delta l \ge 0$, а если $\Delta t < 0$, то $\Delta l \le 0$. Следовательно, всегда $\dfrac{\Delta l}{\Delta t} \ge 0$ и поэтому можно записать $\left|\dfrac{\Delta l}{\Delta t}\right| = \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$.

Тогда $\left|\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \dfrac{\Delta l}{\Delta t} \le |\vec{r}\,'(\xi)|$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \le \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta t} \le \lim_{\Delta t\to 0}|\vec{r}\,'(\xi)|.$$

Отсюда $|\vec{r}\,'(t_0)| \le l'(t_0) \le |\vec{r}\,'(t_0)|$. Значит, $l'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$. В силу произвольности точки $t_0 \in [a;b]$, получим

$$l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|.$$

В координатной форме

$$l'(t) = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Поскольку $l'(t) = \dfrac{dl}{dt}$, то отсюда ***дифференциал длины дуги*** равен

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

3. Натуральное уравнение гладкой кривой. Уравнение нормальной плоскости. Пусть кривая $\Gamma = \{\, \vec{r}(t) \mid a \le t \le b \,\}$ гладкая кривая. В силу теоремы 2 переменная длина дуги $l = l(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a;b]$: $l'(t) = |\vec{r}\,'(t)|$. Так как $l(a) = 0$ и $l(b) = L_\Gamma$, то обратная функция $t = t(l)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; L_\Gamma]$. По теореме об обратной функции имеем

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0.$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой Γ ее параметр t является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины l, производная этой функции нигде не обращается в нуль. Следовательно, функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра и уравнение кривой Γ можно записать в виде $\vec{r}=\vec{r}(t(l)),\ l\in[0;L_\Gamma]$.

Определение 13. Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги l, то l называется ***натуральным параметром***, а уравнение кривой $\Gamma=\left\{\ \vec{r}=\vec{r}(l)\middle|\ 0\le l\le L_\Gamma\ \right\}$ называется ***натуральным уравнением*** кривой.

Пример. Записать натуральное уравнение винтовой линии (рис.4)

$$\Gamma=\left\{\ x=a\cos t; y=a\sin t; z=bt\middle|\ 0\le t\le T\ \right\}.$$

Решение. Векторная функция $\vec{r}(t)=(a\cos t; a\sin t; bt)$ является непрерывно дифференцируемой и

$$\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}>0\ .$$

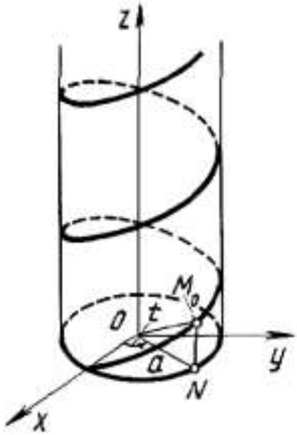


Рис.4.

Тогда $l'(t)=\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\sqrt{a^2+b^2}$. Интегрируя обе части, получим $l(t)=t\sqrt{a^2+b^2}+C$. Из начального условия $l(0)=0$, имеем $C=0$. При этом длина винтовой линии равна $L_\Gamma=T\sqrt{a^2+b^2}$.

Следовательно, $t=\dfrac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Отсюда натуральное уравнение винтовой линии в координатной форме запишется в виде:

$$\Gamma=\left\{x=a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}};\, y=a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}};\, z=b\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\},$$

где $0\le l\le T\sqrt{a^2+b^2}$.

Теорема 3. *Пусть кривая* $\Gamma=\left\{\vec r(t)\,\middle|\, a\le t\le b\right\}$ *гладкая, а* $l=l(t)$ *– переменная длина ее дуги. Тогда* $\frac{d\vec r}{dl}$ *является единичным касательным к кривой* Γ *вектором и* $\left|\frac{d\vec r}{dl}\right|=1$.

► Вектор $\frac{d\vec r}{dl}$ можно записать в виде $\frac{d\vec r}{dl}=\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{dt}{dl}$. Вектор $\frac{d\vec r}{dl}$ отличается от касательного вектора $\frac{d\vec r}{dt}\ne 0$ только числовым множителем $\frac{dt}{dl}$ и поэтому также направлен по касательной. Тогда $\left|\frac{d\vec r}{dl}\right|=\left|\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{dt}{dl}\right|=\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{dl}\right|=\left|\vec r\,'(t)\right|\cdot\frac{1}{l'(t)}=\frac{\left|\vec r\,'(t)\right|}{\left|\vec r\,'(t)\right|}=1$. ◄

Геометрически условие $\left|\frac{d\vec r}{dl}\right|=1$ означает, что отношение длины хорды M_0M к длине стягиваемой ею дуги $\overset{\smile}{M_0M}$ стремится к единице при $\Delta t\to 0$ (рис. 5)

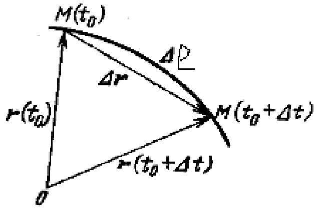


Рис.5.

Следствие. *Пусть кривая* Γ *задана натуральным уравнением* $\Gamma=\left\{\vec r=\vec r(l)\,\middle|\, 0\le l\le L_\Gamma\right\}$. *И пусть* α , β , γ *– углы, образо-*

ванные вектором касательной $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ *к кривой* Γ *с осями* Ox , Oy , Oz *соответственно. Тогда* $\dfrac{d\vec{r}}{dl}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$.

Без доказательства.

О п р е д е л е н и е 14. ***Нормальной плоскостью*** к кривой Γ называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и преходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка касания (рис.5).

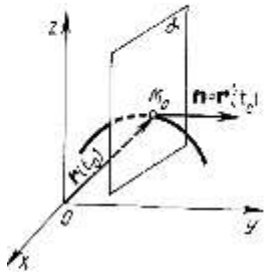


Рис.5.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α , проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

где $\vec{n}=(A,B,C)$ – нормальный вектор плоскости. Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n}=(A,B,C)$ и $\vec{r}\,'(t_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ коллинеарные, поэтому можно положить $A=x'(t_0)$, $B=y'(t_0)$, $C=z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(z-z_0)=0.$$

Пример. Найти уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к годографу винтовой линии

$$\Gamma=\left\{x=a\cos t;y=a\sin t;z=bt\middle|\ 0\le t\le T\ \right\}$$

в точке $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. Координаты точки касания $M_0(x_0,y_0,z_0)$ есть:

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2},\ y_0=a\sin\frac{\pi}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ z_0=b\frac{\pi}{3}.$$

Координаты вектора $\vec{r}'(t_0)$:

$$x'(t_0) = -a\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{a\sqrt{3}}{2},\ y'(t_0) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}.\ z'(t_0) = b.$$

Тогда уравнение касательной прямой имеет вид

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z-\frac{b\pi}{3}}{b},$$

а уравнение нормальной плоскости

$$-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{a}{2}\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)-b\left(z-\frac{b\pi}{3}\right)=0.$$

Вопросы для самоконтроля

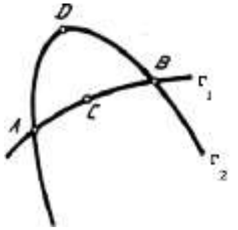
1. Дайте определение кривой. Перечислите способы задания кривой.
2. Какая прямая называется касательной к кривой?
3. Какая кривая называется гладкой кривой?
4. Что называется разбиением кривой?
5. Какая кривая называется спрямляемой? Дайте определение длины кривой.
6. Чему равен дифференциал дуги?
7. Какое уравнение называется натуральным уравнением гладкой кривой?
8. Чему равна длина единичного вектора касательной? Какие координаты он имеет?
9. Выведите уравнение касательной к кривой.

Лекция 12. КРИВИЗНА КРИВОЙ.

1. Понятие кривизны кривой.
2. Радиус, круг и центр кривизны плоской кривой.
3. Эволюта и эвольвента плоской кривой.
4. Сопровождающий трехгранник кривой.

1. Понятие кривизны кривой. Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – *кривизна*.

Пример. О двух плоских кривых $ACB \subset \Gamma_1$ и $ADB \subset \Gamma_2$ (рис.1) можно сказать, что кривая Γ_2 более изогнута, чем Γ_1.



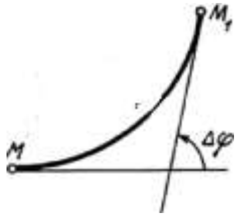


Рис.1.

Рис.2.

Однако для того, чтобы строго оценить степень изогнутости плоской линии, необходимо ввести количественную характеристику ее изогнутости (кривизны).

Рассмотрим на кривой точки M и M_1. Проведем в этих точках касательные к кривой. При переходе по кривой из точки M в точку M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется ***углом смежности*** (рис.2).

Отношение угла смежности дуги к ее длине называется ***средней кривизной дуги:*** $K_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой на всей дуге. На отдельных участках кривой кривизна может значительно отличаться от средней. Чтобы избежать такой неопределенности, вводится количественная мера изогнутости кривой в точке M. Эта характеристика основана на том, что чем меньше дуга Γ (рис.2), тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость линии вблизи точки M.

Определение 1. ***Кривизной*** K линии Γ в точке M

называется предел, к которому стремится средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1 линии Γ при стремлении точки M_1 к точке M :

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ср}} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \right|.$$

2. Вычисление кривизны кривой. Векторное представление кривой. Пусть кривая Γ является годографом дважды дифференцируемой векторной функции действительного аргумента $\Gamma = \{\vec{r}(t) | \; a \le t \le b\}$ (рис.3).

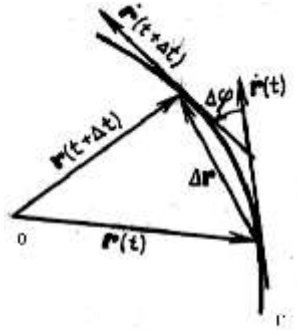


Рис.3.

Кривизна кривой $K = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \left| \dfrac{\Delta \varphi}{\Delta l} \right|$. Угол смежности $\Delta \varphi$ – угол между $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,'(t + \Delta t)$. Тогда вектор $\vec{r}\,'(t + \Delta t) = \vec{r}\,'(t) + \Delta \vec{r}\,'(t)$.

Из векторного произведения векторов $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}\,'(t + \Delta t)$, находим:

$$\sin \Delta \varphi = \frac{|\vec{r}\,' \times (\vec{r}\,' + \Delta \vec{r}\,')|}{|\vec{r}\,'| |\vec{r}\,' + \Delta \vec{r}\,'|}.$$

Поскольку $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,' = 0$, то $\sin \Delta \varphi = \dfrac{|\vec{r}\,' \times \Delta \vec{r}\,'|}{|\vec{r}\,'| |\vec{r}\,' + \Delta \vec{r}\,'|}$.

При $\Delta t \to 0$ имеем $\Delta l \to 0$ и $\Delta \varphi \to 0$. Также $\Delta \varphi \sim \sin \Delta \varphi$, так как $\lim\limits_{\Delta \varphi \to 0} \dfrac{\sin \Delta \varphi}{\Delta \varphi} = 1$.

Следовательно, кривизна

$$K = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta l} \right| = \lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\sin \Delta \varphi}{\Delta l} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{r}\,' \times \Delta \vec{r}\,'|}{|\vec{r}\,'| |\vec{r}\,' + \Delta \vec{r}\,'| \cdot |\Delta l|} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left| \vec{r}\,' \times \dfrac{\Delta \vec{r}\,'}{\Delta t} \right|}{\left| \vec{r}\,' \right| \left| \vec{r}\,' + \Delta \vec{r}\,' \right| \cdot \left| \dfrac{\Delta l}{\Delta t} \right|}.$$

Если $\Delta t \to 0$, то $\vec{r}\,'(t + \Delta t) \to \vec{r}\,'(t)$ и $|\Delta l| \approx |\Delta r|$; тогда

$$K = \frac{\left| \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \right|}{\left| \vec{r}\,'^3 \right|}.$$

Данная формула используется для вычисления кривизны кривой Γ, если она является годографом дважды дифференцируемой векторной функции $r(t)$.

В параметрическом виде. Пусть гладкая плоская кривая Γ задана параметрическими уравнениями:

$$\Gamma = \{ x(t); y(t); z(t) |\ a \le t \le b \}.$$

Тогда вектор-функция имеет вид

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Отсюда

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k},$$

$$\left| \vec{r}\,' \right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\vec{r}\,''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}.$$

Тогда $\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$ и

$$\left| \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \right| = \sqrt{\left(y'z'' - y''z' \right)^2 + \left(z'x'' - z''x' \right)^2 + \left(x'y'' - x''y' \right)^2}.$$

Подставляя в формулу для вычисления кривизны, получим искомое выражение.

В декартовых координатах. Если кривая Γ, задана уравнением $y = f(x)$, то формулу для вычисления ее кривизны можно получить из формулы вычисления кривизны, положив в ней $t = x$, $z = 0$.

Действительно, уравнение линии Γ можно записать в параметрическом виде: $\left. \begin{array}{c} y = f(x), \\ t = x. \end{array} \right\}$

Тогда $\left|\vec{r}'\times\vec{r}''\right| = \sqrt{0+0+\left(1\cdot y'' - 0\right)^2} = \left|y''\right|$ и $\left|\vec{r}'\right| = \sqrt{1+y'^2}$.

Значит, $K = \dfrac{\left|y''\right|}{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{3/2}}$.

Пример. Вычислить кривизну кривой $y = \ln x$ в точке $x = 1$.

Решение. Находим $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Тогда кривизна кривой $y = \ln x$ в любой ее точке M с абсциссой x есть

$$K = \frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{|x|}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} .$$

В точке $x = 1$ имеем $K\Big|_{x=1} = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

3. Радиус, круг и центр кривизны плоской кривой. Проведем к кривой Γ нормаль в точке $M(x;y)$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN = R$ (рис.4), по величине обратный кривизне K :

$$R = \frac{1}{K} .$$

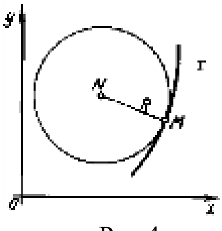


Рис.4.

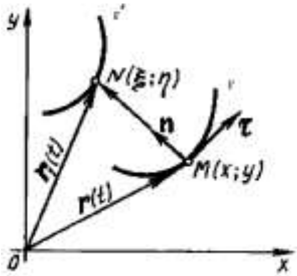


Рис.5.

Отрезок MN называется ***радиусом кривизны***, точка N – ***центром кривизны***, а круг с центром в точке N и радиусом R – ***кругом кривизны кривой*** в точке $M(x;y)$.

В случае, когда кривая Γ задана *в декартовой системе* координат Oxy уравнением $y = f(x)$, то ее радиус кривизны находится по формуле:

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''\right|}.$$

Если кривая Γ в плоскости Oxy задана *параметрическими уравнениями*, то ее радиус кривизны определяется по формуле:

$$R=\frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x'-y'x''\right|}.$$

Если кривая Γ – годограф вектор-функции $r=r(t)$, то:

$$R=\frac{\left|\vec{r}\,'\right|^3}{\left|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right|}.$$

4. Эволюта и эвольвента плоской кривой. Из определения центра кривизны следует, что каждой точке M кривой Γ, соответствует точка N – центр кривизны кривой Γ' в точке M.

Определение 2. Множество точек Γ' центров кривизны линии Γ называется ее ***эволютой***, а сама линия Γ по отношению к своей эволюте называется ***эвольвентой***.

Выведем уравнение эволюты кривой Γ.

Векторное представление кривой. Пусть кривая Γ задана уравнением $\vec{r}(t)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$ в плоскости Oxy. Пусть $N(\xi;\eta)$ – центр кривизны линии Γ в точке M (рис.5).

Тогда для любой точки $M(x;y)\in\Gamma$ имеем $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}$. Обозначим $\overrightarrow{ON}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, $\overrightarrow{MN}=R\cdot\vec{n}^{\,0}$, где $\vec{n}^{\,0}$ – единичный вектор нормали кривой Γ. Тогда

$$\vec{r}_1=\vec{r}+R\vec{n}^{\,0}.$$

Это уравнение называется ***векторным уравнением эволюты кривой*** Γ.

В параметрическом виде. Запишем разложения векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ по базису $B=\{\vec{i},\vec{j}\}$: $r_1=\xi\cdot\vec{i}+\eta\cdot\vec{j}$ и $\vec{r}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$. Найдем вектор $\vec{n}^{\,0}$. Единичный вектор касательной к кривой Γ

$$\vec{\tau}=\frac{r'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}=\frac{x'\cdot\vec{i}+y'\cdot\vec{j}}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{i}+\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{j}.$$

Продифференцируем равенство $\vec{\tau}^{\,2}=1$ по t. Имеем

$$2\vec{\tau}=\frac{d\vec{\tau}}{dt}=0.$$

Отсюда $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\perp\vec{\tau}$. Таким образом, вектор нормали $\vec{n}=\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Найдем координаты вектора $\vec{n}$:

$$\vec{n}=\frac{d\vec{\tau}}{dt}=\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'\vec{i}+\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'\vec{j}=$$

$$=-y'\frac{x'y''+y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{i}+x'\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec{j}.$$

Тогда $\vec{n}^{\,0}=\mp\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{i}\pm\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec{j}$.

Подставим $\vec{n}^{\,0}$ и $R=\dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x'-y'x''\right|}$ в векторное уравнение эволюты $\vec{r}_1(t)=\vec{r}(t)+R\cdot\vec{n}^{\,0}$:

$$\xi\cdot\vec{i}+\eta\cdot\vec{j}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}\vec{i}+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\vec{j}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях выражения, получим:

$$\xi=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''},\qquad \eta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}.$$

Данные формулы являются параметрическими уравнениями эволюты Γ' кривой $\Gamma=\left\{x(t);y(t);z=0\middle|\ 0\le t\le T\right\}$. Сама же кривая Γ является эвольвентой по отношению к кривой Γ'.

Ниже приведены **свойства** эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними

1. Нормаль к эвольвенте Γ является касательной к эволюте в соответствующей точке.

2. Если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты.

Пример. Найти эволюту эллипса

$$\Gamma = \left\{ x = a\cos t; y = b\sin t; 0 \le t \le 2\pi \right\}.$$

Решение. Имеем

$$x' = -a\sin t\,,\ y' = b\cos t\,,\ x'' = -a\cos t\,,\ y'' = -b\sin t\,.$$

Подставляя в формулы для эволюты, получим

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t\,,\ \eta = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t\,.$$

Данные уравнения являются параметрическими уравнениями астроиды (рис.6).

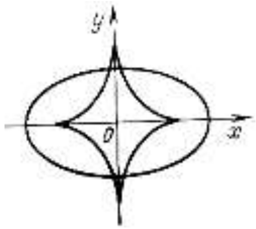


Рис.6. Эволюта эллипса

4. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Любая прямая, лежащая в нормальной плоскости к кривой Γ в точке M_0 и проходящая через точку M_0 называется нормалью кривой Γ в точке M_0. Среди всех нормалей выделяют одну – главную нормаль.

Пусть Γ – гладкая кривая, заданная уравнением $\Gamma = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(t) \middle| \ a \le t \le b \right\}$ и для всех $t \in [a;b]$ существует $\vec{r}\,''(t)$. В этом случае говорят, что Γ – дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда существуют $\frac{d\vec{r}}{dl}$ и $\frac{d^2\vec{r}}{dl^2}$, причем $\frac{d\vec{r}}{dl}$ – единичный вектор касательной. Обозначим $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dl}$, $|\vec{\tau}| = 1$ Тогда вектор $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{d^2\vec{r}}{dl^2}$ ортогонален вектору $\vec{\tau}$.

Предположим, что $\frac{d\vec{\tau}}{dl} \ne 0$ и $k = \left| \frac{d\vec{\tau}}{dl} \right|$. И пусть $\vec{\nu}$ – единичный вектор, параллельный вектору $\frac{d\vec{\tau}}{dl}$. Тогда $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = k\vec{\nu}$, $|\vec{\nu}| = 1$, причем вектор $\vec{\nu}$ ортогонален касательному вектору $\vec{\tau}$.

Так как вектор $\vec{\tau}$ параллелен вектору касательной $\vec{r}'(t)$ к кривой Γ, то вектор $\vec{\nu}$ параллелен нормальной плоскости кривой Γ в точке M_0. Поэтому вектор $\vec{\nu}$ параллелен одной из нормалей кривой Γ в точке M_0. Эта нормаль называется ***главной нормалью***.

Рассмотрим вектор $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$, который ортогонален векторам $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$. Прямая, проходящая через точку параллельно вектору $\vec{\beta}$, называется ***бинормалью***. Тетраэдр с вершиной в точке кривой, ребра которого имеют длину , равную единице и параллельны векторам $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$, называется ***сопровождающим трехгранником Френе***.

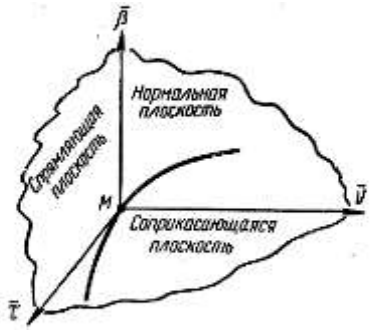


Рис.7. Сопровождающий трехгранник Френе

Плоскость, содержащая векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$, называется ***соприкасающейся*** плоскостью. Плоскость, содержащая векторы $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$, есть ***нормальная*** плоскость. Плоскость, содержащая векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{\tau}$, называется ***спрямляющей*** плоскостью.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение кривизны и радиуса кривизны кривой.
2. Как вычисляется кривизна в случаях векторного, параметрического представления кривой?
3. Дайте определение радиуса, круга и центра кривизны плоской кривой.
4. Что называется эволютой и эвольвентой плоской кривой?
5. Какие векторы составляют сопровождающий трехгранник Френе?

Тема 2
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Лекция 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Определение первообразной функции.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Таблица основных правил и формул интегрирования.
4. Основные методы интегрирования.

1. Определение первообразной функции. Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной $f'(x)$ или дифференциала $df = f'(x)dx$ функции $f(x)$. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Таким образом, *основной задачей интегрального исчисления* является восстановление функции $F(x)$ по известной производной или дифференциалу этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т.д.

Определение 1. Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}$, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Пример. Первообразной для функции $f(x) = \sin x$ на множестве $\mathbf{R}$ является функция $F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x$ или $dF(x) = d(-\cos x) = \sin x dx \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Теорема 1. *Любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.*

Без доказательства.

Теорема 2. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на множестве X, то они* *отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т.е.* $F_2(x)=F_1(x)+C$*, где* C *– постоянная.*

► Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции $f(x)$ на X. Их разность $F(x)=F_2(x)-F_1(x)$ является дифференцируемой функцией:

$$F'(x)=F_2'(x)-F_1'(x)= f(x)-f(x)=0.$$

По теореме Лагранжа имеем $F(x)=C$. Значит $F_2(x)-F_1(x)=C \quad \forall x\in X$ ◄

Следствие. *Если* $F(x)$ *– некоторая первообразная функции* $f(x)$ *на множестве* X*, то все первообразные этой функции определяются выражением* $F(x)+C$*, где* C *– произвольная постоянная.*

Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется ***интегрированием***.

2. Неопределенный интеграл и его свойства.

Определение 2. Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

выражение $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x)$ – ***подынтегральной*** функцией, x – ***переменной интегрирования***, а C – ***постоянной интегрирования***.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

Примеры:

1) $\int 2xdx=x^2+C$, так как $\left(x^2+C\right)'=2x$ или $d\left(x^2+C\right)=2xdx$;

2) $\int e^x dx=e^x+C$, поскольку $\left(e^x+C\right)'=e^x$ или

$$d\left(e^x+C\right)=e^x dx;$$

3) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$, так как $(\mathrm{tg}x+C)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ или

$$d(\mathrm{tg}x + C) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

С **геометрической** точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой* $x = x_0$ *параллельны между собой*:

$$\left(F(x) + C\right)'\Big|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

На рисунке 1 изображен неопределенный интеграл $x^2 + C$ от функции $f(x) = 2x$:

$$\int 2x dx = x^2 + C,$$

который представляет собой семейство парабол $\{y = x^2 + C\}$.

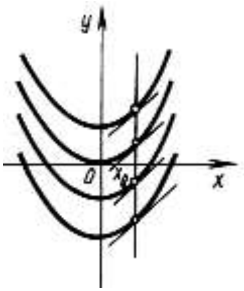


Рис. 1. Геометрический смысл неопределенного интеграла

Кривые семейства $\{F(x) + C\}$ называются ***интегральными кривыми***. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

► Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тогда

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

и дифференциал

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx. \text{ ◄}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

► Действительно, так как $dF(x) = F'(x)dx$, то

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \text{ ◄}$$

Пример. $\int 2xe^{x}dx = \int d\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2} + C$.

3. Постоянный множитель $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла*:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

► Действительно, пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Тогда $aF(x)$ – первообразная функции $af(x)$:

$$(aF(x))' = a'F(x) = af(x).$$

Отсюда следует, что

$$a\int f(x)dx = a(F(x)+C) = aF(x) + C_1 = \int af(x)dx,$$

где постоянная $C_1 = aC$. ◄

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечно числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx =$$

$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

► Доказательство проведем для двух функций. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразные функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$: $F'(x) = f_1(x)$,

$\Phi'(x) = f_2(x)$. Тогда функции $F(x) \pm \Phi(x)$ являются первообразными функций $f_1(x) \pm f_2(x)$. Следовательно,

$$\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = (F(x) + C_1) \pm (\Phi(x) + C_2) = (F(x) \pm \Phi(x)) +$$

$$+ (C_1 \pm C_2) = (F(x) \pm \Phi(x)) + C = \int (f_1(x) \pm f_2(x))dx. \blacktriangleleft$$

5. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

► Действительно, $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = f(ax+b)$. ◄

6 (инвариантность формул интегрирования). Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ или } \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u – дифференцируемая функция.

► Воспользуемся свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка: если $dF(x) = F'(x)dx$ и $dF(u) = F'(u)du$, где $u = u(x)$. Пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Докажем, что $\int f(u)du = F(u) + C$.

Для этого найдем дифференциал от левой и правой части равенства:

$$d\left(\int f(u)du\right) = d(F(u) + C).$$

Отсюда $f(u)du = F'(u)du$ или $f(u)du = f(u)du$.

Из равенств этих дифференциалов следует справедливость свойства 6. ◄

3. Таблица основных правил и формул интегрирования. Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то большинство из приводимых формул может быть получено обращением соответствующих формул дифференцирования.

Основные правила интегрирования функций

1. $\left(\int f(u)du\right)' = f(u)$.

2. $d\left(\int f(u)du\right) = f(u)du$.

3. $\int dF(u) = F(u) + C$.

4. $\int af(u)du = a\int f(u)du$.

5. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x)\right)dx =$

$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx$.

6. $\int f(au+b)du = \dfrac{1}{a}F(au+b) + C$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

2. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.

3. $\int e^u du = e^u + C$.

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

6. $\int \cos u du = \sin u + C$.

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.

8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.

9. $\int \mathrm{sh} u du = \mathrm{ch} u + C$.

10. $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C$.

11. $\int \dfrac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th} u + C$.

12. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$.

14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a-u}{a+u}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \quad (|u| > |a|)$.

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} = C \quad (|u| < |a|)$.

18. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$.

19. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$.

Некоторые из приведенных выше формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Если первообразная $F(x)$ функция $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл* $\int f(x)dx$ *выражается в элементарных функциях или функция* $f(x)$ *интегрируема в конечном виде*. Однако не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях. Используя основные правила интегрирования, можно находить интегралы от более сложных функций.

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

4. Основные методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов, основанное на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется ***непосредственным интегрированием.***

Примеры.

1. $\int 2^x \cdot 3^{2x} dx = \int \left(2^x \cdot 3^2\right)^x dx = \int 18^x dx = \dfrac{18^x}{\ln 18} + C$;

2. $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C$;

3. $\int \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2}\right) dx =$

$= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$.

Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, учитывая $dx = \varphi'(t)dt$.

Теорема 3. *Пусть функция* $x = \varphi(t)$ *определена и дифференцируема на некотором множестве* T. *И пусть* X *– множество значений функции* $x = \varphi(t)$, *на котором определена функция* $f(x)$. *Тогда если на множестве* X *функция* $f(x)$ *имеет первообразную, то на множестве* T *справедлива формула замены переменной*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

► Формула справедлива, если после дифференцирования обеих ее частей получаются одинаковые выражения.

Учитывая, что $f(x) = f(\varphi(t))$ – сложная функция, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \int f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Продифференцировав правую часть данной формулы, получим

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Таким образом, формула замены переменной в неопределенном интеграле справедлива. ◄

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют ***«подведением» множителя*** $\varphi'(x)$ ***под знак дифференциала.***

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx .$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x) = u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du .$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

Пример.

$$\int \mathrm{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [u = \cos x] = -\int \frac{du}{u} =$$
$$= -\ln|\cos x| + C .$$

Интегрирование по частям. Метод интегрирования по частям основан на следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *– две дифференцируемые функции переменной* x *на промежутке* X *. И пусть функция* $u'(x)v(x)$ *имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция* $v'(x)u(x)$ *также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

► Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x. Тогда

$$d(uv) = udv + vdu .$$

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu .$$

Но так как $\int d(uv) = uv + C$, то

$$\int udv = uv - \int vdu . \blacktriangleleft$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям:

I. <u>Интегралы вида</u> $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$. Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$, относительно x, $k\in\mathbf{R}$. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u=P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз.

II. <u>Интегралы вида</u> $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\, xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\, xdx$. Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$, относительно x. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

III. <u>Интегралы вида</u> $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bxdx$, $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bxdx$ (a, b – числа) вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Примеры.

1. $$\int(x-4)\sin 2xdx=\begin{bmatrix} u=x-4;\ du=1\cdot dx; \\ dv=\sin 2xdx;\ v=-\dfrac{1}{2}\cos 2x\end{bmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot(x-4)+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{x-4}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

2. $$\int(x-1)\ln xdx=\begin{bmatrix} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}dx; \\ dv=(x-1)dx;\ v=\dfrac{(x-1)^2}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}\ln x-\int\frac{(x-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{(x-1)^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-2x+1}{x}dx=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{(x-1)^2}{2}\ln x-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x+\ln x\right)+C.$$

3. $$\int e^{-x}\cos 2x dx=\begin{bmatrix} u=e^{-x};\ du=-e^{x}dx; \\ dv=\cos 2x;\ v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{bmatrix}=$$

$$=-e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\int e^{-x}\cdot\sin 2x dx=\begin{bmatrix} u=e^{-x};\ du=-e^{x}dx; \\ dv=\sin 2x;\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx\right)=$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x+\frac{e^{-x}}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx.$$

Отсюда

$$\int e^{-x}\cos 2x dx=-\frac{e^{-x}}{2}\sin 2x+\frac{e^{-x}}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 2x dx.$$

Выразим искомый интеграл

$$\int e^{-x}\cos 2x dx\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{e^{-x}}{4}(-2\sin 2x+\cos 2x).$$

Тогда $\int e^{-x}\cos 2x dx=\dfrac{e^{-x}(-2\sin 2x+\cos 2x)}{5}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Перечислите свойства первообразной.

2. В чем состоит его геометрический смысл?

3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

4. Как осуществляется интегрирование с помощью замены переменной?

5. Как осуществляется интегрирование с помощью интегрирования по частям?

Лекция 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. Рациональные дроби.
2. Интегрирование простейших рациональных дробей.
3. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.
4. Интегрирование рациональных дробей.

1. Рациональные дроби.

Определение 1. ***Рациональной дробью*** $R(x)$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе $n\geq m$, то дробь называется ***неправильной***. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе $n<m$, то дробь называется ***правильной***.

Пример. Дробь $\dfrac{2x^5}{x^2+3x+2}$ является неправильной дробью, $\dfrac{x^2+1}{x^4+x-2}$ – правильной дробью.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби. Это представление достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен-частное (целая часть) дроби $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$; $P_n(x)$ – остаток (многочлен степени $n<m$).

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

2. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Определение 2. ***Простейшей дробью*** называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$,   2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n \ge 2)$,

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$,   4) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$ $(n \ge 2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен не имеет действительных корней, т.е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

Простейшие дроби *первого* типа интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C .$$

Дроби *второго* типа интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) =$$

$$= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C .$$

Интеграл от простейшей дроби *третьего* типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифференциала знаменателя и приведения знаменателя к сумме квадратов:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left[\begin{array}{l} d\left(x^2+px+q\right) = (2x+p)dx, \\ Mx+N = \dfrac{M}{2}(2x+p) + N - \dfrac{Mp}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} + C .$$

При интегрировании простейшей рациональной дроби *четвертого* типа $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}$ сделаем замену переменной, положив $x+\frac{p}{2}=t$. Откуда $dx=dt$ и :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2+a^2,$$

где $a^2=q-\frac{p^2}{4}$.

Тогда

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=\int \frac{M(x+p/2)+N-Mp/2}{((x+p/2)^2+q-p^2/4)^n}dx=$$

$$=M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}==MI_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n .$$

Вычислим интеграл I_0:

$$I_0=\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)=$$

$$=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C .$$

Для вычисления интеграла $I_n=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, представим его в виде

$$I_n=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt=\frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}-\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right)$$

Замечая, что $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}=I_{n-1}$, получаем

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left(I_{n-1}-\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}\right).$$

Вычисление интеграла $\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^n}$ осуществляется с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \left[\begin{array}{l} u = t, du = dt, \\ dv = \dfrac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}, \dfrac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}$$

Подставляя найденное выражение, имеем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Данная формула является ***рекуррентной***. Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

находятся интегралы I_n, $n \geq 2$.

В частности при $n = 2$ имеем

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2\left(t^2+a^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

3. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.

Теорема 1. *Правильную рациональную дробь* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, *где* $Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2+px+q\right)^s$, *можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, …, M_s, N_s *– некоторые действительные числа*.

Без доказательства.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Пример. Разложить на элементарные дроби $\dfrac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}$

Решение. Выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2=x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда $\dfrac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$.

Чтобы найти коэффициенты разложения, чаще всего используется метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода неопределенных коэффициентов состоит в следующем.

▪ Раскладываем правильную рациональную дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

▪ Простейшие дроби приводим к общему знаменателю $Q_m(x)$.

▪ Многочлен, получившийся в числителе, приравниваем к многочлену $P_n(x)$.

▪ Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая это, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Имеем систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_k$, B_1, $B_2, \ldots, B_k$, M_1, $M_2, \ldots,$ M_s, N_1, $N_2, \ldots, N_s$.

Пример. Для предыдущего примера, имеем

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+3}=\frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)}.$$

Отсюда $1=Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:

$$1=x^3(A+C)+x^2(B+D)+x\cdot 3A+3B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, D.

$x^3: 0=A+C$,

$x^2: 0=B+D$,

$x^1: 0=3A$,

$x^0: 1=3B$.

Отсюда $A=0$, $B=\dfrac{1}{3}$, $C=0$, $D=-\dfrac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5+6x^3+13}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3\left(x^2+3\right)}.$$

М е т о д ч а с т н ы х з н а ч е н и й. При нахождении неопределенных коэффициентов вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, можно дать переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов). Тогда получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Этот метод удобно применять в случае, когда корни знаменателя рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ просты и действительны. Тогда последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя.

Пример. Разложить рациональную дробь $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ на простейшие.

Решение. Поскольку $x^3-4x = x(x+2)(x-2)$, имеем

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}.$$

Отсюда

$$4x^2+16x-8 = A(x+2)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+2).$$

Придавая x последовательно частные значения, равные корням $x=0$, $x=-2$ и $x=2$, получим

$-8=-4A$, $-24=8B$, $40C=8C$.

Отсюда $A=2$, $B=-3$, $C=5$.

Таким образом,

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}.$$

Иногда для нахождения неопределенных коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, т.е. придавать x ряд частных значений и приравнивать коэффициенты при некоторых степенях x.

4. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование рациональных дробей осуществляется по следующему правилу.

Правило интегрирования рациональных дробей. Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить действия:

1) если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная ($k \ge m$),то необходимо представить ее в виде суммы

многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $n < m$; $R(x)$ – многочлен;

2) если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильная ($k < m$), то необходимо представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;

3) интеграл от рациональной дроби представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

Пример.

Вычислить интеграл $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} dx$.

Решение. Ранее было получено

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)} \right) dx =$$

$$= 2\int x dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+3} dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется правильной рациональной дробью?
2. Какие виды простейших рациональностей вы знаете?
3. Как интегрируются простейшие рациональные дроби?
4. Сформулируйте теорему о разложении правильной дроби на простейшие.
5. В чем суть метода неопределенных коэффициентов?
6. В чем суть метода частных значений?
7. Сформулируйте правило интегрирования рациональной дроби.

Лекция 3.
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ...\right)dx$ (m_1, $m_2, \ldots \in \mathbf{Z}$, n_1, $n_2, \ldots \in \mathbf{N}$).

2.Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ...\right)dx$ (m_1, $m_2, \ldots \in \mathbf{Z}$, n_1, $n_2, \ldots \in \mathbf{N}$).

3. Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

4. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m, n, p \in \mathbf{Q}$, a, $b \in \mathbf{R}$).

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ...\right)dx$ **(**m_1**,** m_2**,…**$\in \mathbf{Z}$**,** n_1**,** n_2**,…**$\in \mathbf{N}$**)**. Через $R(u,v,w,...)$ обозначается рациональная функция относительно $u,v,w,...$ т.е. выражение, которое получено из любых величин $u,v,w,...$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий.

В данных интегралах подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования и радикалов от x. Они вычисляются подстановкой $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1} = r_1$, $\frac{m_2}{n_2} = r_2$, … являются целыми числами, т.е. интеграл приводится к рациональной функции от переменной t:

$$\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, ...\right)dx = \int R\left(t^s, t^{r_1}, t^{r_2}, ...\right)st^{s-1}dt .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Имеем:

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} x=t^4, \\ dx = 4t^3dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+t}{t^4+t^2}4t^3dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1}dt =$$

$$= 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt = 4\int \left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right) = 4t + 2\ln\left(t^2+1\right) -$$

$$-4\operatorname{arctg} t + C = \left[t = \sqrt[4]{x}\right] = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln\left(\sqrt[2]{x}+1\right) - 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

2. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx$ **(** m_1, $m_2, \ldots \in$ **Z**, n_1, $n_2, \ldots \in$ **N**). Данные интегралы подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, …, сводятся к рациональной функции от переменной t.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1}} = \begin{bmatrix} 2x+1 = t^6, \\ x = \frac{1}{2}\left(t^6-1\right), \\ dx = 3t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2dt}{t-1} =$$

$$= 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 3\int \left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + C = \left[t = \sqrt[6]{2x+1}\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$$

3. Интегралы вида $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $I_3 = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Для вычисления интеграла I_1 выделяется полный квадрат под знаком радикала:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{2a^2}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)$$

и применяется подстановка $x + \frac{b}{2a} = u$, $dx = du$.

В результате этот интеграл сводится к табличному:

$$I_1 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}}.$$

В числителе интеграла I_2 выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала, и этот интеграл представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2 = \int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d\left(ax^2 + bx + c\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{A}{2a}\right) I_1 =$$

$$\frac{A}{2a}\int \frac{d\left(ax^2 + bx + c\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1 =$$

$$= \frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2 + bx + c\right)} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла I_3 сводится к вычислению интеграла I_1 подстановкой:

$$x = \frac{1}{u},\ dx = -x = \frac{1}{u^2} du.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{aligned} & x-1=\frac{1}{t}, \\ & dx=-\frac{1}{t^2}\,dt \end{aligned} \right] = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}} =$$

$$= -\int \frac{\sqrt{t^2}\,dt}{t\sqrt{-1-2t}} = -\int \frac{|t|\,dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \left[\begin{aligned} & |x|<1 \Rightarrow x-1<0 \\ & \Rightarrow\ \ t<0 \end{aligned} \right] =$$

$$= -\int \frac{-t\,dt}{t\sqrt{-1-2t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} = \int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t) = -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = \left[t=\frac{1}{x-1} \right] =$$

$$= -\left(-1-2\frac{1}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,.$$

4. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Частные случаи вычисления интегралов данного вида рассмотрены в предыдущем пункте. Иногда для вычисления данного интеграла используются тригонометрические подстановки.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной можно представить в виде $u^2 \pm k^2$. Таким образом, достаточно ограничиться рассмотрением трех видов интегралов:

$$I_1 = \int R\left(u, \sqrt{k^2-u^2}\right)du\,,\ I_2 = \int R\left(u, \sqrt{k^2+u^2}\right)du\,,$$

$$I_3 = \int R\left(u, \sqrt{u^2-k^2}\right)du\,.$$

Интеграл $I_1 = \int R\left(u, \sqrt{k^2-u^2}\right)du$ подстановкой $u = k\sin t$ (или $u = k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_2 = \int R\left(u, \sqrt{k^2+u^2}\right)du$ подстановкой $u = k\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u = k\,\mathrm{ctg}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_3=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du$ подстановкой $u=k\sec t$ (или $u=k\operatorname{cosec} t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\begin{bmatrix}x=a\cos t;\\ dx=-a\sin t dt\end{bmatrix}=\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}(-a)\sin t dt=$$

$$=-a^2\int\sqrt{1-\cos^2 t}\sin t=a^2\int\sin^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\left[t=\arccos\frac{x}{a}\right]=\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{x}{a}-\frac{1}{4}2\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arccos\frac{x}{a}\right)\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}-\frac{a^2x}{2a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

5. Интегралы вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m,n,p\in\boldsymbol{Q}$, a, $b\in\boldsymbol{R}$).

Интегралы вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m,n,p\in\boldsymbol{Q}$, a, $b\in\boldsymbol{R}$), называются ***интегралами от дифференциального бинома*** $x^m\left(a+bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) если $p\in\boldsymbol{Z}$, то используется подстановка $x=t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}\in\boldsymbol{Z}$, то используется подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$;

3) если $\frac{m+1}{n}+p\in\boldsymbol{Z}$, то используется подстановка $ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби $p=\frac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П.Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} = \left[\begin{array}{l} p=-\frac{3}{2}\notin \mathbf{Z}; m=-2; n=2; \\ \frac{m+1}{n}=-\frac{1}{2}\notin \mathbf{Z}; \frac{m+1}{n}+p=-2\in \mathbf{Z}; \\ t^2=x^{-2}+1; x=\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}; dx=-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}2tdt \end{array}\right] =$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}tdt=-\int\frac{t^2-1}{t^2}dt=-\int dt+\int t^{-2}dt=$$

$$=-t-\frac{1}{t}+c=\left[t=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}+C\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как интегрируются интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$, где m_1, $m_2, \ldots \in \mathbf{Z}$, n_1, $n_2, \ldots \in \mathbf{N}$?

2. Какая используется подстановка при интегрировании интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$ (m_1, $m_2, \ldots \in \mathbf{Z}$, n_1, $n_2, \ldots \in \mathbf{N}$)?

3. Как интегрируются следующие интегралы $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$?

4. В каких случаях можно вычислить интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ ($m, n, p\in \mathbf{Q}$, a, $b\in \mathbf{R}$)?

5. Существуют ли интегралы, которые не выражаются через элементарные функции?

Лекция 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \boldsymbol{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$),

$\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$).

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$,

$\int \sin mx \sin nx dx$ ($m, n \in \boldsymbol{R}$).

4. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$.

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Будем рассматривать интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, при условии, что они не являются табличными. Вычислить их можно различными методами путем преобразования подынтегрального выражения с помощью тригонометрических формул, применения методов «подведения» множителя под знак дифференциала и замены переменной или интегрирования по частям.

Для вычисления интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ существует общая универсальная схема вычисления, основанная на *универсальной тригонометрической подстановке* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t, который, всегда выражается в элементарных функциях.

Пусть $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда выражения для $\sin x$, $\cos x$ и dx через t следующим образом:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg} t\ ,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

Подставляя в подынтегральное выражение вместо $\sin x$, $\cos x$ и dx их значения, выраженные через переменную t, имеем

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно t.

С помощью универсальной подстановки удобно вычислять интегралы вида

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+C}.$$

Пример. **Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.**

***Решение*.** Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $t=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим**:**

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dx}{2t^2+8t+8}=\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+c=\left[tg\frac{x}{2}=t\right]=$$

$$=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C\ .$$

Замечание. Хотя универсальная подстановка всегда позволяет вычислить интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, однако ее используют сравнительно редко, так как она часто приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\cos x = t$.

Если подынтегральная функция *нечетна* относительно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то используют подстановку $\sin x = t$.

Если подынтегральная функция *четна* относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Решение. Подынтегральная функция является нечетной относительно $\sin x$. Поэтому применяем подстановку $\cos x = t$. Тогда получим

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x,\ \sin^2 x = 1 - t^2, \\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1, \\ dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} dt = \\ = -\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2} - \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{2t^2 - 1} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(2\sqrt{2}t\right)}{\left(2\sqrt{2}t\right)^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right| + C =$$

$$= [t = \cos x] = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} \right| + C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \boldsymbol{Z}$, $m \ge 0$, $n \ge 0$), $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$).

Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \mathbf{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$). Если хотя бы одно из чисел m или n – нечетное, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу.

Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример. Вычислить интегралы

1) $\int \cos^2 x \sin x dx$; 2) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.

Решение.

1. $\int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$.

2. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x) dx =$

$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$). Данные интегралы вычисляются подстановками $\mathrm{tg}\, x = t$ и $\mathrm{ctg}\, x = t$ соответственно.

Если $t = \mathrm{tg}\, x$, то $x = \mathrm{arctg}\, t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Последний интеграл при $n \geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если $t = \mathrm{ctg}\, x$, то $x = \mathrm{arcctg}\, t$, $dx = -\frac{dx}{1+t^2}$.

Откуда

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\int \frac{t^n}{1+t^2} dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t; \\ x = \mathrm{arctg}\, t; \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt = \int dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= t + \mathrm{arctg}\, t + C = [t = \mathrm{tg}\, x] = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) + C = \mathrm{tg}\, x + x + C.$$

3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$**,** $\int \cos mx \cos nx dx$**,** $\int \sin mx \sin nx dx$ **(**$m, n \in \boldsymbol{R}$**).** Данные интегралы вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\int \sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\int \cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x),$$

$$\int \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin 2x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin(-3x))dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

4. Интегралы вида $\int R(e^x)dx$. **Интегралы данного вида сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой** $t = e^x$**. При этом** $x = \ln t$**,** $dx = \dfrac{dt}{t}$**.**

Пример. Вычислить интеграл $\int \dfrac{e^{3x} dx}{e^{2x}+1}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1} = \left[\begin{matrix} t = e^{x}, \\ x = \ln t,\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{matrix}\right] = \int \frac{t^{3}\cdot \dfrac{dt}{t}}{t^{2}+1} = \int \frac{t^{2}dt}{t^{2}+1} = \int \frac{t^{2}+1-1}{t^{2}+1}dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^{2}+1}\right)dt = t - \operatorname{arctg} t + C = \left[t = e^{x}\right] = e^{x} - \operatorname{arctg}\left(e^{x}\right) + C .$$

Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Элементарные функции, интегралы от которых выражаются через элементарные функции, образуют *класс интегрируемых в конечном виде функций.* Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, т.е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Ниже приводятся примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$\int e^{-x^{2}}dx$ – *интеграл Пуассона,*

$\int \frac{\sin x}{x}dx$ – *интегральный синус,*

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ – *интегральный косинус,*

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – *интегральный логарифм,*

$\int \cos\left(x^{2}\right)dx$, $\int \sin\left(x^{2}\right)dx$ – *интегралы Френеля,*

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}x}}$ – *эллиптический интеграл первого рода,*

$\int \sqrt{1-k^{2}\sin^{2}x}\,dx$ – *эллиптический интеграл второго рода.*

Каждый из приведенных выше интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляются интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Какие возможны частные случаи?

2. Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ($m, n \in \boldsymbol{Z}$, $m \geq 0$, $n \geq 0$), $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ ($n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$)?

3. Какие формулы используются при вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$ ($m, n \in \boldsymbol{R}$)?

4. Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида $\int R(e^x)dx$?

Лекция 5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Определение определенного интеграла Римана.
3. Необходимое условие интегрируемости функций.
4. Критерий интегрируемости Дарбу.

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная графиком AB функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, называется ***криволинейной трапецией.***

Определение 1. ***Разбиением*** τ_n отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков, называется множество точек $x_0, x_1, ..., x_n$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k.

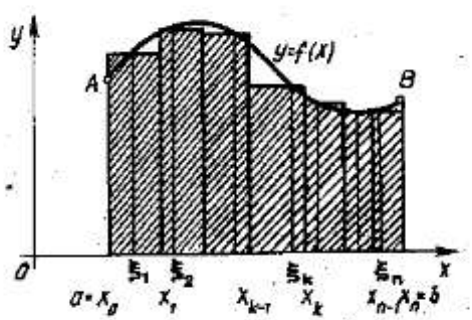


Рис.1. Задача о площади криволинейной трапеции

Тогда значение функции $y = f(x)$ в точке ξ_k равно $f(\xi_k)$. Построим прямоугольники, высотой которых являются $f(\xi_k)$, основанием служат отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Площадь каждого прямоугольника равна $f(\xi_k)\Delta x_k$. Сумма

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 1.

Эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k. Чем меньше Δx_k, $k = \overline{1,n}$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь S криволинейной трапеции можно принять предел суммы σ_n при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

где $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$.

З а д а ч а о п р о й д е н н о м п у т и п р и н е р а в н о м е р н о м д в и ж е н и и. Пусть материальная точка движется прямолинейно вдоль числовой оси с непрерывно меняющейся скоростью $v(t)$, $t_0 \le t \le T$. Смещение точки за малый промежуток времени $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ приближенно можно считать равным $v(\xi_k)\Delta t_k$, где $\xi_k \in [t_{k-1};t_k]$. Тогда приближенное значение пути, пройденного точкой от момента времени t_0 до T есть сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k$. В пределе при $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k \to 0$ получим точное значение этого пути S:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k .$$

2. Определение определенного интеграла Римана.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$, точками $x_0, x_1, ..., x_n$.:

$$a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b .$$

Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k)= f(\xi_1)\Delta x_1+ f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+ f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

О п р е д е л е н и е 2 . Сумма

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{1}$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k=\overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, называемая ***диаметром разбиения***.

О п р е д е л е н и е 3 . Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a;b]$ (или ***интегрируемой по Риману***), если существует такое число I, что для любой последовательности разбиений τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которых стремится к нулю при $n\to\infty$ и при любом выборе точек $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, существует предел интегральных сумм (1) и он равен I:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = I \tag{2}$$

Число I называется ***определенным интегралом*** (или ***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначается: $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е. $I=\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***, x – ***переменной интегрирования***, a и b – соответственно ***нижним и верхним пределами интегрирования***.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a;b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε - δ формулируется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 4 . Число I называется ***определенным***

интегралом (или ***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda < \delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$\left|\sigma_n(\tau_n;\xi_k)-I\right|<\varepsilon .$$

Замечание. **Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т.е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy .$$

Обозначение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Как будет показано позднее, вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции. Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

3. Необходимое условие интегрируемости функций.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если* $\int_a^b f(x)dx$ *существует, то функция* $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$.

► Действительно, если функция $f(x)$ неограничена на $[a;b]$, то для любого разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$ найдется хотя бы один частичный отрезок $[x_{k-1};x_k]$, на котором функция $f(x)$ неограниченна. В силу неограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ можно выбрать на нем точку ξ_k так, чтобы абсолютная величина произведения $f(\xi_k)\Delta x_k$ была больше наперед заданного числа. Таким образом, при любом разбиении τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки интегральная сумма

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

будет бесконечно большой по абсолютной величине. Следовательно, не существует конечного предела интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения λ к нулю, что противоречит условию теоремы. ◄

4. Критерий интегрируемости Дарбу. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим

$$m_k=\inf_{[x_{k-1};x_k]} f(x),$$
$$M_k=\sup_{[x_{k-1};x_k]} f(x).$$

Определение 5. ***Нижней суммой Дарбу***, соответствующей разбиению τ_n, называется сумма

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k .$$

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n, называется сумма

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k .$$

В случае, когда функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Поэтому суммы Дарбу s_n и S_n при любом разбиении τ_n принимают конечные значения. Далее будем рассматривать ограниченные функции $f(x)$.

Свойства интегральных сумм Дарбу

1. Для фиксированного разбиения τ_n имеет место неравенство $s_n\le S_n$.

2. Для фиксированного разбиения τ_n и любого выбора промежуточных точек ξ_i на этом разбиении имеет место неравенство $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

3. Нижняя (верхняя) сумма Дарбу является нижней (верхней) гранью интегральных сумм Римана, соответствующих данному разбиению:

$$s_n = \inf_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n} \sigma_n(\tau_n;\xi_k),$$

$$S_n = \sup_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n} \sigma_n(\tau_n;\xi_k).$$

4. Имеет место неравенство

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k ,$$

где $\omega_k(f)$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k=\overline{1,n}$.

Нижние и верхние интегралы Дарбу. Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. И пусть τ_n – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$.

Определение 6. ***Нижним интегралом*** функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу s_n:

$$I_* = \sup s_n .$$

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^* грань возможных ее верхних сумм Дарбу S_n:

$$I^* = \inf S_n .$$

Очевидно, что $I_* \le I^*$.

Теорема 2 (Критерий Дарбу). *Для того, чтобы функция $y=f(x)$, ограниченная на некотором отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n - s_n) = 0 .$$

►*Необходимость*. Пусть ограниченная на $[a;b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке и $I=\int_a^b f(x)dx$. Тогда

$I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. По определению предела следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что каково бы ни было разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda<\delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k , $k=\overline{1,n}$, для интегральной суммы выполняется неравенство

$$\left|\sigma_n(\tau_n;\xi_k)-I\right|<\varepsilon .$$

Отсюда $I-\varepsilon<\sigma_n<I+\varepsilon$.

Переходя в неравенствах к нижней и верхней граням относительно точек ξ_k , $k=\overline{1,n}$, в силу свойств сумм Дарбу получим

$$I-\varepsilon<s_n\le S_n<I+\varepsilon .$$

Отсюда при $\lambda<\delta$ имеем $|s_n-I|<\varepsilon$ и $|S_n-I|<\varepsilon$. Тогда

$$|S_n-s_n|=|S_n-I+I-s_n|\le|S_n-I|+|I-s_n|<2\varepsilon .$$

Это означает, что

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n-s_n)=0 .$$

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и для ее сумм Дарбу выполняется условие $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_n-s_n)=0$. Из определения нижнего I_* и верхнего интегралов I^* имеем

$$s_n\le I_*\le I^*\le S_n .$$

Поэтому $0\le I^*-I_*\le S_n-s_n$. Отсюда при $\lambda\to 0$ получим $I^*-I_*=0$.

Обозначим $I^*=I_*=I$. Тогда $s_n\le I\le S_n$, а поэтому

$$0\le I-s_n\le S_n-s_n \text{ и } 0\le S_n-I\le S_n-s_n .$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получим $\lim\limits_{\lambda\to 0}S_n=I$ и $\lim\limits_{\lambda\to 0}s_n=I$. Поскольку для любого разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, и выбора точек ξ_k , $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство $s_n\le\sigma_n\le S_n$.

Следовательно, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n=I$. Это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. ◄

Следствия. 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке* $[a;b]$ *функция* $f(x)$ *была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k = 0,$$

где $\omega_k(f)$ *– колебание функции* $f(x)$ *на частичном отрезке* $[x_{k-1};x_k]$ *разбиения* τ_n, $k=\overline{1,n}$.

2. *Если функция* $y=f(x)$ *была интегрируема по Риману на отрезке* $[a;b]$ *и* s_n, S_n *– ее суммы Дарбу, то*

$$\lim_{\lambda\to 0} s_n = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи приводят к понятию определенного интеграла?
2. Дайте определение функции, интегрируемой на $[a;b]$?
3. Сформулируйте определение интеграла Римана на языке ε-δ?
4. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции.
5. Дайте определения верхних и нижних сумм Дарбу. Перечислите их свойства.
6. Дайте определения верхних и нижних интегралов.
7. Сформулируйте Критерий интегрируемости Дарбу.

Лекция 6. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Интегральная теорема о среднем.

1. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. существует интеграл* $\int_a^b f(x)d(x)$.

►Ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует из теоремы Вейерштрасса.

По теореме Кантора эта функция равномерно непрерывна на отрезке $[a;b]$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых x и x', принадлежащих отрезку $[a;b]$, из неравенства $|x - x'| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Возьмем такое разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k = 1,2,...,n$, чтобы $\lambda < \delta$. Тогда $\forall x, x' \in [x_{k-1};x_k]$ из неравенства $|x - x'| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Отсюда следует, что $|M_k - m_k| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

С учетом этого

$$0 \le S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = 0$ и $f(x) \in \mathrm{R}_{[a;b]}$ ◄

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 2. *Функция* $f(x)$, *монотонная на отрезке* $[a;b]$, *то интегрируема на этом отрезке.*

► Ограниченность $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует из свойств непрерывных функций.

Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$, т.е. $f(a) < f(x) < f(b)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем такое разбиение τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k], k = 1,2,..., n$, чтобы

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

В силу монотонности $f(x)$ имеем

$$\Delta x_k = |x_k - x_{k-1}| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \text{ и } M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$

Тогда

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + ... + f(x_n) - f(x_{n-1})) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k = 0$. В силу критерия Дарбу $f(x) \in \mathrm{R}_{[a;b]}$ ◄

2. Основные свойства определенного интеграла. Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. *Если нижний и верхний пределы интегрирования равны* $(a = b)$, *то интеграл равен нулю*: $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Это свойство следует из определения интеграла.

2. *Если* $f(x) = 1$, *то* $\int_a^b dx = b - a$.

►Действительно, так как $f(x) = 1$, то

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a\ . \blacktriangleleft$$

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ .$$

► Данное утверждение следует из того, что в случае $b<a$ все числа $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ в разбиении $\tau_n = \{a = x_0 > x_1 > ... > x_n = b\}$ будут отрицательными (при $a<b$ все $\Delta x_k > 0$). ◄

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ был определен для случая $a<b$. Если $a>b$, свойство 3 рассматривается как дополнение к определению определенного интеграла. Его можно интерпретировать следующим образом: определенные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^a f(x)dx$ являются пределами интегральных сумм, различающихся лишь знаком.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла*:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c\in\mathbf{R}\ .$$

► Действительно,

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx\ . \blacktriangleleft$$

5. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых*:

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\pm ...\pm f_n(x)\right)dx =$$

$$=\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx .$$

Доказательство этого свойства аналогично приведенному выше.

Замечание. Совокупность свойств 4 и 5 называются свойством **линейности**: *если* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на* $[a;b]$, *то любая их линейная комбинация* $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)$, c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$, *также интегрируема на* $[a;b]$:

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x))dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int_a^b f_2(x)dx .$$

6 (аддитивность). *Если существуют интегралы* $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, *то существует также интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *и для любых чисел* a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

►Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и от выбора ξ_k. Это позволяет при составлении интегральной суммы включить точку c в число точек разбиения. Пусть $c = x_m$, т.е.

$$[a;b]=[a;c]\cup[c;b]=([a;x_1]\cup[x_1;x_2]\cup\ldots\cup[x_{m-1};x_m])\cup$$
$$\cup([x_m;x_{m+1}]\cup\ldots\cup[x_{n-1};b]).$$

Тогда $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \blacktriangleleft$$

Геометрический смысл свойства 6 в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рис.1.).

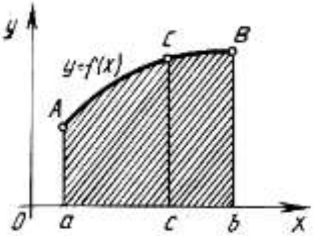


Рис.1. Геометрический смысл свойства 6

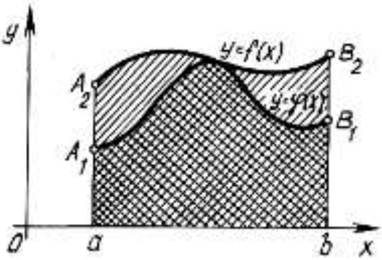


Рис.2. Геометрический смысл свойства 8

7 (интегрирование неравенств). *Если* $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, $a < b$.

►Действительно, так как $f(\xi_k) \geq 0$ и $\Delta x_k \geq 0$, то интегральная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве, имеем

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \geq 0 . \blacktriangleleft$$

8 (монотонность). *Если интегрируемые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in [a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx, \quad a < b .$$

►Действительно, так как $f(x) - \varphi(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то, согласно свойствам 5 и 7, имеем

$$\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0 .$$

Следовательно $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.◄

На рисунке 2 дана **геометрическая** интерпретация свойства 8. Так как $f(x) \geq \varphi(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b.

Замечание. Так как $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\ \ \forall x\in[a;b]$, то

$$-\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b|f(x)|dx.$$

Отсюда $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b f(x)dx$.

3. Интегральная теорема о среднем.

Терема 3 (о среднем). *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, 2) для любого $x\in[a;b]$ справедливо неравенство $m\le f(x)\le M$, 3) функция $g(x)$ не меняет знак на $[a;b]$. Тогда существует такое число μ, $m\le\mu\le M$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx.$$

►По условию $m\le f(x)\le M\quad\forall x\in[a;b]$.

Умножим неравенство на $g(x)$.

Если $g(x)\ge 0$, получим $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$.

Если $g(x)\le 0$, получим $Mg(x)\le f(x)g(x)\le mg(x)$.

Интегрируя эти неравенства, имеем

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$$

или $M\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le m\int_a^b g(x)dx$.

В случае, когда $\int_a^b g(x)dx=0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$ и теорема доказана.

В случае, когда $\int_a^b g(x)dx\ne 0$, то при $g(x)\ge 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx>0$, а при $g(x)\le 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx<0$.

Разделим обе части двойных неравенств на $\int_a^b g(x)dx$. В обоих случаях получим одно и то неравенство

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M .$$

Полагая

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

получим $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$.◄

Следствие 1. *Если* m *и* M *– соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$*, непрерывной на* $[a;b]$*, то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \forall x \in [a;b].$$

►По условию $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$. Применяя свойство 8 к этим неравенствам, имеем $m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx$.

Согласно свойству 2, $\int_a^b dx = b-a$, следовательно,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).◄$$

На рисунке 3 дана **геометрическая** интерпретация следствия 1 в случае, когда $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$. Площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b – $M(b-a)$. Из неравенства $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ следует, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго.

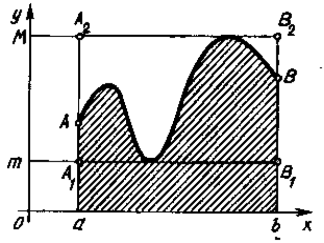


Рис.3. Геометрический смысл следствия 1 теоремы о среднем

Следствие 2. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то существует такая точка* $\xi \in [a;b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

►Известно, что непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений, т.е. $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$. Из данного неравенства на основании следствия 1 имеем $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Разделив все члены двойного неравенства на $b-a>0$, получим $m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. Другими словами, число $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ находится между наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$. Поскольку непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения, лежащие между m и M, в том числе и значение μ, то существует $\xi \in [a;b]$, такое, что $f(\xi) = \mu$.Значит,

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Отсюда $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. ◄

Число $f(\xi)$, называется ***интегральным средним значением***

функции $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$**.**

Геометрически данное следствие означает, что, определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования $[a;b]$ и длины $b-a$ этого отрезка.

На рисунке 4 дана геометрическая интерпретация следствия 2 в случае, когда $f(x)>0 \quad \forall x\in[a;b]$. Так как значение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$, то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции $aABb$.

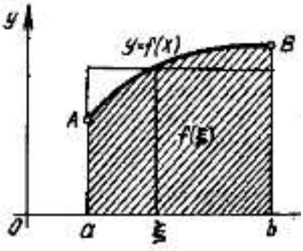


Рис.4. Геометрический смысл следствия 2 теоремы о среднем

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции.

2. Является монотонная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируемой?

3. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

4. В чем заключается смысл теоремы о среднем?

Лекция 7. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

1. Определение интеграла с переменным верхним пределом.
2 Непрерывность и дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу
3. Существование первообразной.
4. Вычисление определенного интеграла.

1. Определение интеграла с переменным верхним пределом. Ранее рассматривался определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если оставить постоянным нижний предел интегрирования a, а верхний x изменять так, чтобы $x \in [a;b]$, то величина интеграла будет изменяться.

О п р е д е л е н и е 1. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x), \ x \in [a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом*** и является функцией верхнего предела x.

Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

С **геометрической** точки зрения, функция $F(x)$ в случае $f(t) \geq 0$ представляет собой площадь заштрихованной на рисунке 1 криволинейной трапеции.

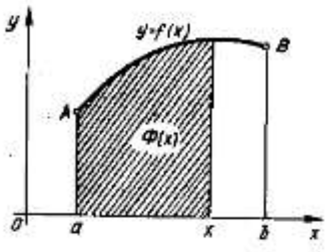


Рис.1.Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом

Аналогично вводится определенный интеграл с переменным нижним пределом.

О п р е д е л е н и е 2. Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x),\ x \in [a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным нижним пределом*** и является функцией нижнего предела x.

2. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по переменному верхнему пределу.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$, *то функции* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *и* $G(x) = \int_x^b f(t)dt$ *непрерывны на отрезке* $[a;b]$.

► Возьмем любую точку $x \in [a;b]$ и придадим ей приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in [a;b]$. Тогда

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла, имеем

$$\Delta F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x,$$

где $\xi \in [x; x+\Delta x]$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi)\Delta x = 0.$$

Значит, функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрерывна.

Аналогично доказывается непрерывность функции

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt. \ ◄$$

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке*

$[a;b]$ *и непрерывна в точке* $x \in [a;b]$, *то функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

дифференцируема в этой точке и $F'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x)$.

► Возьмем любую точку $x \in [a;b]$ и придадим ей приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in [a;b]$. Тогда

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt .$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла, имеем

$$\Delta F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt .$$

Применяя теорему о среднем, получаем

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x ,$$

где $\xi \in [x; x + \Delta x]$.

Если $\Delta x \to 0$**, то** $x + \Delta x \to x$**, и значит** $\xi \to x$ **. В силу непрерывности функции** $f(x)$ **на отрезке** $[a;b]$ **имеем** $f(\xi) \to f(x)$**. По определению производной**

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\xi \to x)}} f(\xi) = f(x). \blacktriangleleft$$

Замечание**. Функция** $G(x) = \int\limits_x^b f(t)dt$ **также имеет производную в точке** x **и**

$$G'(x) = \left(\int\limits_x^b f(t)dt \right)'_x = -f(x).$$

3. Существование первообразной.

Теорема 3. ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна во всех отрезка точках некоторого промежутка*** X ***, то на этом промежутке у нее существует первообразная. При этом для любой*** *точ-*

ки $a \in X$ ***функция*** $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ ***является одной из первообразных функций*** $f(x)$ ***на промежутке*** X **.**

► **Если** $x > a$ **,** $x \in X$ **, то равенство** $F'(x)=f(x)$ **следует из теоремы 2.**

Если $x < a$ **,** $x \in X$ **, то**

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(x)dx=-\frac{d}{dx}\int\limits_x^a f(x)dx=-(-f(x))=f(x). \blacktriangleleft$$

Замечание. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором промежутке X функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $x \in X$. Определенный интеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in X$, $a \in X$, является одной из первообразных функции $f(x)$ на X .

Поэтому

$$\int f(x)dx=\int\limits_a^x f(t)dt+C .$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и определенным интегралами.

4. Вычисление определенного интеграла.

Теорема 4 (формула Ньютона-Лейбница). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $F(x)$ *– какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

►Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Если $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ другая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то они отличаются на некоторую постоянную C и $\forall\ x \in [a;b]$ имеет место равенство

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C\ .$$

Положим $x=a$ и, учитывая, что $\int_a^a f(t)dt=0$, получим $C=-F(a)$.

Подставляя это значение вместо C, имеем $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)\quad \forall x\in[a;b]$. Тогда при $x=b$ получаем $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$. ◄

Замечание. Формула Ньютона – Лейбница называется ***основной формулой интегрального исчисления***. Иногда ее удобно записывать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм. Поэтому задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла.

Пример. Вычислить интегралы

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$, 2) $\int_1^2\frac{dx}{x}$, 3) $\int_1^6\frac{dx}{\sqrt{3+x}}$, 4) $\int_{-1}^0 e^{-2x}dx$.

Решение. Имеем

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=1$.

2. $\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$.

3. $\int_1^6\frac{dx}{\sqrt{3+x}}=\int_1^6(3+x)^{-1/2}d(3+x)=2\sqrt{3+x}\Big|_1^6=2\left(\sqrt{9}-\sqrt{4}\right)=2$.

4. $\int\limits_{-1}^{0} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{e^2-1}{2}$.

Теорема 5 (формула замены переменной в определенном интеграле). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *а функция* $x=\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[t_1;t_2]$, *причем* $\varphi([t_1;t_2])=[a;b]$ *и* $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, *то справедлива формула замены переменной*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt .$$

►Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Поскольку $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, то по формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1)) =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} dF(\varphi(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt . \blacktriangleleft$$

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить, вычисления, т.е. привести подынтегральное выражение к соответствующей табличной форме.

Замечание. При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются соответственно и пределы интегрирования. Для вычисления определенного интеграла по этой формуле необходимо:

– сделать замену $x=\varphi(t)$,

– вычислить $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция,

– найти пределы интегрирования по t, решив уравнения $\varphi(t_1)=a$ и $\varphi(t_2)=b$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t, \\ dx=\cos t dt, \\ x=0 \Rightarrow t=0, \\ x=1 \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Теорема 6 (формула интегрирования по частям в определенном интеграле). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны вместе со своими производными на отрезке* $[a;b]$. *Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

► Для дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ имеем $d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем обе части последнего равенства на отрезке $[a;b]$:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b$$

Следовательно, $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$. ◄

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x dx$.

***Решение*.** Имеем

$$\int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}dx; \\ dv=dx;\ v=x \end{array}\right] = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x dx = e - \int_1^e dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = 1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом?

2. Является интеграл с переменным верхним пределом непрерывной функцией?

3. Можно ли дифференцировать интеграл по переменному верхнему пределу? При каких условиях это возможно?

4. Докажите формулу Ньютона – Лейбница.

5. Сформулируйте и докажите терему о замене переменной в определенном интеграле.

6. Сформулируйте и докажите терему об интегрировании по частям в определенном интеграле.

Лекция 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Площадь криволинейной трапеции.
2. Длина дуги кривой.
3. Площадь поверхности вращения
4. Объем пространственного тела.

1. Площадь криволинейной трапеции.

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *неотрицательна и непрерывна на отрезке* $[a;b]$*, то площадь криволинейной трапеции*

$$P\{(x;y)|\, a \le x \le b;\ 0 \le y \le f(x)\}$$

вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

► Пусть

$$\tau_n = \{x_0, x_1, ..., x_n | a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

разбиение отрезка $[a;b]$.

И пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k. Тогда значение функции $y = f(x)$ в точке ξ_k равно $f(\xi_k)$. Построим прямоугольники, основанием которых являются отрезки $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ... , $[x_{n-1}; b]$, а высота равна $f(\xi_k)$.

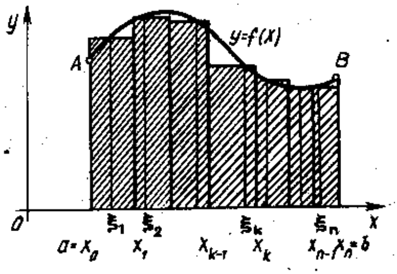


Рис.1. Площадь криволинейной трапеции

Площадь каждого прямоугольника равна $S_k = f(\xi_k)\Delta x_k$. Сумма $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 1.

Эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k. Чем меньше Δx_k, $k=\overline{1,n}$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Поэтому $S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Точное значение площади S криволинейной трапеции получается при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

где $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. ◄

Замечание. Если $f(x) < 0$ $\forall x \in [a;b]$, то и $\int_a^b f(x)dx \le 0$, $a < b$. Следовательно, в этом случае

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx.$$

Пример**. Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды $y = \sin x$.**

Решение. **Имеем**

$$S = \int_0^{\pi} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = 2.$$

В параметрическом виде. Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, осью *Ox* и прямыми $x = a$, $x = b$, причем $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, то ее площадь S при $y(t) \ge 0$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

которая получается заменой переменной $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$. Пределы t_1, t_2 определяют из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример**. Вычислить площадь эллипса**

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases},$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. **Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Следовательно, $S = 4S_1$, где S_1 – площадь части эллипса, расположенная в первом квадранте. Тогда**

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a y dx = \left[\begin{array}{l} x = a\cos t,\ y = b\sin t, \\ dx = -a\sin t\, dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, \\ x = a \Rightarrow t = 0. \end{array}\right] = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= -2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi .$$

В полярной системе координат. Пусть фигура, ограниченная линией l, заданной в полярной системе координат $\{O, r, \varphi\}$ уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и радиусами-векторами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис.2).

При этом криволинейный сектор является *правильной фигурой*, если любой луч $\varphi = \varphi^*$, $\alpha \le \varphi^* \le \beta$, исходящий из полюса O, пересекает линию $r = r(\varphi)$ не более чем в одной точке. И пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

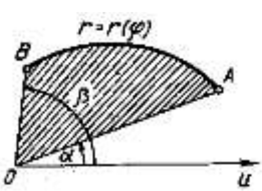


Рис.2. Криволинейный сектор

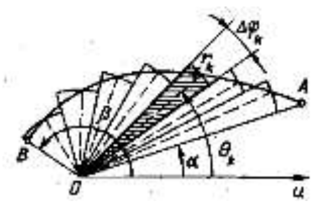


Рис.3. Разбиение криволинейного сектора

Теорема 2. *Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:*

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi .$$

► Для вычисления площади криволинейного сектора *OAB* применяется алгоритм составления интегральной суммы с последующим предельным переходом к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $[\alpha;\beta]$ на n частичных отрезков точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Проведем лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = \overline{1,n}$. Тогда криволинейный сектор *OAB* разобьется на n частичных криволинейных секторов (рис.3).

2. На каждом частичном отрезке $[\varphi_k;\varphi_{k-1}]$, $k = \overline{1,n}$, выберем произвольным образом точку θ_k и найдем значения функции $r(\varphi)$ в этих точках: $r_k = r(\theta_k)$, $k = \overline{1,n}$.

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков $[\varphi_{k-1};\varphi_k]$ функция $r = r(\varphi)$ постоянна и совпадает со значением $r_k = r(\theta_k)$. Тогда каждый частичный криволинейный сектор можно заменить круговым сектором с радиусом $r_k = r(\theta_k)$ и центральным углом $\Delta\varphi_k$. Площадь такого кругового сектора вычисляется по формуле

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k .$$

За площадь S криволинейного сектора *OAB* примем площадь фигуры, состоящей из n частичных круговых секторов:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k .$$

Приближенное равенство тем точнее, чем меньше отрезки $[\varphi_{k-1};\varphi_k]$, т.е. чем больше n. Правая часть равенства является интегральной суммой для непрерывной функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$.

4. За точное значение площади S криволинейного сектора *OAB* принимается предел интегральной суммы при $\lambda = \max\limits_{[\alpha;\beta]}\{\Delta\varphi_k\} \to 0$:

$$S=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi\ .\ ◄$$

Пример. Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кардиоидой

$$r=a(1+\cos\varphi),$$

где $0\le\varphi\le 2\pi$.

Решение. Имеем

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi}1d\varphi+2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi++\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}+2\cos\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=\frac{3}{2}\pi a^2\ .$$

2. Длина дуги кривой.

Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и кривая l – график этой функции (рис.8). Требуется найти длину дуги плоской кривой l, заключенной между вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.

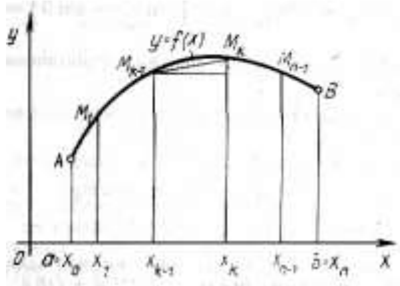


Рис.4. Разбиение дуги на частичные дуги

Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом на n частей точками (рис.4)

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b\,.$$

Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$. Через точки x_i, $i=\overline{1,n}$, проведем вертикальные прямые, параллельные оси Oy, до пересечения с кривой l. Тогда дуга AB разобьется на n частей. Соединив каждые две соседние точки разбиения кривой l отрезками (хордами), получим ломаную $AM_1M_2...M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Обозначим длину ломаной через l_n:

$$l_n = \left|\overline{AM}_1\right| + \left|\overline{M_1M}_2\right| + ... + \left|\overline{M}_{n-1}B\right| = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \ ,$$

где Δl_k – длина хорды, стягивающей дугу $M_{k-1}M_k$.

Длина ломаной является приближенным значением длины дуги AB $\left(l \approx l_n\right)$. Очевидно, что если увеличивать число n точек разбиения отрезка $\left[a;b\right]$ на частичные отрезки так, чтобы длина максимального из них стремилась к нулю, то длина вписанной ломаной стремится к длине дуги кривой AB

Если существует конечный предел l_n при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\left\{\Delta x_k\right\} \to 0$, то этот предел называется ***длиной*** дуги l, а сама дуга называется ***спрямляемой***:

$$l = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k \ .$$

Если конечный предел l_n не существует, то и длина дуги не существует, а сама дуга называется ***неспрямляемой***.

Теорема 3. *Если функция $f\left(x\right)$. на отрезке $\left[a;b\right]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то кривая l – спрямляемая, и ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \ .$$

►Вычислим длину стягивающей хорды $M_{k-1}M_k$. Так как $M_{k-1}\left(x_{k-1}; f\left(x_{k-1}\right)\right)$, $M_k\left(x_k; f\left(x_k\right)\right)$, то

$$\Delta l_k \left|M_{k-1}M_k\right| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k \ .$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)}{x_k - x_{k-1}} = f'\left(\xi_k\right),\ \xi_k \in \left(x_{k-1}; x_k\right).$$

Следовательно, $\Delta l_k = \sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k$.

Подставляя полученное выражение, получаем

$$l = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k \ .$$

В правой части формулы стоит интегральная сумма для функции: $\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}$ на отрезке $[a;b]$. Предел такой суммы существует и равен определенному интегралу от этой функции на отрезке $[a;b]$:

$$l = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \ ◄$$

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение. Имеем

$$l = \int_0^5 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{235}{27} \ .$$

В параметрическом виде. Пусть уравнение кривой задано параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [t_1;t_2]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t) \ne 0 \ \ \forall t \in [t_1;t_2]$. Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \, ,$$

предварительно выполнив замену переменной: $x = x(t)$. Тогда $dx = x'(t)dt$ и $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Подставляя в формулу дины дуги, получим:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}\, x'(t)dt$$

или $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$.

Если пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\ \ t_1\le t\le t_2$, где $x(t),\ y(t)$, $z(t)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[t_1;t_2]$, то длина дуги этой кривой определяется по формуле

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt.$$

Пример. Вычислить длину астроиды

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$$

если $0\le t\le 2\pi$.

Решение. В силу симметричности астроиды относительно осей ее длина l равна

$$l=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\begin{bmatrix} x'=-3a\cos^2 t\sin t,\\ y'=3a\cos t\sin^2 t\end{bmatrix}=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=6a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=6a.$$

В полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$ $\forall\varphi\in[\alpha;\beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\varphi,\\ y&=r\sin\varphi.\end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что $r=r(\varphi)$, получаем

$$\left.\begin{aligned} x&=r(\varphi)\cos\varphi,\\ y&=r(\varphi)\sin\varphi\end{aligned}\right\},\ \forall\varphi\in[\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой.

Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y'_\varphi &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $\left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 = r^2 + \left(r'\right)^2$

Следовательно, $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(r'\right)^2}\, d\varphi$.

Пример. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0 \le \varphi \le 2\pi$. Поэтому

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi =$$

$$= a\left(\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right).$$

3. Площадь поверхности вращения.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле*:

$$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

► Разобьем произвольно отрезок $[a;b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Пусть A_0, A_1, ..., A_n — соответствующие точки графика функции $f(x)$. Построим ломаную $A_0A_1\ldots A_n$ (рис. 5). При вращении этой ломаной вокруг оси Ox получается поверхность, составленную из боковых поверхностей усеченных конусов (цилиндров).

Площадь боковой поверхности усеченного конуса (цилиндра), образованного вращением k-го звена ломаной, равна

$$S_k = 2\pi \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{2} l_k ,$$

где l_k – длина хорды $A_{k-1}A_k$, равная

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} .$$

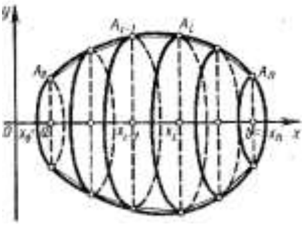


Рис.5.Площадь поверхности вращения

По формуле Лагранжа

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$.

Полагая $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, получаем $l_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$.

Тогда площадь S поверхности вращения приближенно равна площади поверхности, полученной от вращения ломаной

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k .$$

Представим эту сумму в виде двух сумм

$$S \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k +$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{n} ([f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)]) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k .$$

Первая сумма в правой части последнего равенства является интегральной суммой и при $\lambda = \max\limits_{[a;b]} \{\Delta x_k\} \to 0$ в силу непрерывности функции $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ имеет своим пределом интеграл $\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$. Покажем, что вторая сумма в правой части равенства имеет при $\lambda \to 0$ предел, равный нулю. Действительно, так как функция $f(x)$ равномерно- непрерывна на $[a;b]$, то по теореме Кантора для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняются неравенства

$$\left| f(x_{k-1}) - f(\xi_k) \right| < \varepsilon, \qquad \left| f(x_k) - f(\xi_k) \right| < \varepsilon.$$

Пусть M максимальное значение функции $\sqrt{1+f'^2(x)}$ на отрезке $[a;b]$.

Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(\left[f(x_{k-1}) - f(\xi_k) \right] + \left[f(x_k) - f(\xi_k) \right] \right) \sqrt{1+f'^2(\xi_k)} \Delta x_k \right| <$$

$$< 2M\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 2M\varepsilon(b-a).$$

Так как ε произвольно мало, то отсюда следует, что указанного выражения равен нулю при $\lambda \to 0$.

Таким образом, переходя в равенстве для площади поверхности к пределу при $\lambda \to 0$, имеем

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx. \blacktriangleleft$$

В параметрическом виде. Пусть поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \; y = y(t),$$

где $t \in [\alpha;\beta]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $y(t) \ge 0$, $a \le x(t) \le b$ при $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда, производя в интеграле для площади S поверхности вращения переменной замену переменной $x = x(t)$, получаем

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

В полярных координатах. Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$.

Тогда, учитывая формулы

$$\left. \begin{array}{l} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{array} \right\}, \; \forall \varphi \in [\alpha;\beta],$$

получаем $S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$.

Пример. Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi ,$$

вокруг оси Ox.

Решение. Имеем

$$S = 2\pi \int\limits_{0}^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + (a(1 - \cos t))^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{64}{3}\pi a^2 .$$

4. Объем пространственного тела. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (рис.6,*а,б*). Эти сечения называются ***поперечными***. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox.

С изменением x площадь S поперечного сечения изменяется, т.е. является некоторой функцией от x. Обозначим ее $S(x)$. Функцию $S(x)$ будем считать непрерывной на отрезке $[a;b]$, где a и b – абсциссы крайних сечений тела T.

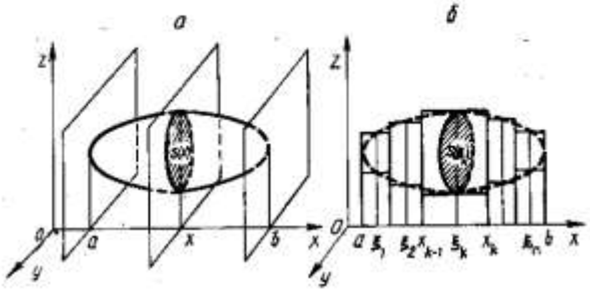


Рис.6.Объем пространственного тела

Теорема 5. *Объем тела, заключенного между двумя плоскостями* $x = a$ *и* $x = b$, *в случае, если площадь сечения, проведенная перпендикулярно к оси Ох, есть известная функция от* x,

$S = S(x)\ \forall x \in [a;b]$, *вычисляется по формуле*

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

► Для вычисления объема V тела T применяется алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}$ $k = \overline{1,n}$. Через точки разбиения x_k $k = \overline{1,n}$, проведем плоскости, перпендикулярные к оси *Ox*. Семейство плоскостей $\Delta x_k = x_k$, $k = \overline{1,n}$, разобьет данное тело T на слои, толщина каждого из которых равна Δx_k, $k = \overline{1,n}$.

2. На каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$, выберем произвольным образом точку ξ_k и найдем значения $S(\xi_k)$ функции $S(x)$ в этих точках.

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ функция $S = S(x)$ постоянна и совпадает со значением $S(\xi_k)$. Тогда каждый слой тела T представляет собой прямой цилиндр с основанием $S(\xi_k)$ и образующими, параллельными оси *Ox*. Объем такого частичного прямого цилиндра вычисляется по формуле $\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$, где Δx_k – высота частичного цилиндра. Объем V всего тела T приближенно равен объему фигуры, состоящей из n ступенчатых частичных цилиндров (см. рис.6,*б*):

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

Очевидно, что последнее приближенное равенство тем точнее, чем меньше диаметр разбиения отрезка $[a;b]$ $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}$.

4. За точное значение искомого объема примем

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k.$$

Заметим, что сумма $\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ является интегральной суммой для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $[a;b]$. Следовательно,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx . \blacktriangleleft$$

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Пересечем эллипсоид плоскостью $x = h$. В сечении получим эллипс $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \\ x = h. \end{cases}$

Площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда $V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi bc\left(x - \frac{h^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc$.

Вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.7).

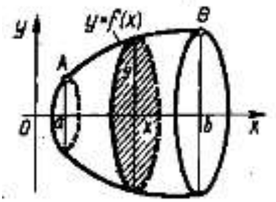


Рис.7. Объем тела вращения около оси $0x$

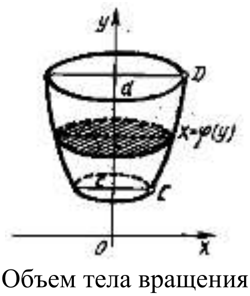


Рис.8. Объем тела вращения около оси $0y$

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат

$y=f(x)$ точек данной кривой. Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела

$$S(x)=\pi y^2=\pi\left(f(x)\right)^2.$$

Применяя формулу $V=\int\limits_a^b S(x)dx$, получаем формулу для вычисления объема тела вращения

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2dx=\pi\int\limits_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рис.8), то его объем вычисляется по формуле

$$V=\pi\int\limits_c^d x^2dy=\pi\int\limits_c^d(\varphi(y))^2dy,$$

где $x=\varphi(y)$, $c\le y\le d$, – уравнение кривой CD.

Пример. Вычислить объем тела, получающегося от вращения вокруг оси одной арки синусоиды $y=\sin x$.

Решение. Имеем

$$S=\pi\int\limits_0^\pi \sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\left(\int\limits_0^\pi dx-\int\limits_0^\pi \cos 2xxdx\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. По каким формулам вычисляются площади криволинейных трапеций, ограниченных линиями, заданными в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

2. Приведите формулы для вычисления длин дуги кривой, заданной в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

3. Как вычислить площадь поверхности тела?

4. Как вычисляется объем пространственных тел?

Лекция 9. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Работа переменной силы.
2. Работа электродвигателя переменной мощности.
3. Сила давления жидкости.
4. Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс.

1. Работа переменной силы. Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы F. Перемещение этой точки зададим вектором $\vec{s}$ и предположим, что направление силы совпадает с направлением перемещения ($F \| \vec{s}$). Пусть через $|F|$ и $|s|$ длины векторов F и s.

Если на всем пути сила F постоянна, то, как известно из механики, работа $A = |F||s|$.

Рассмотрим случай, когда сила F сохраняет постоянное направление ($F \| s$), но меняется по модулю ($|F| \neq \text{const}$). Вычислим работу этой переменной силы. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют абсциссы a и b ($a < b$) соответственно. В каждой точке отрезка $[a;b]$ модуль силы принимает определенное значение и является некоторой функцией абсциссы, т.е $|F| = F(x)$. Таким образом,

$$F = |F|\vec{i} = F(x)\vec{i}\ ,\ s = (b-a)\vec{i}\ ,\ |s| = b-a\ .$$

Будем считать функцию $F(x)$ непрерывной. Для нахождения работы переменной силы вновь используем алгоритм, основанный на составлении интегральной суммы и предельном переходе к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $|s| = [a;b]$ на n частичных отрезков точками x_k: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$, – длина k-го частичного отрезка. Как известно, работа на всем пути равна сумме работ на малых его участках. Обозначив работу на всем пути через A, а работу на частичном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ через ΔA_k, получим

$$A=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k .$$

Если отрезки $\left[x_{k-1};x_k\right]$ брать достаточно малыми, то на каждом таком отрезке можно считать $|F|\approx \text{const}$.

2. Выберем на каждом частичном отрезке $\left[x_{k-1};x_k\right]$ произвольную точку ξ_k и найдем значение функции $F(x)$ в точке ξ_k.

3. Предположим, что на каждом частичном отрезке модуль силы имеет постоянное значение, равное значению $F(x)$ в точке ξ_k: $|F_k|=F(\xi_k)$. При этом предположении работа силы на отрезке $\left[x_{k-1};x_k\right]$ равна

$$\Delta A_k\approx|F_k|\Delta x_k=F(\xi_k)\Delta x_k .$$

Работа переменной силы F, совершаемая на всем пути $|s|=b-a$,

$$A\approx A_n=\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta x_k .$$

Сумма A_n представляет собой интегральную сумму, составленную для непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $F(x)$.

4. Предел A_n при $\lambda=\max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}\to 0$ в силу предположения о непрерывности функции $F(x)$ существует и выражает работу переменной силы на прямолинейном пути от a до b:

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b F(x)dx .$$

2. Работа электродвигателя переменной мощности. Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Необходимо найти работу, совершенную двигателем за промежуток времени $\Delta t=[a;b]$.

Как известно, при постоянной мощности двигателя N его работа $A=N\Delta t$.

Воспользуемся алгоритмом составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем временной отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков $\left[x_{k-1};x_k\right]$, $k=\overline{1,n}$. Обозначим $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$.

2. Выберем на каждом частичном отрезке произвольным образом точку x_k : $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$.

3. Будем считать мощность на каждом из частичных отрезков постоянной и равной $N(\tau_k)$. Тогда

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} N(\tau_k)\Delta t_k .$$

4. Считая функцию $N(t)$ непрерывной и переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$, получаем $A = \int\limits_a^b N(t)dt$.

3. Сила давления жидкости. Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость, плотность которой ρ , таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня на расстояниях a и b соответственно (рис.1.). Требуется определить силу давления жидкости на пластинку.

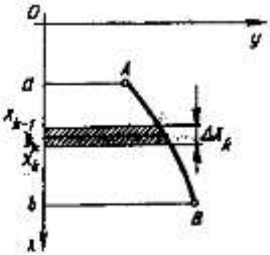


Рис.1.

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давлений P жидкости на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластинка, а высотой – глубина h , т.е.

$$P = g\rho hS ,$$

где $g = 9{,}8$ м/с^2; S – площадь пластинки.

Если же пластинка догружена в жидкость вертикально, то давление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения.

По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластинку.

Выберем систему координат так, как показано на рис.1. Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Для нахождения силы давления снова используем алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Проведем через точки x_0, x_1, …, x_n прямые, параллельные оси Oy, которые разобьют пластинку на n малых горизонтальных полосок.

2. Выберем на каждом частичном отрезке произвольным образом точку $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$. Тогда площадь S_k малой горизонтальной полоски

$$S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k.$$

3. Считая, что все точки каждой элементарной пластинки находятся на одной глубине $h = \xi_k$, значение силы давления на нее можно вычислить по формуле:

$$\Delta P_k \approx g\rho\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Просуммировав найденные значения ΔP_k, $k = \overline{1,n}$, получим приближенное значение силы давления жидкости на всю пластинку:

$$\Delta P_n \approx \sum_{k=1}^{n} g\rho\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Точность этого приближенного равенства тем больше, чем меньше длины частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$.

4. За точное значение P силы давления жидкости на пластинку принимается предел P_n при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} g\rho\xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Так как P_n представляет собой интегральную сумму для непрерывной функций $\rho x f(x)$ на отрезке $[a;b]$ то указанный предел существует и выражается определенным интегралом

$$P = g\int_a^b \rho x f(x)dx.$$

Если в жидкость вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_2A_2$ (рис.2), ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле

$$P = g\int_a^b \rho x(y_2 - y_1)dx.$$

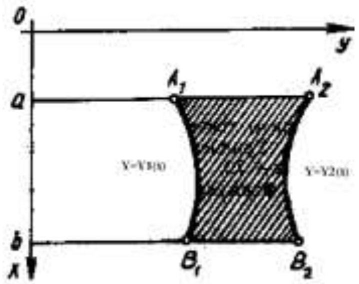


Рис.2.

4. Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс. Общие сведения. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy .

Определение 1. ***Статическим моментом*** материальной точки $A(x;y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy):

$$M_x = my \quad (M_y = mx).$$

Определение 2. ***Моментом инерции*** материальной точки $A(x;y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy , точки O) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy , точки O):

$$I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_0 = I_x + I_y = m(x^2 + y^2).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, …, $A_n(x_n;y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k\ ,\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k\ ,$$

а моменты инерции – по формулам:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2\ ,\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2\ ,\ I_0 = I_x + I_y = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 + y_k^2\right) m_k\ .$$

О п р е д е л е н и е 3. ***Центром масс*** системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ системы, то статический момент этой точки относительно любой ее оси равен статическому моменту данной системы материальных точек относительно той же оси.

Поэтому, обозначая центр масс системы $C(x_C;y_C)$, получаем:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = My_C\ , \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k = Mx_C\ .$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}\ ,\ y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}\ .$$

Пусть требуется вычислить статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс однородной плоской материальной линии или плоской материальной фигуры с известной плотностью ρ распределения масс. Линия (фигура) называется ***однородной***, если $\rho = \text{const}$ на всей линии (фигуре). Если при этом $\rho = 1$, то масса линии (фигуры) численно равна длине линии (площади фигуры). Для вычисления M_x, M_y, I_x, I_y, I_0, x_C, y_C эту линию (фигуру) разбивают произвольным образом на n частей, что достигается разбиением отрезка $[a;b]$ оси Ox, на который проектируется плоская линия l или плоская фигура

D. На каждой части выбирают точку P_k, $k=\overline{1,n}$, и сосредотачивают массу m_k k-й части линии (фигуры) в точках P_k. Так как линия (фигура) однородна, то масса k-й части линии $lm_k=\rho\Delta l_k$, где Δl_k – длина k-го участка линии. Масса k-й части однородной фигуры D $m_k=\rho\Delta S_k$, где ΔS_k – площадь k-й частиц фигуры D.

Далее рассматривают материальную линию l (фигуру D) как фиктивную систему материальных точек P_k, $k=\overline{1,n}$, с массами m_k. Тогда искомые величины M_x, M_y, M, I_x, I_y, I_0, x_C, y_C приближенно равны соответствующим величинам рассматриваемой фиктивной системы материальных точек P_k.

Точное значение искомых величин определяется как предел соответствующего приближенного значения при $\lambda=\max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}\to 0$. Отсюда следует, что рассмотренный алгоритм вычисления статических моментов, моментов инерции и координат центра масс материальной кривой (фигуры) приводит к составлению интегральных сумм, а предельный переход при стремлении $\lambda\to 0$ – к определенному интегралу.

Вычисление статических моментов, моментов инерции и координат центра масс плоской линии. Пусть материальная кривая AB длиной l задана уравнением $y=f(x)$, $x\in[a;b]$. Будем считать кривую AB однородной $\rho=\text{const}$.

Вычисление моментов плоской линии и координат центра масс проведем по описанному выше алгоритму.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками x_k:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Выберем внутри каждого частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$ произвольным образом точку ξ_k, $k=\overline{1,n}$. Через точки разбиения x_k проведем прямые параллельные оси Oy (рис. 3). Эти прямые разобьют кривую AB на частичные дуги длиной Δl_k и массой $m_k=\rho\Delta l_k$. Тогда каждой точке $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$ будет соответствовать точка $P_k(\xi_k;f(\xi_k))$.

2. Заменим теперь каждую часть дуги Δl_k материальной точкой $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$ массой $m_k = \rho \Delta l_k$, $k = \overline{1,n}$.

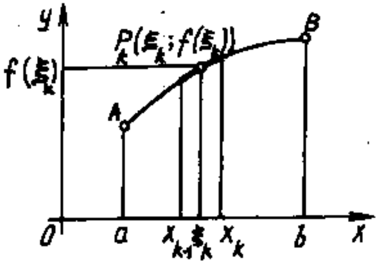


Рис.3.

3. Будем рассматривать материальную кривую AB как фиктивную систему, состоящую из n материальных точек $P_k(\xi_k; f(\xi_k))$, $k = \overline{1,n}$. Тогда масса M материальной кривой AB, статические моменты M_x, M_y, моменты инерции I_x, I_y, I_0 и координаты центра масс находятся по следующим приближенным формулам:

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \rho \Delta l_k , \ M_x \approx \sum_{k=1}^{n} \rho f(\xi_k) \Delta l_k , \ M_y \approx \sum_{k=1}^{n} \rho \xi_k \Delta l_k ,$$

$$I_x \approx \sum_{k=1}^{n} \rho f^2(\xi_k) \Delta l_k , \ I_y \approx \sum_{k=1}^{n} \rho \xi_k^2 \Delta l_k , \ I_0 = I_x + I_y ,$$

где $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$,

$$x_C \approx \frac{M_y}{M}, \ y_C \approx \frac{M_x}{M} .$$

4. Переводя к пределу при $\lambda = \max\limits_{[a;b]} \{\Delta x_k\} \to 0$, получаем точное значения искомых величин:

$$M = \int_a^b \rho \sqrt{1 + (y')^2} dx ,$$

$$M_x = \int_a^b \rho y \sqrt{1 + (y')^2} dx , \ M_y = \int_a^b \rho x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$I_x=\int\limits_a^b \rho y^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ I_y=\int\limits_a^b \rho x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\ I_0=I_x+I_y,$$

$$x_C=\frac{M_y}{M},\ y_C=\frac{M_x}{M}.$$

Полученные формулы справедливы и для любой неоднородной ($\rho=\rho(x)$) материальной линии AB.

В ы ч и с л е н и е с т а т и ч е с к и х м о м е н т о в, м о м е н т о в и н е р ц и и и к о о р д и н а т ц е н т р а м а с с п л о с к о й ф и г у р ы. В этом случае так же, как и при вычислении площадей плоских фигур, в качестве базовой фигуры удобно принимать криволинейную трапецию.

Пусть дана материальная криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная графиком функции $y=f(x)\geq 0$, $x\in[a;b]$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$. По этой трапеции непрерывно с плотностью $\rho=\text{const}$ распределена масса M. Тогда $M=\rho S$, где S – площадь криволинейной трапеции.

Вычисление статических моментов M_x, M_y, моментов инерции I_x, I_y, I_0 и координат центров масс x_C, y_C проведем по известному алгоритму.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками

$$a=x_0<x_1<...<x_n=b.$$

Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$.

2. Выберем точку $\xi_k=\frac{1}{2}(x_{k-1}+x_k)$. Через точки разбиения x_k проведем прямые, параллельные оси Oy (рис.4).

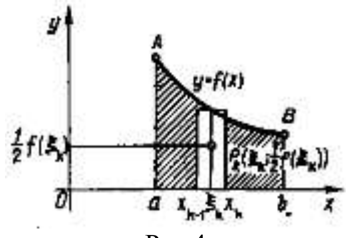


Рис.4.

Эти прямые разобьют криволинейную трапецию на частичные трапеции. Площадь каждой такой k-й частичной трапеции приближенно равна площади прямоугольника со сторонами Δx_k и $f(\xi_k)$: $\Delta S_k \approx f(\xi_k)\Delta x_k$, масса $m_k = \rho \Delta S_k$.

3. Сосредоточим массу каждой частичной криволинейной трапеции в точке $P_k\left(\xi_k; \frac{1}{2} f(\xi_k)\right)$, т.е. в центре симметрии прямоугольника со сторонами Δx_k, $f(\xi_k)$. Будем рассматривать материальную криволинейную трапецию $aABb$ как фиктивную систему, состоящую из n материальных точек $P_k\left(\xi_k; \frac{1}{2} f(\xi_k)\right)$, $k = \overline{1, n}$. Тогда ее масса, статические моменты M_x, M_y, моменты инерции I_x, I_y, I_0 и координаты центра масс находятся по приближенным формулам:

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \rho f(\xi_k)\Delta x_k,$$

$$M_x \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho f^2(\xi_k)\Delta x_k, \; M_y = \sum_{k=1}^{n} \rho \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k,$$

$$I_x \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho f^3(\xi_k)\Delta x_k, \; I_y = \sum_{k=1}^{n} \rho \xi^2 f(\xi_k)\Delta x_k, \; I_0 = I_x + I_y,$$

$$x_C \approx \frac{M_y}{M}, \; y_C \approx \frac{M_x}{M}.$$

4. Переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$ ($\lambda \to 0 \Leftrightarrow \xi_k \to x; \xi_k \to y$), получаем точные значения искомых величин:

$$M = \int_a^b \rho y dx,$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^2 dx, \; M_y = \int_a^b \rho xy dx,$$

$$I_x = \frac{1}{2}\int_a^b \rho y^3 dx, \; I_y = \int_a^b \rho x^2 y dx, \; I_0 = I_x + I_y,$$

$$x_C = \frac{M_y}{M}, \; y_C = \frac{M_x}{M}.$$

Замечание. Для нахождения центра тяжести плоской фигуры, имеющей сложную форму, разбивают фигуру на простейшие фигуры, координаты центра масс которых либо известны, либо достаточно легко определяются. При этом сложную фигуру D представляют в виде объединения простейших фигур, из которых вырезаны некоторые фигуры. Эти фигуры (вырезанные) обозначим через D_1, D_2, …, D_n, а их площади – S_1, S_2, …, S_n.

Тогда координаты центра масс фигуры D можно найти по формулам:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)x_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)y_{C_k}}{\sum_{k=1}^{n}(\pm S_k)},$$

где x_{C_k} y_{C_k} – координаты центра масс фигуры D_k; S_k – площадь фигуры D_k, $k=\overline{1,n}$. В этих формулах площадь фигуры берется со знаком «+», если $D_k \subset D$, и со знаком «–», если $D_k \not\subset D$, т.е. если элементарная фигура D_k вырезана.

При нахождении координат центра масс используется также свойство симметрии фигуры: если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычисляется работа переменной силы с помощью определенного интеграла?

2. Выведите формулу для вычисления работы электродвигателя переменной мощности.

3. Выведите формулу для вычисления силы давления жидкости.

4. Что называется статическим моментом и моментом инерции материальной точки?

5. Дайте определение центра масс системы материальных точек. По каким формулам вычисляются координаты центра масс?

6. Как вычисляются статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс плоской линии?

Лекция 10. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Несобственные интеграл первого рода.
2. Несобственные интеграл второго рода.
3. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов.
4. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что выполняются следующие условия:

1) пределы интегрирования a и b являются конечными;

2) подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае определенные интегралы называются ***собственными.*** Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются ***несобственными***. При этом определение интеграла Римана теряет смысл. Действительно, в случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на n частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела. Несобственные интегралы являются обобщением определенных интегралов в случаях бесконечных промежутков интегрирования и неограниченных функций.

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $I(b)$, зависящий от

верхнего предела интегрирования:

$$I(b)=\int_{a}^{b} f(x)dx .$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования ($b\to+\infty$). При этом возможны два случая: либо $I(b)$ при $b\to+\infty$ имеет предел, либо не имеет.

Определение 1. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$ называется предел $I(b)$ при $b\to+\infty$:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx .$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

Определение 2. ***Несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом*** интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ называется предел $I(a)$ при $a\to-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx .$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$, обозначаемый $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, предварительно представляют в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx,\ c\in(-\infty;\infty).$$

Тогда по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

причем этот несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется ***расходящимся***.

Интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются также ***несобственными интегралами первого рода.***

С **геометрической** точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $y=0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S (рис.1).

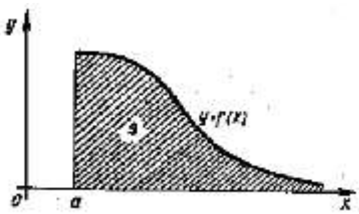


Рис.1.Геометрический смысл сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом

Аналогичная геометрическая интерпретация имеет место для двух других сходящихся несобственных интегралов.

Примеры. Вычислить интегралы 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Решение. 1. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

2. При $p = 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

При $p \neq 1$ получим

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} x^{-p} dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p > 1, \\ +\infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

О п р е д е л е н и е 3. ***Интегралом в смысле главного значения*** называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0\,. \qquad (1)$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения (1) есть предел того же интеграла, но при $a=b$
Очевидно, что, если существует несобственный интеграл (2), то и существует интеграл в смысле главного значения (1). Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения (1) может существовать, а несобственный интеграл (2) – нет.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т.е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$: существует интеграл $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

О п р е д е л е н и е 4. ***Несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется предел интеграла $\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon>0\,.$$

Аналогично если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$.

О п р е д е л е н и е 5. ***Несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(a;b]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке называется предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \ \varepsilon > 0 .$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то, пользуясь свойством аддитивности определенного интеграла, данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx .$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от разрывной функции в точках a, b и c называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися***.

С **геометрической** точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ $x = b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Oy при $x \to b-0$ ($x \to a+0, x \to c \pm 0$), имеет конечную площадь S (Рис.2, *а – в* соответственно).

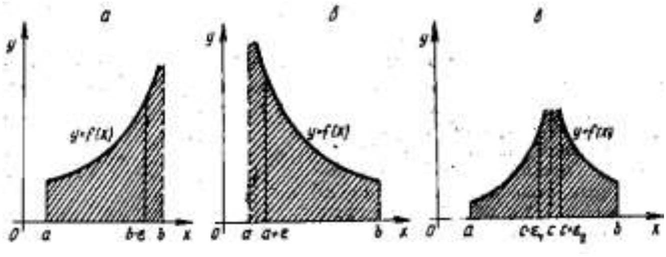


Рис.2.Геометрический смысл несобственных Интегралов от неограниченных функций

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Решение. При $p=1$ имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = +\infty .$$

При $p \neq 1$ имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^{-p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, \text{ если } p<1, \\ +\infty, \text{ если } p>1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p \geq 1$.

3. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов. В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы. Для простоты будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \leq \eta < b$.

Ф о р м у л а Н ь ю т о н а - Л е й б н и ц а. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a).$$

Линейность интеграла. Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx$ также сходится и

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Интегрирование неравенств. Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Правило замены переменной. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta)) = [a;b)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Правило интегрирования по частям. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$. Тогда

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Решение. Проинтегрируем по частям

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x^n; dv = e^{-x}; \\ du = nx^{n-1}; v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -\,x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx\,,$$

т.е. $I_n = n \cdot I_{n-1}$.

Поскольку $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\,e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, то, применяя последовательно рекуррентную формулу, получим

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n!\,I_0 = n!\,.$$

4. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

Теорема 1 (критерий Коши). *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство* $\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

► Положим $\varphi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx$. Сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$ означает существование конечного предела функции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$. Согласно критерию Коши существования предела $\lim\limits_{\eta \to b}\varphi(\eta)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое η, что для всех η_1 и η_2, удовлетворяющих условию $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, выполняется неравенство

$$|\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1)| < \varepsilon\,.$$

Поскольку $\varphi(\eta_2) - \varphi(\eta_1) = \int_a^{\eta_2} f(x)dx - \int_a^{\eta_1} f(x)dx = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx$, то получаем $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$. ◀

Вопросы для самоконтроля

1. Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Когда несобственный интеграл первого рода сходится, расходится?

2. Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Когда несобственный интеграл второго рода сходится, расходится?

3. Перечислите основные свойства несобственных интегралов.

4. Сформулируйте и докажите критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Лекция 11. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Признаки сравнения несобственных интегралов.
2. Абсолютная сходимость.
3. Признаки Дирихле и Абеля.

1. Признаки сравнения несобственных интегралов. Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода)

Лемма 1. *Если функция* $f(x)$ *неотрицательна на интервале* $[a;b)$*, то для сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов* $\int\limits_a^\eta f(x)dx$, $\eta \in [a;b)$*, было ограничено сверху, т.е. чтобы существовала такая постоянная* $c > 0$*, что для всех* $\eta \in [a;b)$ *выполнялось неравенство*

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx \le c .$$

Без доказательства.

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть на промежутке* $[a;b)$ *определены две неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$*, интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$*, причем* $\forall x \in [a;b)$ *справедливо* $0 \le f(x) \le g(x)$*. Тогда*

1) из сходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$*,*

2) из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ *следует расходи-*

мость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

► Для любого $\eta \in [a;b)$ имеем $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Случай 1. Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то согласно лемме 1 интегралы $\int_a^\eta g(x)dx$, $\eta \in [a;b)$, ограничены сверху. Значит, и интегралы $\int_a^\eta f(x)dx$ также ограничены сверху. По лемме 1 интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Случай 2. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то в силу доказанного 1) интеграл $\int_a^b g(x)dx$ не может сходится. Если бы он сходился, то и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ также сходился бы. Значит, интеграл $\int_a^b g(x)dx$ расходится. ◄

Следствие 1 (предельный признак сравнения). *Пусть на промежутке* $[a;b)$ *определены две неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, *причем* $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \ne 0$, *и существует конечный предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда 1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится,*

2) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится,*

3) если $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, *то интегралы* $\int_a^b g(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Без доказательства.

Примеры. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$, 2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. 1. Сравним интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$. Поскольку $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$ при $x \to 1$, то имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = 1.$$

Значит, интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ расходится.

2. Сравним данный интеграл со сходящимся интегралом $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \forall x \in [1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

2. Абсолютная сходимость.

О п р е д е л е н и е 1. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся*** интегралом, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла). *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η*, что для всех* η_1 *и* η_2*, удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$*,* $\eta < \eta_2 < b$*, выполняется неравенство* $\left| \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$.

Без доказательства.

Теорема 3. *Если несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

► Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то по теореме 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η, что для всех η_1 и η_2, удовлетворяющих условию $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, выполняется неравенство $\left| \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon$.

Тогда

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon \ .$$

В силу критерия Коши для сходимости интеграла, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда.

Пример. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin xdx}{x}$, 2) $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|dx}{x}$.

Решение. 1. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin xdx}{x} = -\int_1^{+\infty} \frac{d(\cos x)}{x} = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{\infty} + \int_1^{+\infty} \cos xd\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \ .$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin xdx}{x}$ сходится.

2. Из неравенства

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta > 1$ выполняется неравенство

$$\int_1^{\eta} \frac{|\sin x|dx}{x} \ge \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{\cos 2xdx}{x} \ .$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2xdx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{d(\sin 2x)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Bigg|_1^{\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}dx$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}dx$ сходится, поскольку

$$\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$$

и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходящийся, $\alpha = 2 > 1$.

Значит, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$ расходится.

3. Признаки Дирихле и Абеля.

Теорема 4 (признак Дирихле). *Пусть на полуоси* $x \ge a$

1) функция $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную,*

2) функция $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$, $p > 1$.

Решение. Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 1$, убывает при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. Согласно признаку Дирихле интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится.

Теорема 5 (признак Абеля). *Пусть на полуоси* $x \geq a$

1) функция $f(x)$ *непрерывна и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится,*

2) функция $g(x)$ *непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна.*

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Пример. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}, \quad p > 1.$$

Решение. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$, $p > 1$, сходится, а функция $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите признак сравнения для неотрицательных функций.
2. Сформулируйте предельный признак сравнения для неотрицательных функций.
3. Какой несобственный интеграл называется абсолютно сходящимся?
4. Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

Лекция 12. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Постановка задачи.
2. Метод средних прямоугольников.
3. Метод трапеций.
4. Метод Симпсона.

1. Постановка задачи. Пусть требуется вычислить определенный интеграл.

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и известна ее первообразная $F(x)$. Определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$I=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Однако в некоторых случаях невозможно найти первообразную $F(x)$ по ряду причин: либо $F(x)$ не выражается через элементарные функции, либо выражается достаточно сложно. В этих случаях определенный интеграл вычисляют приближенно.

Известно, что определенный интеграл есть некоторое число. Любой приближенный метод интегрирования основан на вычислении приближенного значения этого числа. Пусть I – искомое число, I^*– его приближенное значение. Тогда $\left|I^*-I\right|=\Delta$ – абсолютная погрешность вычисления интеграла I.

При вычислении определенных интегралов приближенными методами можно сформулировать две задачи:

1) найти приближенное значение числа I и оценить погрешность вычислений;

2) найти приближенное значение числа I с заданной погрешностью Δ, т.е. подобрать метод вычислений таким образом, чтобы $\left|I^*-I\right|<\Delta$.

2. Метод средних прямоугольников. Пусть требуется вычислить интеграл $I=\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда $f(x)\geq 0$. В основе приближенного вычисления определенного интеграла I лежит его геометрический смысл: I выражает площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частичных отрезков точками $x_k=a+\frac{b-a}{n}k$, $k=\overline{1,n-1}$. Длина каждого отрезка $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ называется ***шагом разбиения***. На каждом частичном отрезке $[x_k;x_{k-1}]$ выберем точку $\xi_k-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ и вычислим $f(\xi_k)=y_k$. Тогда по определению определенного интеграла Римана

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ .$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ .$$

Значит, ***формула средних прямоугольников*** имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}y_1+\frac{b-a}{n}y_2+\ldots+\frac{b-a}{n}y_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\ .$$

Данная формула означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ приближенно равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на рис.1.

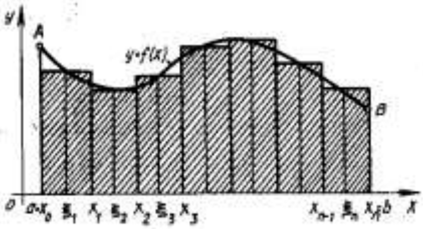


Рис.1. Метод средних прямоугольников

Замечание. Если существует непрерывная вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то вычисление интеграла I по формуле средних прямоугольников производится с погрешностью, величина которой оценивается неравенством

$$\Delta(n) \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2},$$

где $M_2 = \sup\limits_{[a;b]} |f''(x)|$.

3. Метод трапеций. Этот метод основан на замене графика подынтегральной функции $y = f(x)$ ломаной линией $AM_1M_2...M_{n-1}B$ (рис.2). Разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ на n равных частей точками $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = \overline{1,n}$, и с помощью прямых $x = x_k$ построим n «прямолинейных» трапеций (эти трапеции заштрихованы на рис.2)

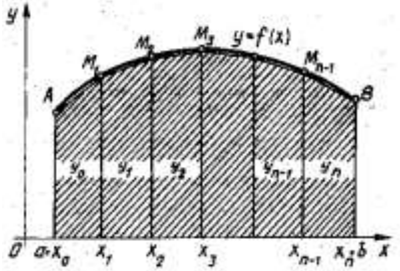


Рис.2. Метод трапеций

Сумма площадей «прямолинейных» трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции $aABb$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{y_0 + y_1}{2}(x_1 - x_0) + \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_n - x_{n-1}).$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{1,n}$, – основания «прямолинейных» трапеций; $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ – их высоты.

Таким образом, получена приближенная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right),$$

которая называется ***формулой трапеций***. Правая часть этой формулы является интегральной суммой $I^*(n)$, которая при $h=\dfrac{b-a}{n}\to 0 \quad (n\to\infty)$ стремится к данному интегралу I, т.е. точность формулы трапеций тем выше, чем больше n.

Замечание. При конечном шаге разбиения h, т.е. при конечном n, вычисления производятся с некоторой погрешностью $\Delta(n)$, величина которой оценивается неравенством

$$\Delta(n)\le \sup_{[a;b]}\left|f''(x)\right|\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

Если задана погрешность вычислений $\Delta(n)$, то, пользуясь этим неравенством, можно подобрать такое число n разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки (или, что то же, шаг h), при котором приближенное вычисление определенного интеграла будет выполнено с погрешностью, не превышающей заданную. Если погрешность вычисления не задана, то при фиксированном n ее можно оценить по данной формуле.

4. Метод параболических трапеций (метод Симпсона). Данный метод приближенного вычисления определенного интеграла основан на замене графика подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy.

Разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ точками $x_0=a$, x_1, x_2, …, $x_{2n}=b$ на $2n$ равных частей. Обозначим через y_0, y_1, …, y_{2n} значения функции $f(x)$ в точках деления (рис.3). Пусть шаг разбиения $\dfrac{b-a}{2n}=h$, точки разбиения $x_k=a+\dfrac{b-a}{n}k$, $k=\overline{1,2n-1}$. В силу свойства аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+...+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx.$$

Через каждые три точки M_0, M_1 и M_2, M_2, M_3 и M_4, …, M_{2n-2}, M_{2n-1} и M_{2n} проведены параболы, уравнения которых $y_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k c$, $k = \overline{1,n}$. В результате получим n криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболами. Эти трапеции изображены на рис.3.

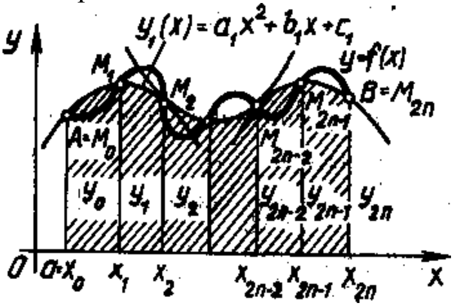


Рис.3. Метод Симпсона

Заменим площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ суммой площадей фигур, лежащих под параболами, т.е. положим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2}\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)dx + \int_{x_2}^{x_4}\left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)dx + \ldots +$$

$$+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}}\left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)dx\,.$$

Вычислим интеграл:

$$\int_{x_0}^{x_2}\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)dx = \frac{a_1}{3}\left(x_2^3 - x_0^3\right) + \frac{b_1}{2}\left(x_2^2 - x_0^2\right) + c_1\left(x_2 - x_0\right) =$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left(2a_1\left(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2\right) + 3b_1\left(x_2 + x_0\right) + 6c_1\right) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\times$$

$$\times\left(a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 + 4a_1\left(\frac{x_2 + x_0}{2}\right) + 4b_1\frac{x_2 + x_0}{2} + 4c_1 + a_1x_2^2 + b_1x_2 + c_1\right) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Итак,

$$\int_{x_0}^{x_2}\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)dx=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+4y_1+y_2\right).$$

Аналогично

$$\int_{x_2}^{x_4}\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)dx=\frac{b-a}{6n}\left(y_2+4y_3+y_4\right),$$

…………………………………………..,

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}}\left(a_nx^2+b_nx+c_n\right)dx=\frac{b-a}{6n}\left(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}\right).$$

Просуммировав эти интегралы, получим:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}}\left(a_kx^2+b_kx+c_k\right)dx=\frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{2k-2}+4y_{2k-1}+y_{2k}\right)$$

или

$$\int_a^b f(x)dx\approx$$

$$\approx\frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_{2n}+2\left(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}\right)+4\left(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}\right)\right).$$

Эта формула называется ***формулой парабол*** или ***формулой Симпсона***.

Замечания. 1. Абсолютная погрешность вычисления определенного интеграла по формуле Симпсона не превосходит

$$\Delta(n)\le\sup_{[a;b]}\left|f^{IV}(x)\right|\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4}.$$

2. Если формула Симпсона применяется для вычисления интегралов вида

$$\int_a^b P_n(x)dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то при $n\le 3$ имеем $\sup\limits_{[a;b]}\left|P_n^{IV}(x)\right|=0$. Следовательно, вычисления производятся без погрешности.

При приближенном вычислении определенного интеграла на ЭВМ оценка точности вычислений по формуле как правило, не применяется ввиду трудности нахождения $\sup\limits_{[a;b]}\left|P^{IV}(x)\right|$. В таких случаях используется ***правило Рунге***.

Для метода Симпсона правило Рунге основано на соотношении

$$\frac{\left|I*_{2n} - I_n\right|}{15} < \Delta,$$

где $I*_n$, $I*_{2n}$ – приближенные значения определенного интеграла, вычисленные при разбиении отрезка интегрирования на n и $2n$ частей соответственно; Δ – заданная точность. При каждом последующем приближении число отрезков разбиения удваивается. Если данное условие выполнено, то за приближенное значение интеграла принимается значение $I*_{2n}$, т.е. $I = I*_{2n} \pm \Delta$.

Очевидно, что точность приближенных формул вычисления определенных интегралов возрастает с ростом n, т.е. всегда можно подобрать такое n, чтобы погрешность Δ вычислений определенного интеграла не превосходила заданной.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть метода средних прямоугольников?
2. В чем суть метода трапеций?
3. В чем суть метода Симпсона?

ЛИТЕРАТУРА

1. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 кн. / Э.И.Зверович. – Мн.: БГУ, 2003.
2. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1 – М.: Наука, 1981.
3. Зорич В.А Математический анализ. Ч.2. – М.: Наука, 1984.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1985.
5. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука., 1989.
6. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебн. пособие для вузов / Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984.
7. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.1/ А.И.Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш.шк., 1989.
8. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.2/ А.И.Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Мн.: Выш.шк., 1990.
9. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.1. – М.: Наука, 1990.
10. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.2. – М.: Наука, 1991.
11. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука., 1988.

Учебное издание

Марченко Лариса Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тексты лекций для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть вторая

Дифференциальное и интегральное исчисление функции действительной переменной

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2006. (66) Бумага писчая №1. Формат 60х84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл.п.л. _____. Уч.изд.л. _____. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104